Resumen Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estudio analítico de un sistema de levitación magnética (Levitron)

Autor: Alfonso García-Agúndez Blanco
Tutores: Antonio González Fernández
Manuel Toscano Jiménez

Departamento de Física Aplicada III
Escuela Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Resumen Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estudio analítico de un sistema de levitación magnética (Levitron)

Autor:

Alfonso García-Agúndez Blanco

Tutores:

Prof. Dr. Antonio González Fernández

Prof. Dr. Manuel Toscano Jiménez

Departamento de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Resumen

El objetivo de este proyecto es llevar a cabo un estudio analítico del sistema de levitación magnética, conocido como Levitron. En primer lugar, se va a empezar haciendo una introducción explicando el funcionamiento del juguete, los elementos típicos que conforman el kit para jugar y su historia. En el capítulo 2 comienza el estudio analítico: se empieza describiendo el movimiento de la peonza como sólido libre, en ausencia de campo magnético externo y sometida únicamente a la acción de la gravedad, utilizando los ángulos clásicos de Euler. Sin embargo, veremos que el uso de estos ángulos produce una singularidad que nos obligará a presentar, en el capítulo 3, los ángulos de Tait-Byan para solucionarlo.

En el capítulo 4 obtenemos las expresiones del campo magnético creado por la base, y en el capítulo 5 enunciamos el Teorema de Earnshaw y se estudia la estabilidad estática del sistema por medio de su energía potencial.

En el capítulo 6, se obtienen las ecuaciones de movimiento utilizando la mecánica vectorial, y en el capítulo 7 se obtienen las ecuaciones del sistema empleando la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica analítica.

Una vez obtenidas las ecuaciones, se introducen variables adimensionales en el capítulo 8 para llevar a cabo la simulación numérica de los posteriores apartados. En el capítulo 9 estudiamos la estabilidad lineal del sistema, obteniendo la región de estabilidad en la que es posible la levitación y los modos normales de movimiento. En el capítulo 10, analizamos el acoplamiento lineal y no lineal y simulamos numéricamente la trayectoria considerando distintas condiciones iniciales que intentan reproducir situaciones reales que se dan a la hora de jugar.

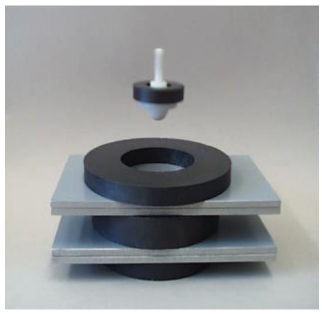
En el capítulo presentamos las constantes de movimiento del sistema, y en el capítulo 12 se elabora un sencillo modelo para tener en cuenta el efecto de la fricción del aire sobre la peonza. Finalmente, en el capítulo 13, se añaden algunas instrucciones para dominar el juguete y se adjunta un diagrama de flujo donde se describen las situaciones habituales a las que un jugador se enfrenta cuando intenta hacer levitar la peonza.

Por último, se adjuntan tres anexos: el primero contiene el ajuste experimental del campo magnético en el eje $0Z_1$; el segundo está dedicado a los cuaterniones, incluyendo las propiedades más importantes y el sistema con las ecuaciones de movimiento en término de los parámetros de Euler; y en el tercero, se estudia la dinámica de tres sistemas que guardan analogías con el sistema de levitación magnética.

Índice

1 INTRODUCCIÓN

El Levitron es un juguete comercial en el que se da el fenómeno de levitación magnética estabilizada por rotación. Consiste en una peonza imantada y su correspondiente base, la cual también constituye un imán que presenta distintas configuraciones (puede ser circular, cuadrada, etc). Si hacemos girar la peonza, podemos conseguir para unas condiciones dadas que flote en el aire debido al equilibrio de las fuerzas gravitatoria y magnética en presencia del efecto giroscópico. La velocidad de rotación que estabiliza el vuelo disminuye como consecuencia del efecto de la fricción, de forma que la levitación finaliza una vez transcurridos un par de minutos.

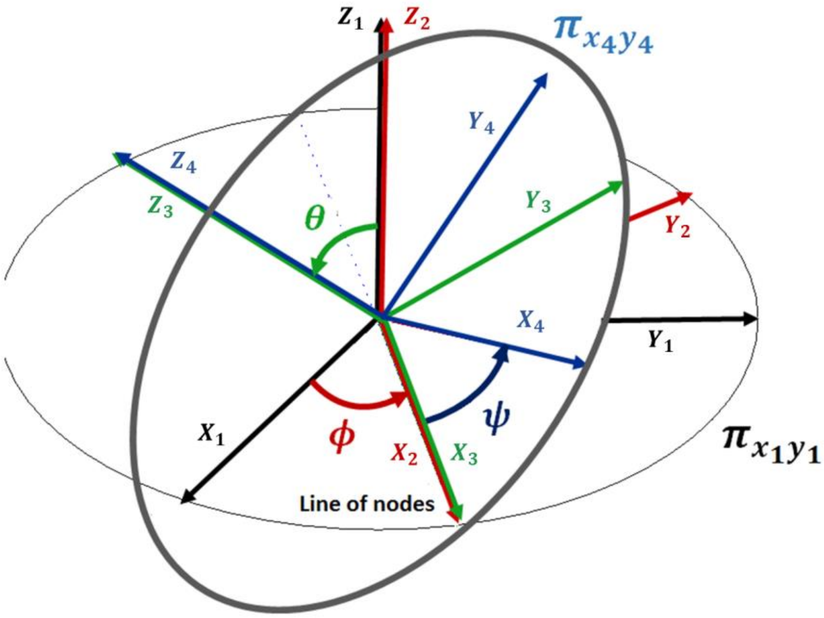


Este sistema, que funciona con imanes permanentes, es diferente a otras versiones del juguete que disponen de campos electromagnéticos variables en el tiempo, consiguiendo una levitación mucho más duradera. El segundo tipo de juguete está fuera del alcance de este estudio.

Los contenidos típicos en un kit de un Levitron son la peonza, un plato para soltar la peonza y que se eleva hasta la altura de levitación adecuada, la base imantada, unas anillas para ajustar la masa de la peonza y un spinner o starter para hacerla girar.

2 MOVIMIENTO DEL SÓLIDO LIBRE. DESCRIPCIÓN CON ÁNGULOS DE EULER

En este capítulo se comienza el estudio analítico. Empezamos describiendo el movimiento de la peonza como sólido libre, en ausencia de campo magnético externo y sometida únicamente a la acción de la gravedad, utilizando los ángulos clásicos de Euler.



Vemos que estos ángulos, pese a proporcionar una buena visualización del problema, llevan a un sistema cuyas ecuaciones son singulares para la posición $\theta = 0°$, que se correspondería con la peonza en posición vertical:

$$\omega_X = \dot{\theta}\cos(\psi) - \dot{\phi}\ \sin(\theta)\sin(\psi)$$

$$\omega_Y = -\dot{\theta}\sin(\psi) - \dot{\phi}\ \sin(\theta)\cos(\psi)$$

$$\omega_Z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\omega_X \sin(\psi) + \omega_Y \cos(\psi)}{\sin(\theta)}$$

$$\dot{\theta} = \omega_X \cos(\psi) - \omega_Y \sin(\psi)$$

$$\dot{\psi} = \omega_Z + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}(\omega_X \sin(\psi) + \omega_Y \cos(\psi))$$

Este problema será solucionado en el capítulo 3.

La descripción del sistema en ausencia de campo magnético externo proporciona las siguientes conservaciones:

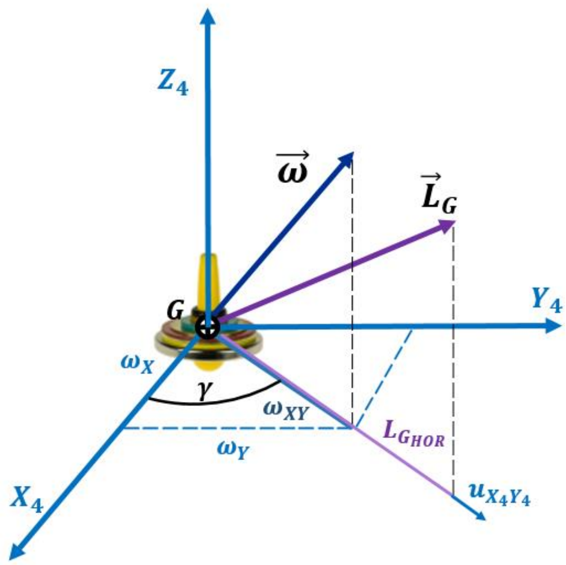
$\vec{C}_{hor} = \overrightarrow{CTE}$ (las dos componentes horizontales de la cantidad de movimiento del centro de masas son constantes).

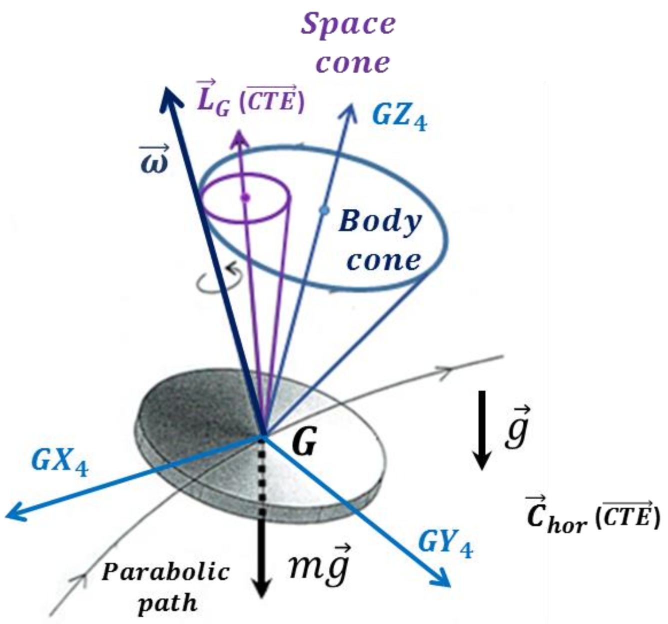
$$|\vec{\omega}|^2 = \omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2 = CTE$$

$$\vec{L}_G = I_X\omega_X\vec{\imath}_1 + I_X\omega_Y\vec{\jmath}_1 + I_Z\omega_Z\vec{k}_1 = \overrightarrow{CTE}$$

$$2T_{Rot} = \vec{\omega}\cdot\vec{L}_G = \omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2 = CTE$$

Estas magnitudes aparecen representadas en las siguientes figuras. Además, el movimiento de la peonza puede describirse mediante el empleo de dos conos imaginarios, denominados axoides, que se mueven uno encima de otro. De esta forma, puede demostrarse que el sólido rota como si estuviera soldado a un cono móvil que rueda sin deslizar respecto a un cono fijo.

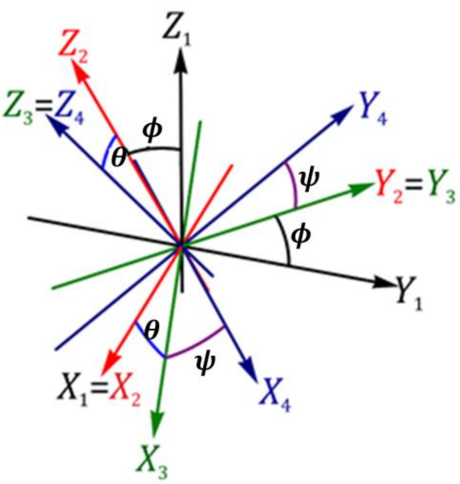


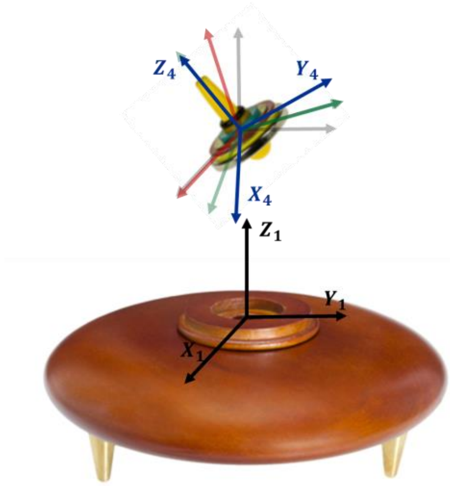


3 ÁNGULOS DE TAIT-BRYAN

Para resolver el problema de la singularidad al usar los ángulos de Euler, empleamos los ángulos de Tait-Bryan, que la trasladan a $\theta = \frac{\pi}{2}$, posición en la que la peonza estaría girada y no podría conseguirse la levitación. Con esta nueva terna, si bien solucionamos el problema de la simulación numérica, pasamos a tener una peor visualización del movimiento.

Por medio de tres rotaciones sucesivas, pasamos del sistema de referencia fijo ‘1’ al sistema local de la peonza ‘4’.





Utilizando estos ángulos, calculamos la velocidad angular $\vec{\omega}$, el momento cinético respecto al centro de masas $\vec{L}_G$ y la energía cinética

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\cos(\theta)\,\vec{\imath}_3 + \dot{\theta}\vec{\jmath}_3 + \dot{\phi}\sin(\theta)\,\vec{k}_3$$

$$\vec{L}_G = I_X\dot{\phi}\cos(\theta)\vec{\imath}_3 + I_X\dot{\theta}\vec{\jmath}_3 + I_Z\big(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin(\theta)\big)\vec{k}_3$$

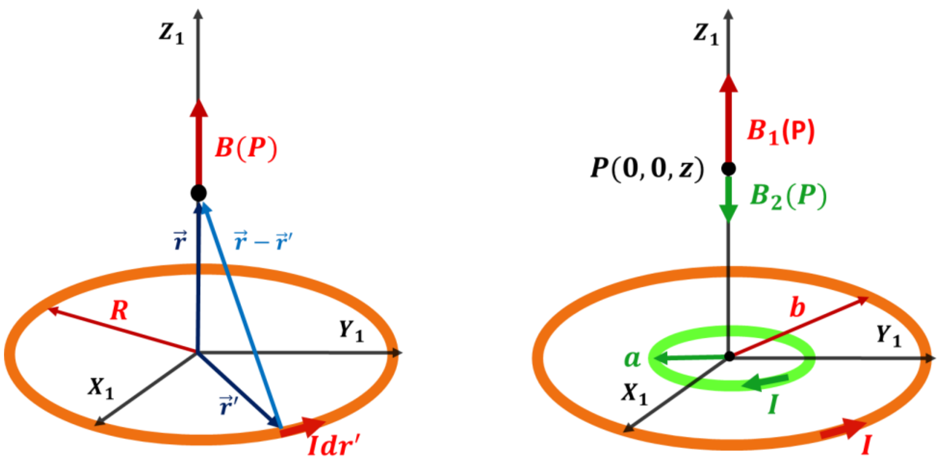
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_X\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos^2(\theta)\right) + \frac{1}{2}I_Z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin(\theta))^2$$

4 CAMPO MAGNÉTICO

En este capítulo, calculamos por medio de la Ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

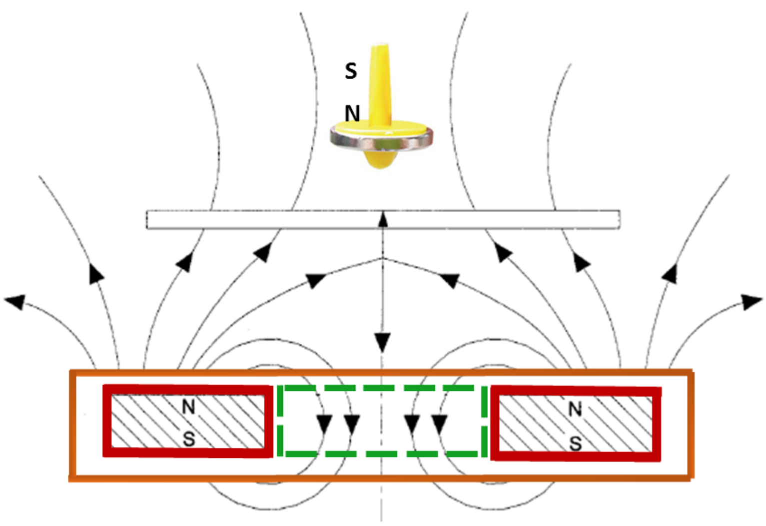
el campo magnético en el eje OZ_1:



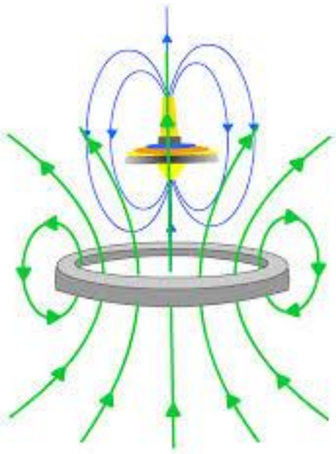
$$\vec{B}_0(z) = A\left(\frac{b^2}{(b^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}\right)\vec{k}_1$$

Conocida la expresión de $\vec{B}_0(z)$, podemos calcular la expresión del campo magnético para puntos cercanos al eje, que resulta

$$\vec{B} \simeq -\frac{1}{2}B_0'(x\vec{\imath}_1 + y\vec{\jmath}_1) + \left(B_0 - \frac{(x^2+y^2)}{4}B_0''\right)\vec{k}_1$$



Por ultimo, vamos a considerer la peonza, en primera aproximación, como un dipolo de momento magnético $\vec{\mu}$.



5 ESTABILIDAD ESTÁTICA

En este capítulo, se enuncia el Teorema de Earnshaw:

> **Teorema de Earnshaw**
>
> *Una colección de cargas eléctricas o dipolos magnéticos no pueden mantenerse en una condición de equilibrio estacionario estable estando solamente bajo la influencia de un campo magnético estático externo.*

Calculando la energía potencial del sistema, teniendo en cuenta las contribuciones gravitatoria y magnética:

$$U = U_{grav} + U_{magn} = mgz - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = mgz + \mu\,(B_x \sin(\theta) - B_y \sin(\phi)\cos(\theta) + B_z \cos(\phi)\cos(\theta)$$

Puede comprobarse, en virtud de las ecuaciones de Maxwell, que dicha energía potencial verifica la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 U = 0$$

Por tanto, según esto, no habría ningún punto en el espacio en el que el dipolo pudiera levitar de forma estable.

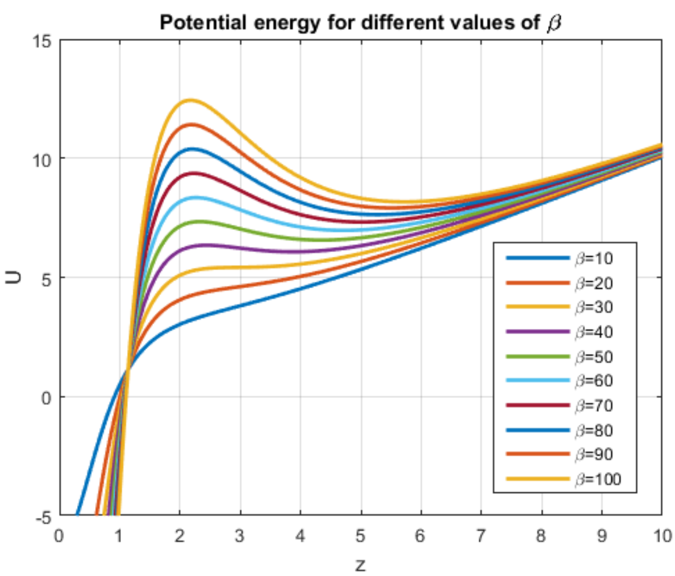
Sin embargo, el alineamiento entre $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$, debido al efecto giroscópico, proporciona:

$$U = -k\left|\vec{B}\right|^2 = -k(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$$

y sustituyendo esto en la ecuación de Laplace, obtenemos que el sistema puede ser estable en todas las direciones (pero nunca inestable en todas) y puede haber también puntos de silla, en los que el sistema es estable en unas e inestable en otras.

Posteriormente se estudia el equilibrio en el eje OZ_1, debido a la simetría cilíndrica del problema. La energía potencial del sistema en dicho eje viene dada por la expresión

$$U^* = z^* + \beta B_0^*(z^*) = z^* + \beta\left(\frac{\gamma^2}{\left(\gamma^2 + {z^*}^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(1 + {z^*}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$



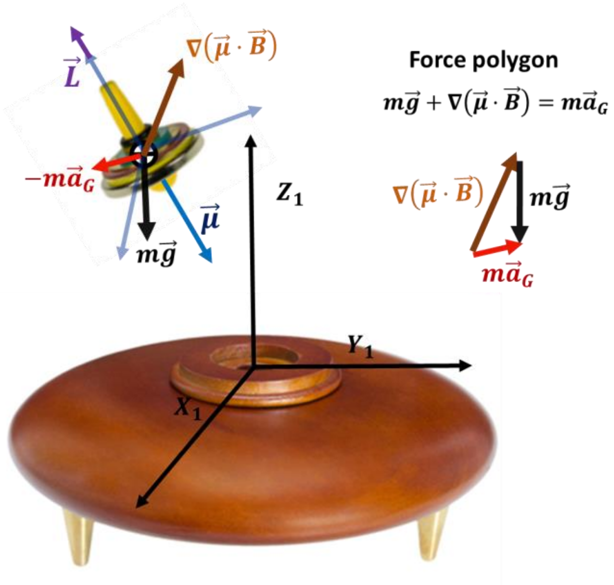
6 ANÁLISIS USANDO MECÁNICA VECTORIAL

En este capítulo se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema, empleando la Segunda ley de Newton y el Teorema del momento cinético:

$$m\vec{a}_G = \vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_G$$

Las fuerzas externas al sistema son la gravitatoria y la magnética:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$



De esta forma, del uso de la Segunda Ley de Newton obtenemos:

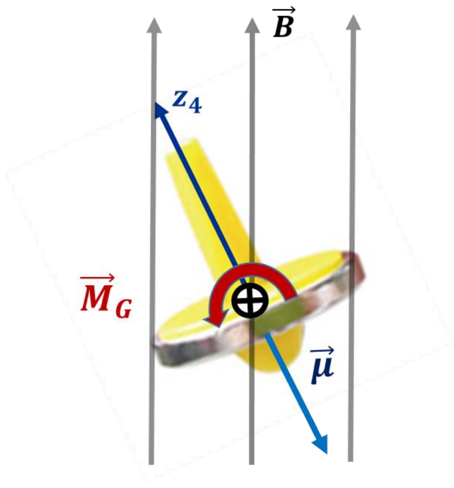
$$m\ddot{x} = -\mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial x}\sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial x}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)$$

$$m\ddot{y} = -\mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial y}\sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial y}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial z}\sin(\phi)\cos(\phi) + \frac{\partial B_z}{\partial y}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)$$

Por otra parte, el Teorema del momento cinético proporciona

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_G = \vec{\mu}\times\vec{B}$$



$$I_X\ddot{\phi}\cos(\theta) + (I_Z - 2I_X)\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta) + I_Z\dot{\theta}\dot{\psi} - \mu\big(B_y\cos(\phi) + B_z\sin(\phi)\big) = 0$$

$$I_X\ddot{\theta} + (I_X - I_Z)\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) - I_Z\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\theta) \\ + \mu\big(B_x\cos(\theta) + B_y\sin(\phi)\sin(\theta) - B_z\cos(\phi)\sin(\theta)\big) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(I_z\big(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin(\theta)\big)\Big) = 0$$

7 ANÁLISIS USANDO MECÁNICA ANALÍTICA

Empezamos este apartando obteniendo las ecuaciones de movimiento empleando la formulación Lagrangiana. La Lagrangiana viene dada por $\mathcal{L} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_X\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\cos^2(\theta)\right) + \frac{1}{2}I_Z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin(\theta))^2 - mgz$$
$$- \mu\,(B_x\sin(\theta) - B_y\sin(\phi)\cos(\theta) + B_z\cos(\phi)\cos(\theta)$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q_k}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

proporciona el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m\ddot{x} + \mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial x}cos(\phi)\,sin(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial x}cos(\phi)\,cos(\theta)\right) = 0$$

$$m\ddot{y} + \mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial y}\cos(\phi)\sin(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial y}\cos(\phi)\cos(\theta)\right) = 0$$

$$m\ddot{z} + \mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial z}cos(\theta)\,sin(\phi) + \frac{\partial B_z}{\partial z}cos(\phi)\,cos(\theta)\right) + mg = 0$$

$$\left(I_X cos^2(\theta) + I_Z sin^2(\theta)\right)\ddot{\phi} + I_Z\,\ddot{\psi}\,sin(\theta) + (I_Z - I_X)\dot{\phi}\dot{\theta}\,sin(2\theta)$$
$$+ I_Z\dot{\psi}\dot{\theta}\,cos(\theta) + \mu\left(-B_y\,cos(\phi)\,cos(\theta) - B_z\,sin(\phi)\,cos(\theta)\right) = 0$$

$$I_X\ddot{\theta} + (I_X - I_Z)\dot{\phi}^2\,sin(\theta)\,cos(\theta) - I_Z\dot{\phi}\dot{\psi}\,cos(\theta)$$
$$+ \mu\left(B_x\,cos(\theta) + B_y\,sin(\phi)\,sin(\theta) - B_z\,cos(\phi)\,sin(\theta)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_z(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin(\theta))\right) = 0$$

Por otra parte, podemos pasar a un sistema de primer orden usando las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{p}}$$

obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\, sin(\theta)}{I_x cos^2(\theta)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_X}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_z} - \frac{p_\phi - p_\psi \sin(\theta)}{I_x \cos^2(\theta)} \sin(\theta)$$

$$\dot{p}_x = -\mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial x}\sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial x}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)$$

$$\dot{p}_y = -\mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial y}\sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial y}\cos(\phi)\cos(\theta)\right)$$

$$\dot{p}_z = -\mu\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}\sin(\theta) - \frac{\partial B_y}{\partial z}\sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{\partial B_z}{\partial z}\cos(\phi)\cos(\theta)\right) - mg$$

$$\dot{p}_\phi = -\mu\big(-B_y\cos(\phi)\cos(\theta) - B_z\sin(\phi)\cos(\theta)\big)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{\big(p_\psi\sin(\theta) - p_\phi\big)\big(p_\phi\sin(\theta) - p_\psi\big)}{I_x\cos^3(\theta)} - \mu\big(B_x\cos(\theta) + B_y\sin(\phi)\sin(\theta) - B_z\cos(\phi)\sin(\theta)\big)$$

$$\dot{p_\psi} = 0$$

8 Adimensionalización de las ecuaciones y resumen de ecuaciones

Definiendo como unidad de tiempo t_0

$$t_0 = \sqrt{a/g}$$

se presentan las siguientes variables adimensionales para poder llevar a cabo la integración numérica en los siguientes capítulos, de forma que las variables tengan valores del orden de la unidad. Se adjunta también el sistema Hamiltoniano adimensionalizado en término de estas variables.

$$\gamma = \frac{b}{a}$$

$$B_0 = \frac{A}{a}$$

$$\beta = \frac{\mu B_0}{mga}$$

$$\sigma = \frac{I_z}{I_x} = 2$$

$$R = \frac{ma^2}{I_x} = \frac{ma^2}{\frac{1}{4}mr^2} = 16$$

$$\dot{x}^* = p_x^*$$

$$\dot{y}^* = p_y^*$$

$$\dot{z}^* = p_z^*$$

$$\dot{\phi}^* = R\frac{p_\phi^* - p_\psi^* \sin(\theta^*)}{\cos^2(\theta^*)}$$

$$\dot{\theta}^* = Rp_\theta^*$$

$$\dot{\psi}^* = \frac{R}{\sigma}p_\psi^* - R\frac{\sin(\theta^*)}{\cos^2(\theta^*)}\left(p_\phi^* - p_\psi^* \sin(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_x^*} = -\beta\left(-\frac{1}{2}\frac{dB_0^*}{dz^*}\sin(\theta^*) - \frac{x^*}{2}\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\cos(\phi^*)\cos(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_y^*} = -\beta\left(\frac{1}{2}\frac{dB_0^*}{dz^*}\sin(\phi^*)\cos(\theta^*) - \frac{y^*}{2}\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\cos(\phi^*)\cos(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_z^*} = -1 - \beta\left(-\frac{1}{2}x^*\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\sin(\theta^*) + \frac{1}{2}y^*\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\sin(\phi^*)\cos(\theta^*) + \frac{dB_0^*}{dz^*}\cos(\phi^*)\cos(\theta^*) - \frac{x^{*2}+y^{*2}}{4}\frac{d^3B_0^*}{dz^{*3}}\cos(\phi^*)\cos(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_\phi^*} = -\beta\left(\frac{1}{2}y^*\frac{dB_0^*}{dz^*}\cos(\phi^*)\cos(\theta^*) - B_0^*\sin(\phi^*)\cos(\theta^*) + \frac{x^{*2}+y^{*2}}{4}\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\sin(\phi^*)\cos(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_\theta^*} = \frac{R}{\cos^3(\theta^*)}\left(p_\psi^*\sin(\theta^*) - p_\phi^*\right)\left(p_\phi^*\sin(\theta^*) - p_\psi^*\right) - \beta\left(-\frac{1}{2}x^*\frac{dB_0^*}{dz^*}\cos(\theta^*) - \frac{1}{2}y^*\frac{dB_0^*}{dz^*}\sin(\phi^*)\sin(\theta^*) - B_0^*\cos(\phi^*)\sin(\theta^*) + \frac{x^{*2}+y^{*2}}{4}\frac{d^2B_0^*}{dz^{*2}}\cos(\phi^*)\sin(\theta^*)\right)$$

$$\dot{p_\psi^*} = 0$$

Las expresiones del campo magnético B_0^* y sus derivadas son:

$$B_0^* = \left(\frac{\gamma^2}{(\gamma^2+z^{*2})^{3/2}} - \frac{1}{(1+z^{*2})^{3/2}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}B_0^*}{\mathrm{d}z^*} = 3\left(\frac{z^*}{\left(1+z^{*2}\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\gamma^2 z^*}{\left(\gamma^2+z^{*2}\right)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2B_0^*}{\mathrm{d}z^{*2}} = 3\left(\frac{1}{\left(1+z^{*2}\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\gamma^2}{\left(\gamma^2+z^{*2}\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5\gamma^2 z^{*2}}{\left(\gamma^2+z^{*2}\right)^{\frac{7}{2}}} - \frac{5z^{*2}}{\left(1+z^{*2}\right)^{\frac{7}{2}}}\right)$$

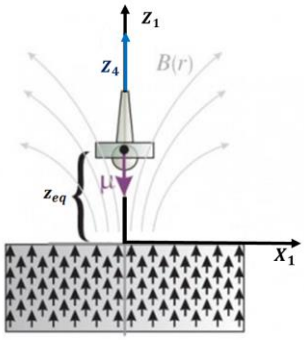
$$\frac{\mathrm{d}^3B_0^*}{\mathrm{d}z^{*3}} = 3\left(\frac{15\gamma^2 z^*}{\left(\gamma^2+z^{*2}\right)^{\frac{7}{2}}} - \frac{15z^*}{\left(1+z^{*2}\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35z^{*3}}{\left(1+z^{*2}\right)^{\frac{9}{2}}} - \frac{35\gamma^2 z^{*3}}{\left(\gamma^2+z^{*2}\right)^{\frac{9}{2}}}\right)$$

9 ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD LINEAL

En este capítulo se procede al estudio de la estabilidad lineal del sistema. Para ello, linealizamos en torno a

$$I = \{x = y = 0;\ z = z_e;\ \phi = \theta = 0;\ \ p_x = p_y = 0;\ p_z = 0;\ p_\phi = p_\theta = 0\}$$

que se corresponde con una posición en la que la peonza tiene su eje local OZ_4 alineado con el OZ_1.



La linealización proporciona el siguiente sistema de ecuaciones:

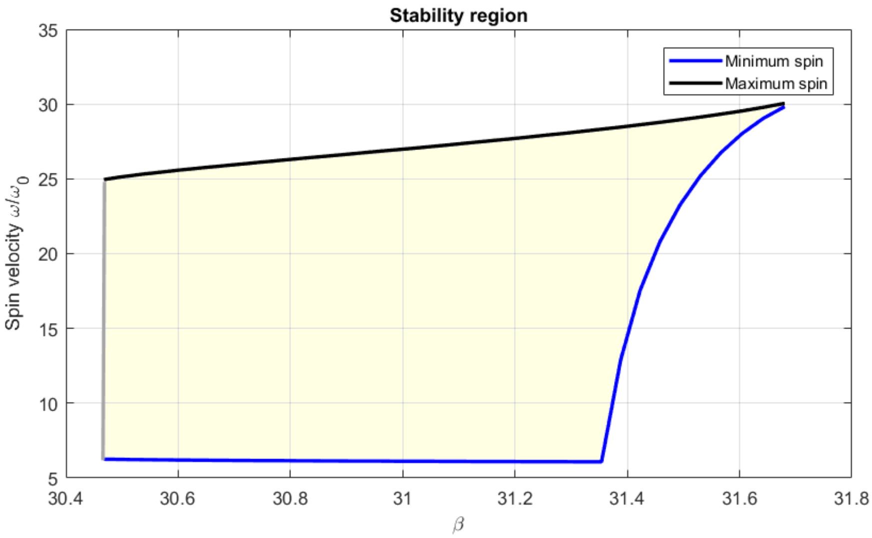
$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \overline{p_x} \\ \dot{\bar{y}} = \overline{p_y} \\ \dot{\bar{z}} = \overline{p_z} \\ \dot{\bar{\phi}} = R\overline{p_\phi} - Rp_\psi\bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} = R\overline{p_\theta} \\ \dot{\overline{p_x}} = \dfrac{\beta B_0'(z_e)}{2}\bar{\theta} + \dfrac{\beta B_0''(z_e)}{2}\bar{x} \\ \dot{\overline{p_y}} = -\dfrac{\beta B_0'(z_e)}{2}\bar{\phi} + \dfrac{\beta B_0''(z_e)}{2}\bar{y} \\ \dot{\overline{p_z}} = -\beta B_0''(z_e)\bar{z} \\ \dot{\overline{p_\phi}} = -\dfrac{\beta B_0'(z_e)}{2}\bar{y} + \beta B_0(z_e)\bar{\phi} \\ \dot{\overline{p_\theta}} = \dfrac{\beta B_0'(z_e)}{2}\bar{x} + \left(\beta B_0(z_e) - Rp_\psi^2\right)\bar{\theta} + Rp_\psi\overline{p_\phi} \end{cases}$$

que puede expresarse en forma matricial:

$$
\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \\ \dot{\bar{z}} \\ \dot{\bar{\phi}} \\ \dot{\bar{\theta}} \\ \dot{\bar{p}}_x \\ \dot{\bar{p}}_y \\ \dot{\bar{p}}_z \\ \dot{\bar{p}}_\phi \\ \dot{\bar{p}}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Rp_\psi & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ \frac{\beta B_0''(z_e)}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta B_0''(z_e)}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta B_0''(z_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \beta B_0(z_e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \left(\beta B_0(z_e) - Rp_\psi^2\right) & 0 & 0 & 0 & Rp_\psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ \bar{\phi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \\ \bar{p}_\phi \\ \bar{p}_\theta \end{pmatrix}
$$

Puede verse que, en el sistema lineal, el movimiento vertical se encuentra desacoplado del movimiento horizontal y del giro.

Empleando la ecuación característica del sistema, podemos hallar la region de estabilidad



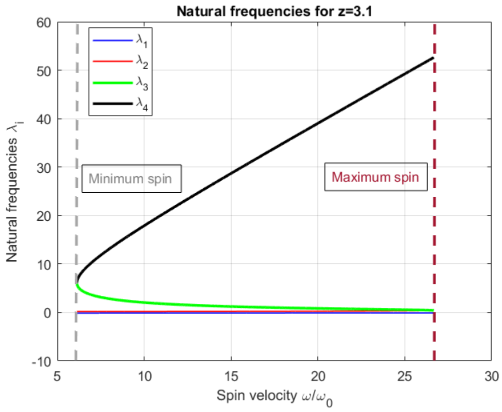
que proporciona el rango de alturas para el cual puede darse la levitación:

$$2.9235 \leq z_e \leq 3.22$$

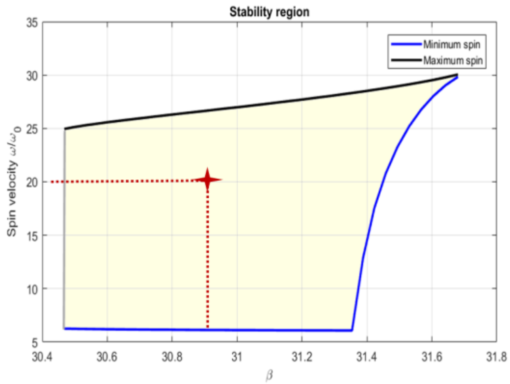
$$7.31\ cm \leq z_e \leq 8.05\ cm$$

y para cada una de estas alturas, el rango de velocidades para el cual el vuelo es estable.

Tomando un valor centrado en el rango de alturas, hallamos la evolución de las frecuencias naturales del sistema en función de la velocidad de giro:



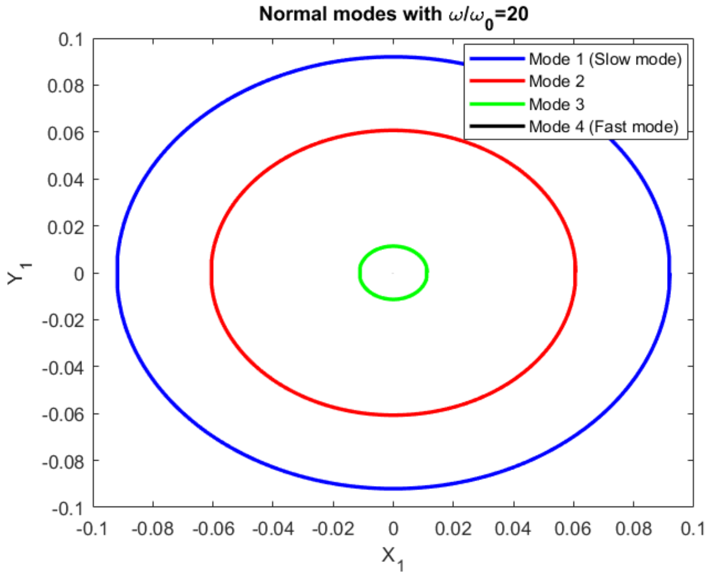
Para un valor centrado en la región de estabilidad



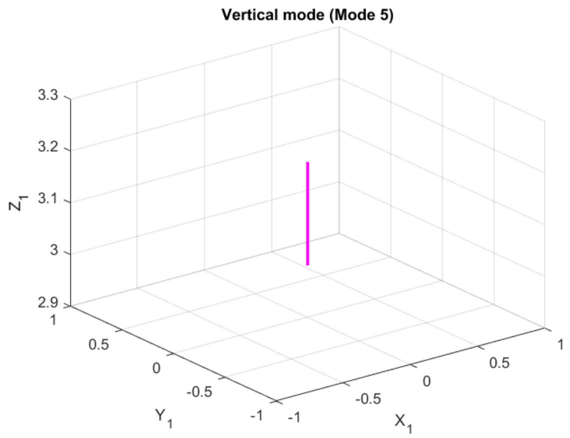
Podemos calcular también los 5 modos normales de movimiento.

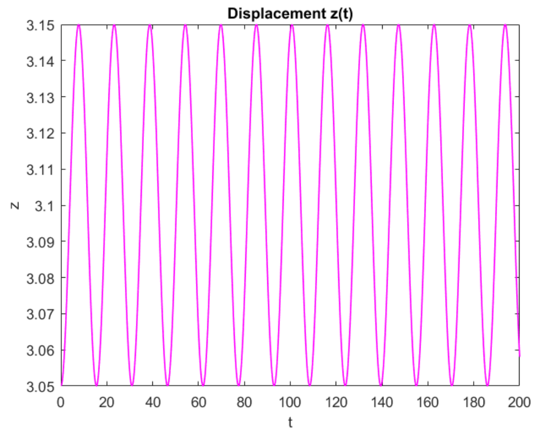
$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} 0.0920 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0175 \\ 0 \\ -0.0103 \\ 0 \\ 0.0438 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} 0.0607 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0175 \\ 0 \\ 0.0151 \\ 0 \\ 0.0434 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} 0.0113 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0175 \\ 0 \\ 0.0094 \\ 0 \\ 0.0427 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\varphi}_4 = \begin{pmatrix} 5.7 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0175 \\ 0 \\ 2.2 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0.0011 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\varphi}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estos modos se corresponden con órbitas circulares en el plano horizontal



Por otra parte, el movimiento vertical viene caracterizado por el modo $\vec{\varphi}_5$:

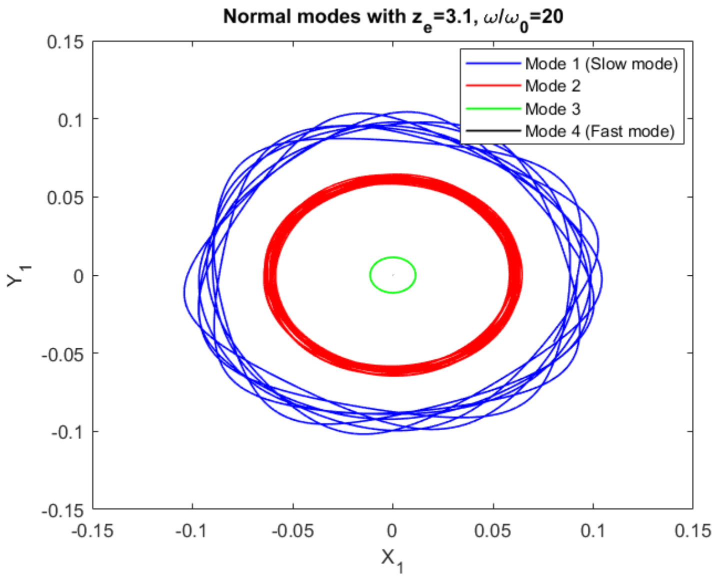




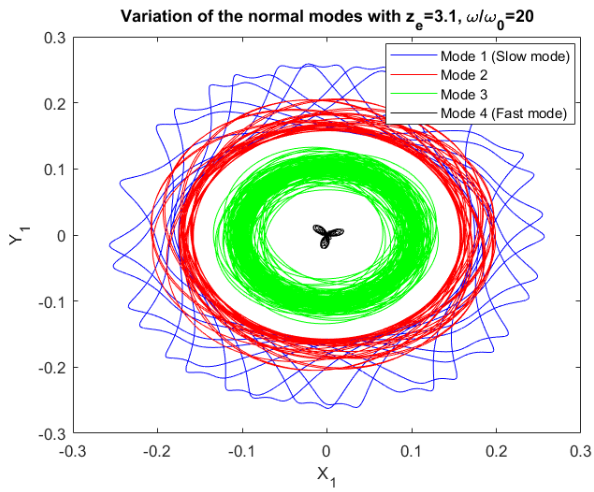
10 ESTUDIO DEL SISTEMA NO LINEAL

En este capítulo, vamos a estudiar el acoplamiento lineal y no lineal del sistema. Para ello, resolvemos numéricamente el sistema no lineal para unas condiciones iniciales proporcionales a las de los diferentes autovectores.

En primer lugar, tomando como condición inicial la expresión de los modos normales del capítulo 9, vemos que el sistema no lineal reproduce las circunferencias antes mostradas:



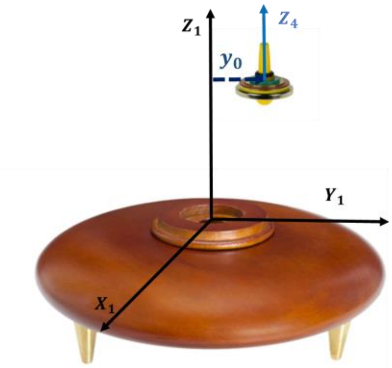
A medida que vamos aumentando la amplitud de estas condiciones iniciales, estas circunferencias dejan de reproducirse:

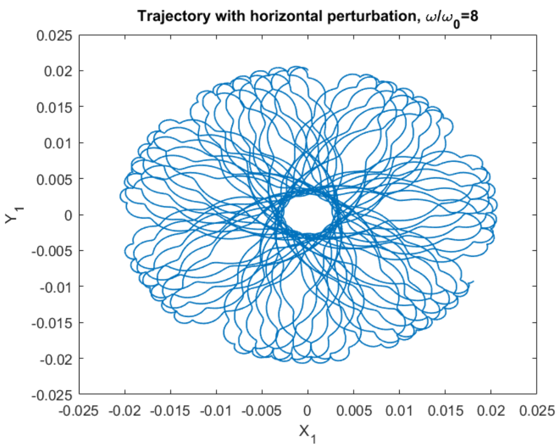


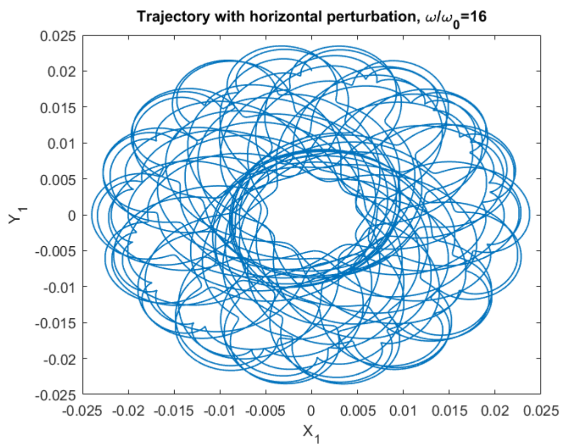
Además, se lleva a cabo la simulación numérica del sistema no lineal intentando reproducir situaciones que se dan cuando jugamos con el juguete.

Algunas de ellas son:

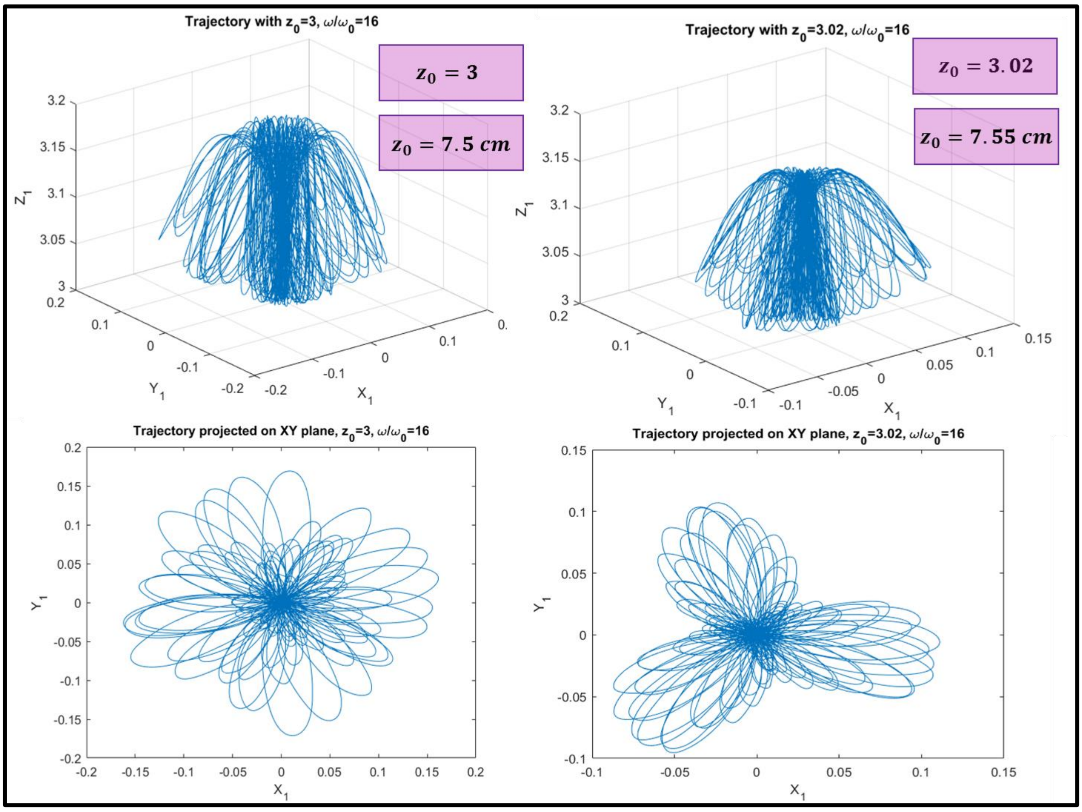
- Desplazamiento horizontal de la peonza.



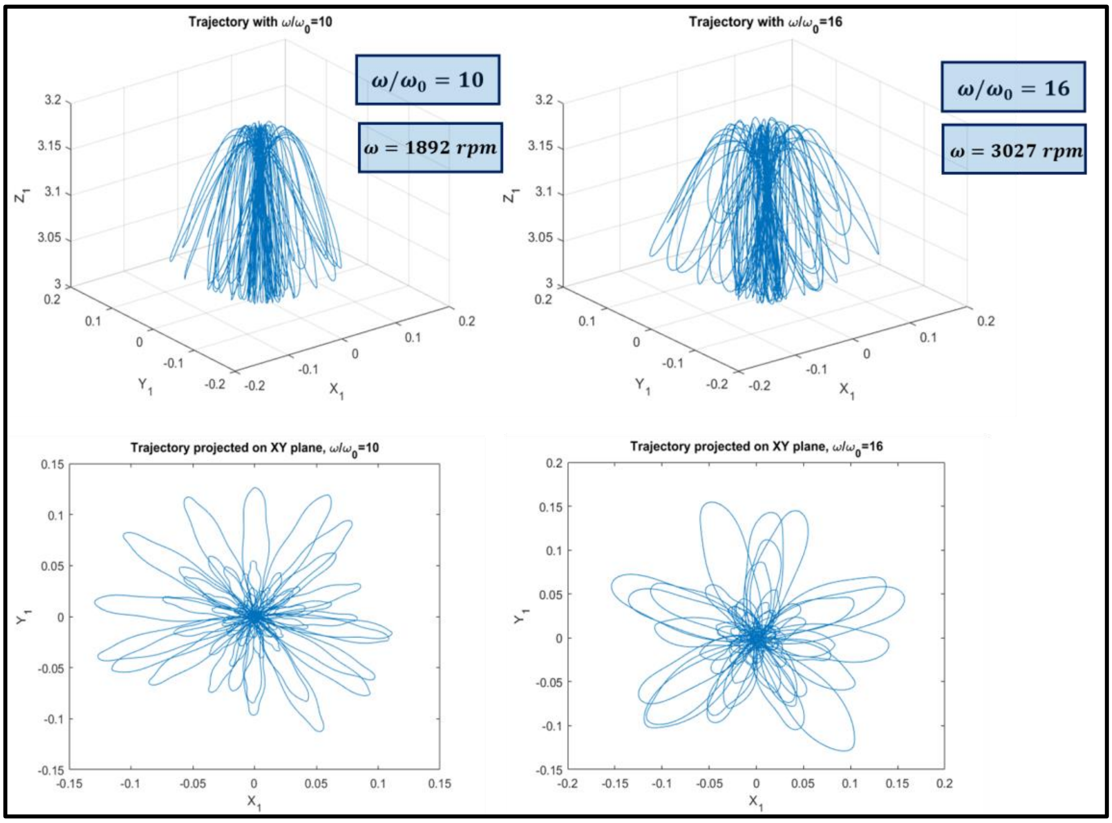




- Variación de la altura del plato sobre el que se hace girar la peonza:

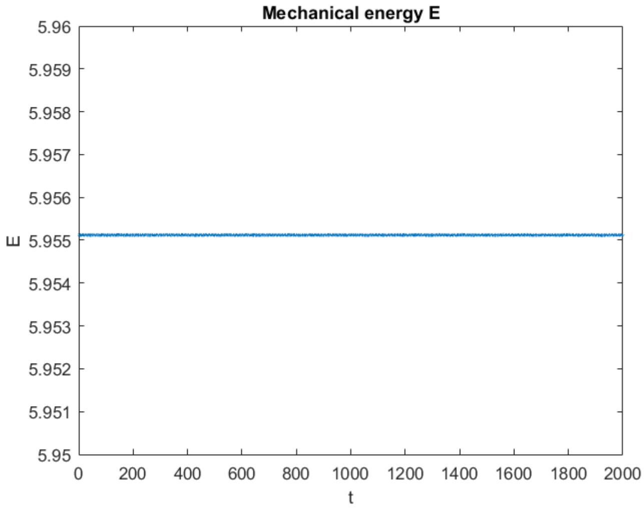


- Girar la peonza a mano con distintas velocidades.



11 CONSTANTES DE MOVIMIENTO

En este capítulo, comprobamos numéricamente que la energía mecánica del sistema (la cual coincide con la Hamiltoniana) es constante:



Además, se demuestra mediante el uso de la mecánica vectorial que, siempre y cuando nuestro campo magnético tenga simetría cilíndrica

$$\frac{B_x}{x} = \frac{B_y}{y}$$

la componente z del momento cinético respecto al origen de coordenadas, L_{OZ_1}, es una constante movimiento.

$$\frac{dL_{OZ_1}}{dt} = 0$$

También se menciona la conservación de L_{GZ_3} que, al contrario que la anterior, sí se obtiene de las ecuaciones de movimiento del sistema.

12 ANÁLISIS CONSIDERANDO LA FRICCIÓN

El efecto de la fricción puede añadirse teniendo en cuenta el efecto de una fuerza de rozamiento (también llamada de Stokes), una fuerza Magnus y un momento.

En las ecuaciones de Hamilton, estas fuerzas se introducen mediante el cálculo de las 3 fuerzas generalizadas asociadas.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + Q_i$$

Estas fuerzas generalizadas son:

$$Q_D = \begin{pmatrix} Q_{DX} \\ Q_{DY} \\ Q_{DZ} \end{pmatrix} = -C_{drag}\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

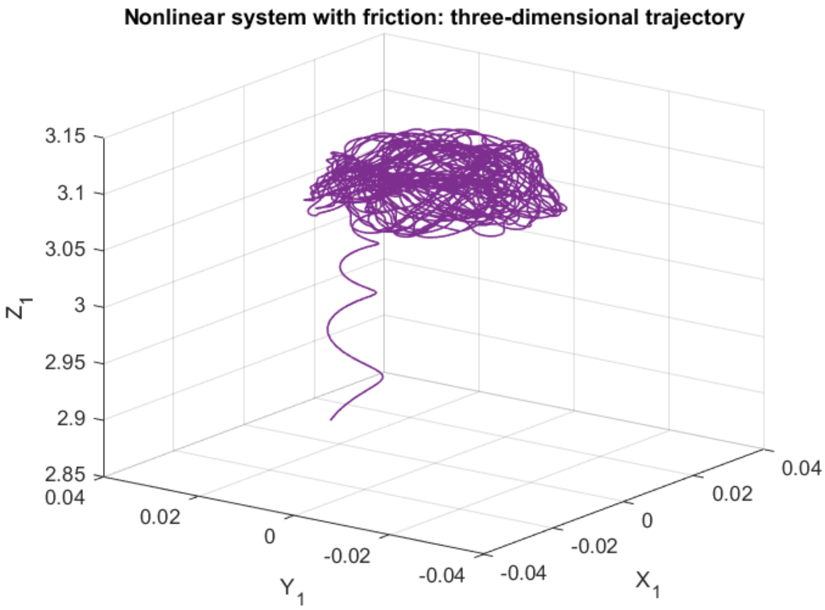
$$Q_m = C_{mag}\begin{pmatrix} \omega_Y p_Z - \omega_Z p_Y \\ \omega_Z p_X - \omega_X p_Z \\ \omega_X p_Y - \omega_Y p_X \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Q_{M\phi} = -C_{torque}|\vec{\omega}|\left(\dfrac{p_\phi}{I_x} + \left(\dfrac{1}{I_Z} - \dfrac{1}{I_X}\right)p_\psi \sin(\theta)\right) \\ Q_{M\theta} = -C_{torque}|\vec{\omega}|\dfrac{p_\theta}{I_x} \\ Q_{M\psi} = -C_{torque}|\vec{\omega}|\dfrac{p_\psi}{I_x} \end{cases}$$

Con estas expresiones, realizamos la simulación numérica del sistema y comparamos las trayectorias lineal, no lineal y la correspondiente al modelo con fricción ensayando con distintos coeficientes C_{drag}, C_{mag} y C_{torque}. Para los valores

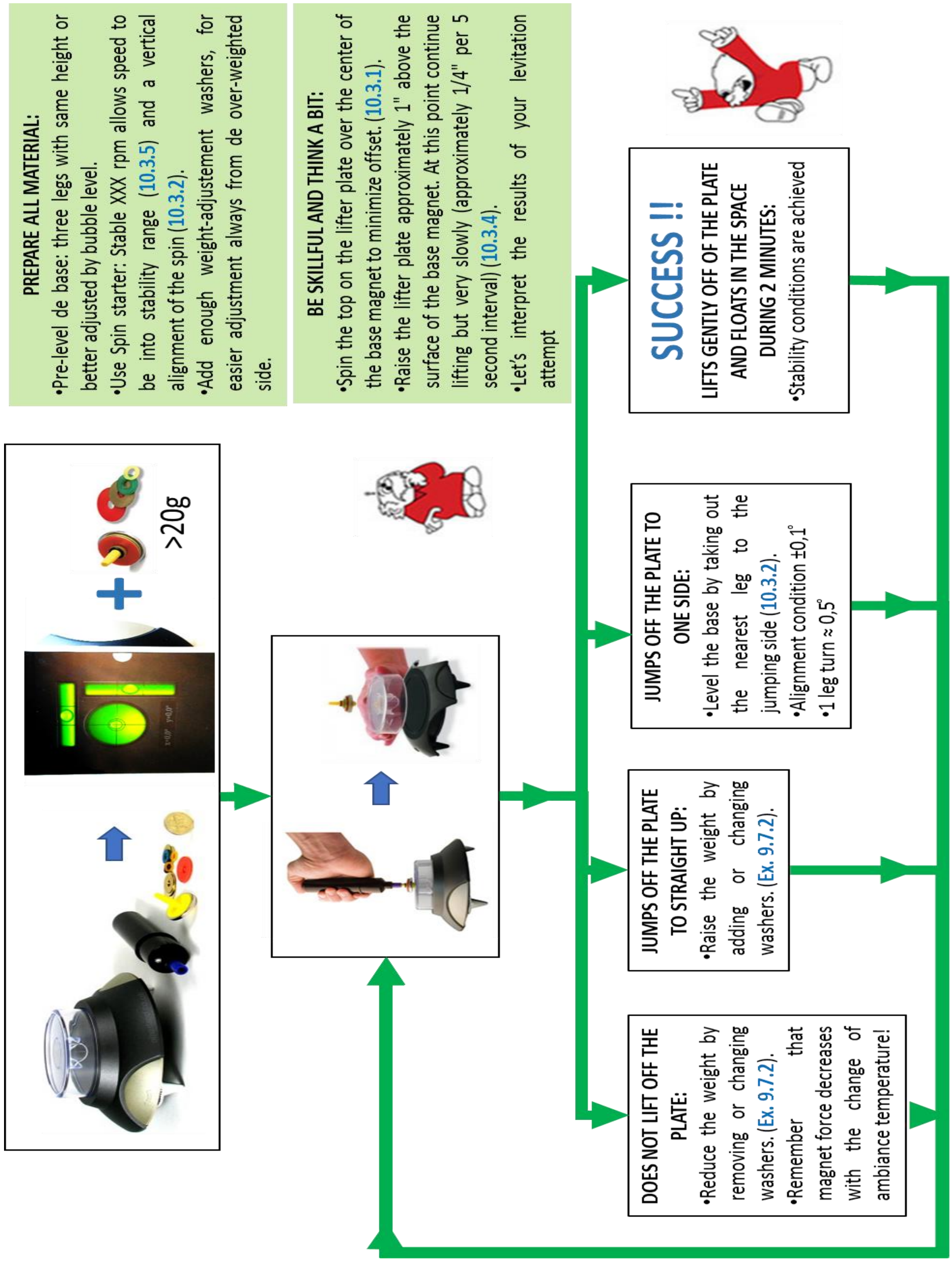
$$\begin{cases} C_{drag} = 0.0002 \\ C_{mag} = 0.0002 \\ C_{torque} = 0.00001 \end{cases}$$

conseguimos simular un vuelo del orden de un minuto, que se corresponde con un valor aproximado de levitación para el juguete real. Lógicamente, el efecto de las 3 fuerzas hace que, llegado un cierto instante, nuestra peonza se caiga:


Nonlinear system with friction: three-dimensional trajectory
3.15
3.1
3.05
3
2.95
2.9
2.85
Z1
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
Y1
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
X1

13 ¡VAMOS A JUGAR!

En el capítulo 13, se proporcinan algunas instrucciones para conseguir dominar el juguete. Además, se añade el siguiente diagrama de flujo, donde se resumen todos los consejos para lograr la levitación y se indican los capítulos en los que se hace la simulación numérica correspondiente.



14 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

En este apartado se lleva a cabo un resumen de los capítulos del trabajo y se añaden las líneas futuras que pueden seguirse en el estudio de este sistema.

Las más interesantes son:

- Llevar a cabo un estudio considerando las expresiones exactas del campo magnético creado por la base, ya que nuestro trabajo únicamente es válido para puntos próximos al eje OZ_1 , i.e $\rho \ll 1$.
- Considerar el tamaño real de la peonza, ya que en nuestro estudio la hemos aproximado como un dipolo puntual.
- Elaborar un modelo más detallado de la fricción.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Wikipedia The free enciclopedia (July, 2017). Levitron (Online).
Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Levitron

[2] Mike & Karen Sherlock, *The hidden history of the Levitron.*

[3] M. V. Berry: *The Levitron ™: an adiabatic trap for spins*, Proc. R.Soc. London, Ser. A 452, 1207–1220 (1996).

[4] G. Genta, C. Delprete, and D. Rondano, *Gyroscopic stabilization of passive magnetic Levitation*, Meccanica 34, 411–424 (1999).

[5] Holger R. Dullin and Robert W. Easton, *Stability of Levitrons*, Physica D 126, 1–17 (1999).

[6] S. Gov, S. Shtrikman, and H. Thomas, *On the dynamical stability of the hovering magnetic top*, Physica D 126, 214–224 (1999).

[7] A. T. Pérez and P. García-Sánchez, *Dynamics of a Levitron under a periodic magnetic forcing,* Departamento de Electrónica y Electromagnetismo, Universidad de Sevilla, Facultad de Física, 2014.

[8] Daniel Núñez Álvarez, *Efecto de pequeñas corrientes de aire sobre un Levitron®*, Trabajo Fin de Grado GIA, Tutor: Antonio González Fernández.

[9] Kirk T. McDonald, *The Levitron®,* Joseph Henry Laboratories, Princeton University, Princeton.

[10] S. I. Rubinow, Joseph B. Keller, *The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid,* Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey; Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, N.Y. , 1961.

[11] N. Lukerchenko, Yu. Kvurt, I. Keita, Z. Chara & P. Vlasak, *Drag Force, Drag Torque and Magnus Force coefficients of rotating spherical particle moving in fluid*.

[12] Anisha Deshmane, Karin Fisher, Emily Seitz & Katie Szeto, *How to use the Levitron*. Online Available: http://web.mit.edu/viz/levitron/How_To.html

[13] Richard Fitzpatrick, *Forced precession and nutation of Earth*, (Online).
Available: http://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestialhtml/node74.html

[14] Martin D. Simon, Lee O. Helfinger, and S. L. Ridgway, *Spin stabilized magnetic levitation*, Am. J. Phys. 65(4), 286–292 (1997).

[15] Antonio González Fernández, *Dinámica de un Levitron,* Universidad de Sevilla, 2016.

[16] T. B. Jones, Masao Washizu, and Roger Gans, *Simple theory for the Levitron*, J. Appl. Phys. 82, 883–888 (1997).

[17] [P. Flanders, S. Gov, S. Shtrikman, and H. Thomas, *On the spinning motion of the hovering magnetic top*, Physica D 126, 225–235 (1999).

[18] Manuel Toscano Jiménez, *Mecánica para ingenieros industriales,* Universidad de Sevilla, 2008.

[19] Jim Van Verth, *Understanding quaternions*, Game developers conference, 2013

[20] Jürgen Geiser, *Multiscale methods for levitron problems: Theory and applications*, EMA University of Greifswald, Department of Physics, 2012

[21] Haim Baruh, *Analytical Dynamics*, Mc-Graw Hill, 1999.

[22] Mark D. Ardema, *Analytical Dynamics, Theory and Applications*, 2005.

[23] Chloe Elliot, *The spinning top*, 2009.

[24] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2^{nd} ed., Wiley, New York, 1975.

[25] MIT Open Courseware, nuclear engineering, chapter 2, *Motion of charged particles in fields*. (Online). Available: https://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-611j-introduction-to-plasma-physics-i-fall-2003/lecture-notes/chap2.pdf