

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías
Industriales

Implementación en Matlab de Métodos de 1 g.d.l.
Para Realizar Análisis Modal Experimental de
Estructuras

Autor: Sergio Alducin Vázquez

Tutora: Rosario Chamorro Moreno

Dep. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado
Grado en Tecnología de las Tecnologías Industriales

Implementación en Matlab de Métodos de 1 g.d.l. Para Realizar Análisis Modal Experimental de Estructuras

Autor:

Sergio Alducin Vázquez

Tutora:

Rosario Chamorro Moreno

Profesor contratado doctor

Dep. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: Implementación en Matlab de Métodos de 1 g.d.l. Para Realizar Análisis Modal
Experimental de Estructuras

Autor: Sergio Alducin Vázquez

Tutora: Rosario Chamorro Moreno

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

Resumen

Desde mediados del siglo XX se han llevado a cabo importantes avances relativos a la comprensión del comportamiento dinámico de los sistemas estructurales. La aplicación de estos conocimientos ha sido fundamental a la hora de poder garantizar la integridad estructural y el correcto funcionamiento en condiciones de operación de cualquier estructura.

Los análisis dinámicos analíticos y numéricos no suelen ser suficientes para llevar a cabo el diseño de una estructura. En el primer caso porque solo son aplicables a sistemas muy simples, y en el segundo caso porque lo que se analiza no deja de ser un modelo, que puede diferir de la realidad. Es por esto por lo que el análisis modal experimental juega un papel fundamental en el estudio de vibraciones.

El objetivo del presente Trabajo Fin de Grado es realizar unas funciones en Matlab que permitan llevar a cabo el análisis modal de cualquier sistema a partir de las medidas experimentales de sus Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRFs). De esta manera se puede realizar una descripción del comportamiento dinámico de una estructura, conociendo los parámetros modales (frecuencia natural, amortiguamiento y constante modal) de todos los modos dentro del rango de frecuencias de interés. El presente trabajo de centra en los métodos de un grado de libertad, que, a pesar de lo que su nombre parece indicar, son aplicables a sistemas de varios grados de libertad siempre y cuando se verifiquen ciertas hipótesis.

En el capítulo 2 se resume la teoría necesaria para definir todos los conceptos fundamentales relativos a las vibraciones y para obtener las ecuaciones elementales que se usarán más adelante. En el capítulo 3 se realiza una clasificación de los distintos tipos de análisis modal experimental, y se desarrollan en detalle tres métodos de un grado de libertad. Con esta base teórica ya es posible realizar los archivos de Matlab para obtener las propiedades dinámicas de un sistema estructural mediante los tres métodos previamente descritos. Para ilustrar el proceso de obtención de resultados se van a aplicar estos métodos a las FRFs de un voladizo empotrado en su base. Esto permitirá comprobar las ventajas e inconvenientes de cada uno de los métodos, ya que, como se puede presuponer, ninguno es mejor que los otros para todos los posibles casos de estudio.

La condición para poder aplicar los métodos de un grado de libertad se puede resumir de forma simplificada como que un modo no debe verse influido significativamente por el resto de modos, y, de forma aún más simplificada, como que los modos deben estar suficientemente alejados entre sí. Sin embargo, no existe una definición clara de cuando dos modos se pueden considerar lo suficientemente alejados y cuando no. Los ficheros de Matlab pueden aplicarse también a curvas de FRFs generadas de forma teórica, imponiendo los valores que las definen. De esta manera se puede estudiar cómo afecta la variación de los parámetros que definen los modos de la FRF de un sistema cualquiera a la diferencia entre los resultados que se obtienen respecto a los que se esperaba obtener.

Índice

Resumen	vii
Índice	ix
Índice de Tablas	xi
Índice de Figuras	xiii
Notación	xv
1 Introducción	1
2 Fundamento Teórico de las Vibraciones	5
2.1. <i>Sistemas de un grado de libertad</i>	5
2.1.1. Sistemas no amortiguados	5
2.1.1.1. Vibración libre	5
2.1.1.2. Vibración forzada	6
2.1.2. Sistemas con amortiguamiento viscoso	6
2.1.2.1. Vibración libre	6
2.1.2.2. Vibración forzada	8
2.1.3. Amortiguamiento estructural o histerético	8
2.1.4. Amortiguamiento seco o de Coulomb	9
2.2. <i>Funciones de respuesta en frecuencia (FRF) en sistemas de 1 g.d.l. (SDOF)</i>	10
2.3. <i>Sistemas de varios grados de libertad (MDOF) no amortiguados</i>	10
2.3.1. Vibración libre	11
2.3.2. Propiedades de ortogonalidad	11
2.3.3. Vibración forzada	11
2.4. <i>Sistemas de varios grados de libertad (MDOF) con amortiguamiento proporcional</i>	12
2.4.1. Amortiguamiento proporcional a la rigidez	13
2.4.2. Forma general del amortiguamiento proporcional	13
2.5. <i>Sistemas de varios grados de libertad (MDOF) con amortiguamiento histerético</i>	14
2.5.1. Vibración libre	14
2.5.2. Vibración forzada	14
2.6. <i>Sistemas de varios grados de libertad (MDOF) con amortiguamiento viscoso</i>	15
2.6.1. Vibración libre	15
2.6.2. Vibración forzada	16
3 Análisis Modal Experimental	19
3.1. <i>Clasificación de los tipos de análisis</i>	19
3.2. <i>Dificultades en el análisis modal experimental</i>	20
3.3. <i>Métodos de un grado de libertad (SDOF)</i>	20
3.3.1. Introducción	20
3.3.2. Peak-Picking	20
3.3.3. Circle-Fit	22
3.3.3.1. Propiedades del círculo modal	22
3.3.3.2. Descripción del método	24

3.3.4. Line-Fit (o método inverso)	25
3.4. Métodos de varios grados de libertad (MDOF)	27
4 Peak-Picking	29
4.1. Funcionamiento del archivo de Matlab	29
4.2. Resultados experimentales	32
5 Circle-Fit	41
5.1. Funcionamiento del archivo de Matlab	41
5.2. Resultados experimentales	45
6 Line-Fit	55
6.1. Funcionamiento del archivo de Matlab	60
6.2. Resultados experimentales	60
7 Conclusiones y Desarrollos Futuros	67
6.1. Conclusiones	67
6.2. Desarrollos Futuros	68
Referencias	69
Anexos	71
Anexo.1. PEAK_PICKING_BAJA.m	71
Anexo.2. PEAK_PICKING_ALTA.m	77
Anexo.3. CircleFitByPratt.m	79
Anexo.4. CIRCLE_FIT.m	81
Anexo.5. LINE_FIT.m	87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4–1. Parámetros modales tomados para definir la receptancia	29
Tabla 4–2. Resultados obtenidos mediante Peak-Picking	31
Tabla 4–3. Ubicación de los puntos de excitación [15]	32
Tabla 4–4. Propiedades modales obtenidas mediante Peak-Picking para la octava FRF	34
Tabla 4–5. Frecuencias naturales obtenidas mediante el método de Peak-Picking	36
Tabla 4–6. Constantes modales obtenidas mediante el método de Peak-Picking	36
Tabla 4–7. Coeficientes de amortiguamiento obtenidos mediante el método de Peak-Picking	36
Tabla 4–8. Comparación de las frecuencias naturales experimentales con las analíticas	37
Tabla 4–9. Amplitudes de las 8 acelerancias en las 5 resonancias	38
Tabla 4–10. Fases de las 8 acelerancias en las 5 resonancias	38
Tabla 5–1. Parámetros modales tomados para definir la receptancia	41
Tabla 5–2. Resultados obtenidos mediante Circle-Fit	44
Tabla 5–3. Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Circle-Fit	51
Tabla 5–4. Resultados para la primera FRF obtenidos mediante Circle-Fit	52
Tabla 5–5. Resultados para la segunda FRF obtenidos mediante Circle-Fit	52
Tabla 5–6. Resultados para la tercera FRF obtenidos mediante Circle-Fit	52
Tabla 5–7. Resultados para la cuarta FRF obtenidos mediante Circle-Fit	52
Tabla 5–8. Resultados para la quinta FRF obtenidos mediante Circle-Fit	52
Tabla 5–9. Resultados para la sexta FRF obtenidos mediante Circle-Fit	53
Tabla 5–10. Resultados para la séptima FRF obtenidos mediante Circle-Fit	53
Tabla 5–11. Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Circle-Fit	53
Tabla 6–1. Parámetros modales tomados para definir la receptancia	55
Tabla 6–2. Resultados obtenidos mediante Line-Fit	59
Tabla 6–3. Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Line-Fit	63
Tabla 6–4. Resultados para la primera FRF obtenidos mediante Line-Fit	63
Tabla 6–5. Resultados para la segunda FRF obtenidos mediante Line-Fit	63
Tabla 6–6. Resultados para la tercera FRF obtenidos mediante Line-Fit	64
Tabla 6–7. Resultados para la cuarta FRF obtenidos mediante Line-Fit	64
Tabla 6–8. Resultados para la quinta FRF obtenidos mediante Line-Fit	64
Tabla 6–9. Resultados para la sexta FRF obtenidos mediante Line-Fit	64
Tabla 6–10. Resultados para la séptima FRF obtenidos mediante Line-Fit	64
Tabla 6–11. Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Line-Fit	64

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Derrumbe del puente de Tacoma [4]	2
Figura 1-2. Primer modo de vibración de una pasarela peatonal obtenido mediante el MEF	2
Figura 2-1. Modelo de un sistema de un grado de libertad [1]	5
Figura 2-2. Tipos de respuesta en función del coeficiente de amortiguamiento [1]	7
Figura 2-3. Tipos de respuesta de un sistema amortiguado [10]	7
Figura 2-4. Respuesta en el tiempo de un sistema subamortiguado [6]	8
Figura 2-5. Ciclo de histéresis [1]	9
Figura 3-1. Método de Peak-Picking [11]	21
Figura 3-2. Método de la parte real de la receptancia [6]	22
Figura 3-3. El círculo modal [11]	22
Figura 3-4. Localización de la frecuencia natural mediante circle-fit [6]	24
Figura 3-5. Distintas formas de localizar la frecuencia natural mediante circle-fit [6]	25
Figura 3-6. Ejemplo de aplicación del método de line-fit [6]	27
Figura 4-1. Diagrama de Bode de la receptancia	30
Figura 4-2. Resultados obtenidos mediante Peak-Picking sobre la curva de receptancia	31
Figura 4-3. Viga en voladizo objeto de estudio [15]	32
Figura 4-4. Amplitud de la acelerancia para todos los puntos de excitación hasta 400 Hz	33
Figura 4-5. Amplitud de la acelerancia para todos los puntos de excitación entre 400 y 1200 Hz	33
Figura 4-6. Amplitud de la receptancia para todos los puntos de excitación hasta 400 Hz	34
Figura 4-7. Amplitud de la receptancia para todos los puntos de excitación entre 400 y 1200 Hz	34
Figura 4-8. Aplicación del Peak-Picking para la octava FRF (hasta 400 Hz)	35
Figura 4-9. Aplicación del Peak-Picking para la octava FRF (entre 400 y 1200 Hz)	35
Figura 4-10. Detalle de una de las zonas de resonancia	36
Figura 4-11. Cinco primeros modos de vibración analíticos [18]	38
Figura 4-12. Cinco primeros modos de vibración del voladizo a partir de medidas experimentales	39
Figura 5-1. Diagrama de Bode de la receptancia	41
Figura 5-2. Diagrama de Nyquist de la receptancia	42
Figura 5-3. Diagrama de Nyquist de la receptancia con el círculo de mejor ajuste	43
Figura 5-4. Otro ejemplo, más común, de diagrama de Nyquist	43
Figura 5-5. Diagramas de Nyquist de las medidas experimentales usadas en el capítulo 4	45
Figura 5-6. Ejemplo de aplicación del Circle-Fit a las nuevas medidas experimentales	46
Figura 5-7. Bode con los puntos experimentales adyacentes a la frecuencia natural indicados	46

Figura 5-8. Nyquist con los puntos experimentales adyacentes a la frecuencia natural indicados	47
Figura 5-9. Diagrama de Nyquist de la acelerancia para la octava FRF	48
Figura 5-10. Diagrama de Bode de la acelerancia para la octava FRF	48
Figura 5-11. Diagrama de Bode de la receptancia para la octava FRF	49
Figura 5-12. Diagrama de Nyquist de la receptancia para la octava FRF	49
Figura 5-13. Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la primera resonancia	50
Figura 5-14. Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la segunda resonancia	50
Figura 5-15. Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la tercera resonancia	50
Figura 5-16. Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la cuarta resonancia	51
Figura 5-17. Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la quinta resonancia	51
Figura 6-1. Diagrama de Bode de la receptancia	55
Figura 6-2. Diagrama de Bode de la receptancia en las inmediaciones de la resonancia	56
Figura 6-3. $\text{Re}(\Delta)$ frente a ω^2 para los distintos valores de frecuencia fijada	57
Figura 6-4. $\text{Im}(\Delta)$ frente a ω^2 para los distintos valores de frecuencia fijada	57
Figura 6-5. m_R frente a Ω^2	58
Figura 6-6. m_I frente a Ω^2	58
Figura 6-7. Diagrama de Bode de la receptancia para la octava FRF	60
Figura 6-8. Diagrama de Bode y resultados del primer modo de la octava FRF	61
Figura 6-9. Diagrama de Bode y resultados del segundo modo de la octava FRF	61
Figura 6-10. Diagrama de Bode y resultados del tercer modo de la octava FRF	62
Figura 6-11. Diagrama de Bode y resultados del cuarto modo de la octava FRF	62
Figura 6-12. Diagrama de Bode y resultados del quinto modo de la octava FRF	63

Notación

FRF	Función de respuesta en frecuencia
g.d.l.	Grado de libertad
M.E.F.	Método de los elementos finitos
SDOF	Single degree of freedom (un único grado de libertad)
MDOF	Multi degree of freedom (varios grados de libertad)
i	Unidad imaginaria
$x(t)$	Desplazamiento
$\dot{x}(t)$	Velocidad
$\ddot{x}(t)$	Aceleración
m	Masa
k	Constante de rigidez
c	Coefficiente de amortiguamiento viscoso
d	Coefficiente de amortiguamiento estructural
$f(t)$	Fuerza excitadora
$\bar{\omega}_o$	Frecuencia natural
$\alpha(\omega)$	Receptancia
ζ	Factor de amortiguamiento
ω'_o	Frecuencia natural amortiguada
c_{cr}	Coefficiente de amortiguamiento crítico
$ \cdot $	Módulo de una variable compleja
$arg(\cdot)$	Argumento de una variable compleja
η	Factor de pérdida
$signo(\cdot)$	Función signo
$ \cdot $	Valor absoluto de una variable real
N	Fuerza normal
F_r	Fuerza de rozamiento
μ	Coefficiente de rozamiento
$Y(\omega)$	Movilidad
$A(\omega)$	Acelerancia
$H(\omega)$	FRF genérica
$[\cdot]$	Matriz
$\{ \cdot \}$	Vector
$\{x(t)\}$	Vector de desplazamientos
$\{\dot{x}(t)\}$	Vector de velocidades
$\{\ddot{x}(t)\}$	Vector de aceleraciones
$\{f(t)\}$	Vector de fuerzas excitadoras

$[M]$	Matriz de masa
$[K]$	Matriz de rigidez
$det \quad $	Determinante de una matriz
$[\quad]^T$	Transpuesta de una matriz
$[\quad]^{-1}$	Inversa de una matriz
$\bar{\omega}_r$	Frecuencia natural r-ésima
$\{\psi\}_r$	Modo de vibración r-ésimo
$[\cdot \quad \bar{\omega}_r^2 \quad \cdot]$	Matriz de frecuencias naturales (o de autovalores)
$[\Psi]$	Matriz de modos de vibración (o de autovectores)
m_r	Masa modal del modo r-ésimo
k_r	Rigidez modal del modo r-ésimo
$[m_r]$	Matriz de masas modales
$[k_r]$	Matriz de rigideces modales
ϕ_r	Autovector del modo r-ésimo normalizado respecto a la masa
$[\Phi]$	Matriz de modos (o de autovectores) normalizada respecto a la masa
$[\alpha(\omega)]$	Matriz de receptancia
$\alpha_{jk}(\omega)$	Elemento de la matriz de receptancia
${}_r A_{jk}$	Constante modal
$[C]$	Matriz de amortiguamiento viscoso
c_r	Amortiguamiento modal del modo r-ésimo
$[c_r]$	Matriz de amortiguamientos modales
$(\quad)^*$	Conjugado de una variable compleja
η_r	Factor de pérdida del modo r-ésimo
ζ_r	Factor de amortiguamiento del modo r-ésimo
$\{ \quad \}^H$	Transpuesta hermitiana
$\{u\}$	Matriz de coordenadas (contiene los desplazamientos y las velocidades)

1 INTRODUCCIÓN

Un movimiento vibratorio es la variación de la configuración de un sistema respecto al tiempo alrededor de una posición de referencia. En general, cualquier sistema que tenga masa y capacidad para la deformación elástica es susceptible de vibrar libremente [1]. Las vibraciones son un fenómeno presente en prácticamente todos los ámbitos de la ingeniería.

Salvo algunos casos concretos de máquinas que basan su funcionamiento en la vibración de algunos de sus componentes, las vibraciones son por lo general un fenómeno indeseado, que aparece inevitablemente durante la operación de un sistema mecánico, debido a la aplicación de una excitación en forma de colisión o fuerza variable con el tiempo.

Los problemas asociados a la existencia de vibraciones son varios. Por ejemplo, las vibraciones pueden afectar negativamente al confort de las personas próximas a la máquina, ya sea por la propia vibración, o por el ruido que ésta produce. Además, las vibraciones pueden provocar el deterioro progresivo de sus componentes, ya que la fatiga es un fenómeno ampliamente estudiado y conocido, por el que un sistema estructural puede llegar a fallar debido a cargas que no superan la carga máxima admisible, pero que se repiten continuamente durante largos periodos de tiempo. En otros casos, la propia vibración puede ocasionar el colapso de manera inmediata si la amplitud es lo suficientemente grande.

Un fenómeno de especial interés asociado a las vibraciones es el de resonancia, que ocurre cuando la frecuencia de la excitación coincide con alguna de las frecuencias naturales del sistema. El comportamiento de una estructura en resonancia puede ser algo complejo de entender a priori, ya que una fuerza variable, pero de amplitud máxima constante, produce un movimiento con una amplitud que aumenta con el tiempo. El resultado de la resonancia es que fuerzas excitadoras de pequeña amplitud, que el sistema podría soportar si se aplicaran de manera estática, pueden provocar el colapso, pero no solo a largo plazo como ocurre con la fatiga, sino también durante la propia resonancia.

Uno de los sucesos claves para el desarrollo de los análisis dinámicos, por su espectacularidad y gravedad, fue el colapso del puente de Tacoma en 1940. Durante los pocos meses que estuvo en servicio antes de su derrumbe, era habitual que el puente oscilase debido a que entraba en resonancia. El fenómeno de resonancia no era totalmente desconocido en aquella época, y se intentaron llevar a cabo ciertas modificaciones en el puente que asegurasen su integridad, pero algunas de ellas no fueron efectivas y otras no llegaron a tiempo, y el puente acabó cayendo debido al fenómeno de autoexcitación aerodinámica tras cerca de una hora oscilando (el día del derrumbe las oscilaciones fueron en forma de torsión, mientras que las oscilaciones que se habían observado previamente en el puente eran verticales). [2][3]

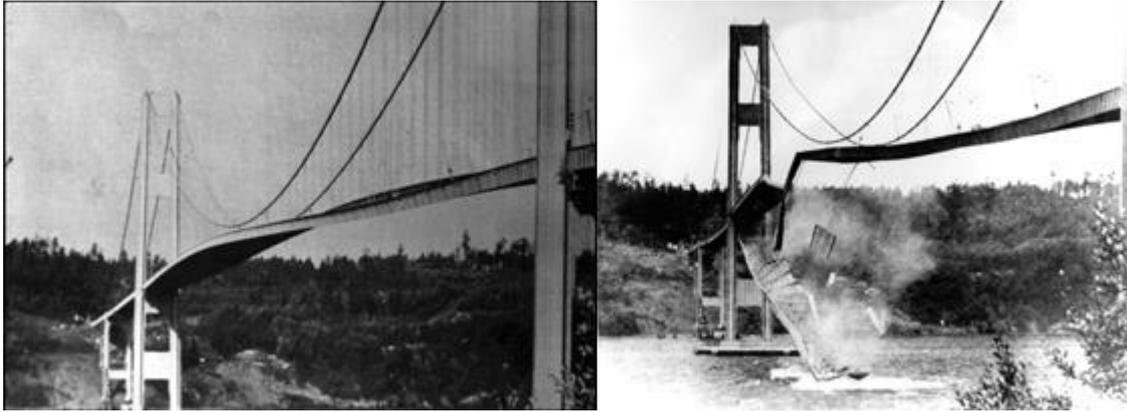


Figura 1-1: Derrumbe del puente de Tacoma [4]

Todo esto pone de manifiesto la importancia de conocer el comportamiento dinámico de cualquier máquina o estructura. El estudio dinámico de un sistema mecánico se lleva a cabo tanto en la etapa de diseño, sobre todo para conocer las frecuencias naturales y ajustarlas a los requisitos de diseño, como durante la vida útil del sistema, por ejemplo para verificar la validez de las hipótesis y simplificaciones llevadas a cabo en la etapa de diseño.

Para conocer las frecuencias naturales y los modos de vibración de un sistema mecánico antes de su construcción se pueden llevar a cabo análisis analíticos o numéricos. Los primeros están muy limitados, ya que solo son aplicables a sistemas muy simples, con poca aplicación práctica, por lo que es común recurrir a modelos de elementos finitos.

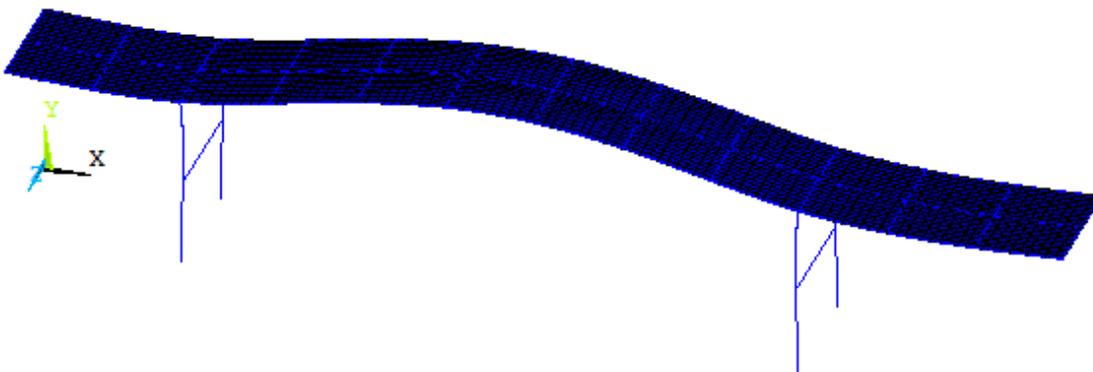


Figura 1-2: Primer modo de vibración de una pasarela peatonal obtenido mediante el MEF.

Desde el punto de vista experimental, se puede proceder de dos formas. En primer lugar, se pueden tomar medidas de la respuesta de un sistema ante una excitación desconocida, generalmente en condiciones de servicio. Por otra parte, se puede medir la respuesta del sistema ante una excitación conocida, por lo general en condiciones controladas que permiten mayor precisión. Estos dos tipos de análisis se conocen como *signal analysis* y *system analysis*, respectivamente, según [5]. El Análisis Modal se puede definir formalmente como el conjunto de procesos involucrados en testar componentes o estructuras con el objetivo de obtener una descripción matemática de su comportamiento dinámico [6]. El Análisis Modal incluye la toma de medidas, así como el análisis, propiamente dicho, de las mismas.

Los mayores avances en dinámica de sistemas mecánicos se llevaron a cabo a partir de mediados del siglo XX. Uno de los documentos más importantes sobre la materia fue el artículo de Kennedy y Pancu [9], publicado en 1947, y que es la base del método de Circle Fit para extraer propiedades modales. De aquí en adelante se escribieron multitud de artículos e incluso libros dedicados exclusivamente a la dinámica. Uno de los libros más destacados es *Modal Testing: Theory, Practice and Application* de D. J. Ewins [6], citado en multitud de ocasiones en artículos publicados con posterioridad. Además, en paralelo a estos avances teóricos, se desarrolló el Método de los Elementos Finitos, que también tiene una clara aplicación a problemas dinámicos,

y mejoraron los componentes electrónicos y digitales, lo que favoreció el desarrollo del análisis modal experimental.

Las aplicaciones del Análisis Modal son varias. La primera de ellas es obtener las propiedades dinámicas del sistema real, y utilizarlas para comparar el sistema con el modelo utilizado, generalmente de elementos finitos. La comparación del sistema real con el sistema modelizado permite comprobar la validez del modelo, así como modificarlo en caso de ser necesario hasta que se corresponda con la realidad.

Además, sabemos que las propiedades dinámicas de una estructura son inherentes a la misma. Utilizando esta importante propiedad, podemos usar el Análisis Modal para estudiar variaciones en las propiedades dinámicas, que estarán asociadas a algún cambio en la configuración de la máquina o estructura. Una de las aplicaciones puede ser encontrar fallos en una estructura, de una manera más fiable y sistemática que si se buscasen mediante simple inspección visual [7]. Esto permite detectar a tiempo imperfecciones en la estructura, lo suficientemente significativas como para modificar las propiedades dinámicas, pero no para provocar el fallo, y anticiparse al colapso. La variación de las propiedades dinámicas no siempre está debida a fallos no deseados, también se puede mejorar el comportamiento vibratorio variando o añadiendo elementos estructurales o no estructurales, lo que permite mejorar a posteriori el comportamiento dinámico de una estructura que presentaba alguna irregularidad desde su etapa de diseño, como por ejemplo ocurre en [8]. El análisis experimental permite cuantificar esta mejora, y modificar el modelo utilizado en un principio.

Otras posibles aplicaciones pueden ser hallar el valor de la fuerza aplicada en casos en los que esta sea desconocida y sea de interés conocer su valor, o estudiar componentes por separado antes de ser ensamblados.

2 FUNDAMENTO TEÓRICO DE LAS VIBRACIONES

El objetivo de este capítulo es definir todos los conceptos necesarios para comprender el comportamiento dinámico de cualquier sistema y obtener todas las ecuaciones que definen dicho comportamiento. Se empieza por los sistemas de un único grado de libertad, por su sencillez, y luego se estudian los de varios grados de libertad. En ambos casos se analizan los diferentes tipos de amortiguamiento que pueden darse, así como las situaciones de vibración libre y de vibración forzada.

Además, se definen los distintos tipos de respuesta en frecuencia, así como las relaciones entre las mismas, haciendo especial hincapié en la receptancia, sobretodo en las expresiones que permiten expresarla como un sumatorio con tantos términos como modos de vibración, ya que son las ecuaciones básicas para el siguiente capítulo.

2.1. Sistemas de Un Grado de Libertad (SDOF)

Aunque pocas estructuras reales pueden modelarse como un sistema de un único grado de libertad, el estudio de este tipo de sistemas resulta interesante porque sistemas más complejos de varios grados de libertad (MDOF) pueden representarse como la superposición lineal de sistemas SDOF.

El modelo básico de un sistema de un grado de libertad es el siguiente:

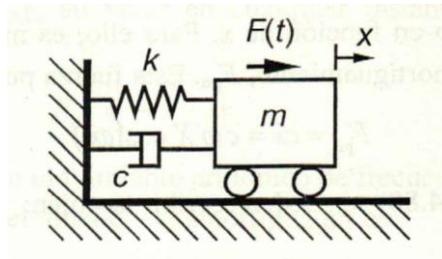


Figura 2-1: Modelo de un sistema de un grado de libertad [1]

donde $f(t)$ representa la fuerza, $x(t)$ el desplazamiento, m la masa, k la rigidez y c (o d) el amortiguamiento.

2.1.1 Sistemas no amortiguados

2.1.1.1 Vibración libre

En este caso se tiene $f(t)=0$, por lo que la ecuación de movimiento es la siguiente:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2.1)$$

La solución de la ecuación será del tipo $x(t) = X \cdot e^{i\omega \cdot t}$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento se obtiene:

$$(k - \omega^2 \cdot m) = 0 \quad (2.2)$$

de donde se obtiene la frecuencia natural del sistema::

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

2.1.1.2 Vibración forzada

Se considera ahora una excitación de la forma $f(t) = F \cdot e^{i\omega t}$, y una ecuación de movimiento:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = f(t) \quad (2.4)$$

La solución será del mismo tipo que para el caso de vibración libre: $x(t) = X \cdot e^{i\omega t}$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$(k - \omega^2 \cdot m) \cdot X \cdot e^{i\omega t} = F \cdot e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

A partir de esta ecuación se puede obtener la función de respuesta en frecuencia (FRF):

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 \cdot m)} \quad (2.6)$$

siendo $\alpha(\omega)$ una de las posibles formas de la FRF, llamada Receptancia. Más adelante se presentarán otras posibles formas de expresar la FRF, así como la relación entre las mismas.

2.1.2 Sistemas con amortiguamiento viscoso

Se define el amortiguamiento como el proceso de disipación de energía de un sistema durante la vibración. En sistemas sin fuerzas externas aplicadas (vibración libre) el amortiguamiento produce una reducción progresiva de la amplitud de la vibración hasta alcanzar la parada final.

El amortiguamiento puede estar producido por diferentes causas, y es común que en un mismo sistema vibratorio coexistan simultáneamente diferentes mecanismos de amortiguamiento. Por lo general, todos estos tipos de amortiguamiento se pueden agrupar en tres bloques: amortiguamiento fluido, amortiguamiento seco (o de Coulomb) y amortiguamiento estructural (o histerético).

El amortiguamiento fluido se origina por el paso de un fluido a través de unos orificios o por la interacción del sistema vibrante con el medio fluido en el que se encuentre inmerso. Dentro de este grupo se distinguen dos casos: amortiguamiento viscoso (cuando el movimiento del fluido es de régimen laminar) y amortiguamiento turbulento (cuando el movimiento del fluido es de régimen turbulento).

Por lo general son más frecuentes los sistemas en los que el amortiguamiento viscoso predomina sobre el turbulento, y además el viscoso es más sencillo de analizar analíticamente ya que la fuerza de amortiguamiento varía linealmente con la velocidad, algo que no ocurre en el amortiguamiento turbulento, donde la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad al cuadrado. Por ello, este apartado se centra en el estudio del amortiguamiento viscoso.

2.1.2.1 Vibración libre

Considerando $f(t)=0$ y añadiendo el amortiguamiento viscoso a la ecuación de movimiento, ésta queda:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2.7)$$

En este caso se debe tomar una solución de la forma $x(t) = X \cdot e^{s \cdot t}$, más general que para la estructura sin amortiguamiento, ya que ahora el exponente es complejo con parte real e imaginaria, mientras que antes solo tenía parte imaginaria. Sustituyendo se obtiene:

$$(m \cdot s^2 + c \cdot s + k) = 0 \quad (2.8)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se llega a la solución:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2 \cdot m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot m} = -\bar{\omega}_0 \cdot \zeta \pm i \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.9)$$

Siendo $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\cdot m}}$, donde ζ representa el factor de amortiguamiento.

La solución modal consta de un único modo de vibración con una frecuencia natural compleja:

$$x(t) = X \cdot e^{-\bar{\omega}_0 \cdot \zeta \cdot t} \cdot e^{i(\bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1-\zeta^2}) \cdot t} = X \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{i \cdot \omega_0' \cdot t} \quad (2.10)$$

Siendo $a = \bar{\omega}_0 \cdot \zeta$ y $\omega_0' = \bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$

Analizando esta expresión se observa que la forma de la función de respuesta depende del valor del factor de amortiguamiento. Se pueden presentar los siguientes casos:

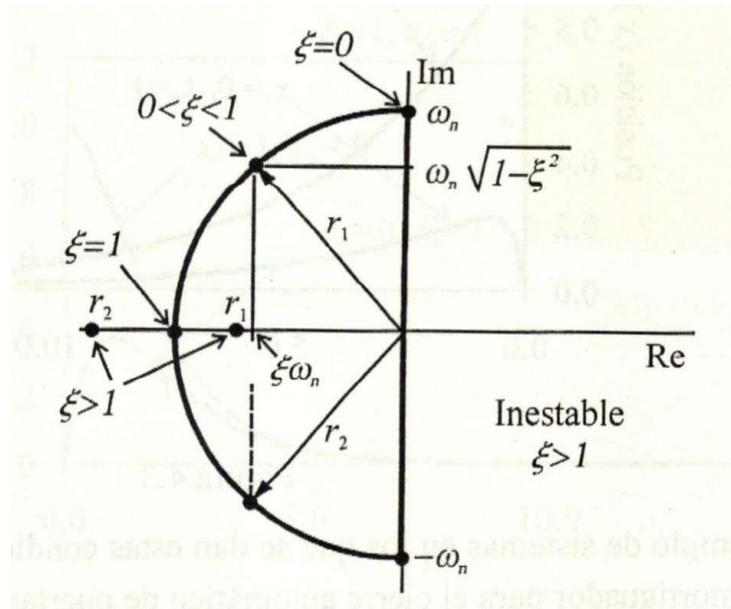


Figura 2-2: Tipos de respuesta en función del coeficiente de amortiguamiento [1]

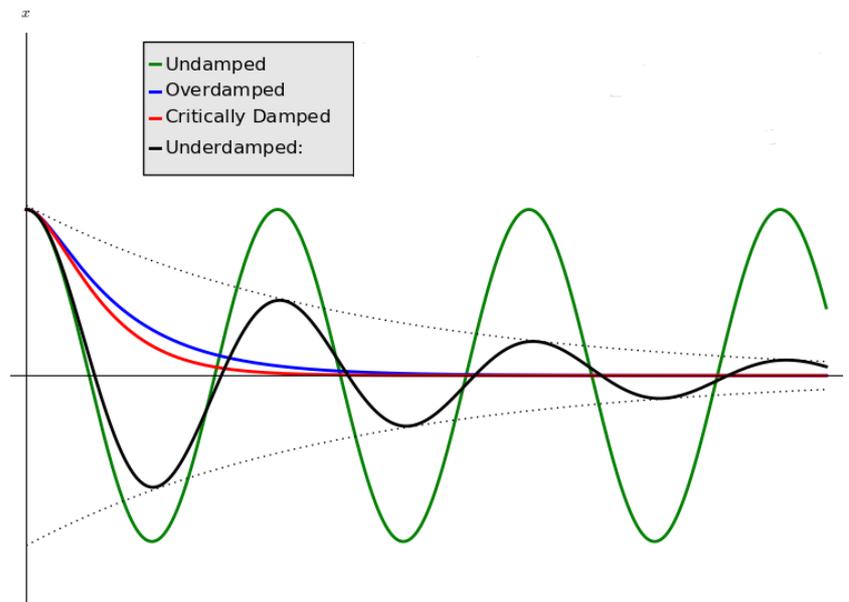


Figura 2-3: Tipos de respuesta de un sistema amortiguando [10]

- Si $\zeta = 0$ la respuesta es un movimiento armónico simple.
- Si $\zeta > 1$ la respuesta está formada por dos exponenciales decrecientes y tenderá asintóticamente a cero sin que se produzca vibración. Se dice que el sistema está sobreamortiguado.

- Si $\zeta = 1$ la respuesta también tenderá asintóticamente a cero sin vibración, pero de manera más rápida que en el caso anterior. Se dice que el sistema está críticamente amortiguado. Al valor de c que hace $\zeta = 1$ se le denomina coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$1 = \frac{c_{cr}}{2 \cdot m \cdot \omega_n} = \frac{c_{cr}}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} \quad (2.11)$$

- Si $0 < \zeta < 1$ se dice que el sistema está subamortiguado. La respuesta consta de un movimiento armónico, de frecuencia ω_d , modulado por una exponencial decreciente. ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada y tiene la siguiente expresión:

$$\omega_d = \bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.12)$$

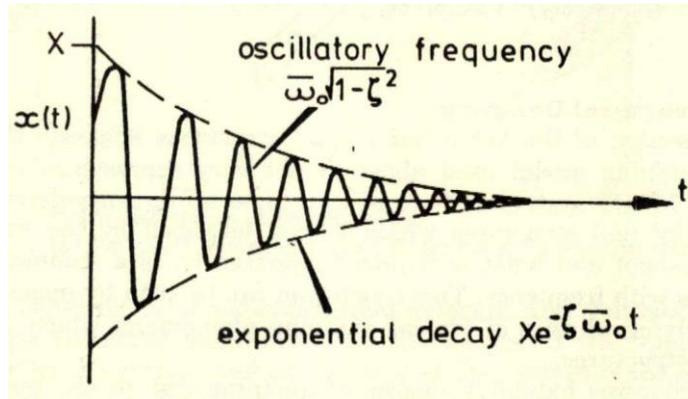


Figura 2-4: Respuesta en el tiempo de un sistema subamortiguado [6]

2.1.2.2 Vibración forzada

Tomando una fuerza de excitación $f(t) = F \cdot e^{i\omega t}$, la ecuación de movimiento queda de la siguiente manera:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t) \quad (2.13)$$

En este caso, la solución de la ecuación diferencial es de la forma $x(t) = X \cdot e^{i\omega t}$, y sustituyendo se llega a:

$$(-\omega^2 \cdot m + i \cdot \omega \cdot c + k) \cdot X \cdot e^{i\omega t} = F \cdot e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

de donde se puede obtener fácilmente la expresión de la receptancia:

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot (\omega \cdot c)} \quad (2.15)$$

A diferencia de lo que ocurría en el caso en el que el sistema no presentaba amortiguamiento, la receptancia es ahora compleja, y contiene información de la magnitud y de la fase:

$$|\alpha(\omega)| = \frac{|X|}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + (\omega \cdot c)^2}} \quad (2.16)$$

$$\arg(\alpha(\omega)) = \arg(X) - \arg(F) = \tan^{-1} \frac{-\omega \cdot c}{k - \omega^2 \cdot m} \quad (2.17)$$

2.1.3 Amortiguamiento estructural o hysterético

El amortiguamiento estructural se produce debido al rozamiento interno del material al sufrir deformación. Este fenómeno puede ocurrir en cualquier material, incluso en los que se considera que tienen comportamiento elástico.

El rozamiento interno provoca que durante la deformación aparezca un desfase entre la fuerza aplicada y el desplazamiento producido, lo que se conoce como ciclo de histéresis.

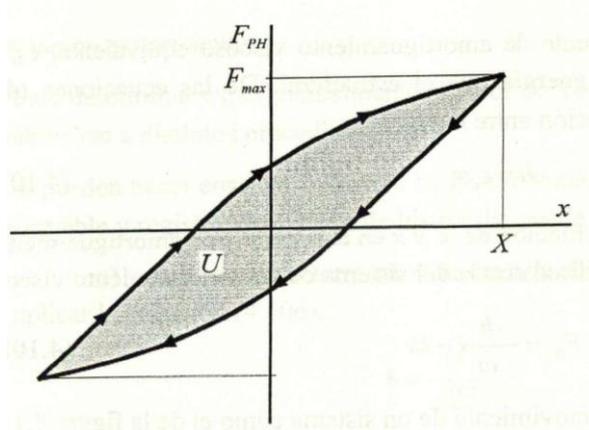


Figura 2-5: Ciclo de histéresis [1]

El análisis de este tipo de sistemas se suele realizar únicamente en situaciones de vibración forzada, y su resolución se lleva a cabo definiendo previamente el coeficiente de amortiguamiento estructural como:

$$d = c_e \cdot \omega \quad (2.18)$$

Entonces se tiene:

$$(-\omega^2 \cdot m + k + i \cdot d) \cdot X \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = F \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.19)$$

$$\frac{X}{F} = \alpha(\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot (d)} \quad (2.20)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1/k}{(1 - (\omega/\bar{\omega}_o)^2 + i \cdot \eta)} \quad (2.21)$$

donde η se define como el factor de pérdida

$$\eta = 2 \cdot \zeta_e \quad (2.22)$$

2.1.4 Amortiguamiento seco o de Coulomb

El amortiguamiento seco es el debido a la disipación de energía producida por las fuerzas de rozamiento que aparecen entre dos superficies que deslizan durante la vibración.

El comportamiento de este tipo de sistemas está modelado por la ley de Coulomb, de manera que:

$$F_r = -\mu \cdot N \cdot \text{signo}(\dot{x}) = -\mu \cdot N \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.23)$$

siendo N la fuerza normal entre las superficies y μ el coeficiente de rozamiento. Se observa que la fuerza de rozamiento actúa paralela a las superficies de rozamiento y en sentido contrario a la velocidad relativa de las superficies.

Planteando equilibrio de fuerzas se obtiene la ecuación de movimiento:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = -\mu \cdot N \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.24)$$

Esta ecuación es no lineal, pero se puede transformar en dos ecuaciones lineales, de manera que el estudio de estos sistemas se hace por tramos.

Cuando $\dot{x} > 0$:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = -\mu \cdot N \quad (2.25)$$

Cuando $\dot{x} < 0$:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = \mu \cdot N \quad (2.26)$$

2.2. Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF) en sistemas de 1 g.d.l. (SDOF)

Las funciones de respuesta en frecuencia muestran la relación entre la fuerza de excitación y la respuesta del sistema. Hay un total de 6 formas de expresar FRFs, dependiendo de la variable que se tome como respuesta del sistema (posición, velocidad o aceleración) y de si se toma el cociente entre la respuesta y la excitación o su inversa.

En epígrafes anteriores ya se ha definido la receptancia como el cociente entre la posición y la fuerza, pero sin embargo, la FRF más utilizada es la acelerancia (cociente entre la aceleración y la fuerza), ya que en la práctica se suelen tomar medidas experimentales de las aceleraciones.

A continuación se definen las 6 formas de FRF y la relación entre las mismas:

- Receptancia.

$$\alpha(\omega) = \frac{X}{F} \quad (2.27)$$

- Movilidad.

$$Y(\omega) = \frac{V}{F} \quad (2.28)$$

Para vibraciones sinusoidales es fácil relacionar la receptancia y la movilidad:

$$x(t) = X \cdot e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = V \cdot e^{i\omega t} = i \cdot \omega \cdot X \cdot e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

$$Y(\omega) = \frac{V}{F} = i \cdot \omega \cdot \frac{X}{F} = i \cdot \omega \cdot \alpha(\omega); \Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = \omega \cdot |\alpha(\omega)| \\ \arg(Y) = \theta_Y = \theta_\alpha + 90^\circ \end{cases} \quad (2.31)$$

- Acelerancia.

$$A(\omega) = \frac{A}{F} = -\omega^2 \cdot \alpha(\omega) \quad (2.32)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = A \cdot e^{i\omega t} \quad (2.33)$$

- FRFs inversas: Rigidez dinámica (F/X), Impedancia mecánica (F/V) y Masa aparente (F/A)

2.3. Sistemas de Varios Grados de Libertad (MDOF) No Amortiguados

La ecuación general que define este tipo de sistemas es la siguiente:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.34)$$

siendo:

N: Número de grados de libertad del sistema

[M]: Matriz de masa NxN

[K]: Matriz de rigidez NxN

{x(t)}: Vector de desplazamientos Nx1

$\{f(t)\}$: Vector de fuerzas Nx1

2.3.1. Vibración libre

Considerando $\{f(t)\}=\{0\}$, la ecuación de movimiento queda:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{0\} \quad (2.35)$$

La solución de dicho sistema de ecuaciones diferenciales es de la forma $\{x(t)\} = \{X\} \cdot e^{i\omega t}$, siendo $\{X\}$ un vector de amplitudes complejas independientes del tiempo. Teniendo en cuenta que $\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 \cdot \{X\} \cdot e^{i\omega t}$ y sustituyendo, se llega a:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{X\} \cdot e^{i\omega t} = \{0\} \quad (2.36)$$

Las únicas soluciones no triviales de esta ecuación son las que satisfacen:

$$\det|[K] - \omega^2 \cdot [M]| = 0 \quad (2.37)$$

De esta condición se obtienen N valores de ω^2 ($\bar{\omega}_1^2, \dots, \bar{\omega}_r^2, \dots, \bar{\omega}_N^2$) que se corresponden con las frecuencias naturales del sistema elevadas al cuadrado.

Sustituyendo cada uno de estos valores en la ecuación (2.36) se obtiene $\{\psi\}_r$, que es el modo de vibración correspondiente a la frecuencia natural $\bar{\omega}_r$.

La solución completa se puede expresar en dos matrices NxN: $[\cdot \bar{\omega}_r^2 \cdot]$ y $[\Psi]$. La matriz de frecuencias naturales (autovalores) es única para un sistema dado, mientras que la matriz de los modos de vibración (autovectores) depende de un factor de escala, que afecta a su amplitud pero no a su forma.

2.3.2. Propiedades de ortogonalidad

El modelo modal cumple:

$$[\Psi]^T \cdot [M] \cdot [\Psi] = [m_r] \quad (2.38)$$

$$[\Psi]^T \cdot [K] \cdot [\Psi] = [k_r] \quad (2.39)$$

$$[\bar{\omega}_r^2] = [m_r]^{-1} \cdot [k_r] \quad (2.40)$$

Siendo m_r y k_r respectivamente la masa modal y la rigidez modal del modo r.

Como la matriz $[\Psi]$ no es única, los valores de m_r y k_r tampoco son únicos. Sin embargo el cociente k_r/m_r sí es único, y es igual a $\bar{\omega}_r^2$.

El proceso de normalización más extendido es el que se conoce como normalización respecto a la masa. La matriz de autovectores normalizada, $[\Phi]$, cumple:

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = [I] \quad (2.41)$$

$$[\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = [\bar{\omega}_r^2] \quad (2.42)$$

La relación entre el autovector normalizado respecto a la masa del modo r, $\{\phi\}_r$, y el autovector del modo r en su forma general, $\{\psi\}_r$, es:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \{\psi\}_r ; \text{ donde } m_r = \{\psi\}_r^T \cdot [M] \cdot \{\psi\}_r \quad (2.43)$$

$$[\Phi] = [\Psi] \cdot [m_r^{-1/2}] \quad (2.44)$$

2.3.3. Vibración forzada

Considerando ahora una excitación $\{f(t)\} = \{F\} \cdot e^{i\omega t}$, donde $\{F\}$ es, al igual que $\{X\}$, un vector Nx1 de amplitudes complejas independientes del tiempo, la ecuación de movimiento queda:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.45)$$

La solución es del tipo $\{x(t)\} = \{X\} \cdot e^{i\omega t}$, con lo que, sustituyendo, se llega a:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{X\} \cdot e^{i\omega t} = \{F\} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.46)$$

$$\{X\} = ([K] - \omega^2 \cdot [M])^{-1} \cdot \{F\} \quad (2.47)$$

$$\{X\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F\} \quad ; \quad [\alpha(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2 \cdot [M]) \quad (2.48)$$

siendo $[\alpha(\omega)]$ la matriz de receptancia, de dimensiones $N \times N$. Un elemento general de la matriz, $\alpha_{jk}(\omega)$, se puede definir como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k}; \quad F_m = 0; \quad m = 1, N; \neq k \quad (2.49)$$

A partir de la expresión (2.48) se puede determinar el valor de los elementos de la matriz $[\alpha(\omega)]$ para cualquier frecuencia. Sin embargo este proceso requiere invertir matrices para cada frecuencia a estudiar, por lo que resulta costoso para sistemas con un elevado número de grados de libertad, e ineficiente cuando sólo se esté interesado en conocer algunos de los elementos de la matriz.

Por ello, se suele proceder de otra forma, usando las propiedades modales en vez de las propiedades del sistema.

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2 \cdot [M]) \quad (2.50)$$

Premultiplicando por $[\Phi]^T$ y multiplicando por $[\Phi]$ a ambos lados de la igualdad:

$$[\Phi]^T \cdot ([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot [\Phi] = [\Phi]^T \cdot [\alpha(\omega)]^{-1} \cdot [\Phi] \quad (2.51)$$

Teniendo en cuenta la definición de la matriz de autovectores normalizada respecto a la masa:

$$[(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)] = [\Phi]^T \cdot [\alpha(\omega)]^{-1} \cdot [\Phi] \quad (2.52)$$

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \cdot [(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)]^{-1} \cdot [\Phi]^T \quad (2.53)$$

A partir de esta ecuación se observa que la matriz de receptancia $[\alpha(\omega)]$ es simétrica, lo que se conoce como principio de reciprocidad.

$$\alpha_{jk} = \frac{X_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{F_k}{X_j} \quad (2.54)$$

La ecuación (2.53) permite expresar cada término de la matriz de receptancia $\alpha_{jk}(\omega)$ como un sumatorio con tantos términos como modos de vibración tenga el sistema.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr}) \cdot (\phi_{kr})}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{jr}) \cdot (\psi_{kr})}{m_r \cdot (\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2} \quad (2.55)$$

Siendo ${}_r A_{jk}$ conocido como constante modal.

2.4. Sistemas de Varios Grados de Libertad (MDOF) con Amortiguamiento Proporcional

Para realizar el estudio de los sistemas amortiguados, resulta conveniente comenzar considerando un tipo de amortiguamiento que es especialmente sencillo de incorporar al análisis, conocido como amortiguamiento proporcional. La principal ventaja de añadir este tipo de amortiguamiento al análisis es que el comportamiento de la estructura es muy parecido al de la estructura sin amortiguamiento. De esta manera se obtienen los mismos modos de vibración y frecuencias naturales muy parecidas.

La ecuación de movimiento de un sistema MDOF, incluyendo la matriz de amortiguamiento viscoso queda:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.56)$$

La solución de esta ecuación es significativamente más compleja que la vista anteriormente para sistemas no amortiguados.

2.4.1. Amortiguamiento proporcional a la rigidez

En este apartado se considera el caso, más sencillo, en el que la matriz de amortiguamiento es directamente proporcional a la de rigidez.

$$[C] = \beta \cdot [K] \quad (2.57)$$

Pre y post-multiplicando la matriz de amortiguamiento como se hizo previamente con las matrices de masa y de rigidez se obtiene la matriz de amortiguamiento modal:

$$[\Psi]^T \cdot [C] \cdot [\Psi] = \beta \cdot [k_r] = [c_r] \quad (2.58)$$

donde los elementos c_r de la diagonal representan el amortiguamiento modal de los modos del sistema. Que esa matriz sea diagonal implica que los modos del sistema sin amortiguamiento son iguales a los modos del sistema amortiguado (siempre que se considere este tipo particular de amortiguamiento). Esto se puede demostrar partiendo de la ecuación de movimiento para el caso de vibración libre y pre y post-multiplicando toda la ecuación por la matriz $[\Psi]$.

$$[m_r] \cdot \{\ddot{p}\} + [c_r] \cdot \{\dot{p}\} + [k_r] \cdot \{p\} = \{0\} \quad ; \quad \text{siendo } \{p\} = [\Psi]^{-1} \cdot \{x\} \quad (2.59)$$

De este sistema matricial de ecuaciones se puede extraer la ecuación r -ésima, que resulta ser análoga a la de un sistema SDOF.

$$m_r \cdot \ddot{p}_r + c_r \cdot \dot{p}_r + k_r \cdot p_r = 0 \quad (2.60)$$

Procediendo tal y como se hizo en el apartado 2.1.2:

$$\omega'_r = \bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad ; \quad \bar{\omega}_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad ; \quad \zeta_r = \frac{c_r}{2 \cdot \sqrt{k_r \cdot m_r}} = \frac{c_r}{2 \cdot m_r \cdot \bar{\omega}_r} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \bar{\omega}_r \quad (2.61)$$

$$a_r = \zeta_r \cdot \bar{\omega}_r = \frac{\beta}{2} \quad (2.62)$$

Para obtener la expresión de la receptancia en el caso de vibración forzada se procede como se hizo en el apartado 2.3.3:

$$[\alpha(\omega)] = [K + i \cdot \omega \cdot C - \omega^2 \cdot M]^{-1} \quad (2.63)$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{jr}) \cdot (\psi_{kr})}{(k_r - \omega^2 \cdot m_r) + i \cdot (\omega \cdot c_r)} \quad (2.64)$$

Se obtiene una expresión parecida a la del caso sin amortiguamiento, solo que ahora el denominador es complejo debido al amortiguamiento.

2.4.2. Forma general del amortiguamiento proporcional

Se considera ahora un amortiguamiento proporcional algo más general que el anterior, de forma que:

$$[C] = \beta \cdot [K] + \gamma[M] \quad (2.65)$$

En este caso se verifica que:

$$\omega'_r = \bar{\omega}_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad ; \quad \zeta_r = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \bar{\omega}_r + \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\bar{\omega}_r} \quad ; \quad [\Psi_{no \text{ amortiguado}}] = [\Psi_{amortiguado}] \quad (2.66)$$

Además se puede proceder de la misma forma para definir el amortiguamiento histerético proporcional:

$$[D] = \beta \cdot [K] + \gamma \cdot [M] \quad (2.67)$$

$$\lambda_r^2 = \bar{\omega}_r^2 \cdot (1 + i \cdot \eta_r) \quad ; \quad \bar{\omega}_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad ; \quad \eta_r = \beta + \frac{\gamma}{\bar{\omega}_r^2} \quad (2.68)$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{jr}) \cdot (\psi_{kr})}{(k_r - \omega^2 \cdot m_r) + i \cdot \eta_r \cdot k_r} \quad (2.69)$$

Los modos de vibración son iguales a los del sistema no amortiguado, y los autovalores son complejos.

2.5. Sistemas de Varios Grados de Libertad (MDOF) con Amortiguamiento Histerético

2.5.1. Vibración libre

La ecuación de movimiento de un sistema MDOF con amortiguamiento estructural, en vibración libre (es decir $\{f(t)=0\}$) es la siguiente [13]:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [K] \cdot \{x\} + i \cdot [D] \cdot \{x\} = \{0\} \quad (2.70)$$

Considerando que la solución es de la forma:

$$\{x\} = \{X\} \cdot e^{i \cdot \lambda \cdot t} \quad \text{con } \lambda \text{ complejo} \quad (2.71)$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación de movimiento, se llega a un problema de autovalores y autovectores, que tiene como resultado dos matrices (una de autovalores y otra de autovectores), ambas complejas.

El eigenvalor r-ésimo se puede escribir como:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2 \cdot (1 + i \cdot \eta_r) \quad (2.72)$$

Siendo η_r el factor de pérdida y ω_r la frecuencia natural (que no tiene que coincidir con la que se obtendría para el sistema sin amortiguamiento).

Que los modos de vibración sean complejos conlleva que éstos contienen información de la magnitud y de la fase. Sin embargo, en este caso, no hay tanta diferencia con el caso no amortiguado, ya que la fase puede tomar los valores 0° o 180° , de manera que éstos pueden ser expresados de manera más simple como números reales.

La solución, como ocurría en el caso de sistemas no amortiguados, posee propiedades de ortogonalidad:

$$[\Psi]^T \cdot [M] \cdot [\Psi] = [m_r] \quad (2.73)$$

$$[\Psi]^T \cdot [K + i \cdot D] \cdot [\Psi] = [k_r] \quad (2.74)$$

La masa modal y el amortiguamiento modal, que ahora son complejos, dependen de la normalización, sin embargo, el cociente de ambos es constante.

$$\lambda_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.75)$$

Nuevamente, se puede realizar una normalización respecto a la masa de los eigenvectores:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \{\psi\}_r \quad (2.76)$$

2.5.2. Vibración forzada

Partiendo de la ecuación de movimiento y de la suposición de la forma de la solución se llega a:

$$([K] + i \cdot [D] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{X\} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \{F\} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.77)$$

$$\{X\} = ([K] + i \cdot [D] - \omega^2 \cdot [M])^{-1} \cdot \{F\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F\} \quad (2.78)$$

A partir de estas expresiones se sigue un proceso análogo al desarrollado en el apartado 2.4.3., de manera que la receptancia quede expresada de una forma más eficiente desde un punto de vista numérico.

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \cdot [(\lambda_r^2 - \omega^2)]^{-1} \cdot [\Phi]^T \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr}) \cdot (\phi_{kr})}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2} = \sum_{r=1}^N \frac{(\psi_{jr}) \cdot (\psi_{kr})}{m_r \cdot (\bar{\omega}_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2)} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{r A_{jk}}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2}\end{aligned}\quad (2.80)$$

El denominador, al igual que ocurría en el caso de amortiguamiento proporcional, es complejo. La diferencia entre ambos modelos, es que ahora el numerador también es complejo (debido a que los autovectores también lo son).

2.6. Sistemas de Varios Grados de Libertad (MDOF) con Amortiguamiento Viscoso

2.6.1. Vibración libre

Tomando $\{f(t)\}=0$, la ecuación matricial de movimiento que gobierna este tipo de sistemas es la siguiente:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{0\} \quad (2.81)$$

Considerando que la solución es de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\} \cdot e^{s \cdot t} \quad (2.82)$$

Tras operar y sustituir en la ecuación de movimiento se llega a:

$$(s^2 \cdot [M] + s \cdot [C] + [K]) \cdot \{X\} = \{0\} \quad (2.83)$$

Este sistema matricial de ecuaciones constituye un problema complejo de autovalores y autovectores, del que se obtienen $2N$ autovectores (siendo N el número de grados de libertad), apareciendo los mismos como pares complejos conjugados. Asociado a cada uno de estos pares de autovalores, se puede obtener un par de autovectores conjugados. El resultado del sistema matricial se puede expresar de forma compacta de la siguiente forma:

$$s_r, s_r^*, \{\psi\}_r, \{\psi\}_r^* ; \text{ para } r = 1, \dots, N \quad (2.84)$$

El autovalor r -ésimo se puede expresar de la forma:

$$s_r = \omega_r \cdot \left(-\zeta_r + i \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2} \right) \quad (2.85)$$

donde ω_r es la frecuencia natural y ζ_r es el factor de amortiguamiento de ese modo.

Este sistema también posee propiedades de ortogonalidad, pero en este caso son diferentes a las vistas previamente. Cualquier autovalor y su correspondiente autovector satisfacen:

$$(s_r^2 \cdot [M] + s_r \cdot [C] + [K]) \cdot \{\psi\}_r = \{0\} \quad (2.86)$$

Premultiplicando por $\{\psi\}_q^T$ se obtiene:

$$\{\psi\}_q^T \cdot (s_r^2 \cdot [M] + s_r \cdot [C] + [K]) \cdot \{\psi\}_r = \{0\} \quad (2.87)$$

Por otra parte, tomando en un principio el autovalor s_q y su autovector asociado, y trasponiendo la ecuación posteriormente:

$$(s_q^2 \cdot [M] + s_q \cdot [C] + [K]) \cdot \{\psi\}_q = \{0\} \quad (2.88)$$

$$\{\psi\}_q^T \cdot (s_q^2 \cdot [M] + s_q \cdot [C] + [K]) = \{0\}^T \quad (2.89)$$

Mediante la ecuación (2.89) post-multiplicada por $\{\psi\}_r$ y la ecuación (2.87) se obtienen las dos ecuaciones de ortogonalidad:

$$(s_r + s_q) \cdot \{\psi\}_q^T \cdot [M] \cdot \{\psi\}_r + \{\psi\}_q^T \cdot [C] \cdot \{\psi\}_r = 0 \quad (2.90)$$

$$s_r \cdot s_q \cdot \{\psi\}_q^T \cdot [M] \cdot \{\psi\}_r - \{\psi\}_q^T \cdot [K] \cdot \{\psi\}_r = 0 \quad (2.91)$$

Desarrollando matemáticamente el caso en el que los modos r y q sean un par conjugado se obtiene:

$$2 \cdot \omega_r \cdot \zeta_r = \frac{\{\psi\}_r^H \cdot [C] \cdot \{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H \cdot [M] \cdot \{\psi\}_r} = \frac{c_r}{m_r} \quad (2.92)$$

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi\}_r^H \cdot [K] \cdot \{\psi\}_r}{\{\psi\}_r^H \cdot [M] \cdot \{\psi\}_r} = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.93)$$

siendo ω_r la frecuencia natural, $\{\psi\}_r^H$ la transpuesta hermitiana y m_r , k_r , y c_r la masa modal, la rigidez modal y el amortiguamiento modal respectivamente.

2.6.2. Vibración forzada

La ecuación de movimiento de este tipo de sistemas es la siguiente:

$$[M] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{x}(t)\} + [K] \cdot \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.94)$$

Asumiendo que la solución del sistema matricial de ecuaciones es de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X\} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.95)$$

Tras operar y sustituir en la ecuación de movimiento se llega a:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2 \cdot [M] + i \cdot \omega \cdot [C])^{-1} \cdot \{F\} \quad (2.96)$$

Esta ecuación presenta la relación entre las fuerzas y los desplazamientos, por lo que la obtención de la expresión de la matriz de receptancia es inmediata. Sin embargo, tal y como se discutió en el estudio de sistemas MDOF no amortiguados, esta forma de expresar la matriz de receptancia no es conveniente para su posterior resolución numérica. Es por ello por lo que se vuelve a buscar expresar la receptancia como un sumatorio de términos, solo que en este caso la forma de los autovalores dificulta el proceso.

Para ello es necesario definir un vector de coordenadas, $\{u\}$, de dimensiones $2N \times 1$, que contiene la velocidad y el desplazamiento, y posteriormente reescribir la ecuación diferencial (2.81) para el caso de vibración libre del apartado anterior.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

$$[C: M] \cdot \{\dot{u}\} + [K: 0] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (2.98)$$

En este punto se tienen N ecuaciones y $2N$ incógnitas, por lo que es necesario añadir otra igualdad matricial para cerrar el problema:

$$[M: 0] \cdot \{\dot{u}\} + [0: -M] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (2.99)$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\dot{u}\} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \cdot \{u\} = \{0\} \quad (2.100)$$

$$[A] \cdot \{\dot{u}\} + [B] \cdot \{u\} = \{0\} \quad (2.101)$$

Con esta ecuación ya se puede proceder como se había hecho hasta ahora, es decir, suponiendo la forma de la solución (en este caso $\{u(t)\} = \{U\} \cdot e^{s \cdot t}$), sustituyendo, y resolviendo el problema de autovalores y autovectores. En este caso se obtienen $2N$ autovalores con $2N$ autovectores asociados, designados por s_r y $\{\theta\}_r$ respectivamente. Estos autovalores y autovectores serán, por lo general, complejos en pares conjugados.

$$(s_r \cdot [A] + [B]) \cdot \{\theta\}_r = 0 \quad ; \quad r = 1, \dots, 2N \quad (2.102)$$

Esta solución también posee propiedades de ortogonalidad:

$$[\theta]^T \cdot [A] \cdot [\theta] = [a_r] \quad (2.103)$$

$$[\theta]^T \cdot [B] \cdot [\theta] = [b_r] \quad (2.104)$$

$$s_r = \frac{b_r}{a_r} \quad ; \quad r = 1, \dots, 2N \quad (2.105)$$

Añadiendo a la ecuación (2.98) el vector $\{P\}$ de fuerzas aplicadas es posible analizar la vibración forzada. Además, realizando un desarrollo análogo al realizado en el apartado 2.4.3., es posible llegar a la expresión de un término genérico de la matriz de receptancias como un sumatorio de términos.

$$\{P\}_{2Nx1} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ \dots \\ i \cdot \omega \cdot X \end{Bmatrix}_{2Nx1} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\theta\}_r^T \cdot \{P\} \cdot \{\theta\}_r}{a_r \cdot (i \cdot \omega - s_r)} \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta que tanto los autovalores como los autovectores se obtienen en forma de pares conjugados el sumatorio se puede reescribir como:

$$\begin{Bmatrix} X \\ \dots \\ i \cdot \omega \cdot X \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\{\theta\}_r^T \cdot \{P\} \cdot \{\theta\}_r}{a_r \cdot (i \cdot \omega - s_r)} + \frac{\{\theta\}_r^H \cdot \{P\} \cdot \{\theta^*\}_r}{a_r^* \cdot (i \cdot \omega - s_r)} \right) \quad (2.108)$$

A partir de esta expresión se puede obtener el valor de un elemento genérico $\alpha(\omega)_{jk}$ de la matriz de receptancia, que relaciona la respuesta X_j con la fuerza F_k :

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{({}_rR_{jk}) + i \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right) \cdot ({}_rS_{jk})}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \zeta_r} \quad (2.109)$$

donde:

$$\{ {}_rR_k \} = 2 \cdot \left(\zeta_r \cdot Re\{ {}_rG_k \} - Im\{ {}_rG_k \} \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2} \right) \quad (2.110)$$

$$\{ {}_rS_k \} = 2 \cdot Re\{ {}_rG_k \} \quad (2.111)$$

$$\{ {}_rG_k \} = \left(\frac{\theta_{kr}}{a_r} \right) \cdot \{\theta\}_r \quad (2.112)$$

Para llegar a esta forma reducida de la expresión se ha tenido en cuenta que:

$$s_r = \omega_r \cdot \left(-\zeta_r + i \cdot \sqrt{1 - \zeta_r^2} \right) \quad (2.113)$$

3 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

ESTE capítulo comienza con una clasificación de todos los tipos de análisis modal experimental, con el que se pretende tener una visión general de los mismos. Seguidamente, nos centraremos en los métodos de un grado de libertad, comentando sus características, dificultades y limitaciones. Dentro de este tipo de análisis se desarrollarán en detalle tres de ellos: el Peak-Picking, el Circle-Fit y el Line-Fit, describiendo cómo llevarlos a cabo. Siguiendo los procedimientos desarrollados en este capítulo se crearán los archivos de Matlab capaces de extraer las propiedades modales de cualquier sistema a partir de medidas experimentales de sus respuestas en frecuencia, que se pondrán en práctica en los siguientes capítulos con un sistema en concreto.

3.1 Clasificación de los Tipos de Análisis

La primera posible clasificación hace referencia al dominio en el que se lleva a cabo el análisis. Aunque lo más común es realizar métodos de *curve-fitting* de las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF), también es posible aplicar estos métodos en el dominio del tiempo. Para ello se tiene en cuenta que la transformada de Fourier inversa de la FRF da como resultado la Función de Respuesta a Impulso (IRF), que también es una función característica del sistema.

Otra posible clasificación atiende al rango de frecuencias sobre el que se realizará cada análisis, y depende de si se extraen uno o varios modos al mismo tiempo. De esta manera se definen los métodos de un único grado de libertad (SDOF) y los métodos de varios grados de libertad (MDOF).

Por último, se distingue entre análisis en los que se considera una única FRF, y análisis en los que se consideran varias FRF, lo cual está directamente relacionado con cómo se lleven a cabo las medidas.

La manera más sencilla de obtener medidas experimentales de FRFs es la que se conoce como SISO (una entrada, una salida), de esta manera se obtiene un conjunto de FRFs, cada una de ellas obtenida individualmente (generalmente de forma secuencial).

En segundo lugar, se pueden obtener varias FRF simultáneamente en distintos puntos a partir de una excitación aplicada sobre un único punto. Es lo que se conoce como SIMO (una entrada, varias salidas).

Por último, se puede medir de forma simultánea la respuesta en varios puntos cuando la estructura es excitada en varios puntos al mismo tiempo. Esta manera de proceder se conoce como MIMO (varias entradas, varias salidas).

En resumen, las posibles clasificaciones son:

- Dependiendo del dominio considerado:
 - Dominio de la frecuencia (FRF)
 - Dominio del tiempo (IRF)

- Dependiendo del número de modos que se extraen al mismo tiempo:
 - Un grado de libertad (SDOF)
 - Varios grados de libertad (MDOF)

- Dependiendo del número de FRFs:
 - Una única FRF
 - Varias FRFs
 - Métodos Globales (SIMO)
 - Polirreferencia (MIMO)

3.2 Dificultades en el Análisis Modal Experimental

Al igual que ocurría en el análisis teórico, una de las dificultades que aparecen al realizar un análisis modal experimental está en decidir cómo modelar el efecto del amortiguamiento. Para ello, es necesario hacer algunas suposiciones, que en caso de no ser correctas pueden provocar errores significativos en la estimación de los parámetros modales (y no sólo en los parámetros del amortiguamiento).

Otro problema es debido al desconocimiento de cuántos modos hay en la FRF (o en el rango de frecuencias de la misma) que se va a estudiar. Mientras que en curvas dibujadas a partir de las expresiones teóricas se pueden reconocer fácilmente los picos, en curvas experimentales puede no verse tan claramente debido a los problemas típicos que aparecen en la toma de medidas, especialmente al ruido. El objetivo de los algoritmos de curve-fitting es minimizar el error entre la curva original y la resultante, y esto puede provocar que aparezcan más modos de los que hay realmente. La dificultad aparece a la hora de decidir cuáles de estos modos son reales y cuáles son ficticios.

3.3 Métodos de Un Grado de Libertad (SDOF)

3.3.1 Introducción

Los métodos SDOF de análisis modal no implican que el sistema bajo estudio deba tener un único grado de libertad, sino que analizan los modos por separado, de manera secuencial. La principal desventaja es que es difícil separar el comportamiento de dos modos de vibración si éstos no están lo suficientemente alejados entre sí.

Estos métodos basan su funcionamiento en la suposición de que cerca de una zona de resonancia el comportamiento está dominado por un único modo, siendo esta suposición más válida cuanto más alejadas estén las resonancias una de otra.

Partiendo de la expresión de la receptancia:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_s \cdot \omega_s^2} \quad (3.1)$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2} + \sum_{s=1; \neq r}^N \frac{sA_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_s \cdot \omega_s^2} \quad (3.2)$$

La suposición que se lleva a cabo para realizar estos métodos es que el segundo término es independiente de la frecuencia en un pequeño rango de frecuencias próximas a la frecuencia natural del modo r , por lo que:

$$\alpha_{jk}(\omega)_{\omega \approx \omega_r} \cong \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2} + rB_{jk} \quad (3.3)$$

3.3.2 Peak-Picking

El método de Peak-Picking es el más sencillo y directo de todos los disponibles para estimar frecuencias naturales, modos de vibración y parámetros modales a partir de medidas experimentales. Por el contrario, también es el que tiene el rango de aplicación más limitado. En primer lugar, se supone que toda la respuesta

es debida a un único modo de vibración, por lo que los demás son ignorados. Además, también resulta crítico el valor del amortiguamiento. Si éste es demasiado pequeño, las medidas experimentales no serán lo suficientemente precisas, y si es demasiado grande la respuesta en una zona de resonancia se verá influenciada por varios modos de vibración.

Aunque como se puede ver la aplicabilidad de este método es limitada, sigue siendo el método más común, ya que debido a su sencillez se aplica incluso a sistemas que no cumplen todos los requisitos como para que los resultados puedan considerarse válidos. Estos resultados, aún sin ser completamente correctos, se pueden utilizar como estimación inicial antes de iniciar otros métodos más sofisticados.

El método de Peak-Picking consta de los siguientes pasos:

- 1) En primer lugar, partiendo de la representación en forma de Bode de los resultados experimentales, se identifican los picos de la curva en la gráfica módulo frente a frecuencia de la FRF. La frecuencia a la que se produce uno de los picos se toma como la frecuencia natural ω_r de ese modo.
- 2) La amplitud que alcanza el pico de la función se denota como $|\hat{\alpha}|$. A partir de este valor, se caracterizan los *half-power points* como los puntos, a derecha e izquierda del máximo, cuyo módulo vale $|\hat{\alpha}|/\sqrt{2}$.

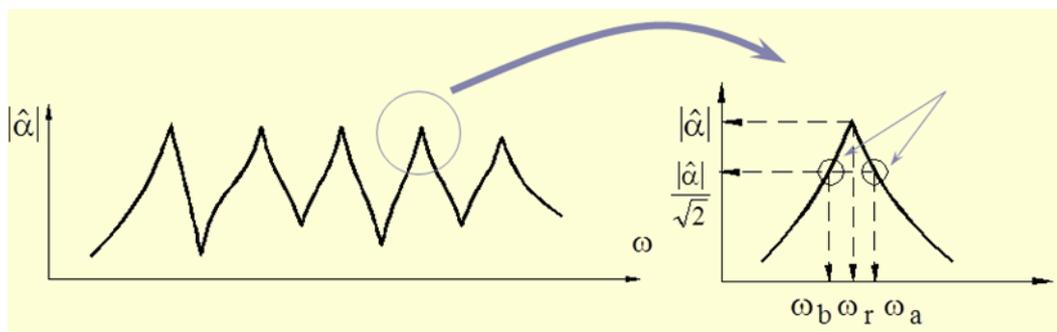


Figura 3-1: Método de Peak-Picking [11]

- 3) Una vez conocidas las frecuencias de los dos *half-power points* se puede obtener el amortiguamiento modal con la siguiente expresión:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2 \cdot \omega_r^2} \cong \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \quad (3.4)$$

$$2 \cdot \zeta_r = \eta_r \quad (3.5)$$

- 4) Por último, suponiendo que la respuesta en la zona de resonancia es debida a un único modo, se puede obtener el valor de la constante modal de dicho modo.

$$|\hat{\alpha}| = \frac{A_r}{\omega_r^2 \cdot \eta_r} \quad (3.6)$$

$$A_r = |\hat{\alpha}| \cdot \omega_r^2 \cdot \eta_r \quad (3.7)$$

Como se puede observar, la precisión de los resultados obtenidos mediante este método depende de la precisión de los resultados experimentales cerca de la zona de resonancia. Esto supone un problema, ya que precisamente éstas zonas son las más susceptibles de contener errores en la medición, especialmente para sistemas ligeramente amortiguados.

Por otra parte, solo se pueden obtener constantes modales reales, lo que implica que se puede suponer el modelo de amortiguamiento proporcional.

También existe una alternativa a este método, conocida como método de la parte real de la receptancia, que mejora los resultados para casos en los que las zonas de resonancia no estén claramente alejadas una de otra.

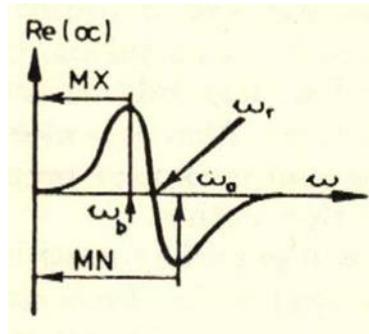


Figura 3-2: Método de la parte real de la receptancia [6]

3.3.3 Circle-Fit

3.3.3.1 Propiedades del círculo modal

La principal característica en la que se basa este método es que al representar el diagrama de Nyquist de la FRF de un sistema de un grado de libertad se obtiene una curva que se asemeja claramente a un círculo. De hecho, dependiendo del tipo de amortiguamiento que se considere, se puede seleccionar una de las posibles formas de la FRF de forma que ésta genere un círculo de forma exacta.

Para sistemas de varios grados de libertad, se observa que la representación en forma de Nyquist de la FRF produce una curva con distintas secciones que se asemejan a arcos de circunferencia en las proximidades de la zona de resonancia.

Para sistemas con amortiguamiento estructural se representa la receptancia, que es la que genera círculos exactos al ser representada en el plano complejo. Para sistemas con amortiguamiento viscoso la FRF que produce círculos de manera exacta es la movilidad.

En ambos casos el proceso a seguir es análogo a pesar de que la apariencia de las curvas sea significativamente diferente al estar una girada 90° respecto a la otra. Se va a realizar el desarrollo para el caso de amortiguamiento estructural, por lo que se parte de la expresión de la receptancia.

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 \cdot (1 - (\omega/\omega_r)^2 + i \cdot \eta_r)} \quad (3.8)$$

No se incluye en el numerador la constante modal, que lo que haría sería aumentar el tamaño del círculo (por el módulo de la constante modal) y girarlo (por el argumento de la constante modal).

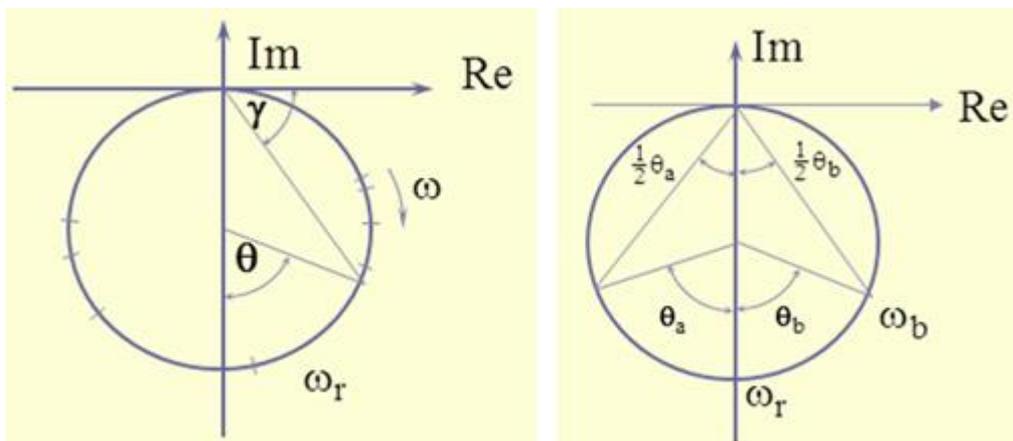


Figura 3-3: El círculo modal [11]

Para cualquier valor de la frecuencia, la curva cumple:

$$\tan(\gamma) = \frac{\eta_r}{1 - (\omega/\omega_r)^2} \quad (3.9)$$

$$\tan(90^\circ - \gamma) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - (\omega/\omega_r)^2}{\eta_r} \quad (3.10)$$

$$\omega^2 = \omega_r^2 \cdot \left(1 - \eta_r \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (3.11)$$

Derivando esta ecuación con respecto a θ y derivando posteriormente respecto a ω se llega a una propiedad importante a la hora de localizar la frecuencia natural, y es que la máxima separación entre 2 puntos experimentales consecutivos a lo largo del arco de la circunferencia se produce cuando la frecuencia es la frecuencia natural.

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = \frac{-\omega_r^2 \cdot \eta_r \cdot \left(1 - (\omega/\omega_r)^2\right)^2}{2 \cdot \eta_r^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\omega^2}{d\theta} \right) = 0 \quad \text{cuando } (\omega_r^2 - \omega^2) = 0 \quad (3.13)$$

Tomando dos puntos del círculo, uno con frecuencia ω_a mayor que la frecuencia natural y otro con frecuencia ω_b menor, se puede deducir la expresión de η_r que se introdujo en el apartado 3.3.2.

$$\tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) = \frac{1 - (\omega_b/\omega_r)^2}{\eta_r} \quad (3.14)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \frac{(\omega_a/\omega_r)^2 - 1}{\eta_r} \quad (3.15)$$

Por lo que:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2 \cdot \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (3.16)$$

Para el caso particular en el que estos dos puntos considerados sean los *half-power points*, es decir, $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$, la ecuación se simplifica.

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2 \cdot \omega_r^2} \quad (3.17)$$

Para amortiguamientos pequeños esta ecuación se puede aproximar como:

$$\eta_r \cong \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_r} \quad (3.18)$$

Una vez conocidos el factor de pérdida del modo y la frecuencia natural, ya sólo queda conocer la constante modal para que el modo quede completamente definido. Como se indicó al inicio del capítulo, la constante modal afecta a la representación del círculo modal escalándolo (por el módulo de la constante modal) y girándolo (por el argumento de la constante modal). De esta manera se puede obtener el módulo de la constante modal a partir del diámetro del círculo como:

$$rD_{jk} = \frac{|rA_{jk}|}{\omega_r^2 \cdot \eta_r} \quad (3.19)$$

Y el argumento se obtiene teniendo en cuenta que el círculo completo está girado de forma que el diámetro principal (el que pasa por el punto de frecuencia natural) está orientado un ángulo $\arg(rA_{jk})$ respecto al eje imaginario negativo.

Para sistemas con amortiguamiento viscoso, se parte de la expresión de la movilidad:

$$Y(\omega) = \frac{i \cdot \omega}{(k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot (\omega \cdot c)} \quad (3.20)$$

Y siguiendo un proceso análogo al del caso con amortiguamiento estructural se llega a:

$$\zeta_r \cong \frac{\omega_a - \omega_b}{2 \cdot \omega_r} \quad (3.21)$$

3.3.3.2 Descripción del método

Los pasos a seguir son los siguientes:

1) Seleccionar los puntos experimentales que se van a usar.

Observando el diagrama de Bode de la FRF se puede localizar la zona de resonancia de cada uno de los modos. Para uno de ellos, se toman varios puntos por encima y varios por debajo de la frecuencia a la que se produce el máximo. Se pueden encontrar distintas recomendaciones en la bibliografía, algunas más restrictivas que otras, sobre cuantos puntos tomar. Hay que tener presente que si se toman demasiados puntos es posible que estos estén influidos por otros modos de vibración. Una de las posibles recomendaciones a seguir es tomar al menos 6 puntos, aunque lo óptimo sería poder dibujar tres cuartas partes del círculo.

2) Aplicar un algoritmo de circle-fitting y comprobar la calidad de dicho ajuste.

Dentro de los múltiples algoritmos de circle-fitting disponibles se selecciona el que mejor funcione para los datos experimentales seleccionados, ya que por ejemplo algunos algoritmos están optimizados para situaciones en las que los puntos experimentales cubran un pequeño arco de la circunferencia completa, mientras que otros funcionan mejor en otras circunstancias. En este paso se obtiene el centro y el radio del círculo, así como un factor que da una idea de la validez de la aproximación.

3) Localizar la frecuencia natural.

Ya se ha comentado que una de las características del círculo modal es que, suponiendo que los puntos experimentales están medidos tomando un incremento constante de frecuencia, cada uno de estos puntos, representados en el plano complejo, estará más alejado del punto que le precede y del que le sucede cuanto más próxima sea la frecuencia de ese punto a la frecuencia natural.

Partiendo de la representación gráfica de estos puntos, y del centro del círculo de ajuste, puede hallarse el ángulo existente entre todos los pares de puntos consecutivos, de manera que la frecuencia natural se encontrará entre la frecuencia de los dos puntos que estén separados por el mayor ángulo.

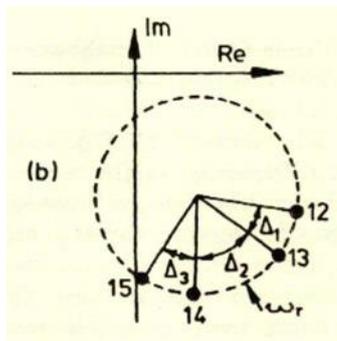


Figura 3-4: Localización de la frecuencia natural mediante circle-fit [6]

Además de ésta, existen otras formas de hallar la frecuencia natural a partir de la representación del círculo modal, de manera que la frecuencia natural se puede definir como:

- La frecuencia de máxima respuesta.
- La frecuencia con la mayor receptancia imaginaria (en valor absoluto).
- La frecuencia para la que la parte real de la receptancia valga cero.

En la siguiente figura se muestra la frecuencia natural de un sistema dado obtenida a partir de cada una de estas alternativas:

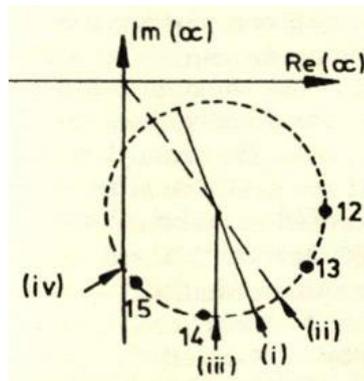


Figura 3-5: Distintas formas de localizar la frecuencia natural mediante circle-fit [6]

Se observa que entre cada una de ellas puede haber una diferencia significativa. Además hay que considerar que para calcular tanto el factor de pérdida como el módulo de la constante modal, en la ecuación aparece la frecuencia natural al cuadrado, por lo que el error en el cálculo de estos parámetros puede llegar a ser realmente significativo.

4) Calcular los coeficientes de pérdida.

Utilizando la ecuación (3.22) se puede hallar el coeficiente de pérdida empleando cualquier par de puntos siempre que estos cumplan que uno tenga frecuencia mayor que la frecuencia natural y otro menor. Por tanto es posible obtener multitud de estimaciones de η_r para un único círculo modal. Idealmente todos los valores de η_r obtenidos deberían ser idénticos, por lo que este hecho se puede emplear como criterio para verificar la validez de las medidas tomadas. Desviaciones menores a un 5% se pueden considerar válidas, y desviaciones mayores del 20% son un indicativo de que las medidas no tienen la validez deseada.

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2 \cdot \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (3.22)$$

5) Por último, se calcula la constante modal (tanto el módulo como el argumento), a partir del diámetro del círculo y de los parámetros modales ya calculados

$${}_r D_{jk} = \frac{|{}_r A_{jk}|}{\omega_r^2 \cdot \eta_r} \quad (3.23)$$

Además, si se quiere reconstruir la curva de la FRF usando la expresión teórica de la misma (3.3) sustituyendo en ella los valores de frecuencia natural, constante modal y coeficiente de pérdida recién calculados, es necesario hallar también la contribución del resto de modos al modo que se está estudiando. Para ello se calcula el valor de ${}_r B_{jk}$ como la distancia entre el origen y el extremo del diámetro principal opuesto al de frecuencia natural.

3.3.4 Line-Fit (o método inverso)

Este método es una alternativa al método de circle-fitting, y utiliza alguno de los conceptos presentados en dicho método.

En un principio este método se basaba en que si una función representada en el plano complejo genera una curva circular, la inversa de dicha función produce una línea en el plano complejo.

Esto se puede verificar partiendo de la ecuación de la receptancia para un sistema con amortiguamiento estructural y observando la forma que toma su inversa:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{(k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot d} = \frac{(k - \omega^2 \cdot m) - i \cdot d}{(k - \omega^2 \cdot m)^2 + d^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{\alpha(\omega)} = (k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot d \quad (3.25)$$

A partir de los resultados experimentales se puede obtener una estimación del coeficiente de amortiguamiento como la intersección de la línea de ajuste con el eje imaginario, y analizando la parte real de estos puntos se pueden estimar los parámetros de masa y rigidez.

Este método es aplicable a sistemas con modos de vibración reales y claramente separados entre sí. La principal ventaja de este método es que no es tan sensible como otros a la exactitud de las medidas experimentales cerca de la zona de resonancia.

La forma más extendida del método de line-fit presenta ciertas diferencias con respecto a esta primera aproximación al método. En este caso se representan dos gráficas por separado, una con la parte real de la inversa de la FRF frente a la frecuencia al cuadrado y otra con la parte imaginaria de la inversa de la FRF frente a la frecuencia al cuadrado. Se sabe que para sistemas de un único grado de libertad ambas curvas resultan ser líneas rectas

$$\frac{1}{\alpha(\omega)} = (k - \omega^2 \cdot m) + i \cdot d \quad (3.26)$$

Sin embargo, para sistemas de varios grados de libertad esta relación no se cumple, por lo que para poder aplicar el método de line-fit a sistemas MDOF será necesario definir una nueva FRF, ya que partiendo de la ecuación (3.3) se observa que el término rB_{jk} hace que las propiedades de la inversa de sistemas SDOF no se cumplan para sistemas MDOF.

La nueva FRF necesaria para llevar a cabo el análisis se define como la diferencia entre la FRF original y el valor de la FRF original para un valor concreto (conocido como frecuencia fijada Ω) dentro del intervalo de frecuencias a estudiar.

$$\alpha'_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}(\omega) - \alpha_{jk}(\Omega) \quad (3.27)$$

La FRF inversa que se empleará en el análisis modal se define por tanto como:

$$\Delta(\omega) = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\alpha'_{jk}(\omega)} = Re(\Delta) + i \cdot Im(\Delta) \quad (3.28)$$

$$Re(\Delta) = m_R \cdot \omega^2 + c_R \quad (3.29)$$

$$Im(\Delta) = m_I \cdot \omega^2 + c_I \quad (3.30)$$

Utilizando estas expresiones puede aplicarse la primera parte del método, que consiste en seleccionar una frecuencia fija Ω_j y calcular los valores de $\Delta(\omega)$ para todas las frecuencias (excepto para la frecuencia fijada). Con estos datos se pueden representar dos curvas, $Re(\Delta)$ frente a ω^2 e $Im(\Delta)$ frente a ω^2 , y obteniendo la recta de mejor ajuste para cada uno de estos dos conjuntos de puntos se pueden obtener las pendientes de ambas rectas, $m_R(\Omega_j)$ y $m_I(\Omega_j)$. Este proceso debe repetirse tantas veces como posibles frecuencias fijadas Ω_j haya.

Por otra parte se puede observar que las pendientes m_R y m_I están relacionadas con los valores de Ω_j de la siguiente forma:

$$m_R = n_R \cdot \Omega^2 + d_R \quad (3.31)$$

$$m_I = n_I \cdot \Omega^2 + d_I \quad (3.32)$$

Y que estos nuevos cuatro parámetros están relacionados con los parámetros modales que se pretende obtener:

$$p = \frac{n_I}{n_R} ; \quad q = \frac{d_I}{d_R} \quad (3.33)$$

$$\eta_r = \frac{q - p}{1 + p \cdot q} \quad (3.34)$$

$$\omega_r^2 = \frac{d_R}{(p \cdot \eta_r - 1) \cdot n_R} \quad (3.35)$$

$$a_r = \frac{\omega_r^2 \cdot (p \cdot \eta_r - 1)}{(1 + p^2) \cdot d_R} \quad (3.36)$$

$$b_r = -a_r \cdot p \quad (3.37)$$

$${}_r A_{jk} = a_r + i \cdot b_r \quad (3.38)$$

Utilizando estas expresiones se puede comenzar la segunda y última parte del análisis, que consiste en representar 2 curvas, $m_R(\Omega)$ frente a Ω^2 y $m_I(\Omega)$ frente a Ω^2 partiendo de los valores de m_R y m_I obtenidos en la primera parte y obtener la pendiente y la intersección con el eje vertical de la recta de mejor ajuste de ambas. A partir de estos resultados ya es posible determinar los parámetros modales usando las ecuaciones (3.33-3.38).

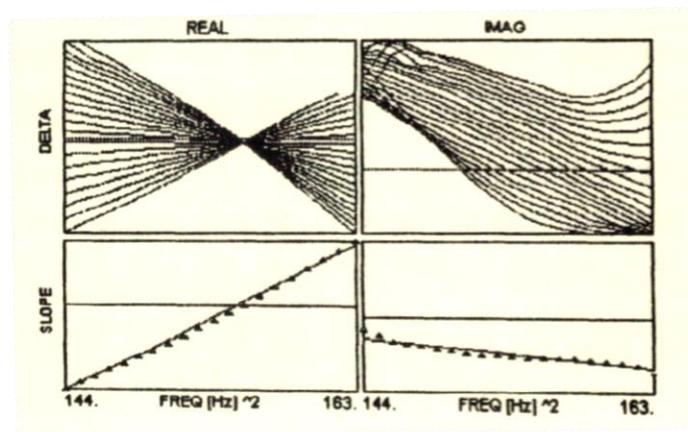


Figura 3-6: Ejemplo de aplicación del método de line-fit [6]

El método de análisis modal de line-fit presenta varias ventajas en comparación al de circle-fit, siendo la principal de ellas que la exactitud de los resultados obtenidos por este método depende más de la precisión de los puntos que están alejados de la resonancia que de la precisión de los puntos de la zona de resonancia, que son los puntos más susceptibles de contener errores significativos. Por otra parte se observa que a medida que el error de las medidas experimentales aumenta, el valor del argumento de la constante modal obtenido mediante circle-fit empeora de una manera mucho más notoria que cuando se utiliza el line-fit. [12]

3.4 Métodos de Varios Grados de Libertad (MDOF)

Para sistemas en los que la respuesta en resonancia no está dominada por un único modo de vibración, ya sea porque las frecuencias naturales están próximas entre sí o por un elevado valor del coeficiente de amortiguamiento, es necesario aplicar métodos que analizan varios modos al mismo tiempo, de manera que los métodos SDOF vistos hasta el momento sólo deben utilizarse para obtener una estimación inicial de los valores buscados a partir de la cual el método MDOF pueda obtener unos resultados válidos.

Algunos de los métodos MDOF disponibles son los siguientes:

- Non-Linear Least-Squares (NLLS).
- Rational Fraction Polynomial Method (RFP).
- Método para estructuras ligeramente amortiguadas (aplicable cuando con los dos métodos anteriores no se consiguen resultados precisos debido al amortiguamiento).

4 PEAK-PICKING

EN este capítulo se desarrolla un fichero de Matlab que aplica el método de Peak-Picking a cualquier sistema estructural, partiendo de las medidas experimentales de las FRFs, poniendo en práctica lo explicado en el apartado 3.3.2.

En el primer apartado del capítulo se le aplica el método de Peak-Picking a una curva de receptancia generada a partir de su expresión teórica, en vez de a partir de unas medias experimentales. El objetivo es desarrollar el método paso a paso para explicar el funcionamiento del archivo de Matlab, y hacer hincapié en los pasos en los que habrá que prestar especial atención cuando se aplique a unas medidas experimentales.

En el segundo apartado se estudia un sistema estructural sencillo y ampliamente conocido, un voladizo empotrado en su base, a partir de las medidas experimentales tomadas en el laboratorio, y se obtienen todas sus propiedades modales.

4.1 Funcionamiento del archivo de Matlab

Para generar una curva teórica de la receptancia de un modo de vibración se empieza dándole valores a los parámetros que definen dicho modo: la frecuencia natural, el amortiguamiento y la constante modal. En este caso se han tomado los siguientes valores:

Frecuencia Natural	15
Amortiguamiento	0.025
Constante Modal	0.5

Tabla 4-1: Parámetros modales tomados para definir la receptancia

Con estos valores, se obtiene la receptancia mediante la ecuación:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \cdot \eta_r \cdot \omega_r^2} \quad (4.1)$$

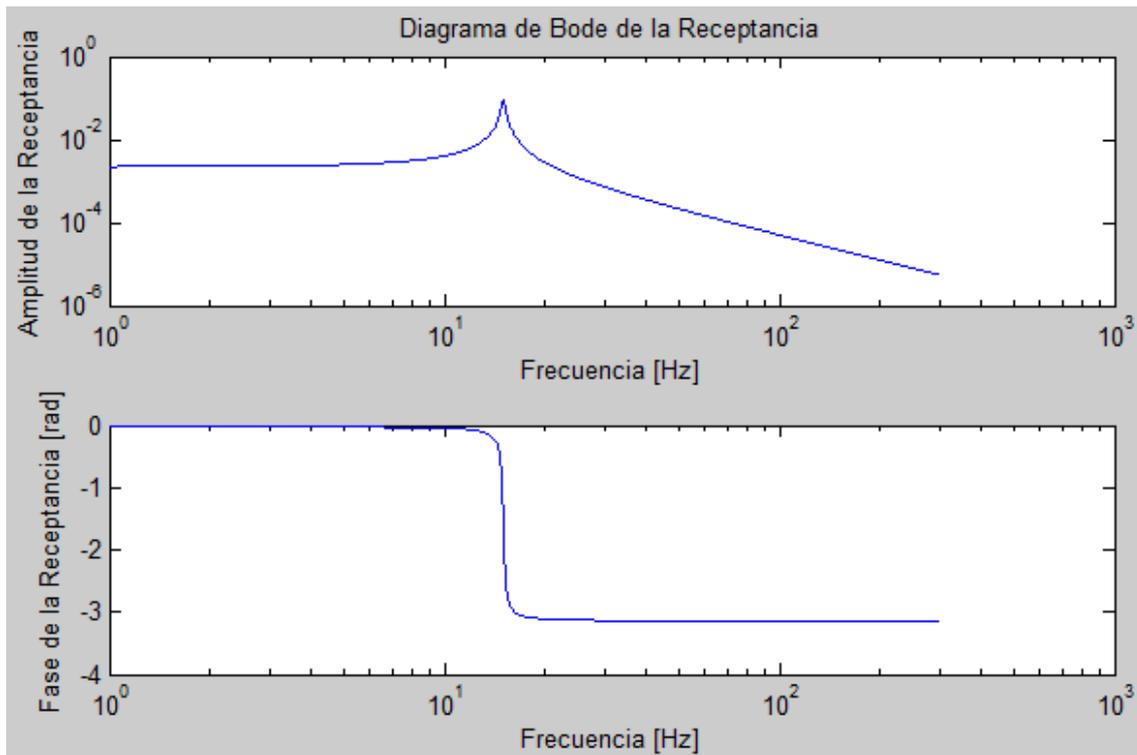


Figura 4-1: Diagrama de Bode de la receptancia

A partir de la gráfica de la amplitud frente a la frecuencia ya es posible aplicar el método de Peak-Picking. La diferencia entre este caso y el experimental, es que para llegar a esta curva a partir de medidas experimentales primero habría que calcular la receptancia a partir de la acelerancia, que es la FRF de la que se toman las medidas. A partir de aquí el proceso es idéntico.

En primer lugar se utiliza la función *findpeaks* de Matlab [14], que devuelve como resultados los valores de la amplitud en los puntos máximos (en este caso sólo se tiene un máximo, en el caso de haber más la función los devuelve todos sin necesidad de modificar nada) y las componentes del vector a las que se producen estos máximos. Conociendo las componentes es inmediato obtener las frecuencias a la que se producen los máximos, es decir, las frecuencias naturales.

Conociendo la amplitud de los máximos se calcula la amplitud de los dos *half-power points* asociados a cada uno de ellos (uno a cada lado del máximo) sabiendo que esta amplitud es la del máximo dividida entre $\sqrt{2}$.

Lo siguiente es hallar la frecuencia a la que se encuentran estos *half-power points*. Casi con total seguridad esta frecuencia no coincidirá con una de las frecuencias para las que se tiene una medida experimental, por lo que la frecuencia de cada uno de los *half-power points* se halla localizando los dos puntos experimentales que lo rodean e interpolando linealmente.

Una vez conocidos los valores de las frecuencias de los *half-power points* y la frecuencia natural para cada uno de los modos, los amortiguamientos se calculan como:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2 \cdot \omega_r^2} \quad (4.2)$$

Y sabiendo el valor de la amplitud del máximo, la frecuencia natural y el amortiguamiento, la constante modal de cada modo se calcula a partir de:

$$A_r = |\hat{H}| \cdot \omega_r^2 \cdot \eta_r \quad (4.3)$$

Los resultados obtenidos son:

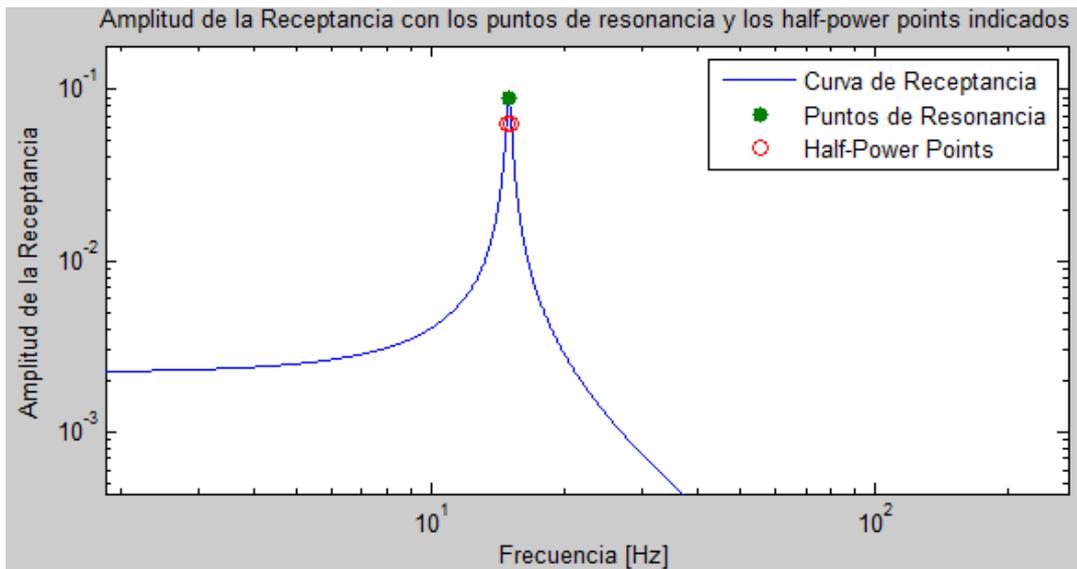


Figura 4-2: Resultados obtenidos mediante Peak-Picking sobre la curva de receptancia

Frecuencia Natural	15
Amplitud del máximo	0.088889
Componente del máximo	2801
Amplitud de los half-power points	0.062854
Frecuencia de los half-power points	14.811 y 15.186
Amortiguamiento	0.025001
Constante Modal	0.50002

Tabla 4-2: Resultados obtenidos mediante Peak-Picking

Se observa un pequeño error, prácticamente despreciable, en los resultados del amortiguamiento y la constante modal, que viene provocado por la interpolación lineal para obtener la frecuencia natural de los *half-power points*. Este error será mayor cuanto menor sea la resolución (es decir, cuanto más separación haya en frecuencia entre dos medidas experimentales consecutivas) por lo que la resolución de las medidas es un factor importante de considerar a la hora de aplicar el método de Peak-Picking, pero no tanto al aplicar otros métodos. Esto se desarrolla con más detalle en el apartado 5.2.

En este caso la receptancia se ha calculado cada 0.005 Hz, lo que permite obtener unos resultados muy buenos. Si en vez de cada 0.005 Hz, se hubieran calculado, por ejemplo, cada 0.25 Hz (que es la resolución que tienen las medidas experimentales de baja frecuencia que se van a usar en el capítulo 4.2) el amortiguamiento y la constante modal obtenida serían 0.024408 y 0.48815 respectivamente, cometiendo un error mayor tal y como era de esperar. La frecuencia natural obtenida sigue siendo 15 Hz.

Tomando 1.33 Hz de separación, que es la resolución que tienen las medidas experimentales de alta frecuencia usadas en el capítulo 4.2., los resultados que se obtienen para la frecuencia natural, el amortiguamiento y la constante modal son, respectivamente, 15.63 Hz, 0.14944 y 0.90818. Se observan unos errores muy significativos, de incluso un orden de magnitud para el coeficiente de amortiguamiento.

Viendo el funcionamiento del método programado en Matlab, se observa que la única interacción que se requiere por parte del usuario es cargar los datos experimentales al principio del código, a partir de ahí se obtienen todas las propiedades modales de todos los modos de manera automática. Esto no será así en los otros dos métodos, en los que hay que ir modo a modo.

4.2 Resultados Experimentales

La estructura a estudiar es un voladizo de acero empotrado en una base de hormigón, de la que se pretenden obtener los parámetros modales de sus 5 primeros modos. La viga tiene una longitud de 0.9 metros y es de sección rectangular de lados 15 mm y 20 mm. El acero tiene una densidad de 7850 kg/m^3 y un módulo elástico de $210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Para tomar las medidas se utiliza un martillo instrumentado, con el que se golpea el lado más ancho de la sección, en 8 puntos de la viga y se mide la aceleración en el punto número 8.

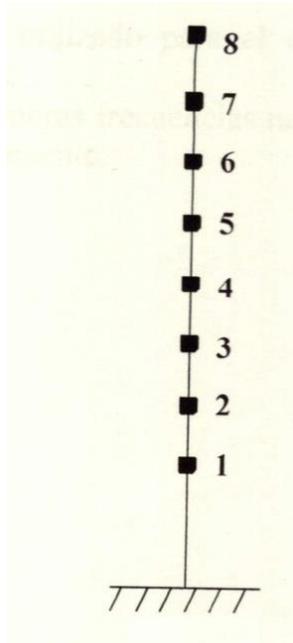


Figura 4-3: Viga en voladizo objeto de estudio [15]

Punto de excitación	1	2	3	4	5	6	7	8
Coordenada z (m)	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

Tabla 4-3: Ubicación de los puntos de excitación [15]

La toma de medidas, y el posterior tratamiento de las mismas, se hará en dos fases, una para las frecuencias bajas (que en este caso comprenden los tres primeros modos de vibración) y otra para las frecuencias altas (modos cuarto y quinto). El proceso es análogo en ambos casos, con la diferencia que para las bajas frecuencias se utiliza una punta de martillo más blanda que para las altas frecuencias. De esta forma se obtienen mejores medidas que si se utilizase el mismo martillo para todo el rango de frecuencias.

Los ficheros de Matlab *PP_Baja_IFRF.m* y *PP_Alta_IFRF.m* reciben como datos los ficheros de extensión .txt que contienen las frecuencias, las amplitudes y las fases (en radianes) de las acelerancias de cada una de las FRFs.

Para aplicar el método de Peak-Picking sólo se necesitan los valores de las amplitudes, cuyas gráficas son las siguientes:

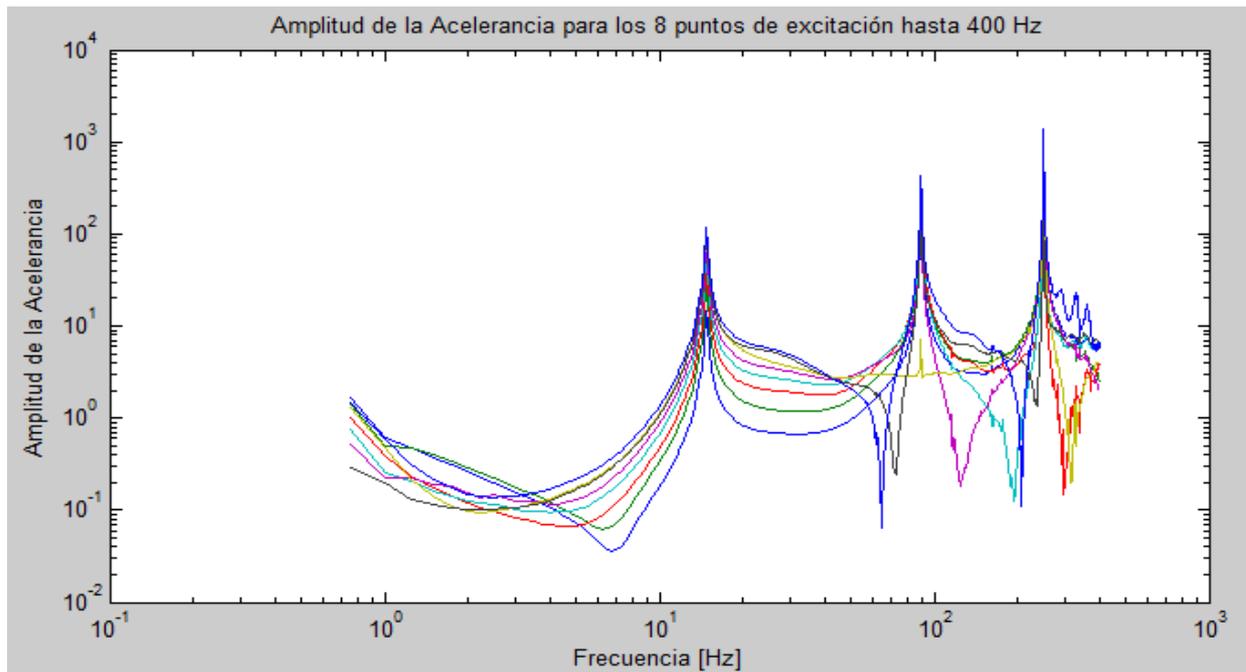


Figura 4-4: Amplitud de la acelerancia del sistema para todos los puntos de excitación hasta 400 Hz

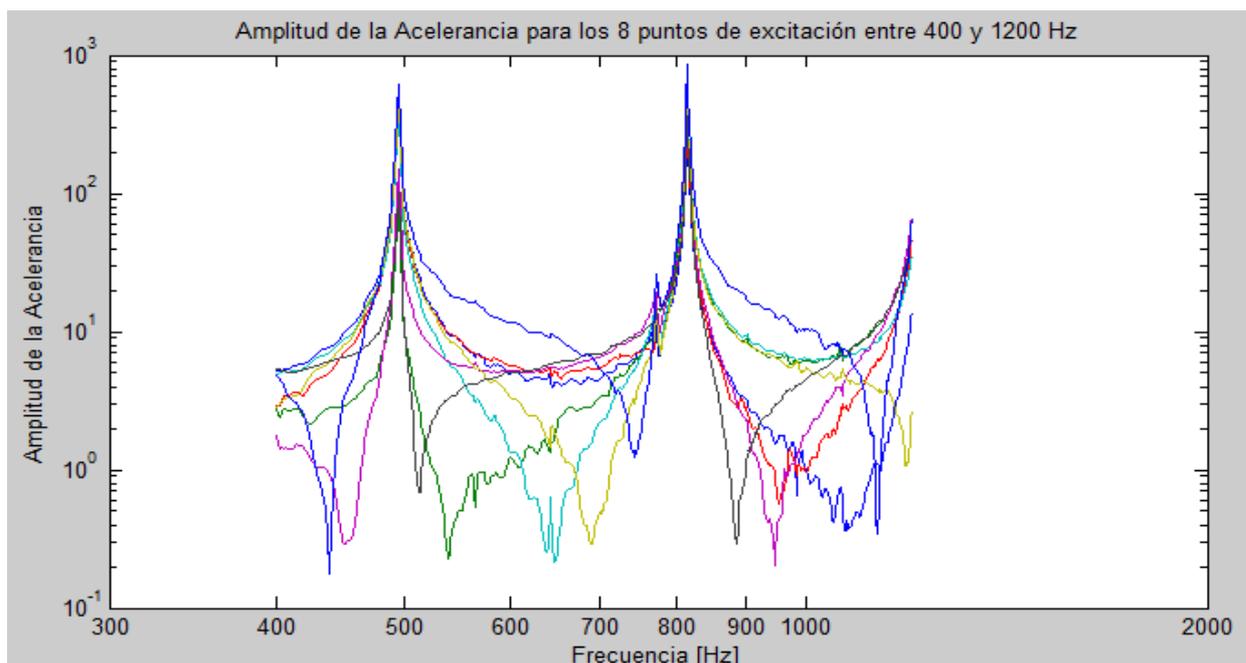


Figura 4-5: Amplitud de la acelerancia del sistema para todos los puntos de excitación entre 400 y 1200 Hz

A partir de estos datos de las acelerancias es posible pasar a las receptancias, que es la forma de FRF empleada para el método de Peak-Picking, utilizando para ello la ecuación:

$$A(\omega) = -\omega^2 \cdot \alpha(\omega) \quad (4.4)$$

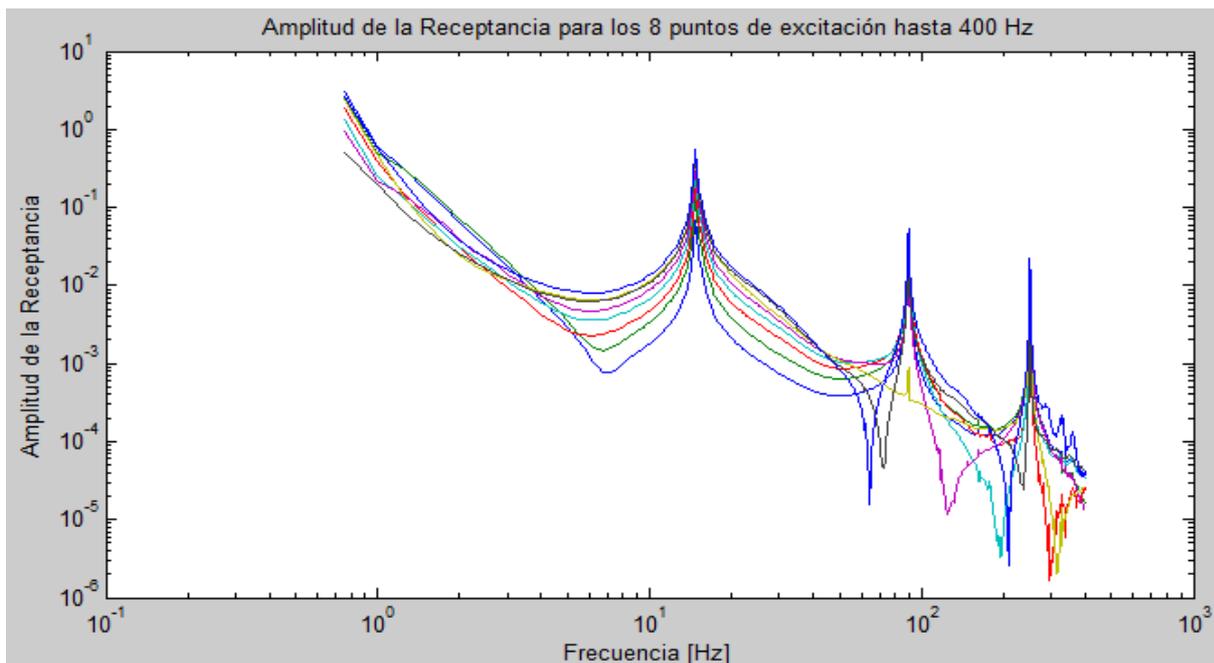


Figura 4-6: Amplitud de la receptancia del sistema para todos los puntos de excitación hasta 400 Hz

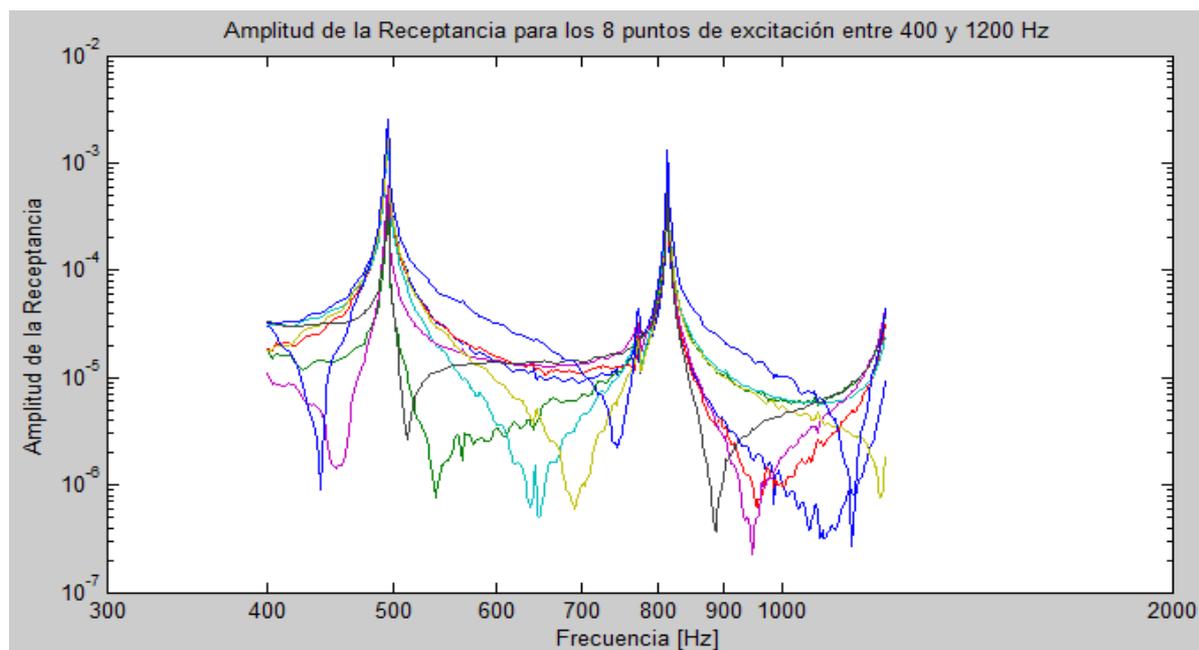


Figura 4-7: Amplitud de la receptancia del sistema para todos los puntos de excitación entre 400 y 1200 Hz

Para cada una de las 8 FRFs se aplica el método de Peak-Picking, de forma que el fichero de Matlab devuelve como resultado las propiedades modales y la gráfica de la receptancia con los puntos de interés señalados. Por ejemplo, para la FRF del punto 8 los resultados son:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Frecuencia Natural	14'75	89'5	250'25	494'65	814'65
Amortiguamiento	0'021829	0'0073501	0'0027604	0'0037078	0'0023114
Constante Modal	2'5922	3'2028	3'8277	2,3064	1,9925

Tabla 4-4: Propiedades modales obtenidas mediante Peak-Picking para la octava FRF

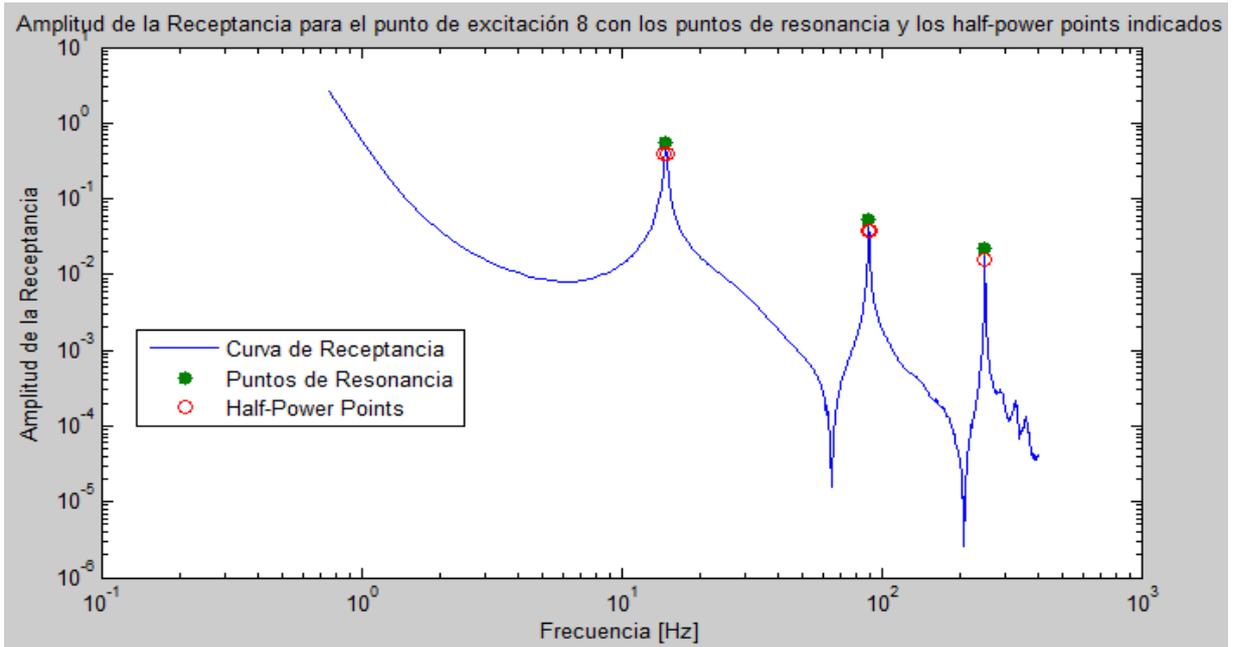


Figura 4-8: Aplicación del Peak-Picking para la octava FRF (hasta 400 Hz)

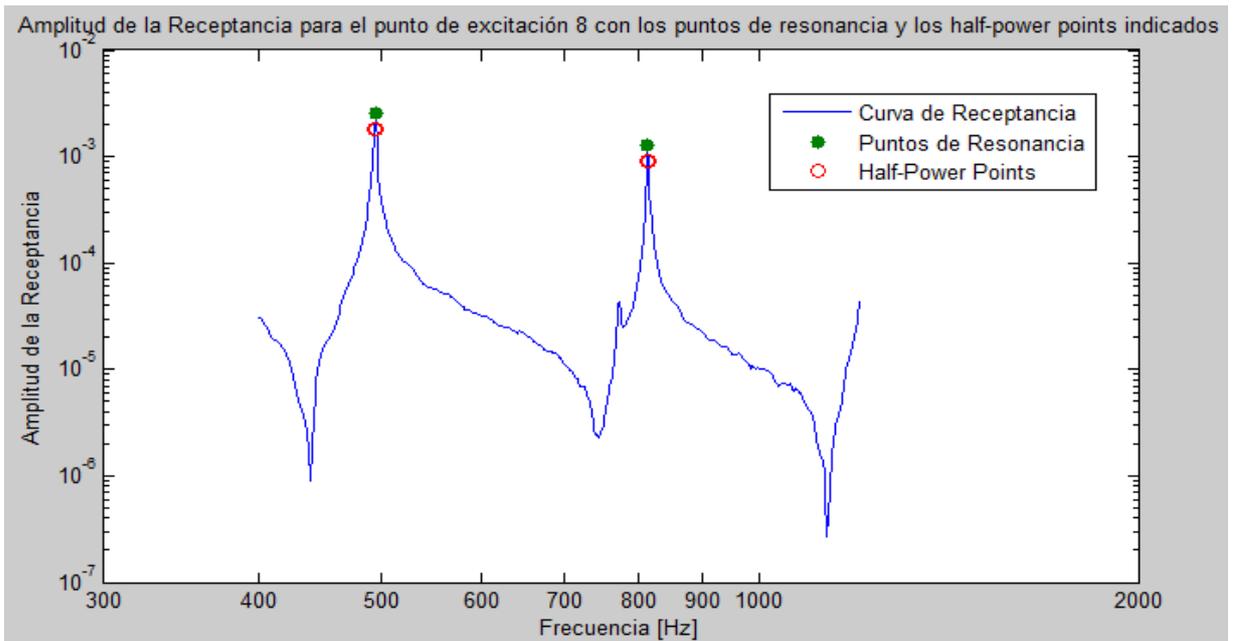


Figura 4-9: Aplicación del Peak-Picking para la octava FRF (entre 400 y 1200 Hz)

Haciendo zoom en cada uno de los máximos se pueden ver con más detalle los puntos que se utilizan para calcular las propiedades modales:

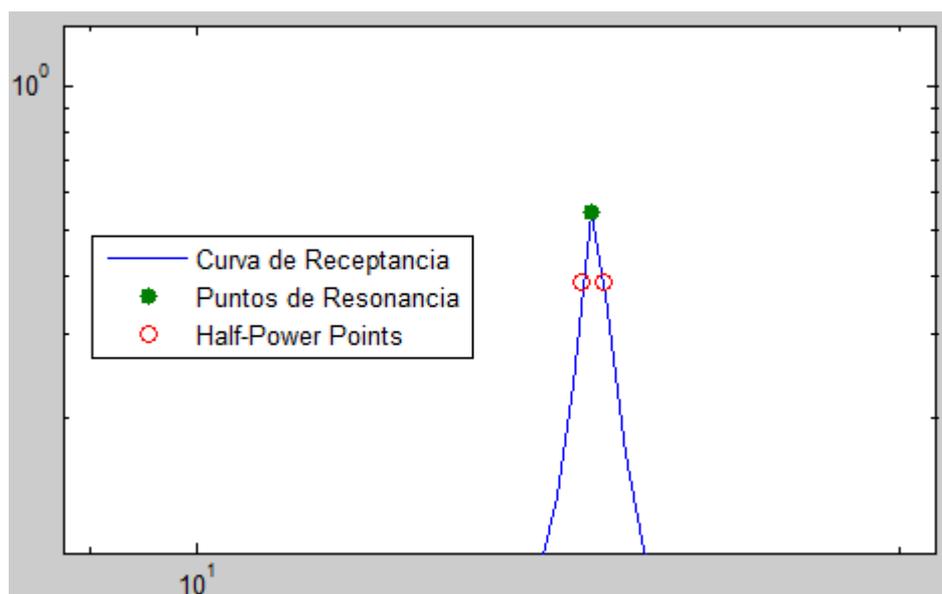


Figura 4-10: Detalle de una de las zonas de resonancia

donde la amplitud de los *half-power points* es la amplitud del máximo entre $\sqrt{2}$ y las frecuencias de cada uno de ellos ha sido calculada por interpolación lineal entre dos puntos experimentales.

Procediendo análogamente para las 8 FRFs se obtienen las propiedades modales (frecuencia natural, amortiguamiento y constante modal) de los 5 primeros modos de vibración:

	FRF 1	FRF 2	FRF 3	FRF 4	FRF 5	FRF 6	FRF 7	FRF 8
Modo 1	14'75	14'75	14'75	14'75	14'75	14'75	14'75	14'75
Modo 2	89'75	89'5	89'5	89'5	89'5	89'5	89'5	89'5
Modo 3	250'5	250'5	250'5	250'5	250'5	250'5	250'25	250'25
Modo 4	494'65	494'65	494'65	494'65	494'65	494'65	494'65	494'65
Modo 5	814'65	814'65	814'65	814'65	814'65	814'65	814'65	814'65

Tabla 4-5: Frecuencias naturales obtenidas mediante el método de Peak-Picking

	FRF 1	FRF 2	FRF 3	FRF 4	FRF 5	FRF 6	FRF 7	FRF 8
Modo 1	0'40966	0'73154	1'0758	1'3827	1'7049	2'2724	2'0696	2'5922
Modo 2	1'5783	2'3751	2'7413	2'4016	1'4646	0'058844	1'6997	3'2028
Modo 3	2'7259	2'5431	0'90016	1'2777	2'4531	1'6933	0'66826	3'8277
Modo 4	2'0116	0'35797	1'6892	1'4478	0'56027	1'6487	0'34605	2,3064
Modo 5	0'79461	1,2598	0'9107	1,239	1,0329	1'1878	1,1403	1,9925

Tabla 4-6: Constantes modales obtenidas mediante el método de Peak-Picking

	FRF 1	FRF 2	FRF 3	FRF 4	FRF 5	FRF 6	FRF 7	FRF 8
Modo 1	0'027864	0'025545	0'025668	0'023638	0'022796	0'022573	0'019594	0'021829
Modo 2	0'0076853	0'0077075	0'0077842	0'0075396	0'0076271	0'008212	0'0071034	0'0073501
Modo 3	0'0024685	0'0023769	0'0023327	0'0024862	0'0026775	0'0028654	0'0024763	0'0027604
Modo 4	0'0041281	0'0044683	0'0037917	0'0036442	0'0037	0'0034514	0'003384	0'0037078
Modo 5	0'0021698	0'0021788	0'002231	0'0022626	0'0022493	0'0024639	0'0031015	0'0023114

Tabla 4-7: Coeficientes de amortiguamiento obtenidos mediante el método de Peak-Picking

Se observa que todas las constantes modales calculadas tienen valores reales, ya que el método de Peak-Picking no permite calcular constantes modales con parte imaginaria. En este caso, la suposición puede considerarse válida, ya que una viga en voladizo empotrada es uno de los más claros ejemplos de sistema con modos reales [16]. Para otros sistemas, especialmente aquellos en los que haya amortiguamientos localizados en vez de amortiguamientos proporcionalmente distribuidos, esta suposición no será válida y será necesario usar otro método.

Una forma de verificar la consistencia del método para extraer parámetros modales puede ser comparar los valores de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento de cada uno de los modos obtenidos a partir de cada FRF, ya que al ser propiedades propias de cada uno de los modos, los valores obtenidos tienen que ser iguales en todas las FRFs. Esto se traduce en que en las tablas 4-1 y 4-3 los valores de cada una de las filas deberían ser iguales entre sí.

Para estudiar la validez de los resultados experimentales se pueden comparar las frecuencias naturales obtenidas con la solución analítica, ya que al tratarse de un sistema estructural tan sencillo ésta es conocida [17]. En el caso de estructuras más complejas sin solución analítica conocida se podría recurrir a modelos de elementos finitos.

$$\omega_1 = \frac{3.5160}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} = 15.47 \text{ Hz} \quad (4.5)$$

$$\omega_2 = \frac{22.034}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} = 96.96 \text{ Hz} \quad (4.6)$$

$$\omega_3 = \frac{61.697}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} = 271.50 \text{ Hz} \quad (4.7)$$

$$\omega_4 = \frac{120.90}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} = 532.03 \text{ Hz} \quad (4.8)$$

$$\omega_5 = \frac{199.86}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} = 879.50 \text{ Hz} \quad (4.9)$$

En la siguiente tabla se muestra una comparación entre los resultados obtenidos experimentalmente y los resultados analíticos, así como el error relativo entre los mismos.

	Analítica	Experimental	Error relativo (%)
Frec. natural 1 (Hz)	15'47	14'75	4'65
Frec. natural 2 (Hz)	96'96	89'5	7'69
Frec. natural 3 (Hz)	271'50	250'5	7'73
Frec. natural 4 (Hz)	532'03	494'65	7'03
Frec. natural 5 (Hz)	879'50	814'65	7'37

Tabla 4-8: Comparación de las frecuencias naturales experimentales con las analíticas

Se observan errores significativos, de hasta un 7'73%, por lo que es pertinente analizar las posibles fuentes de estas discrepancias entre resultados. En primer lugar, podría ser posible que las propiedades geométricas y/o mecánicas reales no coincidan con los valores tomados para los cálculos, pero al tratarse de un perfil normalizado de acero lo lógico es pensar que las propiedades reales no difieren significativamente de las dadas por el catálogo. Por otra parte, en la solución numérica no se considera el amortiguamiento, lo que puede provocar un error en los resultados, pero al tratarse de un sistema con amortiguamiento muy pequeño este error debería ser despreciable. Por último se puede considerar que el error provenga de la aplicación de las condiciones de contorno, en este caso que el empotramiento real no sea perfecto como el que se considera en

el modelo analítico. De estas opciones la tercera es la que parece más lógica.

Además de las propiedades modales obtenidas mediante el método de Peak-Picking, el archivo de Matlab también devuelve por pantalla como resultado las amplitudes y las fases de la acelerancia en los puntos de resonancia, lo que permite dibujar los modos de vibración:

	FRF 1	FRF 2	FRF 3	FRF 4	FRF 5	FRF 6	FRF 7	FRF 8
Modo 1	14'702	28'637	41'913	58'493	74'787	100'67	105'63	118'75
Modo 2	205'36	308'15	352'17	318'53	192'03	7'1657	239'28	435'75
Modo 3	1104'3	1069'9	385'89	513'94	916'19	590'95	269'86	1386'6
Modo 4	487'29	80'112	445'49	397'29	151'42	477'71	102'26	622'05
Modo 5	366'21	578'21	408'2	547'61	459'21	482'07	367'68	862'05

Tabla 4-9: Amplitudes de las 8 acelerancias en los 5 primeros puntos de resonancia

	FRF 1	FRF 2	FRF 3	FRF 4	FRF 5	FRF 6	FRF 7	FRF 8
Modo 1	0'248	0'132	0'301	0'346	0'337	0'256	0'416	0'299
Modo 2	-2'882	-2'78	-2'719	-2'702	-2'718	-0'645	0'433	0'438
Modo 3	0'184	0'215	0'111	-2'961	-2'95	-2'846	0'268	0'195
Modo 4	-3'078	-3'037	0'029	0'035	-3'085	-3'092	-3'141	0'023
Modo 5	0'054	-3'071	-3'047	0'108	0'078	-3'015	-2'913	0'045

Tabla 4-10: Fases de las 8 acelerancias en los 5 primeros puntos de resonancia

Al igual que las frecuencias naturales, los modos de vibración de un voladizo tienen solución analítica conocida, que puede usarse para compararla con los modos de vibración obtenidos experimentalmente.

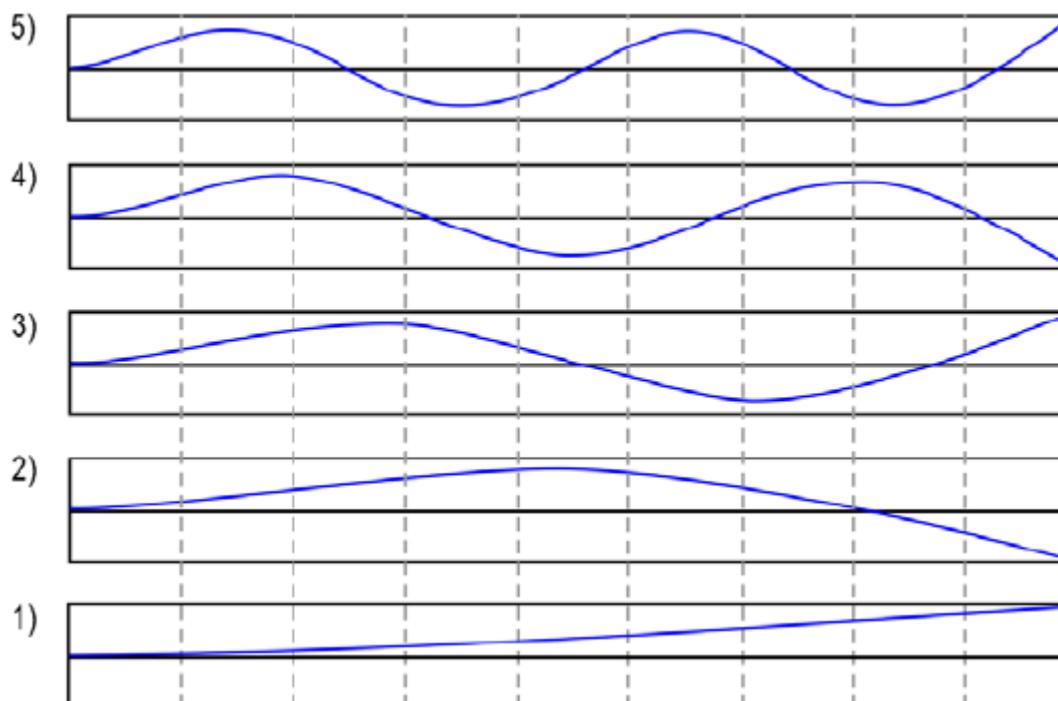


Figura 4-11: Cinco primeros modos de vibración analíticos de un voladizo empotrado [18]

Los modos de vibración obtenidos a partir de estos datos son los siguientes:

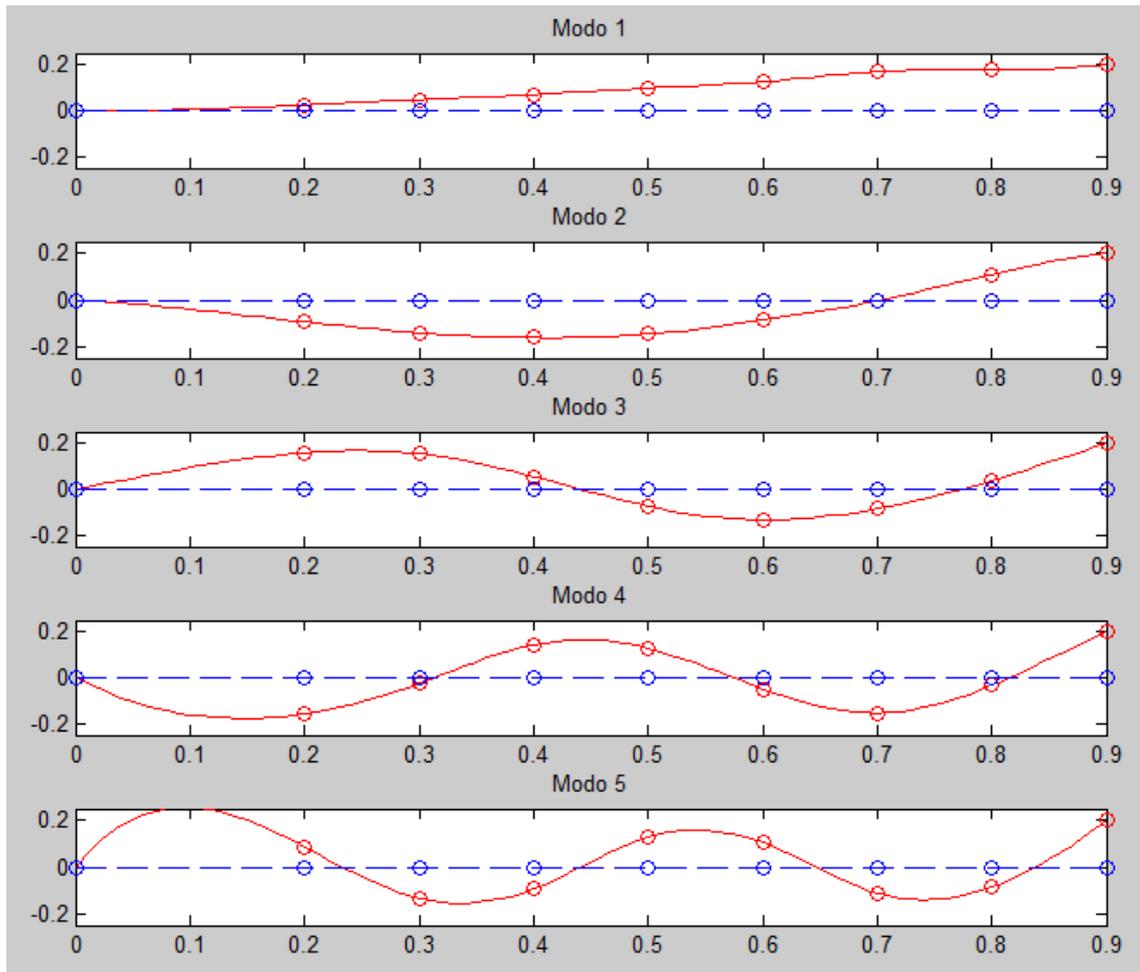


Figura 4-12: Cinco primeros modos de vibración obtenidos a partir de las medidas experimentales

Las curvas que representan las deformadas de la barra se dibujan a partir de los datos experimentales usando la función spline [19] de Matlab. Dadas las condiciones de contorno de la estructura (extremo izquierdo empotrado, extremo derecho libre), la pendiente de la curva en el primer punto debe ser nula y la pendiente en el último punto es libre. La función spline permite imponer pendientes, pero sólo si se imponen las pendientes en ambos extremos, por lo que esta opción no es válida para este caso. Esto provoca que la deformada en las proximidades del empotramiento no se corresponda con la realidad, especialmente en el quinto modo. Para poder representar los modos con más exactitud habría sido necesario obtener medidas experimentales de al menos un punto más próximo al origen.

5 CIRCLE-FIT

EN este capítulo se desarrolla un fichero de Matlab que aplica el método de Circle-Fit a cualquier sistema estructural, partiendo de las medidas experimentales de las FRFs, poniendo en práctica lo explicado en el apartado 3.3.3.

El desarrollo de los apartados 5.1 y 5.2 es análogo al de los apartados 4.1. y 4.2., con la diferencia de que en este capítulo las medidas experimentales son diferentes que las usadas en el capítulo anterior, aunque el sistema estructural es el mismo.

5.1 Funcionamiento del archivo de Matlab

Al igual que en el apartado 4.2. se comienza definiendo una receptancia con un único modo dándole valores a los parámetros modales que lo definen:

Frecuencia Natural	15
Amortiguamiento	0.025
Constante Modal	0.5

Tabla 5-1: Parámetros modales tomados para definir la receptancia

A partir de la expresión analítica de la receptancia se obtiene el diagrama de Bode de la misma:

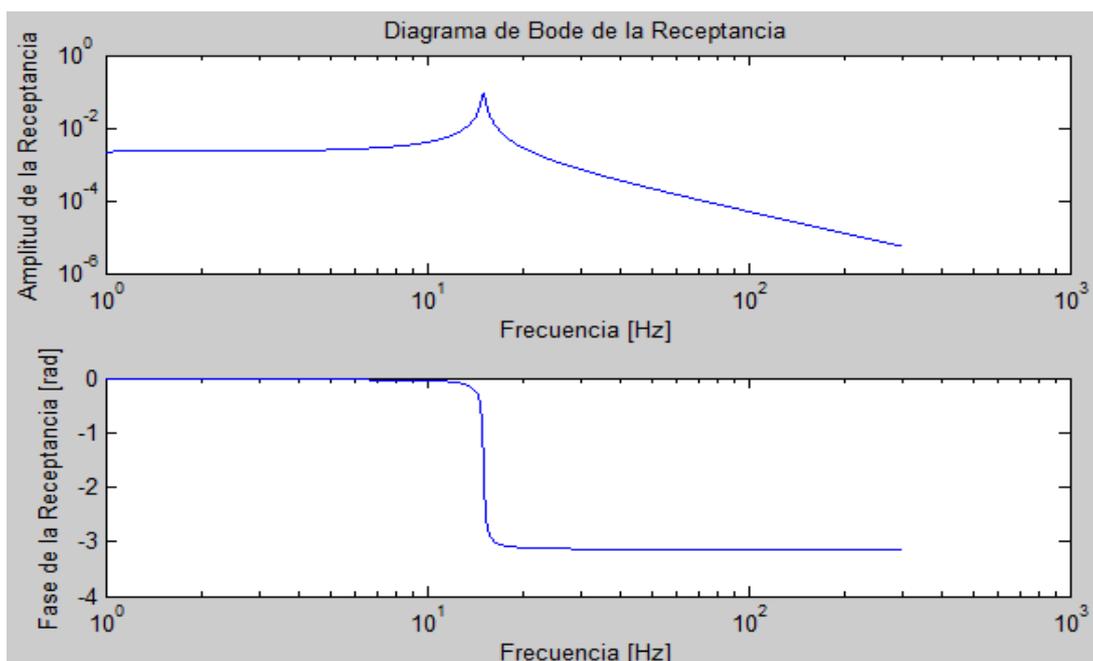


Figura 5-1: Diagrama de Bode de la receptancia

Conociendo los valores de la amplitud y la fase para cada frecuencia se pueden calcular las partes real e imaginaria para representar el diagrama de Nyquist.

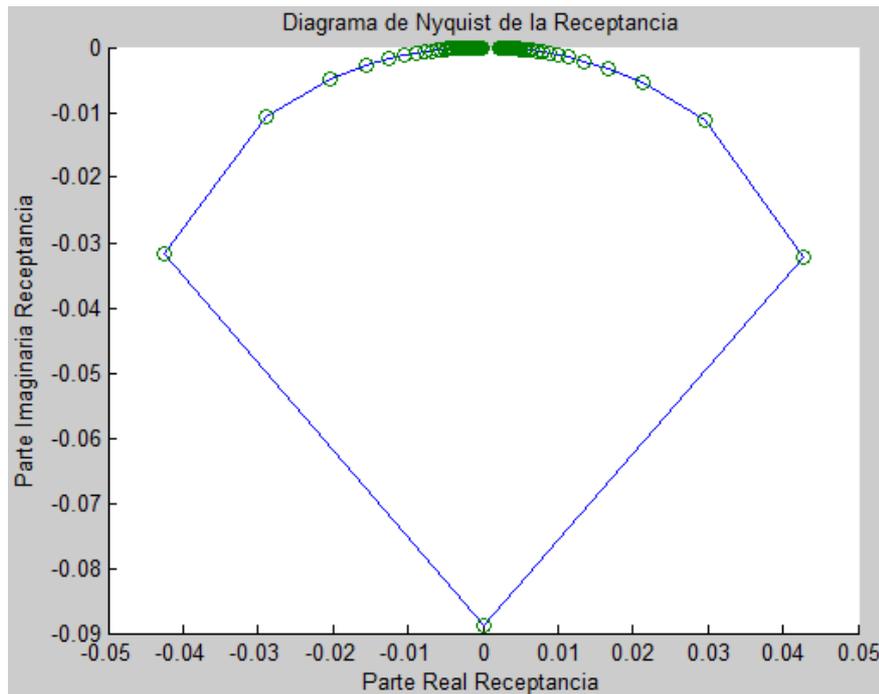


Figura 5-2: Diagrama de Nyquist de la receptancia

A la hora de aplicar el método a un conjunto de medidas experimentales esta primera parte del algoritmo es diferente, ya que a este Nyquist de la receptancia habrá que llegar a partir de las medidas experimentales de la acelerancia, ya estén en forma de Bode (medidas de la amplitud y la fase para cada frecuencia) o en forma de Nyquist (medidas con la parte real e imaginaria para cada frecuencia). Una vez llegados a este punto el algoritmo es igual que el que se muestra en este apartado.

Para continuar hay que elegir el rango de frecuencias a utilizar para la aplicación del método. En este caso, al haber un solo modo de vibración, el método se podría aplicar a todo el rango de frecuencias. Para un sistema real con varios grados de libertad, y su respectiva FRF con varios modos de vibración, es necesario proceder modo a modo, eligiendo para cada uno de ellos un intervalo de frecuencias más o menos centrado en la resonancia, lo suficientemente grande como para que haya varios puntos experimentales con los que realizar los cálculos, pero no lo suficientemente grande como para que las medidas se vean influidas por otros modos.

En este caso se toma, por ejemplo, el intervalo (13.75 – 16.25) Hz. A estos puntos, que a simple vista se ve que están distribuidos formando un círculo, se les aplica una función de Matlab de ajuste a círculo, llamada *CircleFitByPratt.m* [20] que devuelve como resultados las coordenadas del centro y el radio del círculo de mejor ajuste. El algoritmo de Pratt es una de las muchas formas de hallar un círculo de ajuste, se ha elegido este entre los demás por ser uno de los que mejor resultado da cuando los puntos forman un pequeño arco, situación que se puede presentar si es obligatorio tomar un intervalo de frecuencias pequeño debido a la proximidad de otros modos.

El resultado de la función de ajuste a círculo, con el centro y el radio principal indicados, es el siguiente:

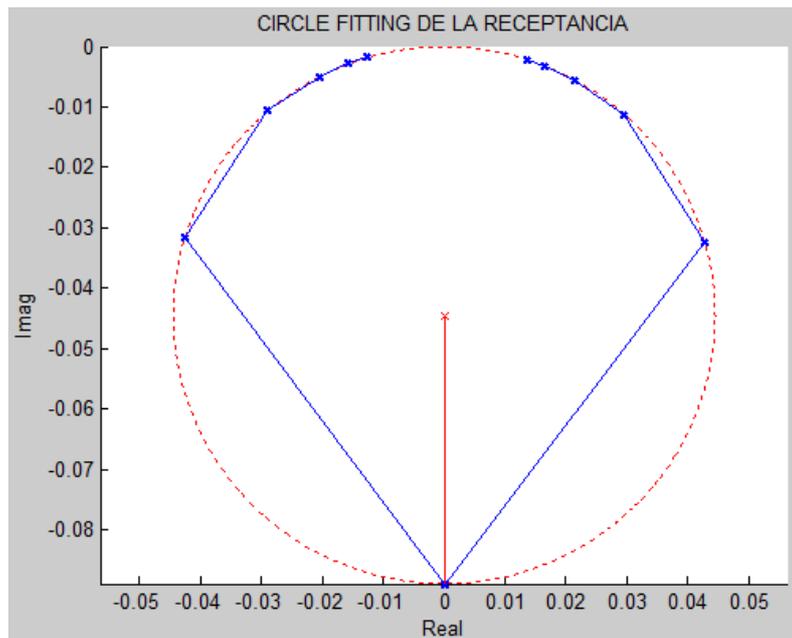


Figura 5-3: Nyquist de la receptancia con el círculo de mejor ajuste

La imagen muestra también el radio principal, es decir, la línea que une el centro con el punto de mayor respuesta, para lo que primero hay que localizar este punto. Se ha considerado que este punto de mayor respuesta es del que se obtiene la frecuencia natural. Ya se explicó en el capítulo 3.3.3.2. que esta es una de las 4 posibles formas de localizar la frecuencia natural [6].

Entonces lo primero es localizar el punto del círculo de ajuste (es importante destacar que aquí se utilizan los puntos del círculo de ajuste, no los experimentales) más alejado del origen. Una vez localizado este punto, se encuentran los dos puntos experimentales más cercanos (uno a cada lado) al punto de mayor respuesta, de forma que ya tendremos localizada la frecuencia natural entre la frecuencia de estos dos puntos.

En la figura 5-3 se tiene un caso muy particular, que difícilmente se dará en la práctica, en el que se tiene un punto experimental que coincide exactamente con el de máxima respuesta. En el caso más general, en el que el punto de máxima respuesta esté entre dos puntos experimentales la gráfica será de la forma:

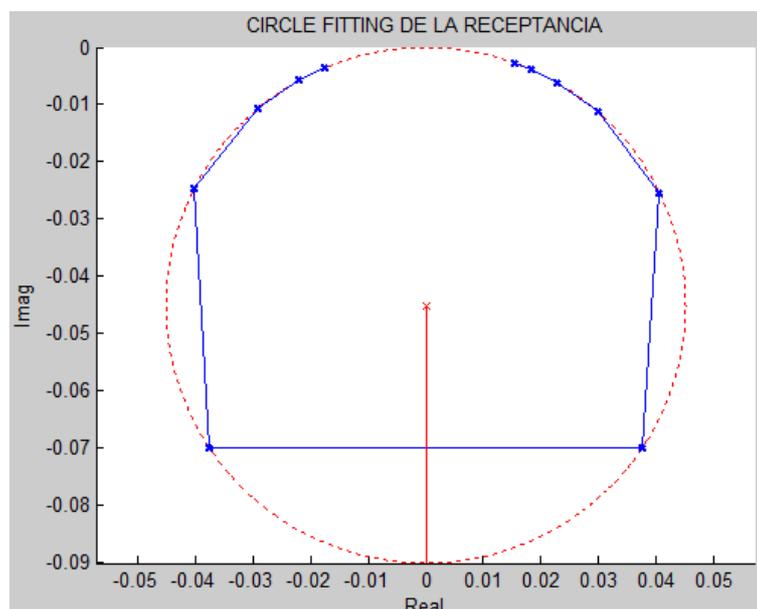


Figura 5-4: Otro ejemplo, más común, de diagrama de Nyquist

En este caso la frecuencia natural se calcula conociendo el intervalo de frecuencia comprendido entre los dos puntos más cercanos al de máxima respuesta y el ángulo entre el radio principal y la línea que une el centro del círculo con cada uno de estos 2 puntos. Esto introduce una hipótesis que conlleva un pequeño error.

Una vez calculada la frecuencia natural, ya se puede calcular el amortiguamiento. Para ello es necesario seleccionar qué número de puntos a cada lado del de máxima respuesta se van a utilizar, modificando el valor de la variable *num_puntos*. Para un determinado valor de *num_puntos* se hallarán num_puntos^2 valores del amortiguamiento, sabiendo que idealmente todos ellos deberían coincidir. Como una medida de la validez de las medidas experimentales el archivo de Matlab devuelve, además de la media de todos estos valores del amortiguamiento calculados, la desviación típica, sabiendo que desviaciones pequeñas son un indicativo de buenas medidas experimentales. Para el caso descrito en este apartado, todos los valores del coeficiente de amortiguamiento calculados coinciden entre sí tal y como era de esperar, por lo que la desviación típica es nula.

Para el cálculo de estos amortiguamientos se usa la ecuación:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2 \cdot \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (5.1)$$

siendo ω_r la frecuencia natural ya calculada, ω_a y ω_b las frecuencias del par de puntos experimentales (siempre una mayor y otra menor que la frecuencia natural) y θ_a y θ_b los ángulos que forman estos puntos con el radio principal. Esto se repite tantas veces como combinaciones se puedan hacer entre un punto mayor y otro menor a la frecuencia natural.

Por último se calcula la constante modal. El módulo de la misma está relacionado con el diámetro del círculo de mejor ajuste (que se conoce a partir del valor del radio que devuelve la función *CircleFitByPratt.m*), la frecuencia natural (ya calculada) y el coeficiente de amortiguamiento (ya calculado), por lo que su cálculo es inmediato.

$${}_rD_{jk} = \frac{|{}_rA_{jk}|}{\omega_r^2 \cdot \eta_r} \quad (5.2)$$

Para obtener la fase sólo hay que hallar el valor del ángulo comprendido entre el diámetro principal y el eje imaginario negativo.

Los resultados obtenidos son:

Frecuencia Natural	15
Coordenadas del centro del círculo	(-1.7347e-018 , -0.0444444)
Radio del círculo	0.0444444
Amortiguamiento	0.025
Número de amortiguamientos calculados	$3^2 = 9$
Desviación típica de los amortiguamientos	7.0465e-018
Módulo de la constante modal	0.5
Argumento de la constante modal	0

Tabla 5-2: Resultados obtenidos mediante Circle-Fit

Se observa que los resultados obtenidos coinciden exactamente con los esperados.

5.2 Resultados Experimentales

El sistema estructural a estudiar es el mismo al que se le aplicó el método de Peak-Picking en el capítulo 4, es decir, un voladizo de 0.9 metros de longitud empotrado en la base y con una sección de 20x15 milímetros. Sin embargo, se va a utilizar otro conjunto de medidas experimentales, ya que las usadas en el capítulo 4 no son apropiadas para el método de Circle-Fit. Para la aplicación del método de Peak-Picking sólo se necesitaba la representación en forma de Bode de la amplitud de la receptancia (que se obtenía a partir de los datos experimentales de la amplitud de la acelerancia), mientras que para poder aplicar el Circle-Fit es necesario el diagrama de Nyquist de la receptancia, por lo que además de los datos experimentales de las amplitudes, también se necesitan los de las fases.

Debido a los componentes electrónicos involucrados en la toma de medidas, es común que se produzcan errores a la hora de registrar las fases [21], y esto ocurrió en las medidas que se utilizaron en el capítulo 4, sólo que se pasó por alto porque no eran realmente necesarias para la obtención de los parámetros modales. Sin embargo, a la hora de aplicar el Circle-Fit, en la representación en forma de Nyquist de las medidas tomadas se observa que la curva no tiene la forma esperada. Teniendo en cuenta que las amplitudes utilizadas en el capítulo 4 sí que tenían la forma que cabía esperar, se concluye que el error reside en la medida de las fases.

A continuación se muestran algunos ejemplos de diagramas de Nyquist que ponen de manifiesto que los datos no son apropiados para el método de Circle-Fit:

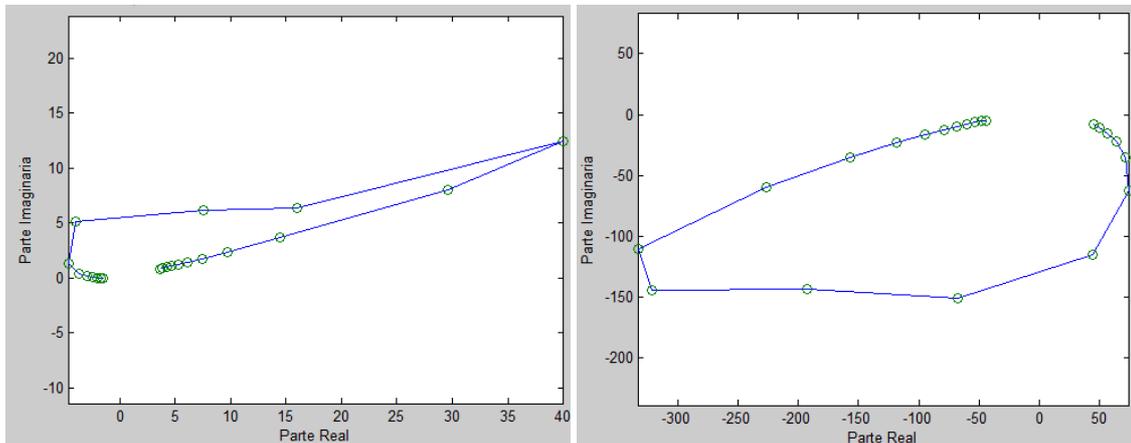


Figura 5-5: Diagramas de Nyquist de las medidas experimentales usadas en el capítulo 4

Con los nuevos datos experimentales no aparece este problema, y se observa que, como es de esperar, los puntos en las inmediaciones de cada una de las resonancias forman una curva que se asemeja mucho a un círculo cuando se representan en un diagrama de Nyquist. Por otra parte, en este nuevo conjunto de medidas se analiza todo el rango de frecuencias de una sola vez, no como en el capítulo 4 que había que distinguir entre alta y baja frecuencia.

Algunos ejemplos de diagramas de Nyquist a partir de estas nuevas medidas, en los que se ve como el círculo de ajuste se adapta casi a la perfección a los puntos experimentales, se muestran a continuación:

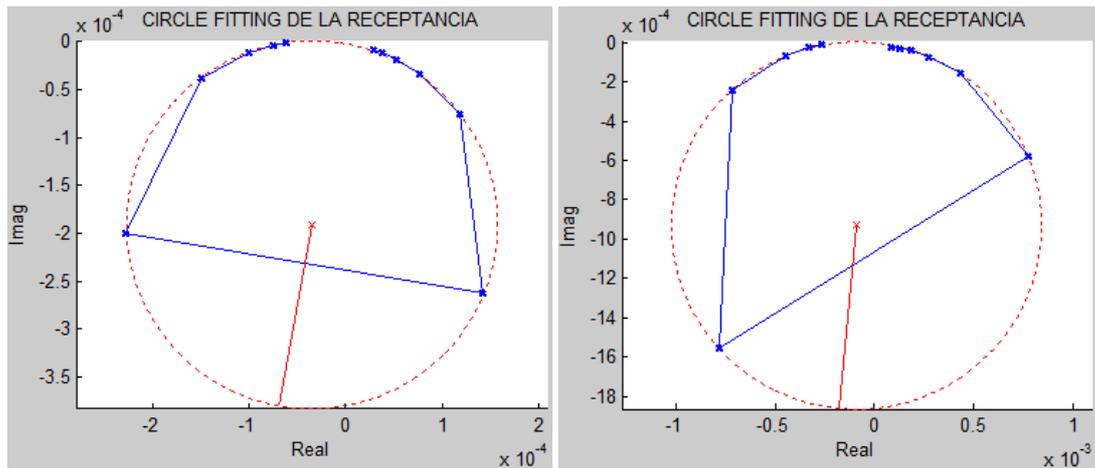


Figura 5-6: Ejemplo de la aplicación del Circle-Fit a las nuevas medidas experimentales

Viendo que estas medidas son mejores que las usadas en el capítulo 4 podría parecer recomendable haberlas usado también para el Peak-Picking. Sin embargo, esto no se ha hecho ya que el nuevo conjunto de medidas tiene una resolución muy baja, con medidas experimentales cada 4.88281 Hz, mientras que las que se usaron en el capítulo 4 tenían una resolución mucho mejor, con medidas cada 0.25 para las de baja, y cada 1.33 para las de alta.

En el método de Peak-Picking la resolución de las medidas experimentales tiene una gran importancia a la hora de hallar la frecuencia natural, ya que simplemente toma como frecuencia natural aquella a la que se alcanza un máximo. Realmente, el punto más alto siempre se encontrará entre dos puntos experimentales, por lo que cuanto menor sea la resolución peor será la representación de la amplitud frente a la frecuencia, lo que puede llevar a errores de hasta varios Hercios para la frecuencia natural. Sin embargo, al aplicar el Circle-Fit, el algoritmo es capaz de localizar la frecuencia natural con más precisión, ya que el círculo de ajuste representa también el tramo de curva comprendido entre dos puntos experimentales.

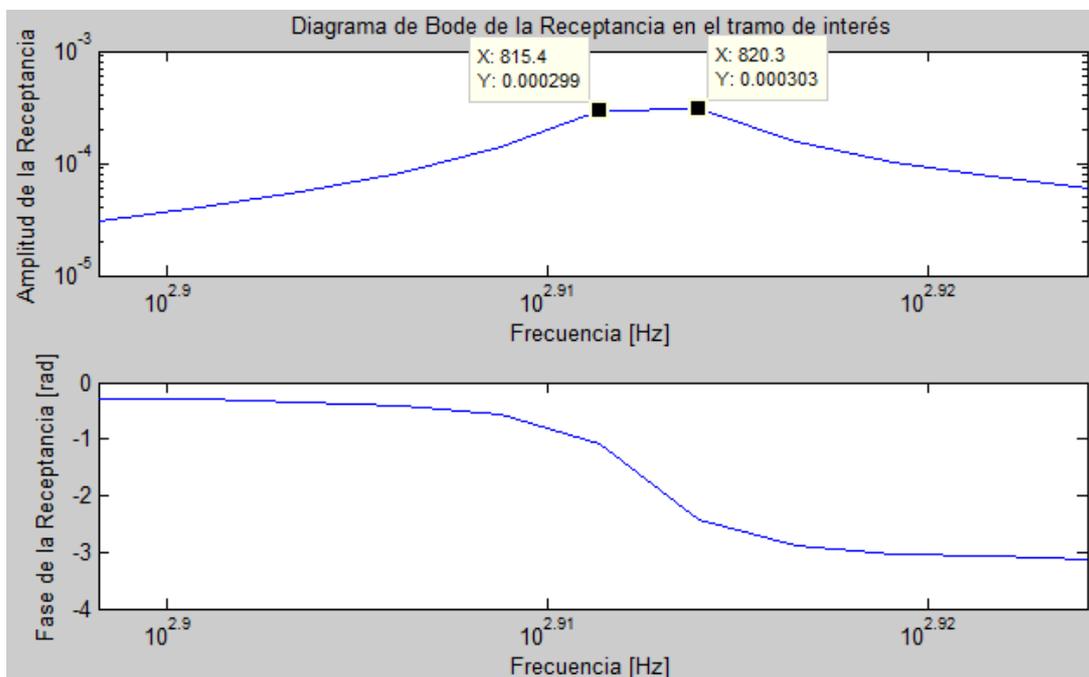


Figura 5-7: Diagrama de Bode con los puntos experimentales adyacentes a la frecuencia natural indicados

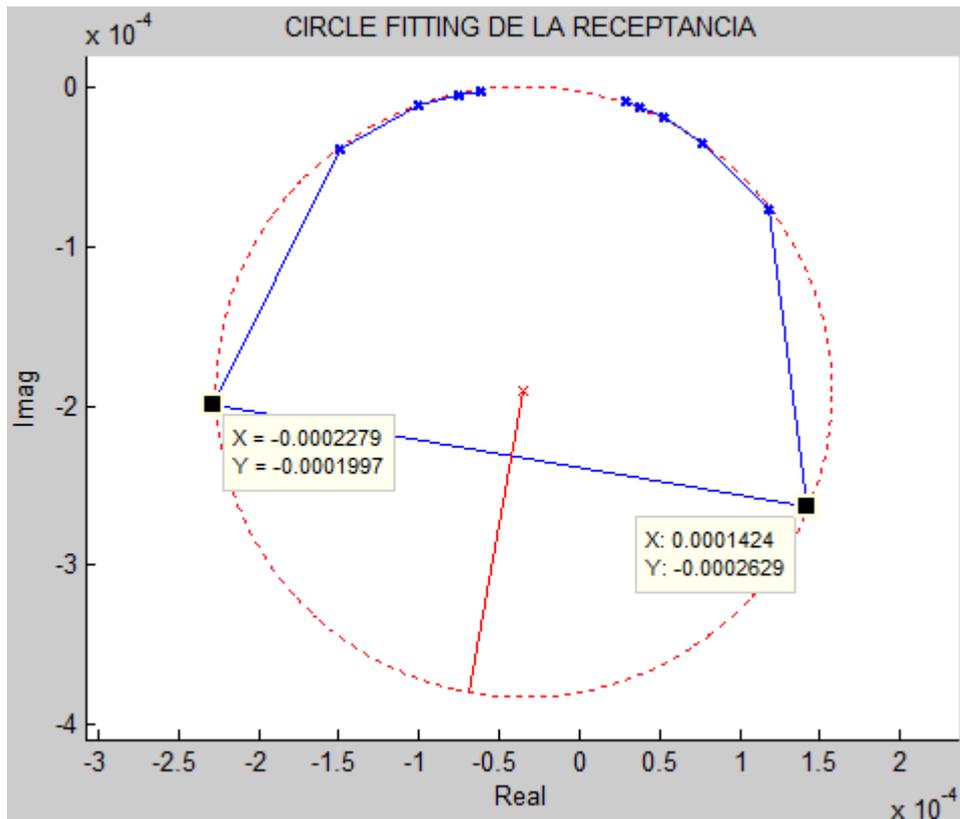


Figura 5-8: Diagrama de Nyquist con los puntos experimentales adyacentes a la frecuencia natural indicados

En estas dos figuras se observa que la frecuencia natural obtenida mediante Circle-Fit es más exacta que la obtenida por Peak-Picking, ya que la localiza entre los dos puntos experimentales adyacentes, mientras que mediante Peak-Picking simplemente se tomaría como frecuencia natural la frecuencia del punto con mayor amplitud de estos dos, lo que demuestra que una baja resolución no supone un gran problema para el método de Circle-Fit, pero sí para el método de Peak-Picking.

Además, dado que el Peak-Picking usa interpolaciones lineales entre 2 puntos experimentales consecutivos para calcular los amortiguamientos, cuanto más alejados estén estos puntos, mayor error se cometerá con la interpolación, pudiendo alcanzarse errores realmente significativos.

Después de esta justificación de los datos experimentales utilizados se procede a aplicar el método de Circle-Fit y a obtener y comentar los resultados de los parámetros modales obtenidos.

Se muestran en detalle los resultados obtenidos para la octava función de respuesta en frecuencia para cada uno de los 5 primeros modos de vibración:

En primer lugar se parte del diagrama de Nyquist de la acelerancia, ya que los ficheros .txt con las medidas incluyen los valores de las partes real e imaginaria de la acelerancia para cada frecuencia.

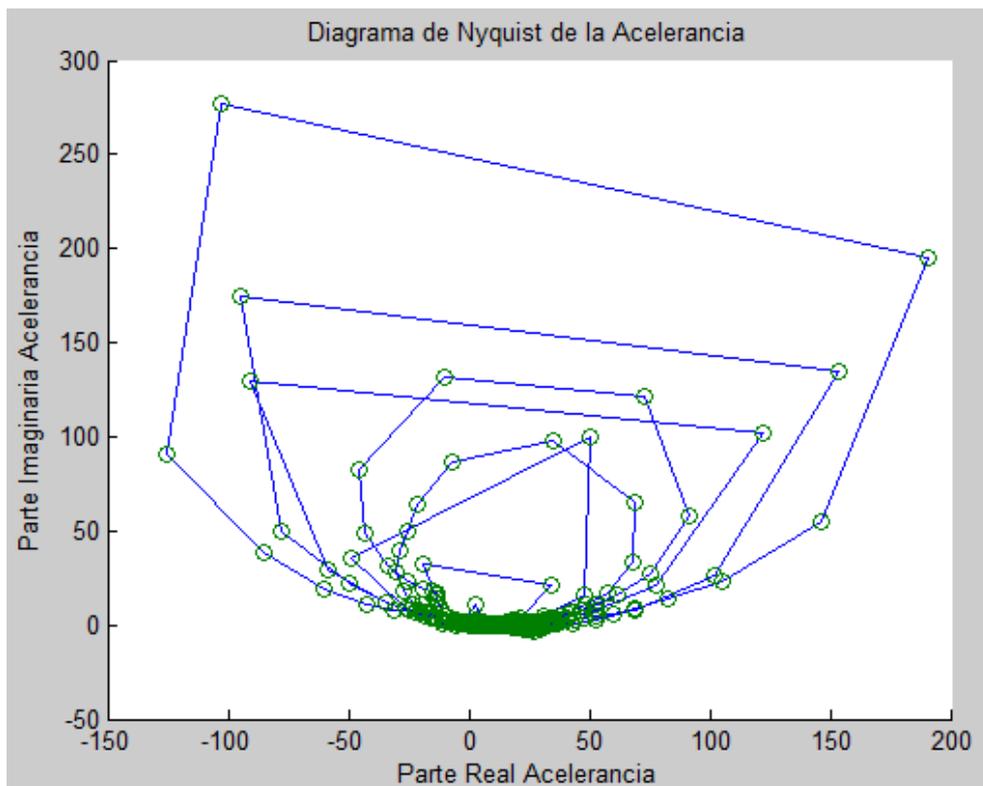


Figura 5-9: Diagrama de Nyquist de la acelerancia para la octava FRF

Conociendo los valores de las partes real e imaginaria de la acelerancia se pueden calcular las amplitudes y fases de la misma, lo que permite representarla en forma de Bode.

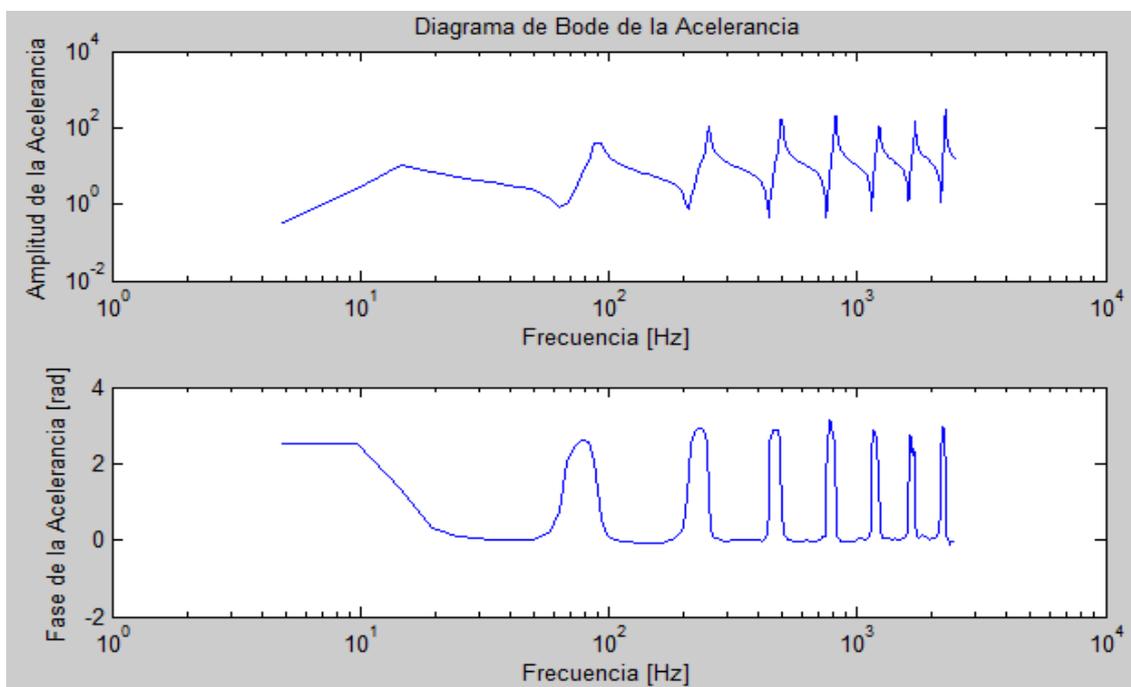


Figura 5-10: Diagrama de Bode de la acelerancia para la octava FRF

A partir de la acelerancia se obtiene la receptancia, que se puede representar tanto en forma de Bode como de Nyquist.

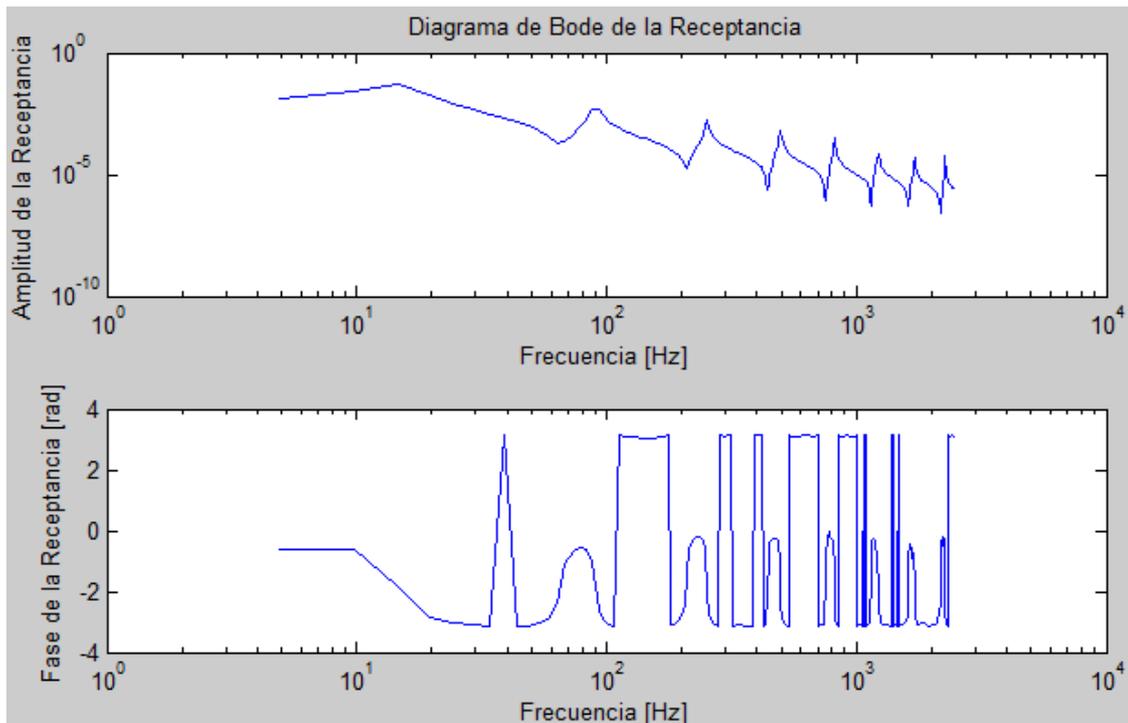


Figura 5-11: Diagrama de Bode de la receptancia para la octava FRF

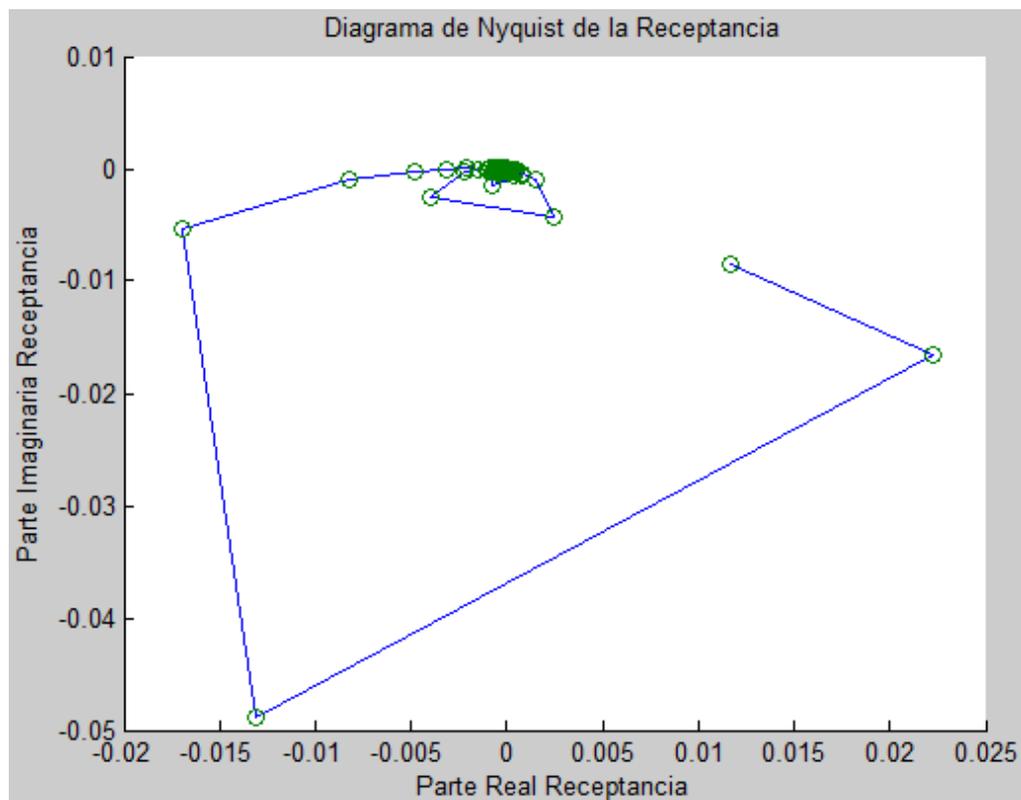


Figura 5-12: Diagrama de Nyquist de la receptancia para la octava FRF

Para aplicar el método de Circle-Fit se utiliza el Nyquist de la receptancia, pero, como ya se ha comentado, no en todo el rango de frecuencias, sino que para cada modo hay que seleccionar un intervalo de frecuencias adecuado alrededor de la resonancia. Es conveniente, aunque no necesario, que la frecuencia natural esté lo más centrada posible en el intervalo que se elige.

Para el primer modo se selecciona el intervalo (4.88281 – 34.17967) Hz:

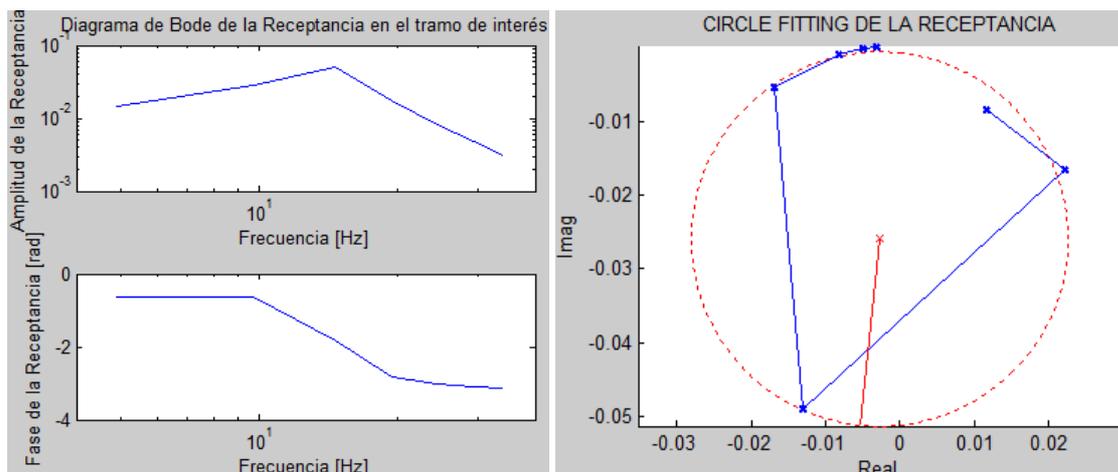


Figura 5-13: Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la primera resonancia

Para el segundo modo se selecciona el intervalo (63.47653 – 112.30463) Hz:

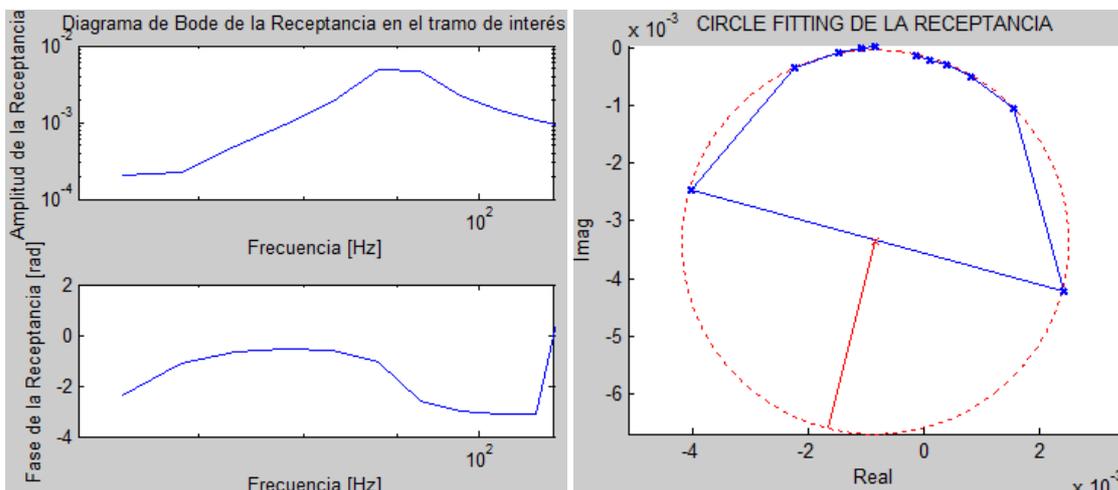


Figura 5-14: Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la segunda resonancia

Para el tercer modo se selecciona el intervalo (224.60926 – 273.43736) Hz:

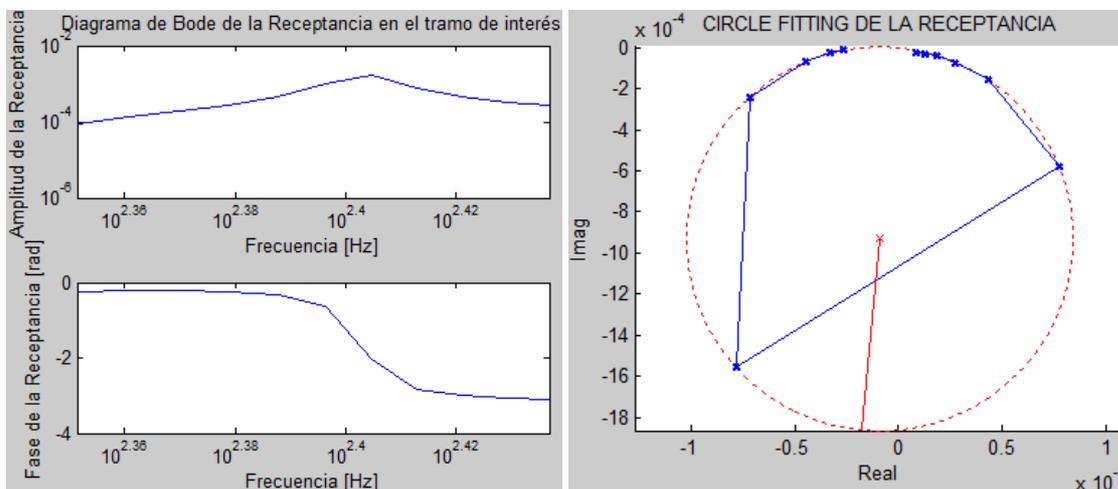


Figura 5-15: Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la tercera resonancia

Para el cuarto modo se selecciona el intervalo (468.74976 – 517.57786) Hz:

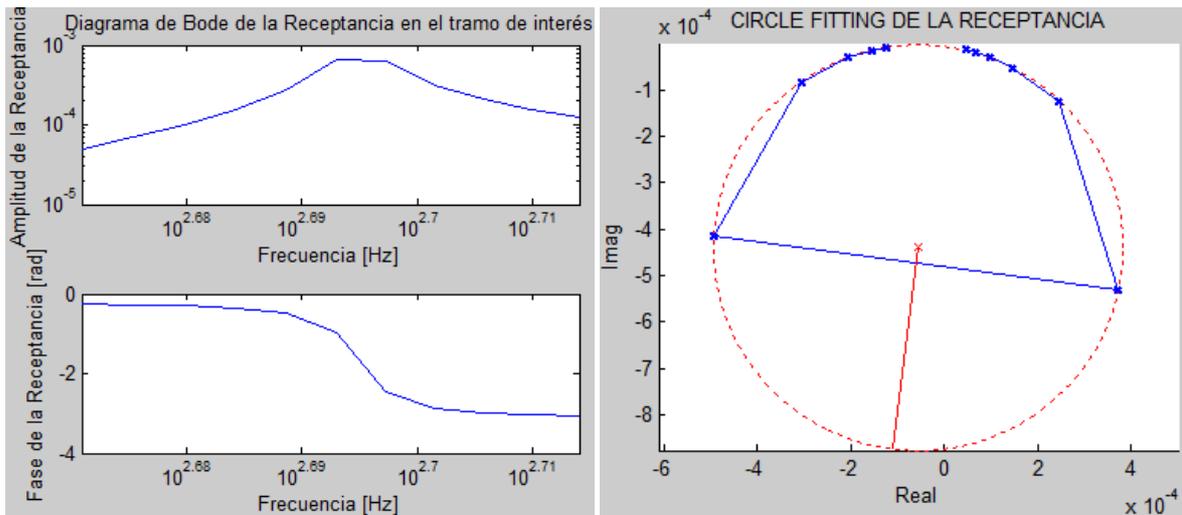


Figura 5-16: Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la cuarta resonancia

Para el quinto modo se selecciona el intervalo (791.01522 – 839.84332) Hz:

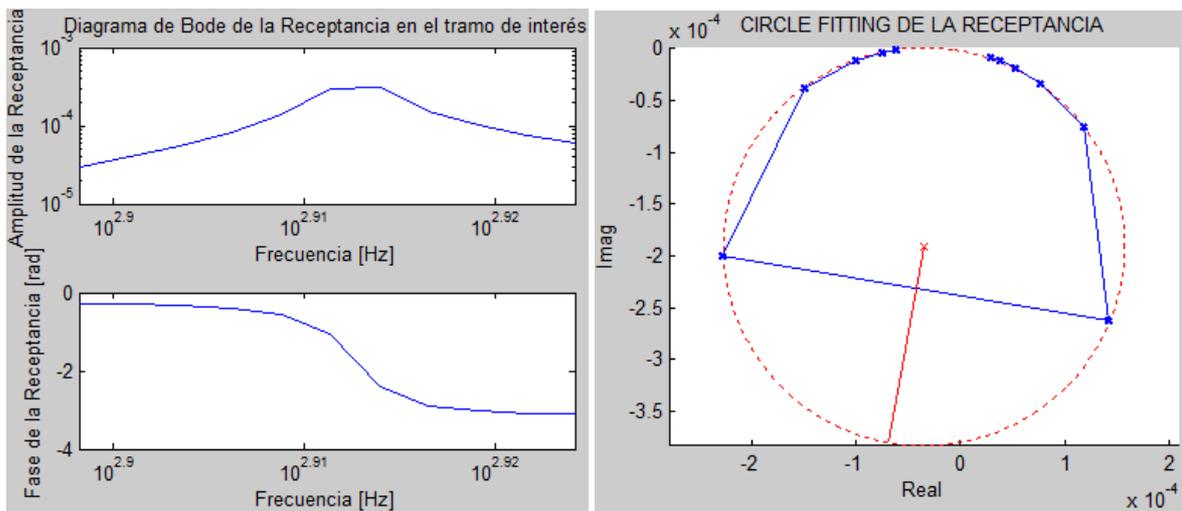


Figura 5-17: Diagramas de Bode y Nyquist de la octava FRF alrededor de la quinta resonancia

Los resultados que se obtienen tras aplicar el Circle-Fit a los 5 primeros modos de la octava FRF son los siguientes:

FRF 8	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	13.99	0.31532	0.029792	3.1268	-6.0432
Modo 2	90.298	0.049989	0.0079512	2.7195	-14.047
Modo 3	252.61	0.01861	0.0013633	2.2205	-5.4797
Modo 4	495.59	0.010416	0.00088542	2.2415	-7.2213
Modo 5	817.89	0.0073632	0.00042141	1.8914	-10.353

Tabla 5-3: Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Circle-Fit

Procediendo análogamente para las 8 FRFs se obtienen todos los resultados.

FRF 1	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	15.704	0.23667	0.020732	0.44685	-19.735
Modo 2	90.025	0.066188	0.0045723	1.2811	173.8
Modo 3	253	0.031672	0.0027731	2.0565	-1.8341
Modo 4	496.17	0.012823	0.00041937	2.0641	176.77
Modo 5	817.89	0.0076842	0.00062288	0.90018	-3.3105

Tabla 5-4: Resultados para la primera FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 2	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	15.16	0.20219	0.16024	0.33813	-38.865
Modo 2	90.123	0.053476	0.00098821	2.053	173.94
Modo 3	252.47	0.01996	0.00095824	1.9325	1.1619
Modo 4	495.31	0.010071	0.0014553	0.31973	-177.21
Modo 5	817.81	0.0074157	1.9519e-005	1.2912	174.91

Tabla 5-5: Resultados para la segunda FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 3	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	13.989	0.30043	0.047496	0.97286	-14.131
Modo 2	90.355	0.052983	0.0012962	2.4081	176.44
Modo 3	252.58	0.01957	0.0023179	0.72958	7.2723
Modo 4	495.44	0.011761	0.00025494	1.6825	-4.2664
Modo 5	817.71	0.0079045	0.00035452	0.99897	177.82

Tabla 5-6: Resultados para la tercera FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 4	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	13.966	0.31245	0.0025892	2.6771	-28.801
Modo 2	90.101	0.060516	0.0023104	2.2131	177.91
Modo 3	252.91	0.020102	0.0012517	0.76964	176.33
Modo 4	495.65	0.010282	0.00028067	1.4793	-1.0916
Modo 5	818.08	0.0072695	0.00013997	1.2231	-4.2499

Tabla 5-7: Resultados para la cuarta FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 5	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	no	no	no	no	no
Modo 2	89.74	0.038231	0.024007	0.80262	-161.33
Modo 3	252.83	0.019011	0.00035611	1.4264	178.61
Modo 4	495.58	0.0091617	0.00098014	0.48089	173.49
Modo 5	817.65	0.007956	0.00019305	0.95372	-3.6664

Tabla 5-8: Resultados para la quinta FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 6	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	no	no	no	no	no
Modo 2	no	no	no	no	no
Modo 3	252.25	0.021342	0.0031104	1.2525	-174.96
Modo 4	495.54	0.010992	0.00019966	1.7288	179.31
Modo 5	817.79	0.007742	0.0001297	1.1717	173.52

Tabla 5-9: Resultados para la sexta FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 7	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	13.777	0.44291	0.095944	3.6349	-26.363
Modo 2	90.392	0.053902	0.017999	1.3356	-18.663
Modo 3	254.59	0.021587	0.011383	0.42683	-22.011
Modo 4	495.12	0.0087451	0.0039267	0.30972	-165.99
Modo 5	817.89	0.0077291	0.0006134	0.83661	-179.36

Tabla 5-10: Resultados para la séptima FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

FRF 8	Frec Natural	Amortiguamiento	Desv Estándar	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (°)
Modo 1	13.99	0.31532	0.029792	3.1268	-6.0432
Modo 2	90.298	0.049989	0.0079512	2.7195	-14.047
Modo 3	252.61	0.01861	0.0013633	2.2205	-5.4797
Modo 4	495.59	0.010416	0.00088542	2.2415	-7.2213
Modo 5	817.89	0.0073632	0.00042141	1.8914	-10.353

Tabla 5-11: Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Cicle-Fit

Se observa que los resultados del primer modo para las distintas FRFs (y también el del segundo modo para la sexta FRF) no son correctos o no se pueden calcular. Esto ya era esperable sólo con ver los diagramas de Bode o de Nyquist para frecuencias bajas. En vista de esto, parece que habría sido recomendable haber tomado las medidas para baja y alta frecuencia por separado como se hizo con las medidas utilizadas en el capítulo 4.2.

Por lo demás, para cada modo se obtienen valores de la frecuencia natural y del amortiguamiento muy parecidos para las diferentes FRFs, y además para los amortiguamientos se tienen desviaciones estándar pequeñas, lo que sirve como indicador de que las medidas experimentales son buenas.

6 LINE-FIT

EN este capítulo se desarrolla un fichero de Matlab que aplica el método de Line-Fit a cualquier sistema estructural, partiendo de las medidas experimentales de las FRFs, poniendo en práctica lo explicado en el apartado 3.3.4.

El desarrollo de los apartados 6.1 y 6.2 es análogo al de los apartados 5.1. y 5.2., y las medidas experimentales usadas en este capítulo son las mismas que se usaron en el capítulo 5.

6.1 Funcionamiento del archivo de Matlab

Como se hizo en los apartados 4.1. y 5.1. se le aplica el método a una curva de receptancia con un solo modo de vibración definida a partir de su expresión analítica, imponiendo arbitrariamente sus parámetros modales. El objetivo es poder explicar cómo funciona el archivo de Matlab, y saber así en qué pasos hay que prestar especial atención.

Los parámetros modales que se han tomado son los siguientes:

Frecuencia Natural	15
Amortiguamiento	0.025
Constante Modal	0.5+0.01i

Tabla 6-1: Parámetros modales tomados para definir la receptancia

Con estos parámetros, la receptancia, representada en forma de Bode, es la siguiente:

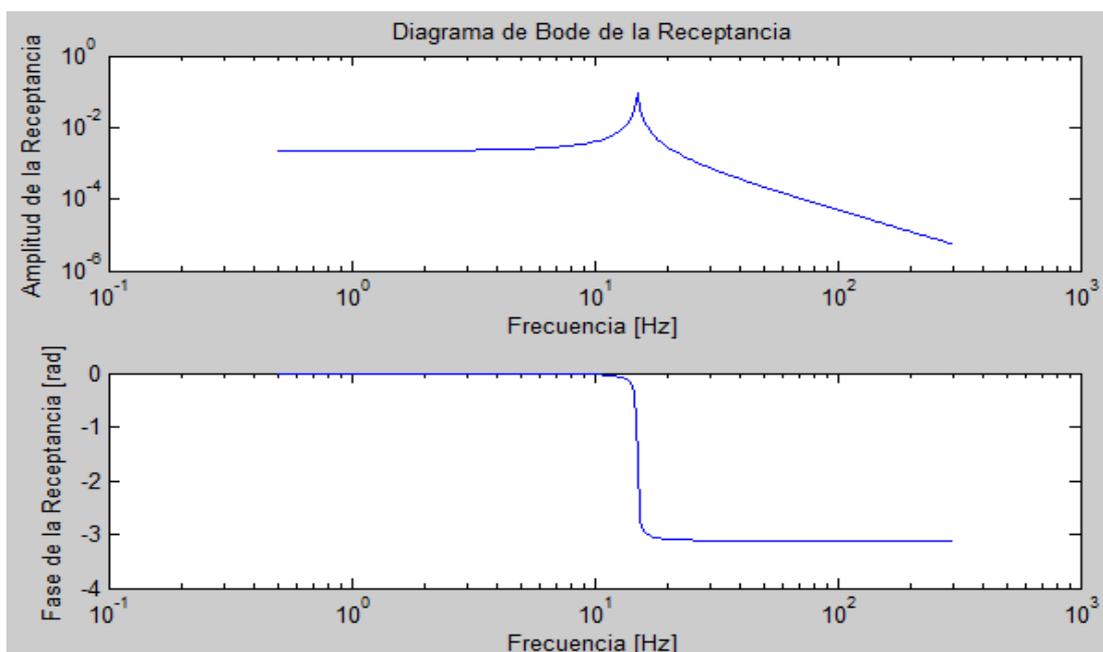


Figura 6-1: Diagrama de Bode de la receptancia

También se podría representar el diagrama de Nyquist como se hizo en el apartado 5.1., pero para este método no tiene ninguna aplicación.

Para aplicar el archivo de Matlab a unos datos experimentales habrá que obtener los valores de la receptancia a partir de las medidas que se hayan tomado, generalmente de la acelerancia. Una vez se tenga la receptancia, el proceso es análogo al que se explica a continuación.

Lo siguiente es elegir el intervalo de frecuencias al que se le va a aplicar el método. Para ello hay que tener en cuenta las mismas consideraciones que ya se comentaron en el apartado 5.1. Conviene intentar elegir el mayor número de puntos experimentales posible, siempre y cuando el intervalo de frecuencias no sea lo suficientemente grande como para que la zona resonante que se está estudiando esté influida por otros modos. A diferencia del método de Circle-Fit, en el método de Line-Fit no hay que prestarle tanta atención a que el punto de máxima frecuencia esté centrado en el intervalo elegido. Por otra parte, hay que ser más cuidadoso con lo grande que es el intervalo, ya que los puntos alejados de la resonancia tienen una mayor influencia negativa en los resultados que en el método de Circle-Fit. Esto, que puede parecer algo complejo, no lo es realmente. En las figuras que devuelve el programa será fácil comprobar si el intervalo elegido es adecuado o no, y en el caso de no serlo es muy rápido modificarlo y volver a obtener resultados, ya que el tiempo de ejecución es despreciable.

Para este ejemplo el intervalo elegido es (12.5 – 17.5) Hz, aunque al haber sólo un modo se obtendrían los mismos resultados para cualquier intervalo. Si hubiera más modos habría que resolverlos uno a uno, eligiendo un intervalo apropiado para cada uno de ellos. Esto es lo único que hay que modificar cada vez que se aplique el método, todo lo demás es automático. El diagrama de Bode de este intervalo es:

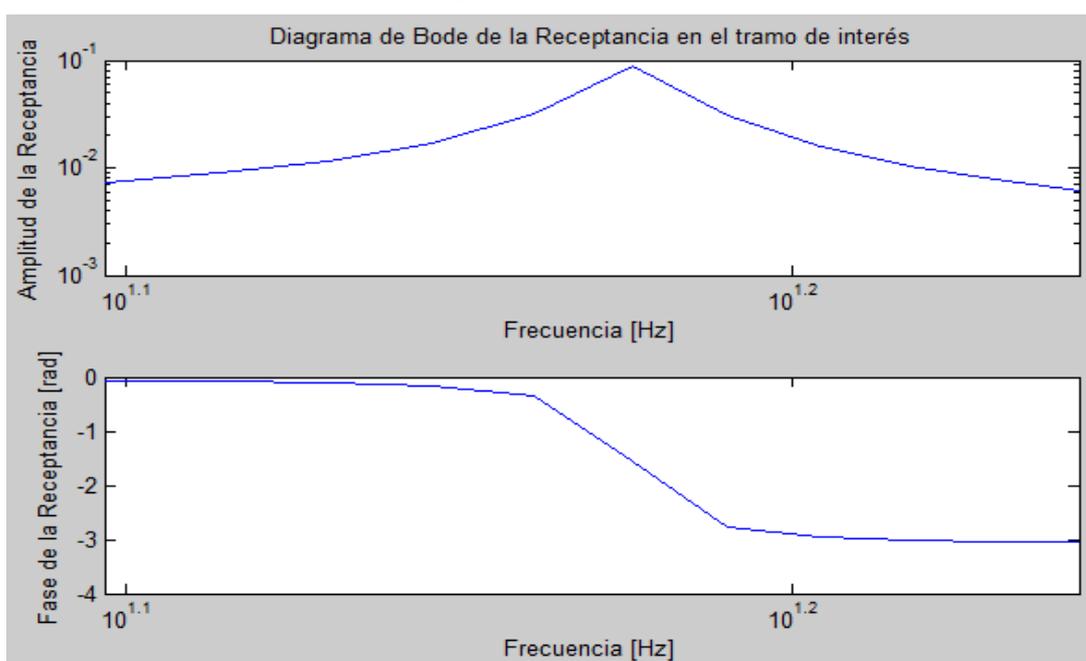


Figura 6-2: Diagrama de Bode de la receptancia en las inmediaciones de la resonancia

Se calculan ahora las nuevas FRFs α'_{jk} y $\Delta(\omega)$ que se definieron en el capítulo 3.3.4. como:

$$\alpha'_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}(\omega) - \alpha_{jk}(\Omega) \quad (6.1)$$

$$\Delta(\omega) = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\alpha'_{jk}(\omega)} \quad (6.2)$$

siendo Ω una variable conocida como frecuencia fijada, que es una de las frecuencias comprendidas en el intervalo que se está estudiando.

En este ejemplo, el intervalo va desde 12.5 hasta 17.5 Hz, con una resolución de 0.5 Hz, por lo que las frecuencias que se tienen son 12.5, 13, 13.5, 14, ..., 17.5.

La manera de proceder es la siguiente: Primero se toma como frecuencia fijada 12.5 Hz y se calcula $\alpha'_{jk}(\omega)$ para el rango 12.5—17.5, que no es más que restarle a todos los valores de la receptancia el valor de la receptancia en 12.5 Hz. En segundo lugar se calcula $\Delta(\omega)$, y se obtiene su parte real e imaginaria. Con esto ya se pueden representar 2 curvas: $Re(\Delta)$ frente a ω^2 , e $Im(\Delta)$ frente a ω^2 .

Una vez hecho esto tomando 12.5 Hz como frecuencia fijada, se vuelve a repetir para 13 Hz, y luego para 13.5, y así sucesivamente hasta 17.5 Hz.

El resultado son dos figuras, $Re(\Delta)$ frente a ω^2 , e $Im(\Delta)$ frente a ω^2 , con tantas curvas como posibles valores de frecuencias fijadas haya.

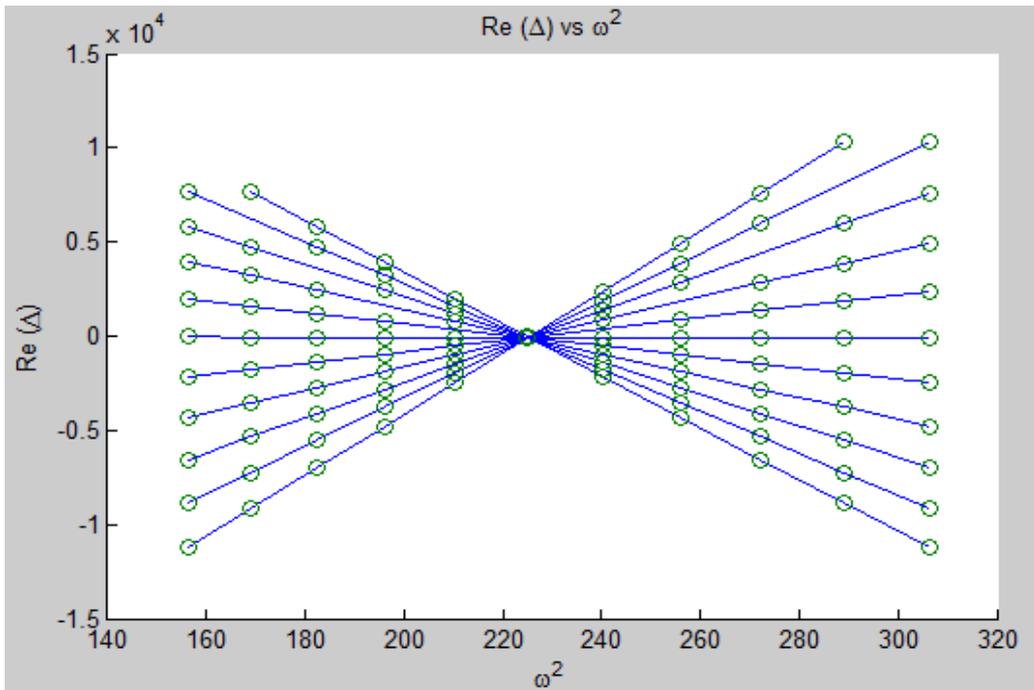


Figura 6-3: $Re(\Delta)$ frente a ω^2 para los distintos valores de frecuencia fijada

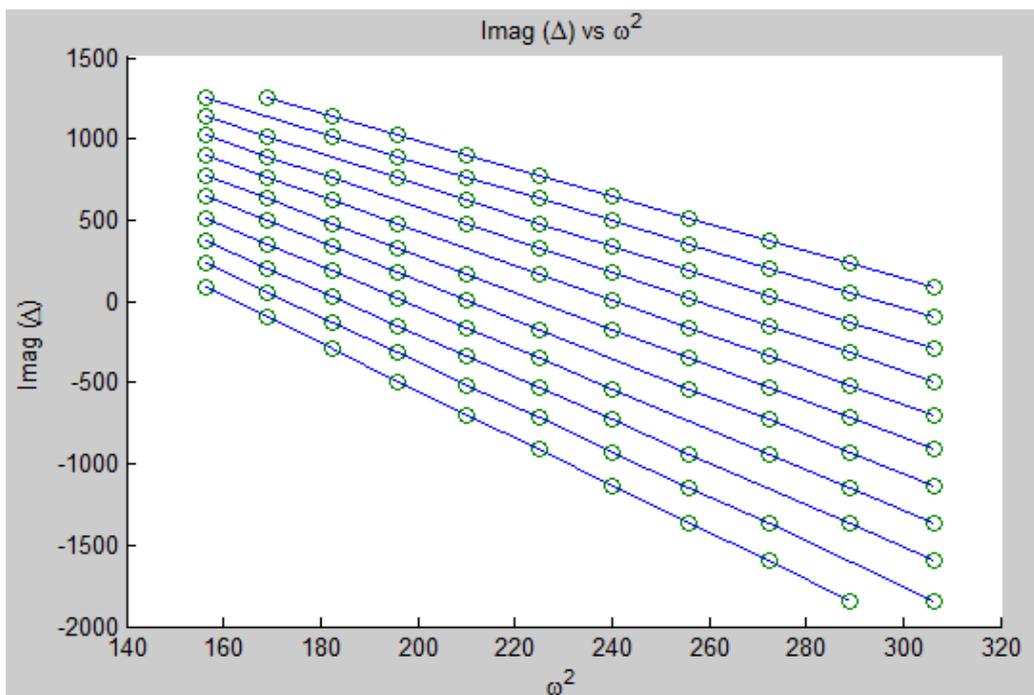


Figura 6-4: $Im(\Delta)$ frente a ω^2 para los distintos valores de frecuencia fijada

En las figuras se observa que en cada curva ‘‘falta’’ un punto. Volviendo a la ecuación (6.2) se observa que cuando ω coincide con Ω , se produce una indeterminación 0 partido por 0, por lo que el resultado que devolvería Matlab sería NaN. Por tanto, estos puntos no se calculan, por lo que cuando $\Omega = 12.5$, $\Delta(\omega)$ se calcula para todos los valores de ω excepto para 12.5, y así sucesivamente. Estos puntos que ‘‘faltan’’ valdrían NaN en la curva de $Re(\Delta)$ y 0 en la curva de $Im(\Delta)$, lo que produciría errores en las rectas de regresión que se van a obtener a continuación.

El siguiente paso es hallar la recta de regresión de los puntos de cada una de las 11 curvas de ambas figuras (que en este caso son exactamente rectas, y cuando se utilicen medidas experimentales serán curvas, en principio, prácticamente rectas) y obtener la pendiente de cada una de ellas. Para ello se utiliza la función *polyfit* [22] de Matlab.

A partir de la figura 6-3 se obtiene la figura 6-5, en la que se representa la pendiente de cada una de las rectas de regresión frente a la frecuencia fijada de cada una de ellas al cuadrado. Análogamente se obtiene la figura 6-6 a partir de la figura 6-4.

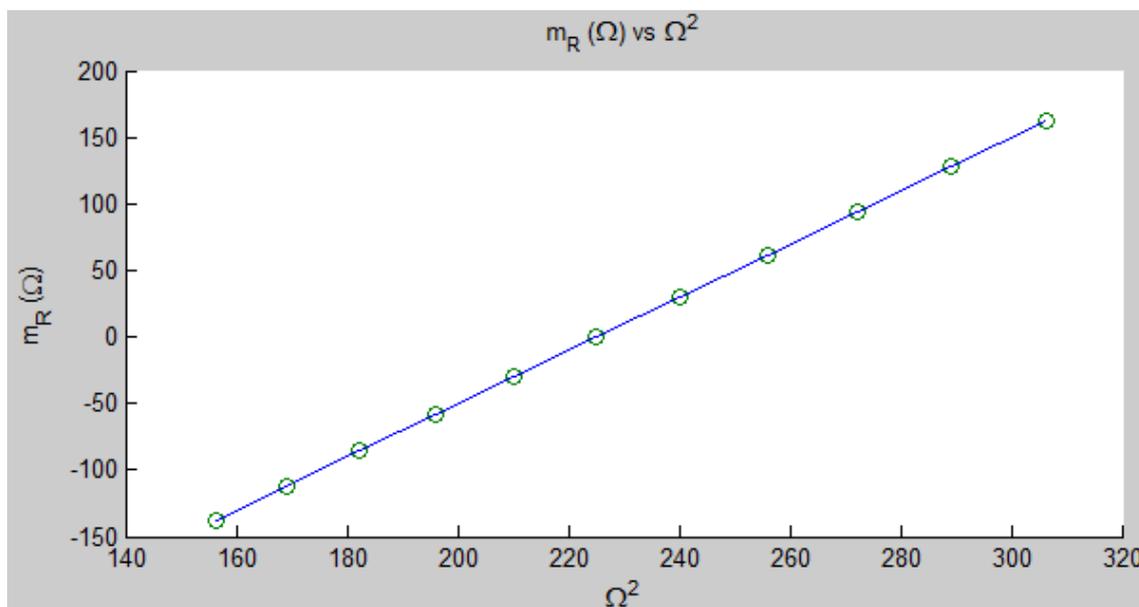


Figura 6-5: m_R frente a Ω^2

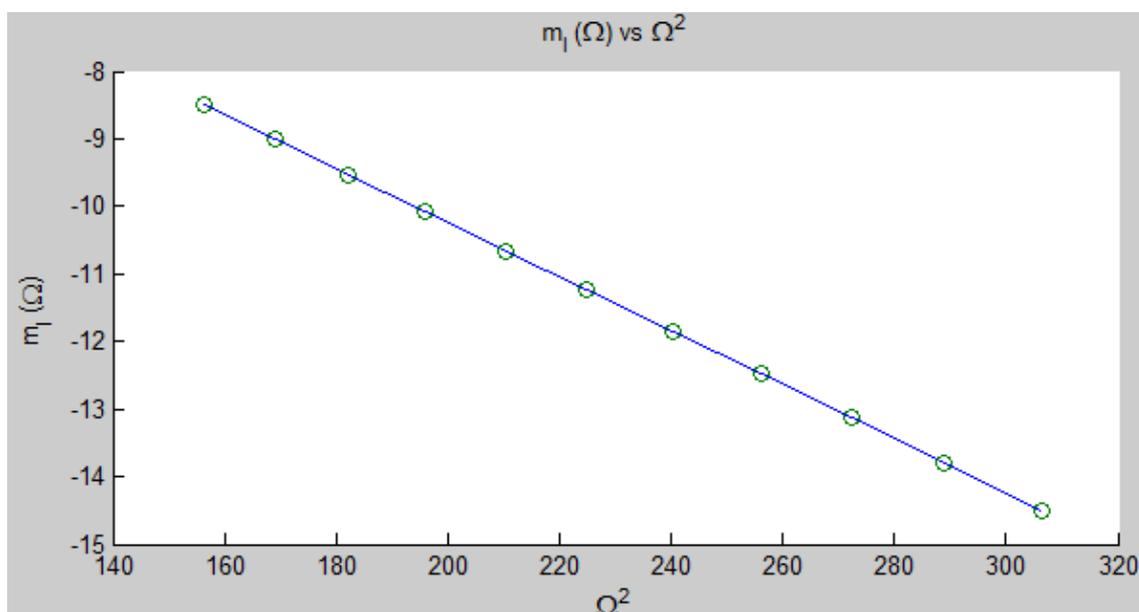


Figura 6-6: m_I frente a Ω^2

Por último, se hallan las rectas de regresión de estos dos conjuntos de puntos, y se obtienen sus respectivas pendientes (n_R y n_I) e intersecciones con el eje y (d_R y d_I) estando estos 4 valores relacionados con los parámetros modales de la siguiente forma:

$$p = \frac{n_I}{n_R} ; q = \frac{d_I}{d_R} \quad (6.3)$$

$$\eta_r = \frac{q - p}{1 + p \cdot q} \quad (6.4)$$

$$\omega_r^2 = \frac{d_R}{(p \cdot \eta_r - 1) \cdot n_R} \quad (6.5)$$

$$a_r = \frac{\omega_r^2 \cdot (p \cdot \eta_r - 1)}{(1 + p^2) \cdot d_R} \quad (6.6)$$

$$b_r = -a_r \cdot p \quad (6.7)$$

$${}_r A_{jk} = a_r + i \cdot b_r \quad (6.8)$$

Los resultados obtenidos, como era de esperar, coinciden exactamente con los datos que se impusieron al principio del capítulo.

Frecuencia Natural	15
Amortiguamiento	0.025
Constante Modal	0.5 + 0.01i

Tabla 6-2: Resultados obtenidos mediante Line-Fit

En capítulos previos ya se comentó que la resolución de las medidas es un factor clave a la hora de aplicar el método de Peak-Picking, y que, sin ser clave, también afecta levemente a una hipótesis que se hace a la hora de calcular la frecuencia natural mediante Circle-Fit. En este caso concreto, se tienen valores de la receptancia cada 0.5 Hz, y se puede comprobar que disminuyendo la resolución, es decir, aumentando la distancia entre puntos consecutivos, los resultados no varían en absoluto.

Por otra parte, ya se comentó que al aplicar el método de Circle-Fit la frecuencia natural tenía que estar, obligatoriamente, comprendida en el intervalo de estudio que se escoge, y que además es recomendable que esté lo más centrada posible dentro del mismo. Usando el método de Line-Fit, se puede comprobar que no es necesario que la frecuencia natural esté centrada en el intervalo, y que incluso no es necesario que esté dentro del mismo. Por ejemplo, en este caso en el que la frecuencia natural es 15, se pueden obtener los resultados esperados aplicándole el método al intervalo 15.5—21 Hz. Con este intervalo el archivo de Circle-Fit daría error y no sería posible obtener ningún resultado.

Por otra parte, en [6] se comenta que en el método de Line-Fit los puntos más alejados de la resonancia tienen más peso que los cercanos a la resonancia a la hora de calcular los parámetros modales que en el método de Circle-Fit. Esto, que se señala como una ventaja del método de Line-Fit respecto al Circle-Fit, ya que por lo general en las medidas experimentales de los puntos más cercanos a la resonancia se comete un error mayor que en los que están más alejados, también tiene un punto negativo, ya que también hay que tener en cuenta que los puntos más alejados de una resonancia están más influidos por otros modos de vibración, y como estos puntos ahora tienen más peso a la hora de obtener resultados, habrá que ser más conservador a la hora de elegir el intervalo de frecuencias para estudiar cada uno de los modos para evitar que otros modos influyan en los resultados.

6.2 Resultados Experimentales

El sistema que se va a estudiar es el mismo que en los dos capítulos anteriores, un voladizo empotrado en su base, y el conjunto de medidas experimentales es el usado en apartado 5.2., por las mismas razones que ya se explicaron en dicho capítulo.

Se muestra en detalle la obtención de los parámetros modales de los 5 primeros modos de vibración para la octava FRF, y luego, análogamente, se obtienen los resultados de las otras 7 FRFs.

Las medidas experimentales utilizadas son las mismas que en el apartado 5.2., por lo que las curvas de acelerancia y receptancia son iguales. El diagrama de Bode de la receptancia, obtenido a partir de las medidas de la acelerancia, hasta 2500 Hz, es el siguiente:

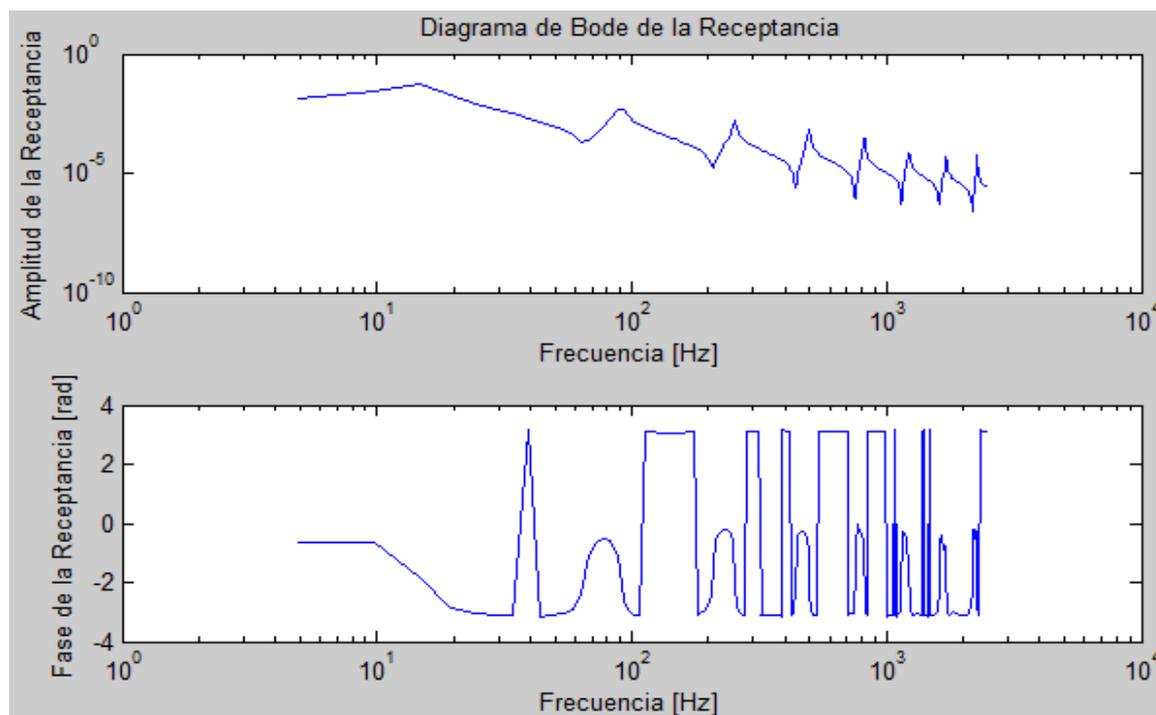


Figura 6-7: Diagrama de Bode de la receptancia para la octava FRF

Ahora, para estudiar cada uno de los modos, hay que centrarse en un intervalo de frecuencias adecuado. Este intervalo se encuentra mediante prueba y error, utilizando las gráficas que se adjuntan para identificar los puntos que habría que quitar si se diese el caso.

Para el primer modo se selecciona el intervalo (9.7656—34.18) Hz:

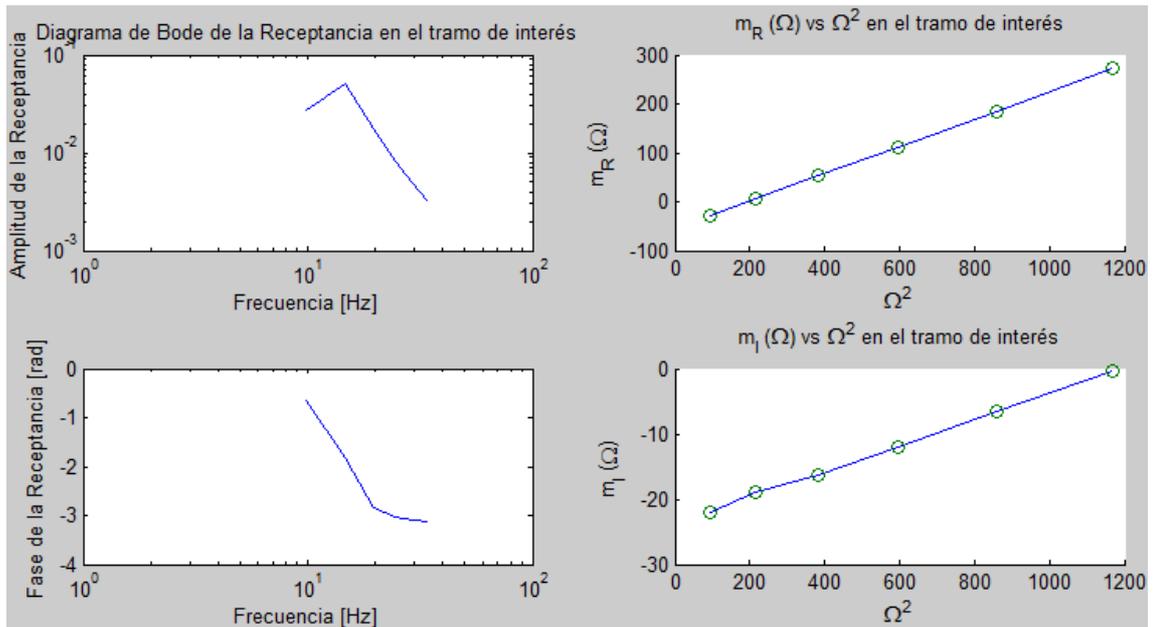


Figura 6-8: Bode y resultados del primer modo de la octava FRF

Para el segundo modo se selecciona el intervalo (73.242—102.54) Hz:

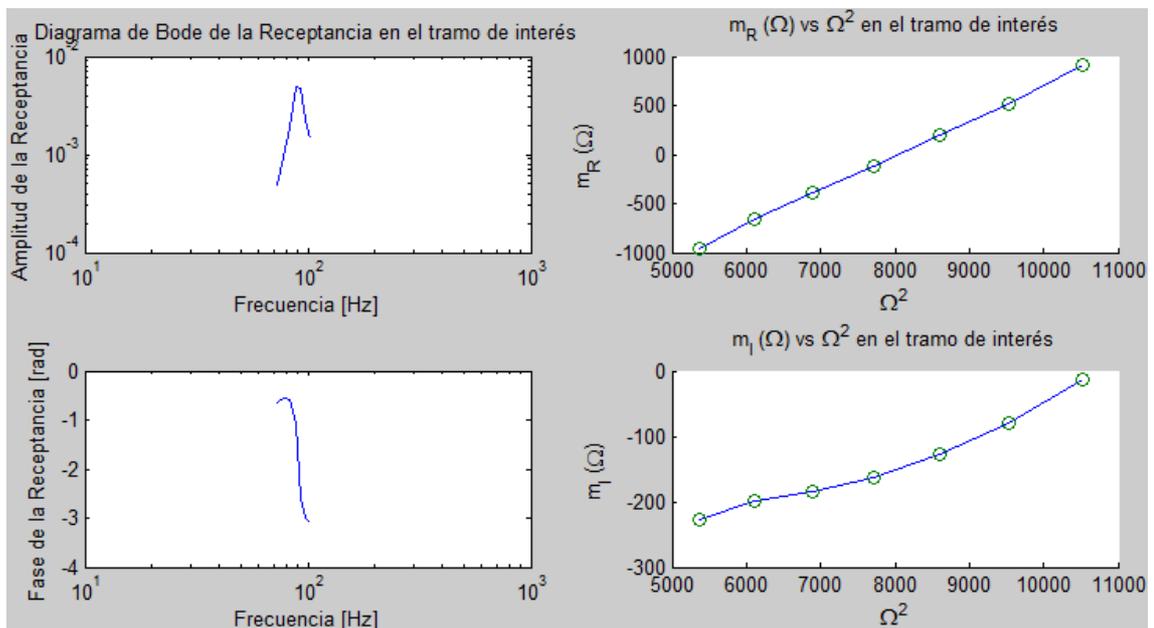


Figura 6-9: Bode y resultados del segundo modo de la octava FRF

Para el tercer modo se selecciona el intervalo (239.26—273.44) Hz:

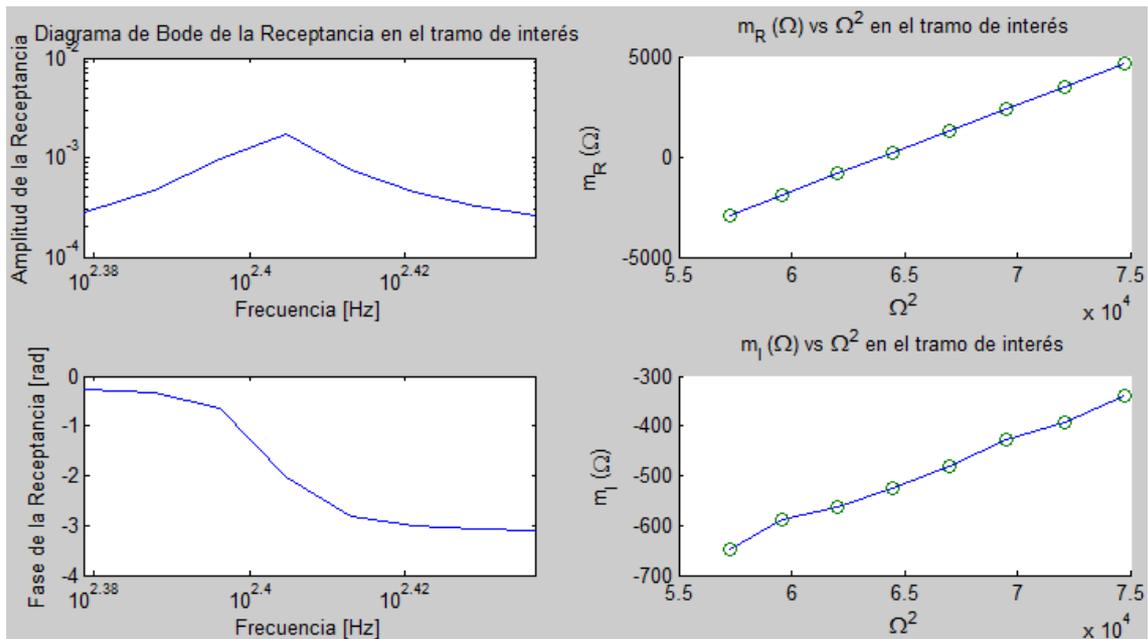


Figura 6-10: Bode y resultados del tercer modo de la octava FRF

Para el cuarto modo se selecciona el intervalo (468.75—517.58) Hz:

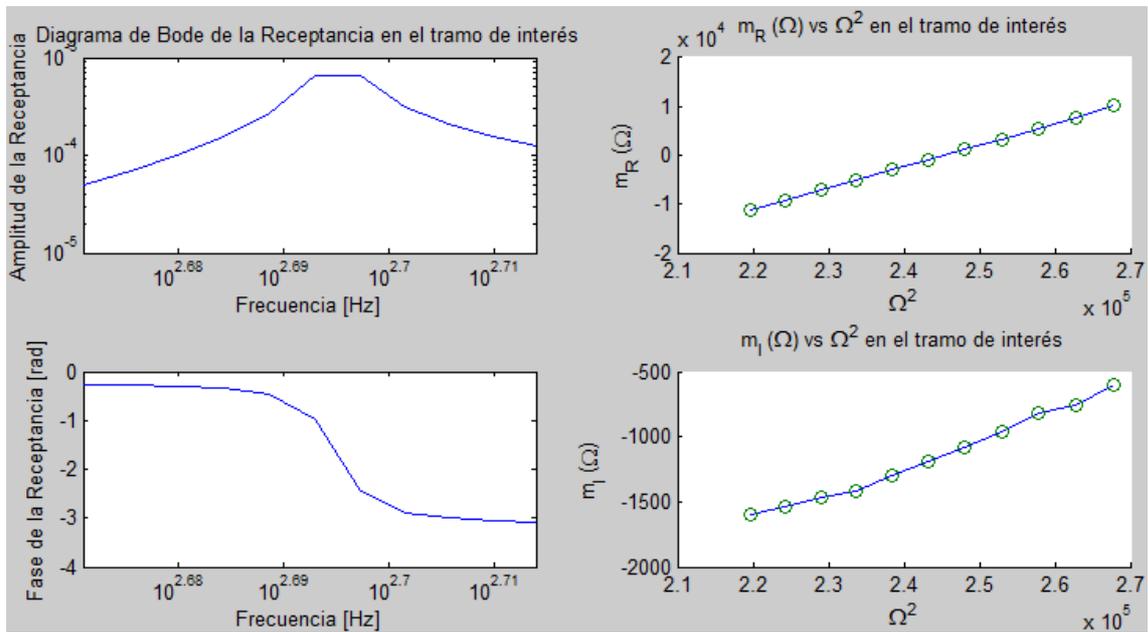


Figura 6-11: Bode y resultados del cuarto modo de la octava FRF

Para el quinto modo se selecciona el intervalo (791.02—839.84) Hz:

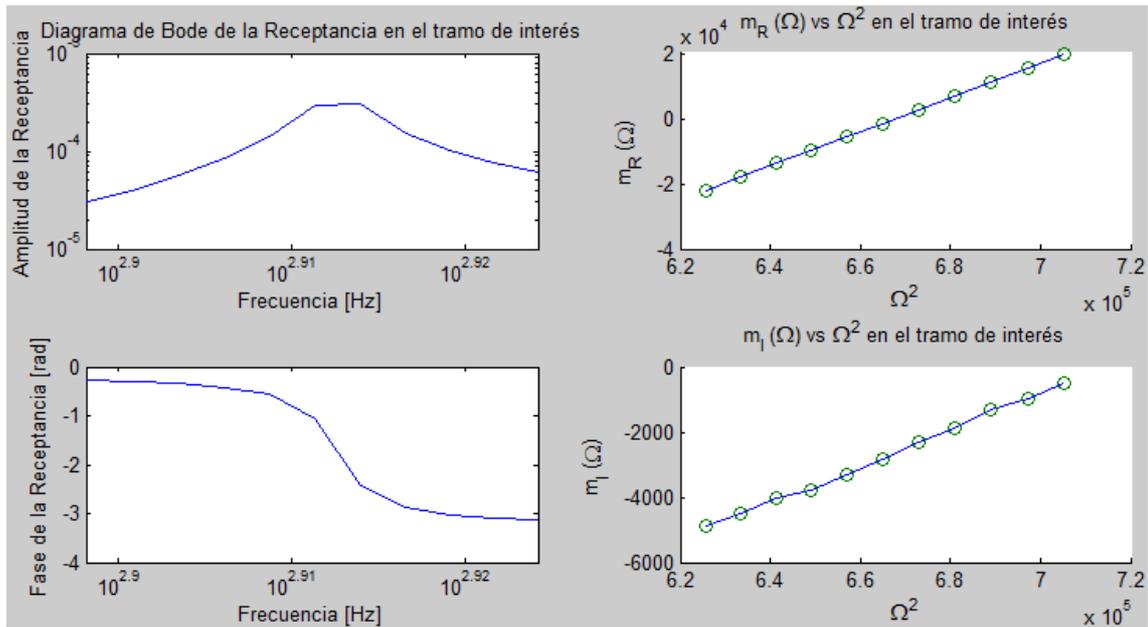


Figura 6-11: Bode y resultados del quinto modo de la octava FRF

Los resultados obtenidos para la octava FRF son los siguientes:

FRF 8	intervalo freq	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	9.7656 - 34.18	14.2	0.34872	3.5545	-0.071361
Modo 2	73.242 - 102.54	89.759	0.046237	2.7882	-0.11103
Modo 3	239.26 - 273.44	252.91	0.019104	2.3125	-0.039674
Modo 4	468.75 - 517.58	495.28	0.01028	2.2538	-0.047498
Modo 5	791.02 - 839.84	817.5	0.0073856	1.9028	-0.10679

Tabla 6-3: Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Line-Fit

Procediendo análogamente para las demás FRFs se obtienen todos los resultados:

FRF 1	intervalo freq	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	14.36	0.24284	0.53493	-0.28266
Modo 2	78.125 - 112.3	91.265	0.097326	1.6148	2.9927
Modo 3	234.38 - 268.55	253.28	0.046081	2.3553	-0.06348
Modo 4	478.52 - 507.81	497.1	0.012317	2.1014	3.0336
Modo 5	800.78 - 834.96	817.78	0.007809	0.82662	-0.14964

Tabla 6-4: Resultados para la primera FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 2	intervalo freq	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	13.807	0.37304	0.67721	-0.2313
Modo 2	78.125 - 112.3	90.05	0.057057	2.0821	3.0325
Modo 3	234.38 - 268.55	252.86	0.019518	1.8996	-0.014905
Modo 4	478.52 - 507.81	495.4	0.01065	0.33468	3.0727
Modo 5	800.78 - 834.96	817.75	0.0073935	1.2917	3.0574

Tabla 6-5: Resultados para la segunda FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 3	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	12.941	0.3487	1.3877	0.069028
Modo 2	83.008 - 107.42	91.145	0.053382	2.6291	2.9691
Modo 3	229.49 - 268.55	254.65	0.019365	0.64375	-0.15401
Modo 4	478.52 - 507.81	494.87	0.013089	1.7371	-0.041437
Modo 5	800.78 - 834.96	817.5	0.0088487	1.0304	3.0835

Tabla 6-6: Resultados para la tercera FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 4	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	13.983	0.28027	2.9302	-0.29255
Modo 2	83.008 - 107.42	90.114	0.06769	2.3294	3.1014
Modo 3	234.38 - 258.79	253.34	0.021128	0.79129	3.1024
Modo 4	478.52 - 507.81	496.08	0.0099525	1.4516	-0.072837
Modo 5	800.78 - 834.96	818.25	0.007347	1.2238	-0.058823

Tabla 6-7: Resultados para la cuarta FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 5	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	13.432	0.58767	3.7035	-1.3316
Modo 2	83.008 - 107.42	90.555	0.042742	1.0749	3.0109
Modo 3	234.38 - 253.91	252.59	0.015665	1.1385	-2.9624
Modo 4	478.52 - 502.93	495.21	0.0096462	0.52778	3.1168
Modo 5	800.78 - 834.96	817.81	0.008702	0.99522	-0.088911

Tabla 6-8: Resultados para la quinta FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 6	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	14.648 - 34.18	13.439	0.38667	2.7836	-0.27948
Modo 2	no	no	no	no	no
Modo 3	234.38 - 258.79	253.01	0.022199	1.2253	3.0362
Modo 4	468.75 - 498.05	495.82	0.010629	1.7331	3.0601
Modo 5	795.9 - 830.08	817.68	0.0085209	1.2071	3.0224

Tabla 6-9: Resultados para la sexta FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 7	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	9.7656 - 34.18	12.089	0.43485	3.3815	0.031553
Modo 2	73.242 - 102.54	89.119	0.056519	1.4361	0.012704
Modo 3	234.38 - 268.55	252.3	0.017141	0.37455	0.088299
Modo 4	468.75 - 502.93	496.48	0.010927	0.3795	2.8488
Modo 5	791.02 - 825.2	818.83	0.0079029	0.84794	2.9152

Tabla 6-10: Resultados para la séptima FRF obtenidos mediante Line-Fit

FRF 8	intervalo frec	Frec Natural	Amortiguamiento	Módulo Cte Modal	Argum Cte Modal (rad)
Modo 1	9.7656 - 34.18	14.2	0.34872	3.5545	-0.071361
Modo 2	73.242 - 102.54	89.759	0.046237	2.7882	-0.11103
Modo 3	239.26 - 273.44	252.91	0.019104	2.3125	-0.039674
Modo 4	468.75 - 517.58	495.28	0.01028	2.2538	-0.047498
Modo 5	791.02 - 839.84	817.5	0.0073856	1.9028	-0.10679

Tabla 6-11: Resultados para la octava FRF obtenidos mediante Line-Fit

Como ocurría en el método de Circle-Fit, para el primer modo de vibración se obtienen valores del coeficiente de amortiguamiento excesivamente grandes. Todo parece indicar que es debido a que la toma de medidas no era óptima para las frecuencias más bajas. Aún así, con el método de Line-Fit al menos se pueden obtener resultados para el primer modo a partir de las 8 FRFs, algo que no ocurrió con el Circle-Fit.

Sin embargo, los resultados del segundo modo para la sexta FRF no se han considerado válidos, ya que se obtenía un amortiguamiento negativo.

En las tablas de resultados se incluye el intervalo de frecuencias seleccionado para estudiar cada modo, que en la mayoría de los casos ha sido menor que el usado al aplicar Circle-Fit, con el objetivo de minimizar la influencia de otros modos de vibración en los resultados.

Por lo demás, se observa que para cada modo de vibración se obtienen valores de frecuencia natural y amortiguamiento parecidos para las distintas FRFs, y que los argumentos de las constantes modales son próximos a 0 y a $\pm\pi$ (indicativo de modos de vibración reales). Además, los resultados obtenidos mediante Circle-Fit son por lo general parecidos a los de Line-Fit.

7 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

7.1 Conclusiones

El objetivo del presente Trabajo Fin de Grado ha sido realizar en Matlab unos archivos que permitan llevar a cabo el análisis modal de cualquier sistema estructural a partir de las medidas experimentales de sus FRFs.

El análisis modal experimental se puede definir como el conjunto de procesos involucrados en testar componentes o estructuras con el objetivo de obtener una descripción matemática de su comportamiento dinámico [6]. El análisis modal experimental incluye también el proceso de toma de medidas, aunque en este TFG se ha partido de dos conjuntos de medidas experimentales tomadas previamente durante el desarrollo de una práctica impartida en la Escuela.

En los capítulos más teóricos del Trabajo se han definido varios conceptos fundamentales, siendo uno de ellos el de Función de Respuesta en Frecuencia (FRF), que es una relación entre la fuerza y la respuesta del sistema (posición, velocidad o aceleración). Por lo general las medidas experimentales recogidas serán de la acelerancia del sistema, a partir de la cual es sencillo obtener la receptancia, que es la forma de FRF que se utilizará posteriormente en la aplicación de los métodos de análisis modal. Para manejar la receptancia, en vez de usar la expresión que se puede obtener de manera más inmediata, se pone en forma de sumatorio, con tantos términos como modos de vibración, de forma que es más sencillo comprender su comportamiento y su uso es mucho más eficiente desde un punto de vista numérico.

El Trabajo se centra en tres métodos de los llamados SDOF (*Single Degree Of Motion*): el Peak-Picking, el Circle-Fit y el Line-Fit. La aplicación de estos métodos está limitada a sistemas con frecuencias naturales suficientemente alejadas entre sí, de forma que un modo de vibración no se vea afectado por los demás. A pesar de lo que el nombre puede parecer indicar, su aplicación no se limita a sistemas de un grado de libertad, sino que el sistema puede tener varios modos de vibración, pero cada uno de estos modos se estudia por separado, de manera secuencial, a diferencia de lo que ocurre en los métodos MDOF.

El primero de los métodos desarrollados ha sido el de Peak-Picking. Se ha visto que es el más sencillo y rápido, ya que apenas requiere interacción por parte del usuario. Sin embargo, también es el que está más limitado. En primer lugar, los resultados dependen mucho de los puntos experimentales más cercanos a la resonancia, que son los más susceptibles de contener errores. Se ha visto también que sólo permite obtener constantes modales reales, esto no ha supuesto un gran problema para el sistema que se ha estudiado, ya que es un claro ejemplo de sistema con modos de vibración reales, pero se puede perder mucha información si se le aplica este método a un sistema con modos de vibración complejos. Se ha comprobado también la gran incidencia que tiene resolución de las medidas en los resultados obtenidos, ya que disminuir ligeramente la resolución puede provocar cambios en el orden de magnitud de los resultados. Por lo tanto, la validez de los resultados no sólo depende de que los puntos experimentales sean correctos, sino también de lo separados que están entre sí.

El siguiente método es el de Circle-Fit, y lo primero que se ha visto es que con las medidas experimentales usadas para el Peak-Picking no era posible obtener resultados válidos. Esto pone de manifiesto que el tipo de medidas tomadas es un factor tan importante como el tipo de sistema a la hora de elegir un método respecto a otros. En este método tiene menos importancia la resolución, ya que es capaz de tener en cuenta lo que ocurre entre dos puntos experimentales adyacentes, pero tiene más importancia la medida de la fase, ya que errores en ésta afectan al diagrama de Nyquist que se utiliza.

Por último, se ha desarrollado el método de Line-Fit. Para este método ha sido necesario definir una nueva FRF, y se ha comprobado que, en comparación con el método de Circle-Fit, los puntos del intervalo más

alejados de la resonancia tienen mayor incidencia en los resultados. Esto quiere decir que los resultados son más sensibles a modos adyacentes al que se esté estudiando, por lo que hay que ser más conservador a la hora de elegir el intervalo de frecuencias.

En cuanto a los resultados, se observa que son consistentes para cada método, ya que se cumple que para un mismo método, los valores de la frecuencia natural y del amortiguamiento de un determinado modo de vibración que se obtienen a partir de las distintas FRFs suelen ser bastante parecidos entre sí.

Para el método de Circle-Fit tenemos un indicador de la validez de las medidas experimentales, que es la desviación típica de los valores del coeficiente de amortiguamiento que se obtienen para un mismo modo. Se obtienen desviaciones pequeñas, que es lo adecuado. Además, mediante los métodos de Line-Fit y Circle-Fit se obtienen argumentos de la constante modal próximos a 0 o a $\pm\pi$ (excepto para el primer modo de vibración, ya que las medidas no son óptimas para frecuencias bajas), lo que era de esperar en un sistema con modos de vibración reales.

Mediante Circle-Fit y Line-Fit se obtienen resultados parecidos, aunque estos son algo diferentes a los obtenidos por Peak-Picking, sobretodo en el caso del amortiguamiento. El hecho de que no se hayan usado las mismas medidas para el Peak-Picking que para los otros dos métodos dificulta sacar conclusiones al respecto, ya que en algunos casos se puede ver, simplemente observando las curvas experimentales, que estas presentan diferencias entre sí, seguramente porque no se llevaron a cabo en las mismas condiciones.

Se pueden comparar las frecuencias naturales obtenidas mediante análisis modal con las obtenidas analíticamente, ya que al tratarse de un sistema estructural sencillo éstas son conocidas. Se observan diferencias de varios Hz. La hipótesis más lógica parece que el empotramiento del voladizo no sea perfecto, como el que se considera en el modelo.

7.2 Desarrollos Futuros

Para poder comparar entre sí adecuadamente los resultados obtenidos mediante los distintos métodos, sería recomendable realizar el ensayo de forma que un mismo conjunto de medidas se pueda analizar mediante los tres métodos. De esta forma se sabría que las discrepancias en los resultados son provocadas por los propios métodos, y no por las condiciones en las que se tomaron las medidas.

Además, estos resultados podrían compararse también con los obtenidos por algún programa comercial de análisis modal con métodos MDOF. Se ve que el sistema estudiado tiene unos modos de vibración claramente diferenciados, por lo que, en principio, no debería haber una gran diferencia.

En los apartados 4.1., 5.1., y 6.1., en vez de aplicarle los métodos de análisis modal experimental a unas medidas tomadas en el laboratorio, se utilizan curvas de receptancias generadas a partir de su expresión teórica. Esto se ha hecho para poder explicar el funcionamiento de cada método, y también para estudiar cómo afecta la resolución de las medidas a los resultados del Peak-Picking. Siguiendo esta línea, se puede estudiar en profundidad como afectan diferentes factores a la validez de los resultados. Por ejemplo, es posible generar una receptancia que, en vez de tener un modo, tenga dos, y estudiar como varían las propiedades modales de uno de los modos, obtenidas mediante alguno de los tres métodos, respecto a variaciones en los parámetros que definen el otro modo. Uno de los parámetros que se puede ir variando es, por ejemplo, la frecuencia natural del segundo modo, lo que permitiría ver como varían los resultados a medida que la hipótesis de que los modos están lo suficientemente separados se va dejando de cumplir. De esta manera se podría estimar cuando se puede considerar que dos modos están lo suficientemente alejados entre sí como para poder considerar válidos los resultados de métodos SDOF, ya que lo cerca o lejos que están dos modos no es algo que esté claramente definido en la bibliografía, a pesar de ser un concepto fundamental.

REFERENCIAS

- [1] Jaime Domínguez Abascal, Juana Mayo Núñez «Tecnología de Máquinas: Teoría.» Universidad de Sevilla
- [2] Arturo Quirantes «La resonancia bien entendida: el puente de Tacoma Narrows.» 2012
- [3] «[https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_\(1940\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940))»
- [4] Patrick Guillaume «Modal Analysis» Department of Mechanical Engineering, Vrije Universiteit Brussel
- [5] Ole Døssing «Structural Testing. Part 1: Mechanical Mobility Measurements.» Brüel & Kjær, 1988
- [6] D. J. Ewins «Modal Testing: Theory, practice and application. Second Edition» Research Studies Press Ltd., 2000
- [7] Ramón Rojas Díaz (tutor: Pedro Galvín Barrera) «Proyecto Fin De Carrera: Detección de fallos en estructuras mediante la medida de la variación de sus propiedades dinámicas.» Universidad de Sevilla, 2006
- [8] Jorge Pérez Aracil, Alejandro M. Hernández Díaz, Javier F. Jiménez Alonso, Andrés Sáez Pérez «Experimental and numerical assessment of the unexpected damping in a slender footbridge at Murcia (Spain).» International Operational Modal Analysis Conference, 2015
- [9] Charles C. Kennedy, C. D. P. Pancu «Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis.» Journal of the Aeronautical Sciences Volume 14, 1947
- [10] Matthew T. Clay «Differential Equations and Laplace Transforms. Free Damped Motion.» University of Arkansas, 2013
- [11] S. Ziaei-Rad «Modal Analysis and Testing: Modal Parameter Extraction Methods.»
- [12] Nuno Manuel Mendes Maia «Extraction of valid modal properties from measured data in structural vibrations.» Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1988
- [13] José M. Goicolea «Análisis sísmico de estructuras: Dinámica estructural.» Universidad Politécnica de Madrid, 2004
- [14] «<https://es.mathworks.com/help/signal/ref/findpeaks.html>»
- [15] Rosario Chamorro Moreno, Jaime Domínguez Abascal, María Esther Reina Romo «Ampliación de Cinemática y Dinámica de Máquinas. Practica nº 4: 2ª Parte.» Universidad de Sevilla
- [16] Ole Døssing «Structural Testing. Part 2: Modal Analysis and Simulation.» Brüel & Kjær, 1988
- [17] Manuel Hidalgo Martínez «Teoría de Vibraciones.» Universidad de Córdoba, 2009
- [18] Ivan Mustakerov, Daniela Borissova «Multi-Criteria Model for Optimal Number and Placement of Sensors for Structural Health Monitoring: Lexicographic Method Implementation.» Institute of Information and Communications Technologies at Bulgarian Academy of Sciences, Department of Information Processes and Decision Support Systems, 2014
- [19] «<https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/spline.html>»
- [20] Nikolai Chernov «Fitting ellipses, circles, and lines by least squares: Matlab code for circle fitting algorithms.» 2012

[21] David K. Anthony «Ventajas del uso de la parte real del espectro para la medida de los parámetros modales frente a errores de fase.» 40ª Edición del Congreso Español de Acústica (TecniAcústica), 2009

[22] «<https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>»

ANEXOS

1. PEAK_PICKING_BAJA.m

```

%*****
%APLICACION DEL METODO DE PEAK-PICKING A LAS MEDIDAS EXPERIMENTALES DE BAJA
%FRECUENCIA (HASTA 400 Hz)
%*****

%LINEAS QUE HAY QUE MODIFICAR: En las lineas 19 y 22 se seleccionan los
%archivos .txt que contienen las medidas experimentales.

clc
clear
close all
format short g

%*****
%DEFINICION DE VARIABLES A PARTIR DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES
%*****

%Cargo el fichero .txt de amplitudes y frecuencias
A1 = load ('H88_baja_freq.txt');

%Cargo el fichero .txt de fases
B1 = load ('G8_baja_freq.txt');

%Defino el vector de amplitudes, con tantos terminos como medidas
%experimentales
amp_acel_comp = A1(:,2);

%Defino el vector de frecuencias, con tantos terminos como medidas
%experimentales
freq_acel_comp = A1(:,1);

%Defino el vector de fases, con tantos terminos como medidas
%experimentales
fase_acel_comp(:,1) = B1(:,1);

%Me quedo con las 1601 primeras componentes de los vectores de Amplitudes,
Fases
%y Frecuencias (los primeros 400 Hz)
amplitud_acelerancia = amp_acel_comp(1:1601);
frecuencia_acelerancia = freq_acel_comp(1:1601);
fase_acelerancia = fase_acel_comp(1:1601);

%Represento en una grafica la amplitud de la acelerancia de la FRF
%elegida, solo hasta 400 Hz
figure(1);
loglog(frecuencia_acelerancia,amplitud_acelerancia);
title('Amplitud de la Acelerancia hasta 400 Hz')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Acelerancia')

```

```

%Dibujo el Bode de la acelerancia (amplitud y fase vs frecuencia) hasta 400
%Hz
%figure(2)
%amplitud_acel_grafica = subplot(2,1,1);
%loglog(amplitud_acel_grafica,frecuencia_acelerancia,amplitud_acelerancia)
%title('Diagrama de Bode de la Acelerancia')
%xlabel('Frecuencia [Hz]')
%ylabel('Amplitud de la Acelerancia')
%fase_acel_grafica = subplot(2,1,2);
%semilogx(fase_acel_grafica,frecuencia_acelerancia,fase_acelerancia)
%xlabel('Frecuencia [Hz]')
%ylabel('Fase de la Acelerancia [rad]')

%*****
%LA ACELERANCIA VIENE DEFINIDA POR SU AMPLITUD Y SU FASE, LA PASO A FORMA
%COMPLEJA (PARTE REAL + PARTE IMAGINARIA)
%*****

n = length(frecuencia_acelerancia)

for i=1:1:n
    Parte_Real_Acelerancia(i) = amplitud_acelerancia(i) *
    cos(fase_acelerancia(i));
    Parte_Imag_Acelerancia(i) = amplitud_acelerancia(i) *
    sin(fase_acelerancia(i));
end

for i=1:1:n
    Acelerancia_Compleja (i) = Parte_Real_Acelerancia(i) +
    j*Parte_Imag_Acelerancia(i);
end

%*****
%CALCULO LA RECEPTANCIA A PARTIR DE LA ACELERANCIA
%*****

for i=1:1:n
    Receptancia_Compleja (i) = Acelerancia_Compleja(i) / -
    (frecuencia_acelerancia(i))^2;
    amplitud_receptancia(i) = abs(Receptancia_Compleja(i));
    fase_receptancia (i) = angle(Receptancia_Compleja(i));
end

%*****
%DIBUJO EL BODE DE LA RECEPTANCIA
%*****

%Bode
%figure(3)
%amplitud_recep_grafica = subplot(2,1,1);
%loglog(amplitud_recep_grafica,frecuencia_acelerancia,amplitud_receptancia)
%title('Diagrama de Bode de la Receptancia')
%xlabel('Frecuencia [Hz]')
%ylabel('Amplitud de la Receptancia')
%fase_recep_grafica = subplot(2,1,2);
%semilogx(fase_recep_grafica,frecuencia_acelerancia,fase_receptancia)
%xlabel('Frecuencia [Hz]')
%ylabel('Fase de la Receptancia [rad]')

```

```

%Solo amplitud vs frecuencia
figure(4)
loglog(frecuencia_acelerancia,amplitud_receptancia)
title('Amplitud de la Receptancia hasta 400 Hz')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')

%*****
%APLICACION DEL PEAK PICKING A LA CURVA DE ACELERANCIA
%*****

%La función findpeaks encuentra los máximos del vector
%"amplitud_acelerancia" y los almacena en el vector
%"Amplitud_Acelerancia_Maximos". Además, almacena en el vector
%"Componente_de_los_Maximos" las componentes de "amplitud_acelerancia" en
%las que se producen los máximos. Está hecho con la versión R2008a de
%Matlab, en versiones posteriores creo que la función cambia un poco su
%funcionamiento

%Uso la funcion findpeaks para encontrar los máximos y las componentes de
%los máximos
Amplitud_Acelerancia_Maximos = [];
Componente_de_los_Maximos = [];
[Amplitud_Acelerancia_Maximos,Componente_de_los_Maximos]=findpeaks(amplitud_a
celerancia,'MinPeakDistance',50,'Threshold',1);

Componente_de_los_Maximos;
Amplitud_Acelerancia_Maximos;
num_maximos = length(Componente_de_los_Maximos);

%Uso el vector "Componente_de_los_Maximos" para encontrar las frecuencias
%naturales en el vector "frecuencia_acelerancia"
Frecuencias_Naturales=[];
for j=1:1:num_maximos

Frecuencias_Naturales(j)=frecuencia_acelerancia(Componente_de_los_Maximos(j))
;
end

Frecuencias_Naturales;

%Uso el vector "Componente_de_los_Maximos" para encontrar las fases de los
%picos en el vector "fase_acelerancia"
Fase_Acelerancia_Maximos=[];
for j=1:1:num_maximos

Fase_Acelerancia_Maximos(j)=fase_acelerancia(Componente_de_los_Maximos(j));
end

Fase_Acelerancia_Maximos;

%*****
%CALCULO DE LAS CONSTANTES MODALES Y LOS FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO
%*****

%Uso el vector "Componente_de_los_Maximos" para encontrar las amplitudes de
%la receptancia en los máximos
Amplitud_Receptancia_Maximos=[];
for j=1:1:num_maximos

```

```

Amplitud_Receptancia_Maximos(j)=amplitud_receptancia(Componente_de_los_Maximos(j));
end

Amplitud_Receptancia_Maximos;

Bandwith=[];
for i=1:1:num_maximos
    Bandwith(i)=Amplitud_Receptancia_Maximos(i)/sqrt(2);
end
Bandwith;
%En la matriz Bandwith estan las componentes en el eje y de los half-power
%points

%Una vez que conozco las componentes y (amplitudes) de los half-power
%points busco las componentes x (frecuencias).
for j=1:1:num_maximos
    i=Componente_de_los_Maximos(j);
    while amplitud_receptancia(i)>=Bandwith(j);
        i=i+1;
    end
    i;
    x1=frecuencia_acelerancia(i-1);
    y1=amplitud_receptancia(i-1);
    %Hay que interpolar para sacar x2
    y2=Bandwith(j);
    x3=frecuencia_acelerancia(i);
    y3=amplitud_receptancia(i);
    %Interpolacion:
    W_A(j)=((y2-y1)*(x3-x1)/(y3-y1))+x1; %W_A es el half-power point que
queda a la derecha del maximo

    z=Componente_de_los_Maximos(j);
    while amplitud_receptancia(z)>=Bandwith(j)
        z=z-1;
    end
    z;
    x1=frecuencia_acelerancia(z);
    y1=amplitud_receptancia(z);
    %Hay que interpolar para sacar x2
    y2=Bandwith(j);
    x3=frecuencia_acelerancia(z+1);
    y3=amplitud_receptancia(z+1);
    %Interpolacion:
    W_B(j)=((y2-y1)*(x3-x1)/(y3-y1))+x1; %W_B es el half-power point que
queda a la izquierda del maximo

    %Calculo del amortiguamiento del modo y la constante modal
    Coef_Amort(j)=(W_A(j))^2-(W_B(j))^2/(2*(Frecuencias_Naturales(j))^2);

Cte_Modal(j)=Amplitud_Receptancia_Maximos(j)*(Frecuencias_Naturales(j))^2*Coef_Amort(j);

end

figure(5)
loglog(frecuencia_acelerancia,amplitud_receptancia)
hold on

```

```
scatter(Frecuencias_Naturales,Amplitud_Receptancia_Maximos,'filled')
scatter(W_A,Bandwith,'r')
scatter(W_B,Bandwith,'r')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')
legend('Curva de Receptancia','Puntos de Resonancia','Half-Power
Points','Location','Best')
hold off
title(['Amplitud de la Receptancia con los puntos de resonancia y los
half-power points indicados'])
```

```
W_A;
W_B;
```

```
disp('RESULTADOS PEAK PICKING')
disp(' ')
disp('DATOS NECESARIOS PARA DIBUJAR LOS MODOS DE VIBRACIÓN:')
Amplitud_Acelerancia_Maximos
Fase_Acelerancia_Maximos
disp(' ')
disp('PARÁMETROS MODALES (frecuencias naturales, constantes modales y
coeficientes de amortiguamiento)')
Frecuencias_Naturales
Cte_Modal
Coef_Amort
```


2. PEAK_PICKING_ALTA.m

Es como PEAK_PICKING_BAJA., solo hay que cambiar las 60 primeras líneas por:

```

%*****
%APLICACION DEL METODO DE PEAK-PICKING A LAS MEDIDAS EXPERIMENTALES DE ALTA
%FRECUENCIA (ENTRE 400 Y 1200 Hz)
%*****

%LINEAS QUE HAY QUE MODIFICAR: En las lineas 19 y 22 se seleccionan los
%archivos .txt que contienen las medidas experimentales.

clc
clear
close all
format short g

%*****
%DEFINICION DE VARIABLES A PARTIR DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES
%*****

%Cargo el fichero .txt de amplitudes y frecuencias
A1 = load ('H88_alta_frec.txt');

%Cargo el fichero .txt de fases
B1 = load ('G8_alta_frec.txt');

%Defino el vector de amplitudes, con tantos terminos como medidas
%experimentales
amp_acel_comp = A1(:,2);

%Defino el vector de frecuencias, con tantos terminos como medidas
%experimentales
frec_acel_comp = A1(:,1);

%Defino el vector de fases, con tantos terminos como medidas
%experimentales
fase_acel_comp(:,1) = B1(:,1);

%Me quedo con los datos entre 400 y 1200 Hz
amplitud_acelerancia = amp_acel_comp(301:901);
frecuencia_acelerancia = frec_acel_comp(301:901);
fase_acelerancia = fase_acel_comp(301:901);

%Represento en una grafica la amplitud de la acelerancia de la FRF
%elegida, entre 400 Y 1200 Hz
figure(1);
loglog(frecuencia_acelerancia,amplitud_acelerancia);
title('Amplitud de la Acelerancia entre 400 y 1200 Hz')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Acelerancia')

%Dibujo el Bode de la acelerancia (amplitud y fase vs frecuencia) entre 400
%y 1200 Hz
%figure(2)
%amplitud_acel_grafica = subplot(2,1,1);
%loglog(amplitud_acel_grafica,frecuencia_acelerancia,amplitud_acelerancia)
%title('Diagrama de Bode de la Acelerancia')
%xlabel('Frecuencia [Hz]')

```

```
%ylabel('Amplitud de la Acelerancia')  
%fase_acel_grafica = subplot(2,1,2);  
%semilogx(fase_acel_grafica,frecuencia_acelerancia,fase_acelerancia)  
%xlabel('Frecuencia [Hz]')  
%ylabel('Fase de la Acelerancia [rad]')
```

3. CircleFitByPratt.m [20]

```
function Par = CircleFitByPratt(XY)

%-----
%
%   Circle fit by Pratt
%   V. Pratt, "Direct least-squares fitting of algebraic surfaces",
%   Computer Graphics, Vol. 21, pages 145-152 (1987)
%
%   Input:  XY(n,2) is the array of coordinates of n points x(i)=XY(i,1),
%   y(i)=XY(i,2)
%
%   Output: Par = [a b R] is the fitting circle:
%           center (a,b) and radius R
%
%   Note: this fit does not use built-in matrix functions (except "mean"),
%   so it can be easily programmed in any programming language
%-----

n = size(XY,1);      % number of data points

centroid = mean(XY); % the centroid of the data set

%   computing moments (note: all moments will be normed, i.e. divided by n)

Mxx=0; Myy=0; Mxy=0; Mxz=0; Myz=0; Mzz=0;

for i=1:n
    Xi = XY(i,1) - centroid(1); % centering data
    Yi = XY(i,2) - centroid(2); % centering data
    Zi = Xi*Xi + Yi*Yi;
    Mxy = Mxy + Xi*Yi;
    Mxx = Mxx + Xi*Xi;
    Myy = Myy + Yi*Yi;
    Mxz = Mxz + Xi*Zi;
    Myz = Myz + Yi*Zi;
    Mzz = Mzz + Zi*Zi;
end

Mxx = Mxx/n;
Myy = Myy/n;
Mxy = Mxy/n;
Mxz = Mxz/n;
Myz = Myz/n;
Mzz = Mzz/n;

%   computing the coefficients of the characteristic polynomial

Mz = Mxx + Myy;
Cov_xy = Mxx*Myy - Mxy*Mxy;
Mxz2 = Mxz*Mxz;
Myz2 = Myz*Myz;

A2 = 4*Cov_xy - 3*Mz*Mz - Mzz;
A1 = Mzz*Mz + 4*Cov_xy*Mz - Mxz2 - Myz2 - Mz*Mz*Mz;
A0 = Mxz2*Myy + Myz2*Mxx - Mzz*Cov_xy - 2*Mxz*Myz*Mxy + Mz*Mz*Cov_xy;
A22 = A2 + A2;
```

```
epsilon=1e-12;
ynew=1e+20;
IterMax=20;
xnew = 0;

%   Newton's method starting at x=0

for iter=1:IterMax
    yold = ynew;
    ynew = A0 + xnew*(A1 + xnew*(A2 + 4.*xnew*xnew));
    if (abs(ynew)>abs(yold))
        disp('Newton-Pratt goes wrong direction: |ynew| > |yold|');
        xnew = 0;
        break;
    end
    Dy = A1 + xnew*(A22 + 16*xnew*xnew);
    xold = xnew;
    xnew = xold - ynew/Dy;
    if (abs((xnew-xold)/xnew) < epsilon), break, end
    if (iter >= IterMax)
        disp('Newton-Pratt will not converge');
        xnew = 0;
    end
    if (xnew<0.)
        fprintf(1,'Newton-Pratt negative root:  x=%f\n',xnew);
        xnew = 0;
    end
end

%   computing the circle parameters

DET = xnew*xnew - xnew*Mz + Cov_xy;
Center = [Mxz*(Myy-xnew)-Myz*Mxy , Myz*(Mxx-xnew)-Mxz*Mxy]/DET/2;

Par = [Center+centroid , sqrt(Center*Center'+Mz+2*xnew)];

end   %   CircleFitByPratt
```

4. CIRCLE_FIT.m

```

%*****
%APLICACIÓN DEL MÉTODO DE CIRCLE-FIT PARA LA OBTENCIÓN DE PARÁMETROS
%MODALES
%*****

%LINEAS QUE HAY QUE MODIFICAR
% LINEA 40: Hay que poner la resolución, en Hz, de las medidas
% experimentales
% LINEA 42: Hay que poner el nombre del fichero .txt que contiene las
% medidas experimentales
% LINEAS 135-137: Hay que seleccionar qué intervalo de frecuencias se va
% a tomar para estudiar un modo en particular. En las LINEAS 129-133
% vienen las que se han usado para este ejemplo en concreto. Hay que
% elegir el intervalo de forma que la frecuencia natural esté incluida
% en él, y a ser posible que esté lo más centrada posible en el intervalo
% LINEA 266: Hay que darle un valor a la variable num_puntos. Se calculan
% num_puntos^2 valores del coeficiente de amortiguamiento, y se da como
% resultado la media de todos ellos. También se incluye la desviación
% típica, ya que es una medida de la calidad de las medidas
% experimentales

%POSIBLES ERRORES
% -Si no hay al menos 1 punto experimental a cada lado de la frecuencia
% natural, no la puede calcular => Ampliar el intervalo o centrarlo
% mejor
% -Si no hay a cada lado de la frecuencia natural, como mínimo, tantos
% puntos experimentales como el valor que se le haya dado a num_puntos,
% no puede calcular el coeficiente de amortiguamiento => Ampliar el
% intervalo, centrarlo mejor, o disminuir el valor de num_puntos

close all
clear all
clc
format short g

%*****
%CARGO LOS DATOS (ACELERANCIA)
%*****

incr_Hz = 4.88281;

A = load ('x8_copia.txt');
Frecuencias = A(:,1);
Parte_Real_Acelerancia = A(:,2);
Parte_Imag_Acelerancia = A(:,3);

%*****
%DIBUJO EL NYQUIST DE LA ACELERANCIA
%*****

figure(1)
hold on
plot(Parte_Real_Acelerancia,Parte_Imag_Acelerancia)
scatter(Parte_Real_Acelerancia, Parte_Imag_Acelerancia)
title('Diagrama de Nyquist de la Acelerancia')
xlabel('Parte Real Acelerancia')
ylabel('Parte Imaginaria Acelerancia')

```

```

hold off

%*****
%DIBUJO EL BODE DE LA ACELERANCIA
%*****

[n,m] = size(A);
for i=1:1:n
    Acelerancia_Compleja (i) = Parte_Real_Acelerancia(i) +
j*Parte_Imag_Acelerancia(i);
    Amplitud_Acelerancia(i) = abs(Acelerancia_Compleja(i));
    Fase_Acelerancia (i) = angle(Acelerancia_Compleja(i));
end

figure(2)
amplitud_acel_grafica = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_acel_grafica,Frecuencias,Amplitud_Acelerancia)
title('Diagrama de Bode de la Acelerancia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Acelerancia')
fase_acel_grafica = subplot(2,1,2);
semilogx(fase_acel_grafica,Frecuencias,Fase_Acelerancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Acelerancia [rad]')

%*****
%CALCULO LA RECEPTANCIA
%*****

for i=1:1:n
    Receptancia_Compleja (i) = Acelerancia_Compleja(i) / -(Frecuencias(i))^2;
    Amplitud_Receptancia(i) = abs(Receptancia_Compleja(i));
    Fase_Receptancia (i) = angle(Receptancia_Compleja(i));
end

%*****
%DIBUJO EL BODE DE LA RECEPTANCIA
%*****

figure(3)
amplitud_recep_grafica = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_recep_grafica,Frecuencias,Amplitud_Receptancia)
title('Diagrama de Bode de la Receptancia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')
fase_recep_grafica = subplot(2,1,2);
semilogx(fase_recep_grafica,Frecuencias,Fase_Receptancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Receptancia [rad]')

%*****
%CALCULO LAS PARTE REAL E IMAGINARIA DE LA RECEPTANCIA Y DIBUJO EL NYQUIST
%*****

for i=1:1:n
    Parte_Real_Receptancia(i) = Amplitud_Receptancia(i) *
cos(Fase_Receptancia(i));
    Parte_Imag_Receptancia (i) = Amplitud_Receptancia(i) *
sin(Fase_Receptancia(i));
end

```

```

figure(4)
hold on
plot(Parte_Real_Receptancia,Parte_Imag_Receptancia)
scatter(Parte_Real_Receptancia, Parte_Imag_Receptancia)
title('Diagrama de Nyquist de la Receptancia')
xlabel('Parte Real Receptancia')
ylabel('Parte Imaginaria Receptancia')
hold off

%*****
%SELECCIONO EL INTERVALO DE FRECUENCIAS EN EL QUE VOY A TRABAJAR
%*****

%Primer Modo ==> 3:8 o 2:8
%Segundo Modo ==> 14:24
%Tercer Modo ==> 47:57
%Cuarto Modo ==> 97:107
%Quinto Modo ==> 163:173

Amplitud_Receptancia = Amplitud_Receptancia(163:173);
Fase_Receptancia = Fase_Receptancia(163:173);
Frec = Frecuencias(163:173);

clear i
for j=1:length(Frec)
    Real_Receptancia(j) = Amplitud_Receptancia(j) * cos(Fase_Receptancia(j));
    Imag_Receptancia(j) = Amplitud_Receptancia(j) * sin(Fase_Receptancia(j));
    Receptancia(j) = Real_Receptancia(j) + i*Imag_Receptancia(j);
end

%GRAFICA EN FORMA DE BODE DEL INTERVALO QUE SE ESTUDIA
figure(5)
amplitud_recep_grafica_trozo = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_recep_grafica_trozo,Frec,Amplitud_Receptancia)
title('Diagrama de Bode de la Receptancia en el tramo de interés')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')
fase_recep_grafica_trozo = subplot(2,1,2);
semilogx(Frec,Fase_Receptancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Receptancia [rad]')

%GRAFICA EN FORMA DE NYQUIST DEL INTERVALO QUE SE ESTUDIA
figure(6)
scatter(Real_Receptancia,Imag_Receptancia,'r')
hold on
plot(Real_Receptancia,Imag_Receptancia,'r')
title('Diagrama de Nyquist de la Receptancia en el tramo de interés')
axis equal
xlabel('Parte Real Receptancia')
ylabel('Parte Imaginaria Receptancia')
hold off

%Uso la funcion CircleByPratt para hallar el circulo que se ajusta mejor a
%los puntos
Coordenadas=[Real_Receptancia',Imag_Receptancia'];
CIRCLE_FIT = CircleFitByPratt (Coordenadas)

%Calculo las coordenadas de los puntos del circulo de ajuste

```

```

th = 0:pi/500:2*pi;
xunit = CIRCLE_FIT(3) * cos(th) + CIRCLE_FIT(1);
yunit = CIRCLE_FIT(3) * sin(th) + CIRCLE_FIT(2);

%*****
%OBTENCION DE LOS PARAMETROS MODALES
%*****

%*****
%1°) FRECUENCIA NATURAL
%*****

%En este apartado se calcula la frecuencia natural como la frecuencia a la
%que la respuesta tiene la mayor amplitud. Es la segunda de las 4 formas
%que propone el libro de Ewins

%Recorro los puntos del circulo de ajuste, y hallo el punto que está mas
%alejado del origen (es decir, el punto del circulo con una mayor amplitud
%de la respuesta)

Coord_Punto_Circ=[xunit',yunit'];
for i=1:1:length(xunit)
    dist(i)=norm(Coord_Punto_Circ(i,:));
end
dist;
[dist_max,coord_max]=max(dist);
Coord_Max=[xunit(coord_max),yunit(coord_max)];

%Coord_Max tiene las componentes del punto DE EL CIRCULO con la mayor
%respuesta

%Ahora tengo que encontrar los dos puntos experimentales entre los que esta
%comprendido el punto en el que se produce la máxima respuesta (que es el
%de la frecuencia natural)

Coord_Centro_Circ=[CIRCLE_FIT(1),CIRCLE_FIT(2)];
Coord_Punto_Exp=[Real_Receptancia',Imag_Receptancia'];

for i=1:1:(length(Real_Receptancia))
    Punto1=Coord_Max;
    Punto2=Coord_Punto_Exp(i,:);
    Linea1=Punto1-Coord_Centro_Circ;
    Linea2=Punto2-Coord_Centro_Circ;
    Modulo1=norm(Linea1);
    Modulo2=norm(Linea2);
    producto_esc=Linea1*Linea2';
    cos_beta=producto_esc/(Modulo1*Modulo2);
    beta(i)=acosd(cos_beta);
end

%Beta es un vector que contiene el angulo que forma la linea que pasa por
%el centro del circulo y por el punto de mayor respuesta con la linea que
%pasa por el centro del circulo y por cada uno de los puntos
%experimentales. Los dos puntos que estoy buscando son los dos que tengan
%un beta mas pequeño.

[beta_min,Coord_beta_min]=min(beta);
Primer_Punto=[Frec(Coord_beta_min),Real_Receptancia(Coord_beta_min),Imag_Rece
ptancia(Coord_beta_min),beta_min];

```

```

if beta(Coord_beta_min+1) >= beta(Coord_beta_min-1)
    Segundo_Punto=[Frec(Coord_beta_min-1),Real_Receptancia(Coord_beta_min-1),Imag_Receptancia(Coord_beta_min-1),beta(Coord_beta_min-1)];
end

if beta(Coord_beta_min+1) < beta(Coord_beta_min-1)

Segundo_Punto=[Frec(Coord_beta_min+1),Real_Receptancia(Coord_beta_min+1),Imag_Receptancia(Coord_beta_min+1),beta(Coord_beta_min+1)];
end

Primer_Punto;
Segundo_Punto;

%Primer_Punto y Segundo_Punto son los dos puntos entre los que esta
%comprendido el punto de frecuencia natural. En cada uno de los dos
%vectores la primera componente es la frecuencia, la segunda la parte real,
%la tercera la parte imaginaria y la cuarta el angulo que forman con el
%punto de maxima respuesta

%Con esto ya puedo calcular la frecuencia natural
if Primer_Punto(1) > Segundo_Punto(1)
    FRECUENCIA_NATURAL = Segundo_Punto(1) +
    ((Segundo_Punto(4)*incr_Hz)/(Segundo_Punto(4)+Primer_Punto(4)));
end

if Primer_Punto(1) < Segundo_Punto(1)
    FRECUENCIA_NATURAL = Primer_Punto(1) +
    ((Primer_Punto(4)*incr_Hz)/(Segundo_Punto(4)+Primer_Punto(4)));
end

FRECUENCIA_NATURAL

%*****
%2°) COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO
%*****

num_puntos=3; % Se calculan (num_puntos)^2 valores del Coef de Amort.
Aux=[Frec,Real_Receptancia',Imag_Receptancia',beta'];

for i=1:1:length(Frec)
    if Frec(i)<=FRECUENCIA_NATURAL
        Puntero = i;
    end
end
Puntero;

Puntos_Coef_Amort=Aux(Puntero-num_puntos+1:Puntero+num_puntos,:);
[filas,columnas]=size(Puntos_Coef_Amort);

%Calculo los num_puntos^2 valores del coeficiente de amortiguamiento
for i=1:1:num_puntos
    for j=num_puntos+1:1:num_puntos+num_puntos
        i;
        j;
        Num(i,j-num_puntos) = Puntos_Coef_Amort(j,1)^2 -
Puntos_Coef_Amort(i,1)^2;
        Den(i,j-num_puntos) = FRECUENCIA_NATURAL^2 *
(tand(Puntos_Coef_Amort(j,4)/2)+tand(Puntos_Coef_Amort(i,4)/2));
    end
end

```

```

        COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO(i,j-num_puntos) = Num(i,j-num_puntos) /
Den(i,j-num_puntos);
    end
end
Num;
Den;
COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO
MEDIA_COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO = mean(mean(COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO))

%Calculo la desviacion tipica de todos los valores obtenidos, ya que esta
%es un indicador de la calidad de los datos
[filas_matriz,columnas_matriz] = size(COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO);
vector_COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO = reshape(COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO,[1
filas_matriz*columnas_matriz]);
DESVIACION_TIPICA_COEF_AMORT = std(vector_COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO)

%*****
%3°) MODULO DE LA CONSTANTE MODAL
%*****

Radio_Circulo = CIRCLE_FIT(3);
MODULO_CTE_MODAL = (2*Radio_Circulo) * FRECUENCIA_NATURAL^2 *
MEDIA_COEFICIENTE_AMORTIGUAMIENTO

%*****
%4°) ARGUMENTO DE LA CONSTANTE MODAL
%*****

Linea_1 = Coord_Max;
Linea_2 = [0,-5];
Modulo_1 = norm(Linea_1);
Modulo_2 = norm(Linea_2);
Prod_Esc = Linea_1*Linea_2';
cos_arg_cte_modal = Prod_Esc/(Modulo_1*Modulo_2);
ARGUMENTO_CTE_MODAL=acosd(cos_arg_cte_modal);
if Coord_Max(1) < 0
    ARGUMENTO_CTE_MODAL = - ARGUMENTO_CTE_MODAL;
end
ARGUMENTO_CTE_MODAL %en grados

%*****
%5°) GRAFICA CON LOS RESULTADOS
%*****

th = 0:pi/500:2*pi;
xunit = CIRCLE_FIT(3) * cos(th) + CIRCLE_FIT(1);
yunit = CIRCLE_FIT(3) * sin(th) + CIRCLE_FIT(2);
figure(7)
hold on
plot(xunit, yunit,'r:')
plot(Real_Receptancia,Imag_Receptancia,'b')
scatter(Real_Receptancia,Imag_Receptancia,'xb', 'LineWidth',2)
scatter(CIRCLE_FIT(1),CIRCLE_FIT(2),'xr')
plot([Coord_Centro_Circ(1) Coord_Max(1)] , [Coord_Centro_Circ(2)
Coord_Max(2)],'-r')
title('CIRCLE FITTING DE LA RECEPTANCIA')
xlabel('Real')
ylabel('Imag')
axis equal
hold off

```

5. LINE_FIT.m

```

%*****
%APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LINE-FIT PARA LA OBTENCIÓN DE PARÁMETROS MODALES
%*****

%LINEAS QUE HAY QUE MODIFICAR
% LINEA 28: Hay que poner el nombre del fichero .txt que contiene las
% medidas experimentales
% LINEAS 121-123: Hay que seleccionar qué intervalo de frecuencias se va
% a tomar para estudiar un modo en particular. En las LINEAS 115-119
% vienen los intervalos que se han usado para los 5 primeros modos para
% este ejemplo. A diferencia del método del Circle-Fit, aquí es muy
% posible que para un mismo modo haya que tomar intervalos diferentes
% para las distintas FRFs. En el método de Circle-Fit cerrar o abrir un
% poco el intervalo apenas afecta a los resultados, en el método de
% Line-Fit sí, así que hay que tener más cuidado. La mejor forma de ver
% cómo ir modificando el intervalo para conseguir los mejores resultados
% posibles es ir viendo las figuras 8 y 9, y ver si algún punto 'sobra'

close all
clear all
clc
format short g

%*****
%CARGO LOS DATOS (ACELERANCIA)
%*****

A = load ('x8_copia.txt');
Frecuencias = A(:,1);
Parte_Real_Acelerancia = A(:,2);
Parte_Imag_Acelerancia = A(:,3);

%*****
%DIBUJO EL NYQUIST DE LA ACELERANCIA
%*****

figure(1)
hold on
plot(Parte_Real_Acelerancia,Parte_Imag_Acelerancia)
scatter(Parte_Real_Acelerancia, Parte_Imag_Acelerancia)
title('Diagrama de Nyquist de la Acelerancia')
xlabel('Parte Real Acelerancia')
ylabel('Parte Imaginaria Acelerancia')
hold off

%*****
%DIBUJO EL BODE DE LA ACELERANCIA
%*****

[n,m] = size(A);
for i=1:1:n
    Acelerancia_Compleja (i) = Parte_Real_Acelerancia(i) +
j*Parte_Imag_Acelerancia(i);
    Amplitud_Acelerancia(i) = abs(Acelerancia_Compleja(i));
    Fase_Acelerancia (i) = angle(Acelerancia_Compleja(i));
end

```

```

figure(2)
amplitud_acel_grafica = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_acel_grafica,Frecuencias,Amplitud_Acelerancia)
title('Diagrama de Bode de la Acelerancia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Acelerancia')
fase_acel_grafica = subplot(2,1,2);
semilogx(fase_acel_grafica,Frecuencias,Fase_Acelerancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Acelerancia [rad]')

%*****
%CALCULO LA RECEPTANCIA
%*****

for i=1:1:n
    Receptancia_Compleja (i) = Acelerancia_Compleja(i) / -(Frecuencias(i))^2;
    Amplitud_Receptancia(i) = abs(Receptancia_Compleja(i));
    Fase_Receptancia (i) = angle(Receptancia_Compleja(i));
end

%*****
%DIBUJO EL BODE DE LA RECEPTANCIA
%*****

figure(3)
amplitud_recep_grafica = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_recep_grafica,Frecuencias,Amplitud_Receptancia)
title('Diagrama de Bode de la Receptancia')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')
fase_recep_grafica = subplot(2,1,2);
semilogx(fase_recep_grafica,Frecuencias,Fase_Receptancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Receptancia [rad]')

%*****
%CALCULO LAS PARTE REAL E IMAGINARIA DE LA RECEPTANCIA Y DIBUJO EL NYQUIST
%*****

for i=1:1:n
    Parte_Real_Receptancia(i) = Amplitud_Receptancia(i) *
cos(Fase_Receptancia(i));
    Parte_Imag_Receptancia (i) = Amplitud_Receptancia(i) *
sin(Fase_Receptancia(i));
end

figure(4)
hold on
plot(Parte_Real_Receptancia,Parte_Imag_Receptancia)
scatter(Parte_Real_Receptancia, Parte_Imag_Receptancia)
title('Diagrama de Nyquist de la Receptancia')
xlabel('Parte Real Receptancia')
ylabel('Parte Imaginaria Receptancia')
hold off

%*****
%SELECCIONO EL INTERVALO DE FRECUENCIAS EN EL QUE VOY A TRABAJAR
%*****

```

```

%Primer Modo ==> 3-4 : 8
%Segundo Modo ==> 16-18 : 22-24
%Tercer Modo ==> 48-50 : 53-57
%Cuarto Modo ==> 97-99 : 103-107
%Quinto Modo ==> 163-165 : 170-173

Amplitud_Receptancia = Amplitud_Receptancia(163:173);
Fase_Receptancia = Fase_Receptancia(163:173);
Frec = Frecuencias(163:173);

clear i
for j=1:1:length(Frec)
    Real_Receptancia(j) = Amplitud_Receptancia(j) * cos(Fase_Receptancia(j));
    Imag_Receptancia(j) = Amplitud_Receptancia(j) * sin(Fase_Receptancia(j));
    Receptancia(j) = Real_Receptancia(j) + i*Imag_Receptancia(j);
end

figure(5)
amplitud_recep_grafica_trozo = subplot(2,1,1);
loglog(amplitud_recep_grafica_trozo,Frec,Amplitud_Receptancia)
title('Diagrama de Bode de la Receptancia en el tramo de interés')
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Amplitud de la Receptancia')
fase_recep_grafica_trozo = subplot(2,1,2);
semilogx(fase_recep_grafica_trozo,Frec,Fase_Receptancia)
xlabel('Frecuencia [Hz]')
ylabel('Fase de la Receptancia [rad]')

%*****
%CALCULO DE LA NUEVA FRF (alfa_prima), DE LA INVERSA DE LA FRF (Delta) Y DE
%LA PARTE REAL E IMAGINARIA DE DELTA. HAY QUE HACERLO UNA VEZ POR CADA
%FRECUENCIA QUE SE FIJE, POR ESO EL BUCLE DE j=1:1:length(Frec)
%*****

for j=1:1:length(Frec)
    Componente_Frec_Fijada = j;
    Frec_Fijada(j) = Frec(Componente_Frec_Fijada);

    %*****
    %IMPORTANTE: CUANDO LA FRECUENCIA VALE LO MISMO QUE LA FRECUENCIA QUE
    %HE FIJADO, DELTA RESULTA NaN (cero partido por cero), POR ESO DEFINO
    %UN VECTOR FREC_AUX QUE CONTIENE TODAS LAS FRECUENCIAS MENOS LA
    %FRECUENCIA QUE HE FIJADO. A ESTAS FRECUENCIAS SON A LAS QUE LE CALCULO
    %ALFA_PRIMA Y LUEGO DELTA
    %*****

    for i=1:1:Componente_Frec_Fijada-1
        Frec_Aux_1(i) = Frec(i);
    end

    for i=Componente_Frec_Fijada+1:1:length(Frec)
        Frec_Aux_2(i-Componente_Frec_Fijada) = Frec(i);
    end

    if Componente_Frec_Fijada == 1
        Frec_Aux(j,:) = Frec_Aux_2;
    end

    if Componente_Frec_Fijada == length(Frec)
        Frec_Aux(j,:) = Frec_Aux_1;
    end
end

```

```

end

if Componente_Frec_Fijada ~= 1 && Componente_Frec_Fijada ~= length(Frec)
    Frec_Aux(j,:) = [Frec_Aux_1,Frec_Aux_2];
end

clear Frec_Aux_1
clear Frec_Aux_2

%*****
%CALCULO LA NUEVA FRF PARA LOS VALORES DE FREC_AUX
%*****

for i=1:1:Componente_Frec_Fijada-1
    Alfa_prima_1(i) = Receptancia (i) -
Receptancia(Componente_Frec_Fijada);
end

for i=Componente_Frec_Fijada+1:1:length(Frec)
    Alfa_prima_2(i-Componente_Frec_Fijada) = Receptancia (i) -
Receptancia(Componente_Frec_Fijada);
end

if Componente_Frec_Fijada == 1
    Alfa_prima(j,:) = Alfa_prima_2;
end

if Componente_Frec_Fijada == length(Frec)
    Alfa_prima(j,:) = Alfa_prima_1;
end

if Componente_Frec_Fijada ~= 1 && Componente_Frec_Fijada ~= length(Frec)
    Alfa_prima(j,:) = [Alfa_prima_1,Alfa_prima_2];
end

clear Alfa_prima_1
clear Alfa_prima_2

[filas_Frec_Aux,columnas_Frec_Aux]=size(Frec_Aux);

%*****
%CALCULO LA INVERSA DE LA FRF QUE VAMOS A USAR EN EL ANALISIS: DELTA
%*****

for i=1:1:columnas_Frec_Aux
    Delta(j,i) = (Frec_Aux(j,i)^2-Frec_Fijada(j)^2)/Alfa_prima(j,i);
end

end

Frec_Aux;
Alfa_prima;
filas_Frec_Aux;
columnas_Frec_Aux;
Delta;

%*****
%DEFINO UNA MATRIZ CON LAS FRECUENCIAS ''FREC_AUX'' AL CUADRADO
%*****

```

```

for i=1:1:filas_Frec_Aux
    for j=1:1:columnas_Frec_Aux
        Frec_Aux_cuadrado (i,j) = Frec_Aux(i,j)^2;
    end
end

Frec_Aux_cuadrado;

%*****
%CALCULO LA PARTE REAL E IMAGINARIA DE DELTA
%*****

[filas_Delta,columnas_Delta]=size(Delta);
for i=1:1:filas_Delta
    for j=1:1:columnas_Delta
        Real_Delta(i,j) = real(Delta(i,j));
        Imag_Delta(i,j) = imag(Delta(i,j));
    end
end

Real_Delta;
Imag_Delta;

%*****
%GRAFICAS DE LA PARTE REAL DE DELTA VS LA FRECUENCIA AL CUADRADO. HAY
%UNA CURVA POR CADA FRECUENCIA FIJADA
%*****

figure(6)
hold on
for j=1:1:filas_Delta
    plot(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Real_Delta(j,:))
    scatter(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Real_Delta(j,:))
end
title ('Re (\Delta) vs \omega^2 en el tramo de interés')
xlabel ('\omega^2')
ylabel ('Re (\Delta)')
hold off

%*****
%GRAFICAS DE LA PARTE IMAGINARIA DE DELTA VS LA FRECUENCIA AL CUADRADO.
%HAY UNA CURVA POR CADA FRECUENCIA FIJADA
%*****

figure(7)
hold on
for j=1:1:filas_Delta
    plot(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Imag_Delta(j,:))
    scatter(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Imag_Delta(j,:))
end
title ('Imag (\Delta) vs \omega^2 en el tramo de interés')
xlabel ('\omega^2')
ylabel ('Imag (\Delta)')
hold off

%*****
%CALCULO DE LA PENDIENTE DE LA RECTA DE AJUSTE DE CADA UNA DE LAS CURVAS
%*****

```

```

for j=1:1:filas_Delta
    Line_Fit_Real(j,:) = polyfit(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Real_Delta(j,:),1);
end

for j=1:1:filas_Delta
    Line_Fit_Imag(j,:) = polyfit(Frec_Aux_cuadrado(j,:),Imag_Delta(j,:),1);
end

Line_Fit_Real;
Line_Fit_Imag;

%*****
%AHORA HAY QUE REPRESENTAR EN UNA GRAFICA LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS DE
%AJUSTE DE LA FIGURA 6 VS LA FRECUENCIA FIJADA AL CUADRADO, Y EN OTRA
%GRAFICA LAS PENDIENTES DE LAS RECTAS DE AJUSTE DE LA FIGURA 7 VS LA
%FRECUENCIA FIJADA AL CUADRADO
%LO PRIMERO QUE HAGO ES DEFINIR LOS DATOS QUE NECESITO
%*****

for i=1:1:length(Frec_Fijada)
    Frec_Fijada_cuadrado (i,1) = Frec_Fijada(i)^2;
end
Frec_Fijada_cuadrado;

m_R = Line_Fit_Real(:,1);
m_I = Line_Fit_Imag(:,1);

%*****
%REPRESENTO LAS DOS GRAFICAS
%*****

figure (8)
hold on
plot(Frec_Fijada_cuadrado,m_R)
scatter(Frec_Fijada_cuadrado,m_R)
title ('m_R (\Omega) vs \Omega^2 en el tramo de interés')
xlabel ('\Omega^2')
ylabel ('m_R (\Omega)')
hold off

figure (9)
hold on
plot(Frec_Fijada_cuadrado,m_I)
scatter(Frec_Fijada_cuadrado,m_I)
title ('m_I (\Omega) vs \Omega^2 en el tramo de interés')
xlabel ('\Omega^2')
ylabel ('m_I (\Omega)')
hold off
axis equal
%el axis equal puede ponerse o no. Esta grafica es en la que mas claramente
%se ve si el intervalo de frecuencias tomado es bueno o si ''sobran''
%puntos. Con el axis equal se ve una linea practicamente horizontal, sin el
%axis equal es mas facil ver si hay algun punto que sobresalga respecto a
%los demas

%*****
%CALCULO LA PENDIENTE Y LA INTERSECCION CON EL EJE Y DE LA RECTA DE MEJOR
%AJUSTE DE AMBAS GRAFICAS
%*****

```

```

Line_Fit_m_R = polyfit(Frec_Fijada_cuadrado,m_R,1);
Line_Fit_m_I = polyfit(Frec_Fijada_cuadrado,m_I,1);

n_R = Line_Fit_m_R(1);
d_R = Line_Fit_m_R(2);
n_I = Line_Fit_m_I(1);
d_I = Line_Fit_m_I(2);
p = n_I / n_R;
q = d_I / d_R;

%*****
%A PARTIR DE ESTOS VALORES YA SE PUEDEN CALCULAR LOS PARAMETROS MODALES
%*****

clear j
Coef_Amort_Exp = (q-p)/(1+p*q)
Frec_Natural_Exp = sqrt (d_R/((p*Coef_Amort_Exp-1)*n_R))
    num = Frec_Natural_Exp^2*(p*Coef_Amort_Exp-1);
    den = (1+p^2)*d_R;
a_r = num/den;
b_r = -a_r*p;
Cte_Modal_Exp = a_r + j*b_r
Modulo_Cte_Modal_Exp = abs(Cte_Modal_Exp)
Fase_Cte_Modal_Exp = angle(Cte_Modal_Exp)

```

