

Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

**ESTUDIO DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS
MÉTODOS ITD Y LSCEM PARA ESTIMACIÓN
DE PARÁMETROS DINÁMICOS Y
APLICACIÓN A UNA VIGA EN VOLADIZO**

Autor: Ana Collín Morales

Tutor: Daniel García Vallejo

**Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2017



Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

**ESTUDIO DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS
MÉTODOS ITD Y LSCEM PARA ESTIMACIÓN
DE PARÁMETROS DINÁMICOS Y
APLICACIÓN A UNA VIGA EN VOLADIZO**

Autor:

Ana Collín Morales

Tutor:

Daniel García Vallejo

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo de Fin de Grado: ESTUDIO DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS MÉTODOS ITD Y LSCEM
PARA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DINÁMICOS Y APLICACIÓN A UNA VIGA EN
VOLADIZO

Autor: Ana Collín Morales

Tutor: Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

En este proyecto se estudia el funcionamiento de dos métodos analíticos para el análisis modal cambiando diferentes parámetros para ver cómo mejoran o empeoran.

Inicialmente se parte de una respuesta de un sistema aleatorio con tres masas, cuatro amortiguadores y cuatro muelles, la cual se va a ensuciar introduciéndole un ruido.

En la segunda parte del proyecto se ha excitado un modelo de viga empotrada en el laboratorio y se ha procedido a realizar el mismo análisis que anteriormente, pero con la respuesta del modelo nuevo.

Finalmente se ha hecho una comparación de los dos métodos estudiados y de cómo funcionan analítica y experimentalmente.

Abstract

This project is a study of two different analytical methodologies used for modal analysis by the variation of different parameters and studying how this changes affect the method.

Initially, it is started with the response of an aleatory system based on three mass, four shock-absorbers and four springs, which is going to be altered by inserting an interference.

Secondly, it has been excited an cantilever beam model in the laboratory and has been done the same analisis previously explained but with the new model response.

At the end, it is compared the two methods studied and how them work analitically and experimentally.

Resumen	ix
Abstract	x
Índice	xi
Índice de Tablas	xiii
Índice de Figuras	xv
Notación	xx
1 Introducción	1
1.1 Contexto	1
1.2 Aplicación	1
1.3 Resumen	1
2 Fundamentos teóricos	3
2.1 Análisis modal	3
2.1.1 Análisis modal teórico	3
2.1.2 Análisis modal experimental	3
2.2 Características de los métodos de análisis	3
2.2.1 SDOF y MDOF	3
2.2.2 Estimaciones locales y globales	4
2.2.3 Una entrada o varias	4
2.2.4 Identificación directa o mediante modelo modal	4
2.2.5 MDOF en el dominio del tiempo o de la frecuencia	4
2.3 Método de Ibrahim (ITD)	5
2.3.1 Funcionamiento del método	5
2.4 Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja (LSCM)	8
2.4.1 Funcionamiento del método	8
3 Estudio de características numéricas mediante diferentes métodos	11
3.1 Sistema estudiado	11
3.2 Simulación de la respuesta	11
3.3 Método de Ibrahim	14
3.3.1 Variación del Δt	15
3.3.2 Variación del número de puntos	20
3.3.3 Variación del ruido	25
3.3.4 Variación del tiempo de integración	30
3.3.5 Elección de puntos	35
3.4 Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja	38
3.4.1 Variación del Δt	39
3.4.2 Variación del ruido	45
3.4.3 Elección de puntos	51
4 Aplicación en un sistema mecánico	53
4.1 Sistema a estudiar	53
4.1.1 La viga	53

4.1.2	Acelerómetros	54
4.1.3	Microcontrolador	54
4.2	<i>Procedimiento</i>	55
4.3	<i>Frecuencias naturales de la viga</i>	57
4.4	<i>Método de Ibrahim</i>	58
4.4.1	Posición 1	58
4.4.2	Posición 2	60
4.5	<i>Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja</i>	64
4.5.1	Posición 1	64
4.5.2	Posición 2	65
4.6	<i>Paso a posición</i>	65
5	Conclusión	69
	Referencias	74
	Anexos	76

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Valores de las constantes	11
Tabla 2: Autovalores y autovectores del sistema analítico	12
Tabla 3: Autovalores y autovectores mediante el método de Ibrahim en todo t con Δt de 0.03s	14
Tabla 4: Error absoluto al calcular los autovalores y autovectores mediante el método de Ibrahim en todo t con Δt de 0.03s	15
Tabla 5: Autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos	36
Tabla 6: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos	36
Tabla 7: Autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos	37
Tabla 8: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos	37
Tabla 9: Autovalores comparando por parejas de complejos tercera toma de puntos	38
Tabla 10: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos	38
Tabla 11: Autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s	38
Tabla 12: Error absoluto al calcular los autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s	39
Tabla 13: Autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s calculando cada respuesta por separado	39
Tabla 14: Error absoluto autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s calculando cada respuesta por separado	39
Tabla 15: Autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos	51
Tabla 16: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos	51
Tabla 17: Autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos	52
Tabla 18: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos	52
Tabla 19: Posición acelerómetros	54
Tabla 20: Frecuencias naturales de la viga estudiada	58
Tabla 21: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9	58
Tabla 22: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4	58
Tabla 23: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9	60
Tabla 24: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4	61
Tabla 25: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre los puntos 8 y 9	64
Tabla 26: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4	64
Tabla 27: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9	65
Tabla 28: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4	65
Tabla 29: Errores relativos con los puntos elegidos	70
Tabla 30: Errores relativos con los puntos elegidos	70

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Sistema muy amortiguado	4
Figura 2: Sistema muy poco amortiguado	5
Figura 3: Sistema de 3 g.d.l.	11
Figura 4: Respuesta en vibración libre del sistema planteado	13
Figura 5: Respuesta en vibración libre y ruido del 5%	13
Figura 6: Respuesta en vibración libre con ruido del 5%	14
Figura 7: Cambios en la primera frecuencia natural variando Δt . Método de Ibrahim	15
Figura 8: Cambios en la segunda frecuencia natural variando Δt . Método de Ibrahim	16
Figura 9: Cambios en la tercera frecuencia natural variando Δt . Método de Ibrahim	16
Figura 10: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno. Método de Ibrahim	17
Figura 11: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim	17
Figura 12: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim	18
Figura 13: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim	18
Figura 14: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim	19
Figura 15: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con Δt en tanto por uno. Método de Ibrahim	19
Figura 16: Cambios en la primera frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim	20
Figura 17: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim	21
Figura 18: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim	21
Figura 19: Variación del error en las frecuencias naturales con el número de puntos en tanto por uno. Método de Ibrahim	22
Figura 20: Variación del error en las frecuencias naturales con el número de puntos en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim	22
Figura 21: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim	23
Figura 22: Cambios en segunda relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim	23
Figura 23: Cambios en segunda relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim	24
Figura 24: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con el número de puntos en tanto por uno. Método de Ibrahim	24
Figura 25: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con el número de puntos en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim	25
Figura 26: Cambios en la primera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	26

Figura 27: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	26
Figura 28: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	27
Figura 29: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	27
Figura 30: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	28
Figura 31: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	29
Figura 32: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	29
Figura 33: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim	30
Figura 34: Cambios en la primera frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim	31
Figura 35: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim	31
Figura 36: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim	32
Figura 37: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el tiempo de integración. Método de Ibrahim	32
Figura 38: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	33
Figura 39: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	34
Figura 40: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	34
Figura 41: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el tiempo de integración. Método de Ibrahim	35
Figura 42: Toma de puntos primera	36
Figura 43: Toma de puntos segunda	37
Figura 44: Toma de puntos tercera	38
Figura 45: Cambios en la primera frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM	40
Figura 46: Cambios en la segunda frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM	40
Figura 47: Cambios en la tercera frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM	41
Figura 48: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno. Método de LSCEM	41
Figura 49: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno ampliado. Método de LSCEM	42
Figura 50: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCEM	43
Figura 51: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCEM	43
Figura 52: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCEM	44
Figura 53: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con Δt en tanto por uno. Método de LSCEM	44
Figura 54: Cambios en la primera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	45

Figura 55: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	46
Figura 56: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM	46
Figura 57: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método LSCEM	47
Figura 58: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido ampliado. Método LSCEM	47
Figura 59: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCEM	48
Figura 60: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCEM	49
Figura 61: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCEM	49
Figura 62: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método LSCEM	50
Figura 63: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido ampliado. Método LSCEM	50
Figura 64: Toma de puntos primera	51
Figura 65: Toma de puntos segunda	52
Figura 66: Sistema a estudiar	53
Figura 67: Viga a estudiar	53
Figura 68: Posiciones acelerómetros	53
Figura 69: Acelerómetro ADXL335	54
Figura 70: Microcontrolador Arduino UNO R2	54
Figura 71: Respuesta en aceleración del sistema	55
Figura 72: Respuesta en aceleración del sistema ampliada	55
Figura 73: Resultado tras interpolar en azul, original en rojo	56
Figura 74: Resultado ampliado tras interpolar en azul, original en rojo	56
Figura 75: Representación primer modo	59
Figura 76: Representación segundo modo	59
Figura 77: Representación tercer modo.	60
Figura 78: Representación primer modo	61
Figura 79: Representación segundo modo	62
Figura 80: Representación tercer modo	62
Figura 81: Ampliación de un periodo completo	63
Figura 82: Ampliación de un periodo completo	63
Figura 83: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras integrar.	66
Figura 84: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras aplicar un filtro de bajas frecuencias.	66
Figura 85: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras restar la media a la velocidad.	67
Figura 86: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras restar la media a la posición.	67

Figura 87: Errores relativos con Δt en tanto por uno. ITD	69
Figura 88: Errores relativos con el número de puntos en tanto por uno. ITD	69
Figura 89: Elección de 6 puntos. ITD	70
Figura 90: Elección de 20 puntos. ITD	70
Figura 91: Errores relativos con el ruido en tanto por uno. ITD.	71
Figura 92: Errores relativos con el $t_{\text{integración}}$ en tanto por uno. ITD.	71
Figura 93: Errores relativos con el Δt en tanto por uno. LSCEM.	72
Figura 94: Errores relativos con el Δt en tanto por uno. LSCEM.	72

Notación

FFT	Fast Fourier Transform (Transformada rápida de Fourier)
FRF	Frequency Response Function (Función de respuesta en frecuencia)
g.d.l.	Grados de libertad
ITD	Ibrahim Time Domain (Método de Ibrahim en el dominio del tiempo)
LSCEM	Least Square Complex Exponential Method (Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja)
LSFD	Least Square Frequency Domain (Método de mínimos cuadrados en el dominio de la frecuencia)
MDOF	Multiple Degree of Freedom (Modelo con múltiples grados de libertad)
SDOF	Single Degree of Freedom (Modelo de un grado de libertad)

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Contexto

El estudio de las vibraciones es algo muy necesario a la hora de poner en pie cualquier tipo de estructura, se debe siempre tener en cuenta cómo se va a enfrentar ésta a dichas vibraciones y para ello se debe conocer ciertos parámetros que describirán el comportamiento dinámico de cualquier estructura mecánica lineal, los que describen su resonancia estructural. Estos parámetros modales son: la frecuencia natural, el amortiguamiento y los modos de vibración. Para conocer ese comportamiento se hace uso de lo que se llama análisis modal que no es más que un estudio para llegar a conocer estos parámetros.

Si se quiere dar una definición simplificada del análisis modal se puede decir que este descompone una deformación compleja de una estructura en diferentes modos de vibración, que dependen de la masa y de la rigidez de la estructura.

Debido a esta necesidad se plantea en este proyecto la posibilidad de realizar este análisis modal de formas alternativas que serán estudiadas con detenimiento viendo como de buenos son los resultados obtenidos.

1.2 Aplicación

El análisis modal es muy útil para solucionar diferentes problemas del día a día como pueden ser:

- Problemas de ruido y vibración: Tras encontrar la fuente del problema mediante mediciones de vibración se sabrá si el problema es causado por la resonancia de la estructura y se procederá a hacer variaciones en ésta para remediar el problema.
- Mejoras en el diseño: Analizando prototipos se puede llegar al diseño óptimo de una estructura y modificar el modelo para que se asemeje a ese óptimo.
- Monitoreo estructural: Se puede hacer uso de los parámetros modales para controlar las condiciones de las estructuras como pueden ser las imperfecciones que se produzcan en éstas, por ejemplo, el conocimiento del amortiguamiento modal es muy útil para predecir la vida a fatiga y reducir las respuestas en resonancia.
- Verificar modelos analíticos: Gracias al análisis modal se pueden comparar modelos analíticos con la respuesta del análisis para así verificar que este primer estudio era correcto. Cada vez se usan más los ensayos dinámicos combinados con los análisis de elementos finitos para mejorar los métodos analíticos.
- Comprobar el estado de estructuras después de sufrir daños: por ejemplo, tras un terremoto con el análisis modal podemos comprobar cómo se encuentra la estructura.
- Estimar las fuerzas que actúan sobre la estructura.
- Analizar el ensamblaje de estructuras.

1.3 Resumen

Este proyecto recogerá el estudio de los métodos ITD y LSCEM aplicados primeramente a un sistema inventado y a continuación aplicados a la respuesta a una excitación de una barra en voladizo.

En el segundo capítulo se hará una explicación teórica de qué es el análisis modal y cómo funciona y se procederá a continuación a explicar cuáles son los métodos usados y su funcionamiento.

En el tercer capítulo se hace el estudio del sistema inventado dando primeramente sus características reales y después se han aplicado los dos métodos y calculado los parámetros dinámicos comparándolos con los originales ya calculados. Además, se han ido haciendo variaciones en los métodos y comparando la mejoría del método con estos cambios.

En el cuarto capítulo se aplica el método a una viga empotrada, se explican las condiciones de la viga y aparatos de medida, acelerómetros y microcontrolador, se explica el procedimiento seguido y se hace un cálculo de las frecuencias naturales de la viga analíticamente para después compararlas con las calculadas mediante los dos métodos estudiados.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El estudio que se va a realizar a lo largo de este proyecto se basa en el análisis modal. En un inicio se ha hecho un estudio de cómo funcionan diferentes métodos, que se explicarán en este capítulo, de forma analítica mediante el uso del programa informático Matlab y a continuación de forma experimental.

2.1 Análisis modal

El análisis modal se basa en el estudio dinámico de estructuras para estimar propiedades de éstas como las frecuencias y los modos naturales, además del amortiguamiento. El modelo matemático basado en estos parámetros es un modelo lineal que da una descripción completa del comportamiento de la estructura.

Con el modelo matemático, obtenido tras el estudio de una estructura, se puede simular su respuesta ante la acción de diferentes fuerzas a las que podría estar sometida ésta en su día a día para así saber si es capaz de soportarlas o si se necesita cambiar la forma, el tamaño o incluso incluir refuerzos a ésta.

2.1.1 Análisis modal teórico

Para realizar este análisis se ha de plantear la ecuación de movimiento del sistema a estudiar y calcular su respuesta teniendo en cuenta unas condiciones iniciales establecidas. Esto supone resolver un problema de autovalores y autovectores los cuales permiten obtener los parámetros del sistema que se buscaban.

2.1.2 Análisis modal experimental

El método experimental se basará en ensayos siguiendo cuatro pasos fundamentales:

- Excitación de la estructura
- Medición mediante acelerómetros
- Tratamiento digital
- Análisis de las señales

Así pues, tras adquirir los datos y tratarlos se analizarán viendo qué modelos cumplen y obteniendo finalmente los parámetros buscados.

La diferencia entre el modelo teórico y experimental al final se basa en la forma de obtener la señal a estudiar, en el teórico dando los datos de la estructura se obtiene una respuesta, mediante cálculos matemáticos, ideal del sistema. A su vez, en el modelo experimental se obtiene la respuesta mediante los acelerómetros antes citados, ésta también puede estar sujeta a errores que serán mayores cuánto peor sea el sistema de medida.

2.2 Características de los métodos de análisis

Los métodos de análisis utilizados son infinitos y si se estudian se puede ver que dependiendo de lo que se busque funcionarán mejor unos u otros.

2.2.1 SDOF y MDOF

La primera diferenciación que habría que hacer sería entre métodos SDOF y MDOF. Los métodos SDOF son simplificaciones que se usan cuando únicamente uno de los modos es importante para el estudio. Éstos son

más rápidos y eficientes, pero sólo son útiles cuando los modos están bien desacoplados, en caso de que no sea así habría que acudir a los MDOF.

2.2.2 Estimaciones locales y globales

Otra característica que señala a los métodos es la forma de identificar los valores, pueden ser estimaciones locales o globales. Cuando se observa una respuesta en i excitando en j si:

- los polos del sistema no dependen de la entrada ni de la salida
- los coeficientes de los modos no dependen del punto de excitación y
- los factores de participación modal no dependen de donde se observe

se habla de estimaciones globales.

Cuando no se cumple algo de lo citado anteriormente se tratan de estimaciones locales que tienen el inconveniente de que generan varias aproximaciones de cada parámetro.

2.2.3 Una entrada o varias

Cuando se usan varias entradas se consigue identificar polos muy cercanos o incluso dobles además de obtener estimaciones globales de los coeficientes de los modos, algo imposible con una sola entrada.

2.2.4 Identificación directa o mediante modelo modal

Con la identificación directa se hace uso de las ecuaciones diferenciales del modelo bajo estudio, con ellas se identifican los parámetros de éstas y a partir de ellos se calculan los parámetros modales mediante el análisis modal. En cambio, con el modelo modal se describe la respuesta como combinación lineal de soluciones características, también llamadas modos del sistema. La identificación se basa en estimar modos y frecuencias de un modelo conocido.

2.2.5 MDOF en el dominio del tiempo o de la frecuencia

Los métodos en el dominio del tiempo no hacen uso de la transformada de Fourier lo cual presenta una gran ventaja ante los métodos en el dominio de la frecuencia ya que no solo se ahorra el cálculo de ésta si no que no se cometen errores de leakage, aliasing, etc.

Cuando se tratan problemas en los que los datos presentan mucho ruido es más adecuado el uso de métodos en el dominio del tiempo ya que suelen estar mejor condicionados que los definidos en el dominio de la frecuencia.

Suelen ser más útiles los métodos en el dominio del tiempo cuando la banda de interés es muy grande.

En sistemas muy amortiguados es preferible el dominio de la frecuencia porque se suelen tener pocos resultados útiles, en cambio cuando los sistemas presentan poco amortiguamiento son más útiles los métodos en el dominio del tiempo.

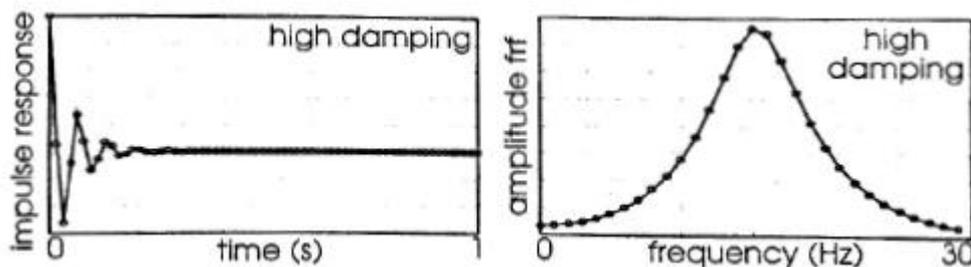


Figura 1: Sistema muy amortiguado

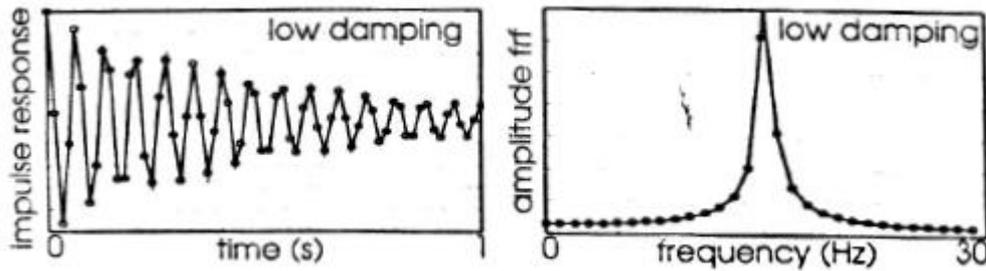


Figura 2: Sistema muy poco amortiguado

En el dominio de la frecuencia no hace falta que las frecuencias de análisis estén equiespaciadas, en cambio, al pasar al dominio del tiempo se requieren frecuencias equiespaciadas y múltiplos de dos para aprovechar la velocidad de la FFT.

2.3 Método de Ibrahim (ITD)

Este método en el dominio del tiempo utiliza la respuesta en vibración libre para obtener polos y modos. Las características de este son:

- Es un método MDOF que puede ofrecer tanto estimaciones locales como globales y que permite varias entradas.
- Es capaz de obtener modos y polos en un solo análisis.
- Puede usarse el método con la respuesta que sea, ya sea posición, velocidad o aceleración.
- No trabaja con el modelo matemático del sistema.
- No necesita conocer la excitación, funciona con el sistema en vibración libre, por lo que conociendo la respuesta instantes después de eliminar la fuerza de excitación basta.

El funcionamiento del método se basa en, haciendo uso de la respuesta original, desfasada cierto incremento de tiempo y doblemente desfasada este mismo incremento, llegar a montar un problema de autovalores y autovectores. Con estos se es capaz de sacar los parámetros modales del sistema.

2.3.1 Funcionamiento del método

Se sabe que la respuesta de un sistema en vibración libre de N grados de libertad puede obtenerse del sistema de ecuaciones

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

este se puede transformar en uno de primer orden haciendo el cambio de variables siguiente introduciendo la resta $m-m=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \dot{y} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = y$$

quedando el sistema de primer orden

$$A\dot{y} + By = 0, \quad y \in \mathbb{R}^{2N}$$

Para estos sistemas existen soluciones del tipo

$$y = \psi e^{\lambda t}$$

una vez obtenidos los autovectores, el sistema puede diagonalizarse y resolverse para cada una de las coordenadas modales

$$\dot{z}_r - \lambda_r z_r = 0$$

por lo que

$$z_r(t) = z_r(0)e^{\lambda_r t}, \quad (r = 1, 2, \dots, N)$$

Deshaciendo el cambio de coordenadas obtenemos la solución en las coordenadas originales

$$x(t) = \sum_{r=1}^{2N} \psi_{2r} z_r(t) = \sum_{r=1}^{2N} \psi_{2r} z_r(0) e^{\lambda_r t} = \sum_{r=1}^{2N} z_r e^{\lambda_r t}$$

siendo z_r el modo r multiplicado por una constante (el valor inicial de la coordenada modal) por lo que z_r es también un modo de vibración. Consiguiendo así formar el sistema matricial

$$[x(t_1) \dots x(t_{2N})] = [z_1 \dots z_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix}$$

que se puede escribir también como

$$X = Z\Lambda$$

Haciendo lo mismo con las respuestas desfasadas un tiempo Δt

$$[x(t_1 + \Delta t) \dots x(t_{2N} + \Delta t)] = [z_1 \dots z_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t_1 + \Delta t)} & \dots & e^{\lambda_1(t_{2N} + \Delta t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N}(t_1 + \Delta t)} & \dots & e^{\lambda_{2N}(t_{2N} + \Delta t)} \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$[x(t_1 + \Delta t) \dots x(t_{2N} + \Delta t)] = [z_1 e^{\lambda_1 \Delta t} \dots z_{2N} e^{\lambda_{2N} \Delta t}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix}$$

esto se puede escribir de forma resumida como

$$X_{\Delta t} = \bar{Z} \Lambda$$

De nuevo se vuelve a plantear el sistema con respuestas desfasadas un tiempo $2\Delta t$

$$[x(t_1 + 2\Delta t) \dots x(t_{2N} + 2\Delta t)] = [z_1 \dots z_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t_1+2\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_1(t_{2N}+2\Delta t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N}(t_1+2\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_{2N}(t_{2N}+2\Delta t)} \end{pmatrix}$$

que también se puede escribir como

$$[x(t_1 + 2\Delta t) \dots x(t_{2N} + 2\Delta t)] = [z_1 e^{\lambda_1 2\Delta t} \dots z_{2N} e^{\lambda_{2N} 2\Delta t}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix}$$

y de forma resumida

$$X_{2\Delta t} = \bar{\bar{Z}} \Lambda$$

Ensamblando las matrices anteriores

$$\begin{bmatrix} X \\ X_{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \Lambda \rightarrow \mathcal{X} = \Theta \Lambda$$

$$\begin{bmatrix} X_{\Delta t} \\ X_{2\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z} \\ \bar{\bar{Z}} \end{bmatrix} \Lambda \rightarrow \bar{\mathcal{X}} = \bar{\Theta} \Lambda$$

Si eliminamos Λ en las expresiones se llega finalmente al problema de autovalores y autovectores buscado

$$\bar{\mathcal{X}} \mathcal{X}^{-1} \Theta = \bar{\Theta} \rightarrow \bar{\mathcal{X}} \mathcal{X}^{-1} \Theta_r = \bar{\Theta}_r \rightarrow \bar{\mathcal{X}} \mathcal{X}^{-1} \Theta_r = e^{\lambda_r \Delta t} \Theta_r$$

Si se quiere hacer el mismo análisis tomando una lectura de tiempo en más de $2N$ instantes habrá que hacer ciertos cambios ya que ahora ni \mathcal{X} ni Λ serán cuadradas. Para evitar este problema se hace uso de la traspuesta de \mathcal{X} y se llega al siguiente problema de autovalores y autovectores.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\mathcal{X}^T &= \Theta\Lambda\mathcal{X}^T \\ \bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}^T &= \bar{\Theta}\Lambda\mathcal{X}^T \end{aligned} \rightarrow (\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}^T)(\mathcal{X}\mathcal{X}^T)^{-1}\theta_r = e^{\lambda_r\Delta t}\theta_r$$

2.4 Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja (LSCEM)

Al igual que el anterior es un método de análisis en el dominio del tiempo, aunque en este caso mediante la respuesta en vibración libre solo se es capaz de obtener los polos del sistema.

- Es un método MDOF que puede ofrecer tanto estimaciones locales como globales y que permite varias entradas.
- Solo calcula polos.
- Suele usarse en combinación con el LSFD para obtener los modos y coeficientes de participación.
- Parte de la respuesta impulsiva del sistema.
- Tampoco se necesita conocer la excitación, basta con conocer la respuesta instantes después de eliminar la fuerza.

Este método se basa en crear una matriz y un vector con la respuesta de los distintos puntos de la estructura en distintos instantes de tiempo para con ellos resolver un sistema de ecuaciones que devolverá los coeficientes de un polinomio que tiene como raíces los polos del sistema.

2.4.1 Funcionamiento del método

Partiendo de la respuesta impulsiva del sistema

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^N A_{irj} e^{\lambda_r t} + A_{irj}^* e^{\lambda_r^* t} = 2\text{Re}\left(\sum_{r=1}^N A_{irj} e^{\lambda_r t}\right)$$

obtenida a partir de la transformada inversa de Fourier de la FRF. Si se trabaja con instantes de tiempo equiespaciados

$$h_{ij}(k\Delta t) = 2\text{Re}\left(\sum_{r=1}^N A_{irj} e^{\lambda_r k\Delta t}\right) = 2\text{Re}\left(\sum_{r=1}^N A_{irj} V_r^k\right)$$

donde $V_r = e^{\lambda_r \Delta t}$ para simplificar.

Si se define la FRF de un sistema SISO como cociente de polinomios

$$H_{ij}(j\omega) = \frac{Q_i(j\omega)}{P_j(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_p} \alpha_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n_q} \beta_k (j\omega)^k}$$

que puede reordenarse como

$$\sum_{k=0}^{n_q} \beta_k (j\omega)^k Q_i(j\omega) = \sum_{k=0}^{n_p} \alpha_k (j\omega)^k P_j(j\omega)$$

De la ecuación anterior se obtiene la transformada inversa como

$$\sum_{k=0}^{n_q} \beta_k q_i(t + k\Delta t) = \sum_{k=0}^{n_p} \alpha_k p_j(t + k\Delta t)$$

al estar hablando de vibración libre el término de fuerzas es nulo, $p_j(t) = 0$ y se asume que t en el instante inicial es 0

$$\sum_{k=0}^{n_q} \beta_k h_{ij}(k\Delta t) = 0$$

sustituyendo lo anterior en

$$h_{ij}(k\Delta t) = 2Re \left(\sum_{r=1}^N A_{irj} e^{\lambda_r k\Delta t} \right) = 2Re \left(\sum_{r=1}^N A_{irj} V_r^k \right)$$

se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n_q} \beta_k 2Re \left(\sum_{r=1}^N A_{irj} V_r^k \right) = 0$$

reordenando

$$2Re \left(\sum_{r=1}^N A_{irj} \sum_{k=0}^{n_q} \beta_k V_r^k \right) = 0$$

Lo que nos dice que siempre existe un polinomio en V_r de grado n_q con coeficientes reales β_k tal que se cumple la siguiente relación

$$\beta_0 + \beta_1 V_r^1 + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_{n_q} V_r^{n_q} = 0$$

Para obtener los coeficientes del polinomio se ensambla el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} h_{ij}(0) & h_{ij}(\Delta t) & \dots & h_{ij}((n_q - 1)\Delta t) \\ h_{ij}(\Delta t) & h_{ij}(2\Delta t) & \dots & h_{ij}(n_q \Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ij}((n_q - 1)\Delta t) & h_{ij}(n_q \Delta t) & \dots & h_{ij}((2n_q - 2)\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n_q-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{ij}(n_q \Delta t) \\ h_{ij}((n_q + 1)\Delta t) \\ \vdots \\ h_{ij}((2n_q - 1)\Delta t) \end{pmatrix}$$

el cual al resolverse dará los valores de las betas.

Para hablar de este sistema se le va a nombrar cómo:

$$M * \beta = -V$$

En el caso de que el número de puntos de medida sea mayor que n_q el problema de encontrar los V_r puede resolverse en términos cuadráticos medios

$$\begin{pmatrix} h_{ij}(0) & h_{ij}(\Delta t) & \dots & h_{ij}((n_q - 1)\Delta t) \\ h_{ij}(\Delta t) & h_{ij}(2\Delta t) & \dots & h_{ij}(n_q \Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ij}((n_t - 1)\Delta t) & h_{ij}(n_t \Delta t) & \dots & h_{ij}((n_t + n_q - 2)\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n_q-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{ij}(n_q \Delta t) \\ h_{ij}((n_q + 1)\Delta t) \\ \vdots \\ h_{ij}((n_q - 1 + n_t)\Delta t) \end{pmatrix}$$

Finalmente conociendo los coeficientes β_k se obtienen las raíces del polinomio, V_r , y a partir de estas los polos de la ecuación, deshaciendo el cambio $V_r = e^{\lambda_r \Delta t}$.

3 ESTUDIO DE CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS MEDIANTE DIFERENTES MÉTODOS

Tras implantar los métodos en Matlab se ha podido comprobar su funcionamiento y hacer comparaciones y variaciones en ellos.

3.1 Sistema estudiado

Para el estudio analítico se ha partido de un sistema inventado con tres grados de libertad del tipo muelle-amortiguador

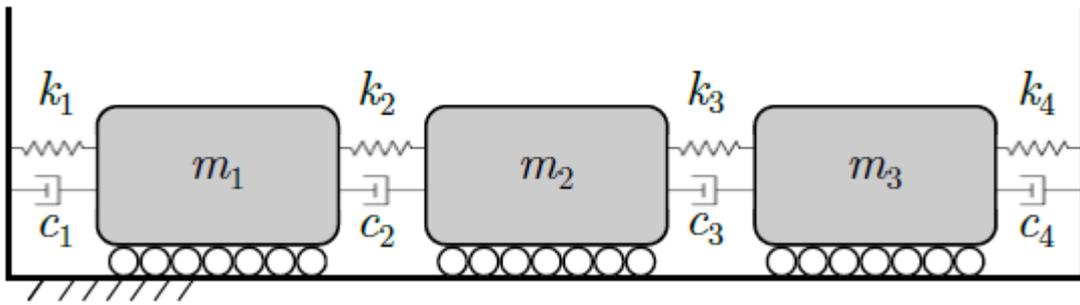


Figura 3: Sistema de 3 g.d.l.

en el cual el valor de las constantes son los siguientes:

m	Masas (kg)	K	Constante de rigidez (N/m)	c	Constante de amortiguamiento (Ns/m)
1	5	1	7000	1	20
2	3	2	2000	2	20
3	7	3	1000	3	10
-	-	4	4000	4	20

Tabla 1: Valores de las constantes

3.2 Simulación de la respuesta

Antes de estudiar los métodos en sí, se ha hecho un análisis de la respuesta a través del cual se han calculado los autovalores y autovectores reales del sistema propuesto. Para ello se han definido las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3000 & -1000 \\ 0 & -1000 & 5000 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{pmatrix}$$

Transformando el sistema a uno de primer orden de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \dot{y} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = y$$

Con el nuevo sistema calculamos autovalores y autovectores

Autovalores	-1.5457 -23.0326i	-1.5457 +23.0326i	-3.2809 -30.3487i	-3.2809 +30.3487i	-6.3163 -44.645i	-6.3163 +44.645i
Autovectores	0.2425 +0.0125i	0.2425 -0.0125i	-0.3281 -0.1605i	-0.3281 +0.1605i	0.8024 -0.1577i	0.8024 +0.1577i
	0.7563 -0.0675i	0.7563 +0.0675i	-0.7630 -0.1559i	-0.7630 +0.1559i	-0.5652 -0.0877i	-0.5652 +0.0877i
	0.6037 -0.0068i	0.6037 -0.0068i	0.5010 +0.0953i	0.5010 -0.0953i	0.0611 +0.0198i	0.0611 -0.0198i

Tabla 2: Autovalores y autovectores del sistema analítico

Haciendo uso de la función ode45 de Matlab se integra el sistema consiguiendo así la respuesta del modelo planteado:

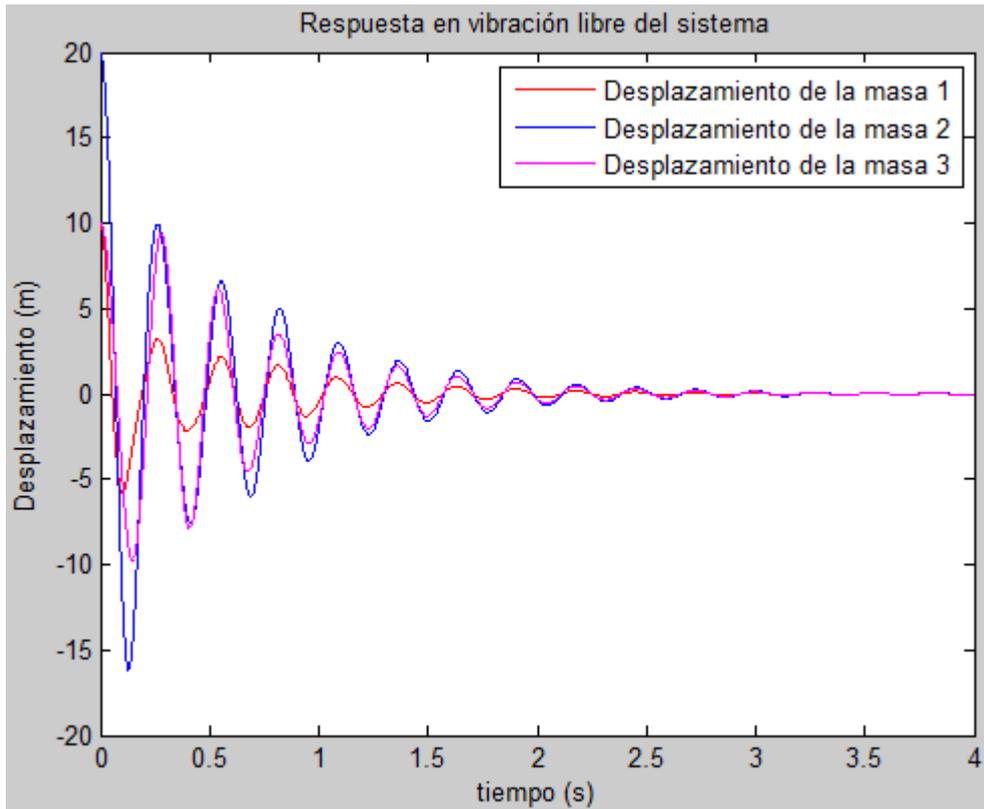


Figura 4: Respuesta en vibración libre del sistema planteado

Para ensuciar la información obtenida se le ha introducido un ruido a la respuesta del sistema en un principio del 5% de la amplitud máxima de éste como se observa en las siguientes imágenes:

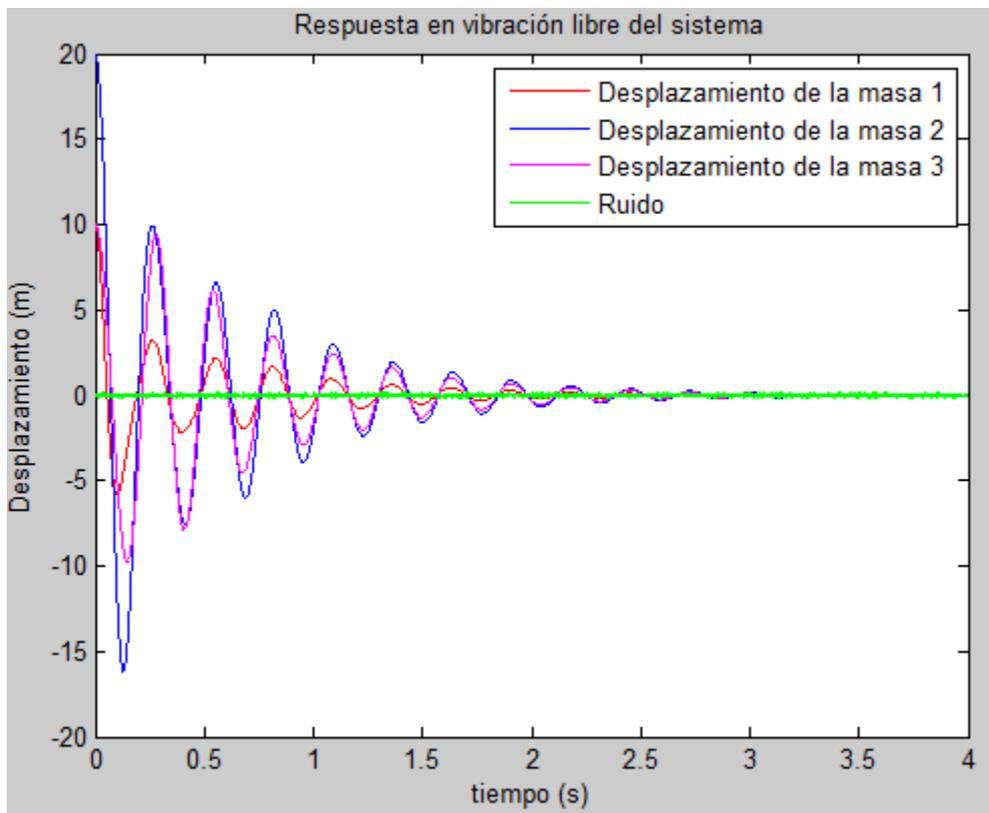


Figura 5: Respuesta en vibración libre y ruido del 5%

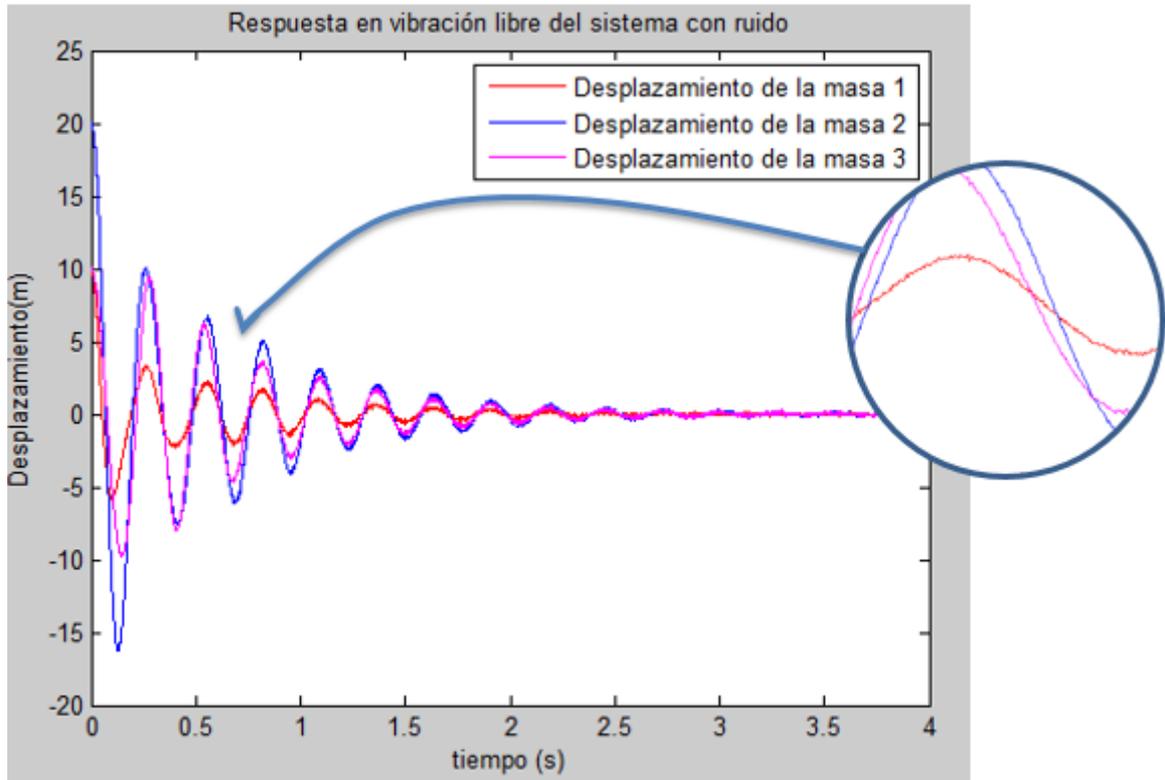


Figura 6: Respuesta en vibración libre con ruido del 5%

A continuación, se va a proceder a explicar los dos métodos y a comprobar como varían los resultados de estos si se cambian ciertos parámetros. Si no se dice lo contrario la respuesta llevará introducida un ruido del 5% y el intervalo de integración usado para obtener la respuesta inicial será de 10^{-3} segundos.

3.3 Método de Ibrahim

Inicialmente para ver cómo funcionaba este método se ha planteado con unos parámetros iniciales que luego se han ido variando y comprobando cómo afectaban estos cambios.

Como se ha explicado antes el método se puede plantear tomando información en 2N instantes o en más por lo que se va a hacer una primera aproximación tomando datos de toda la respuesta con un Δt de 0.03 segundos.

Autovalores	$-1.5009 \pm 23.0586i$	$-3.2709 \pm 30.4137i$	$-6.8314 \pm 45.0040i$
Autovectores	$0.2401 \pm 0.0342i$	$-0.3495 \pm 0.1100i$	0.8715
	0.7591	-0.8014	$-0.4545 \pm 0.0903i$
	$0.6022 \pm 0.0467i$	$0.4635 \pm 0.0930i$	$0.1366 \pm 0.0839i$

Tabla 3: Autovalores y autovectores mediante el método de Ibrahim en todo t con Δt de 0.03s

Error Autovalores	7.5801	7.5043	0.6278
Error Autovectores	0.6046	0.6006	0.1722
	1.5591	1.5301	0.1108
	0.1721	0.1123	0.0991

Tabla 4: Error absoluto al calcular los autovalores y autovectores mediante el método de Ibrahim en todo t con Δt de 0.03s

Como se ve en las tablas adjuntas el método consigue soluciones bastante bien aproximadas al menos con estas condiciones, se irá viendo como varía esto al cambiar las condiciones.

3.3.1 Variación del Δt

La primera comparación que se va a hacer será ir viendo como varía la exactitud del método si variamos el Δt . Cómo era de esperar el funcionamiento del método es óptimo cuando se toman valores para Δt intermedios, ni muy grande ni muy pequeños. Al coger un Δt demasiado grande la información está muy espaciada por lo que no se tienen suficientes datos de un periodo completo en cambio si el Δt es muy pequeño los puntos de los que se coge información están prácticamente solapados por lo que de nuevo no es suficiente.

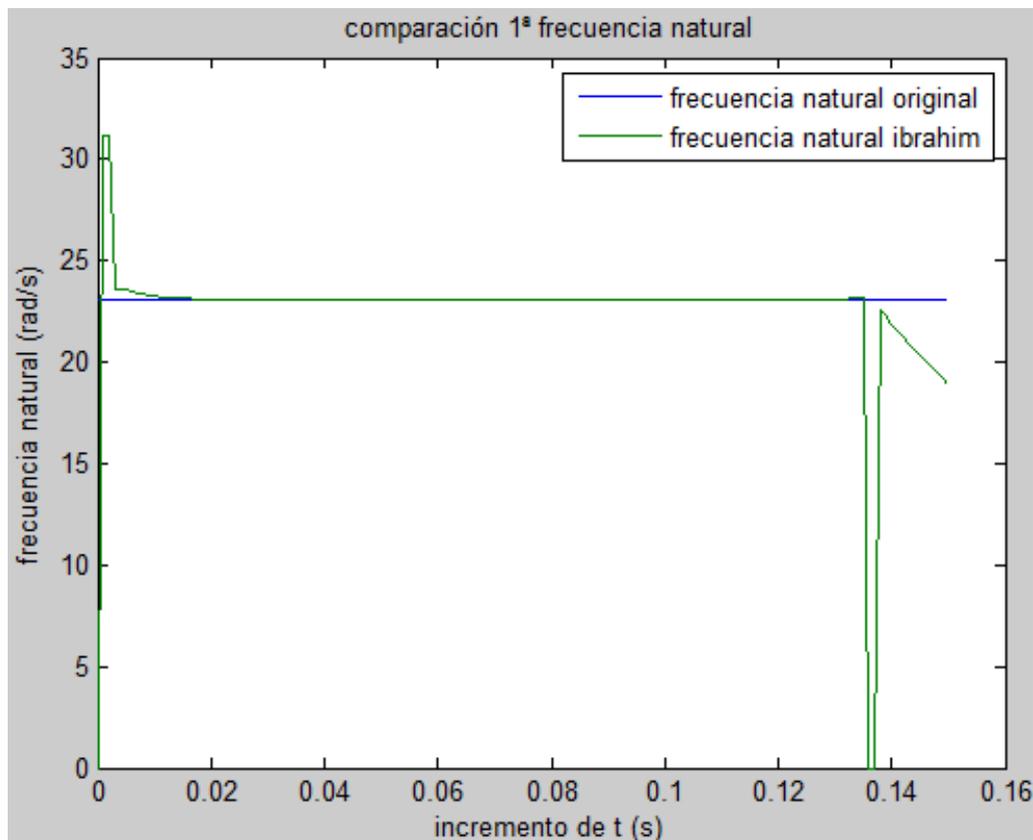
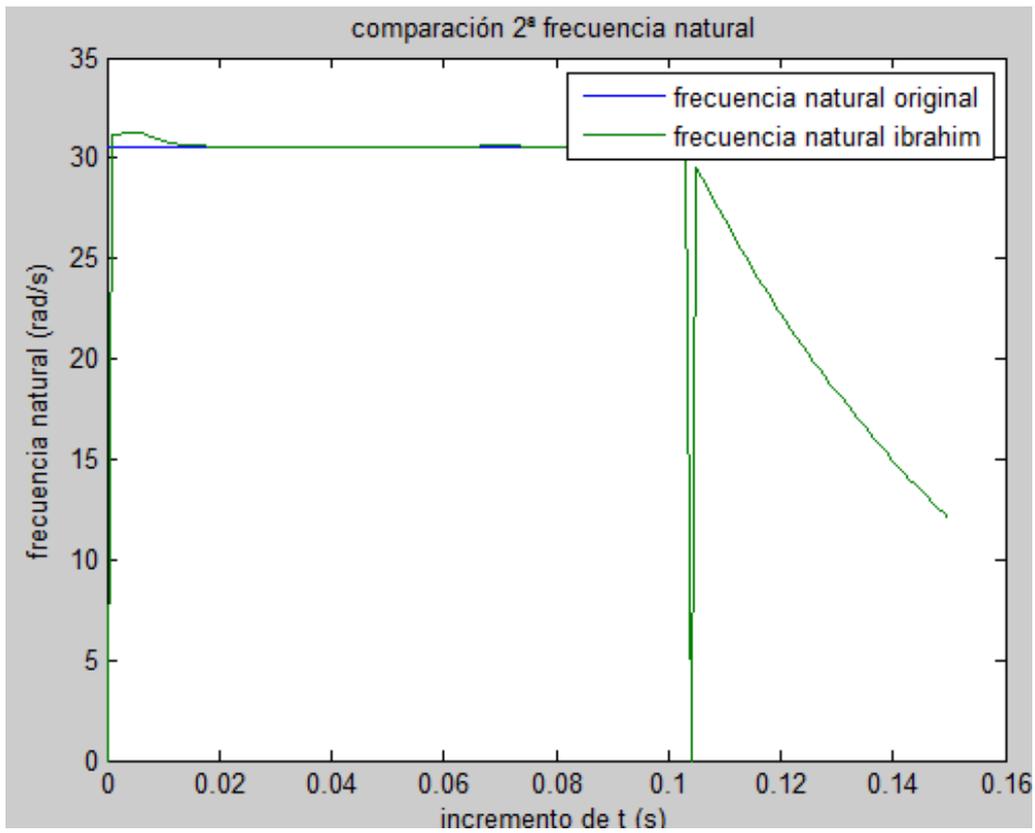
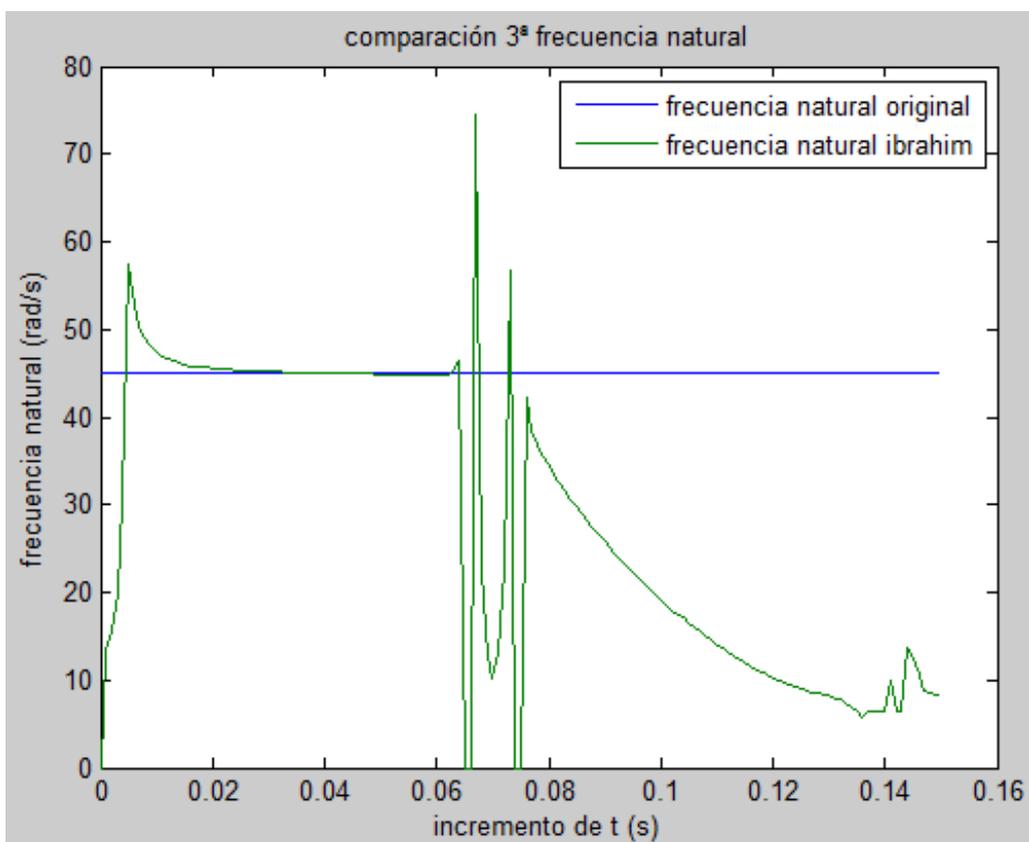


Figura 7: Cambios en la primera frecuencia natural variando Δt . Método de Ibrahim

Figura 8: Cambios en la segunda frecuencia natural variando Δt . Método de IbrahimFigura 9: Cambios en la tercera frecuencia natural variando Δt . Método de Ibrahim

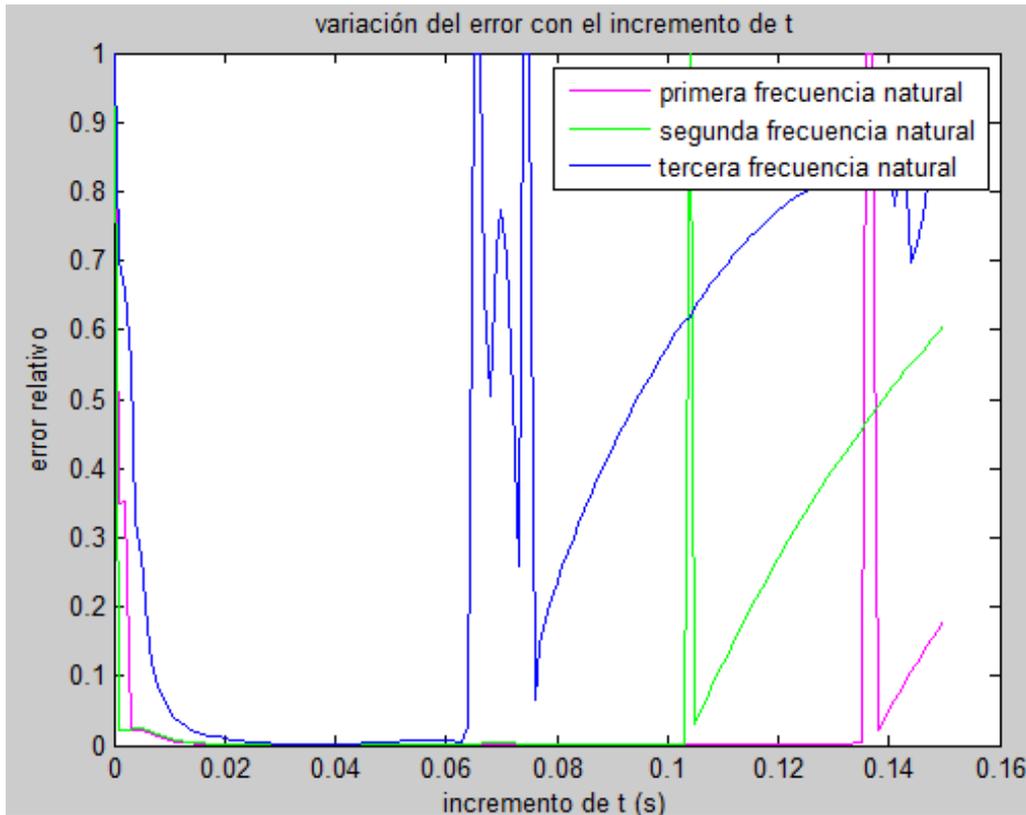


Figura 10: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno. Método de Ibrahim

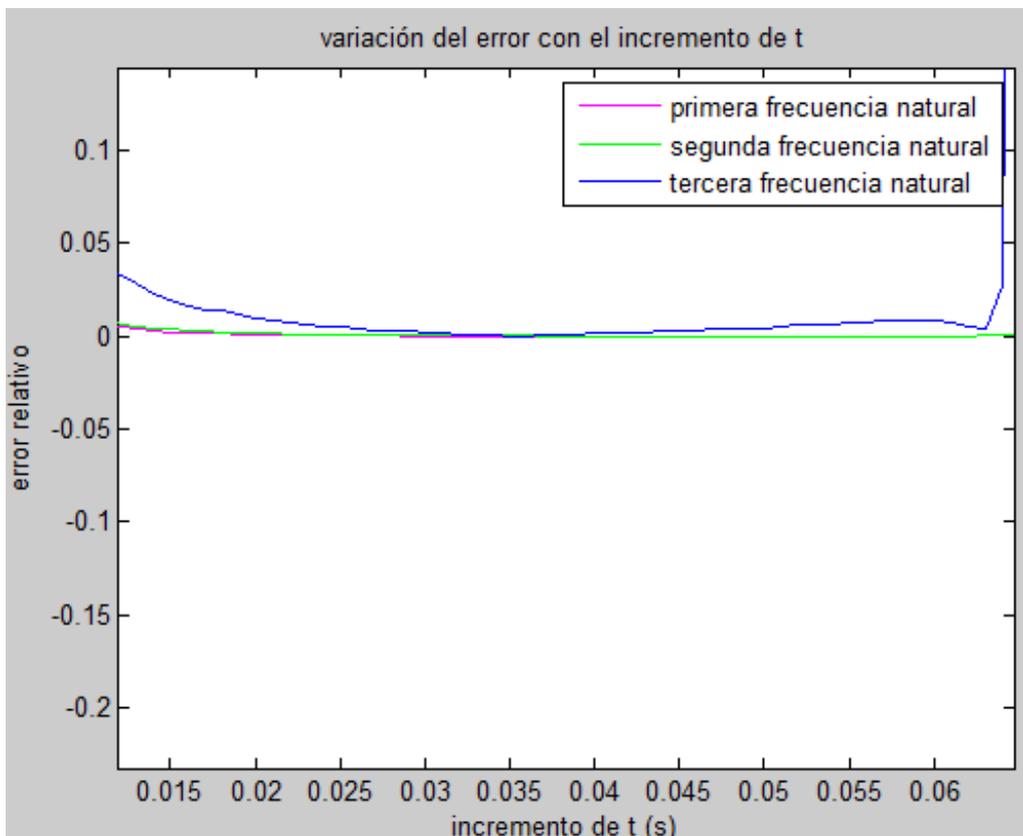


Figura 11: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim

Si se observan estas 5 primeras graficas se ve que el método llega al óptimo cuando Δt es del orden de 0.035 segundos. También se puede ver que con la primera y segunda frecuencia natural, incluso más con la primera,

el método da mucho mejores resultados que con la tercera. Con la tercera el cálculo colapsa cuando Δt es del orden de 0.06, en cambio con la segunda llega hasta 0.1 y la primera casi a 0.15 segundos.

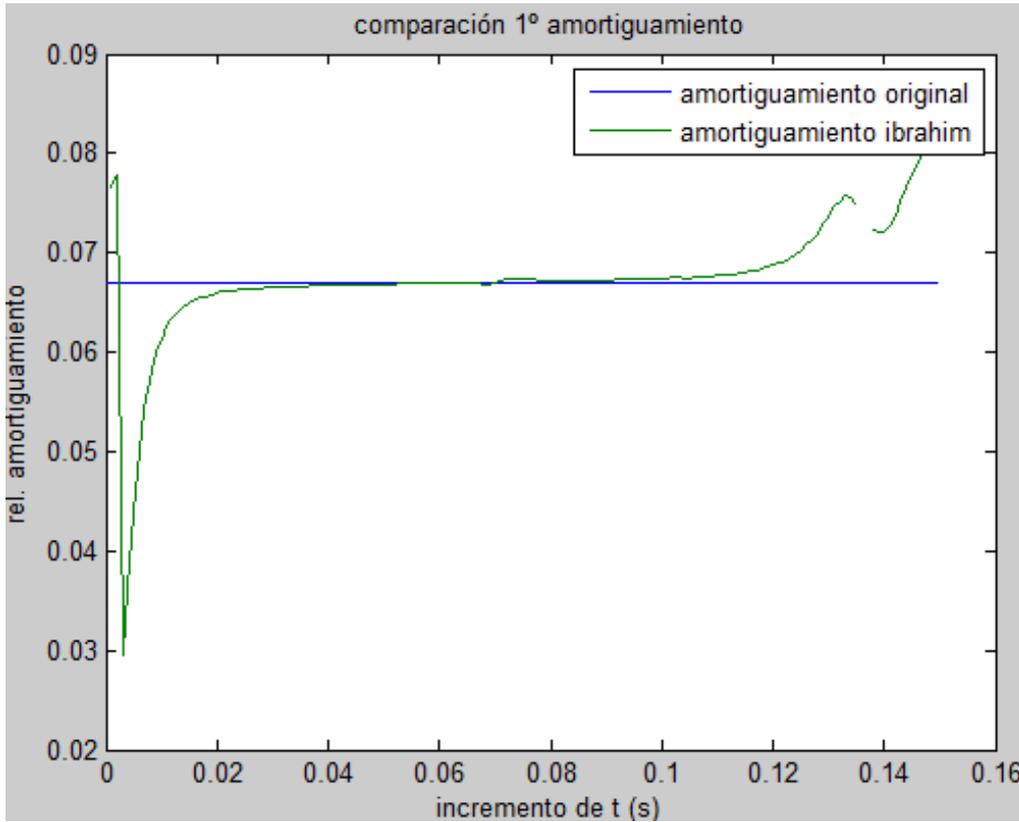


Figura 12: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim

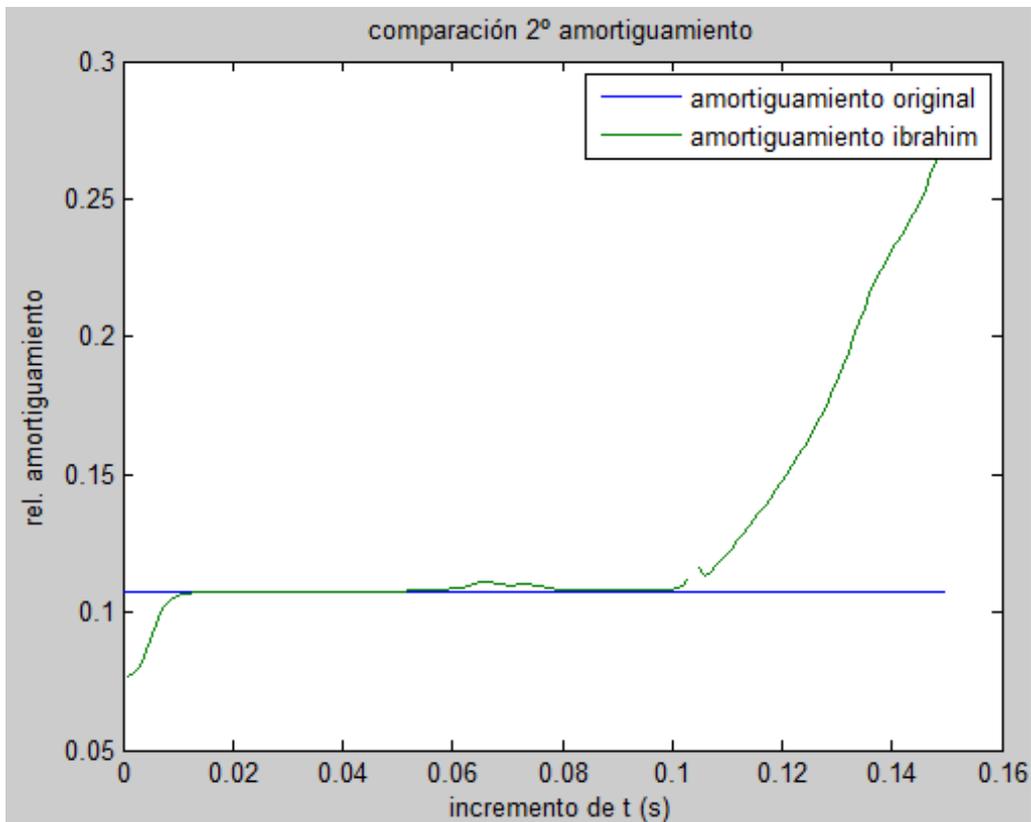


Figura 13: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim

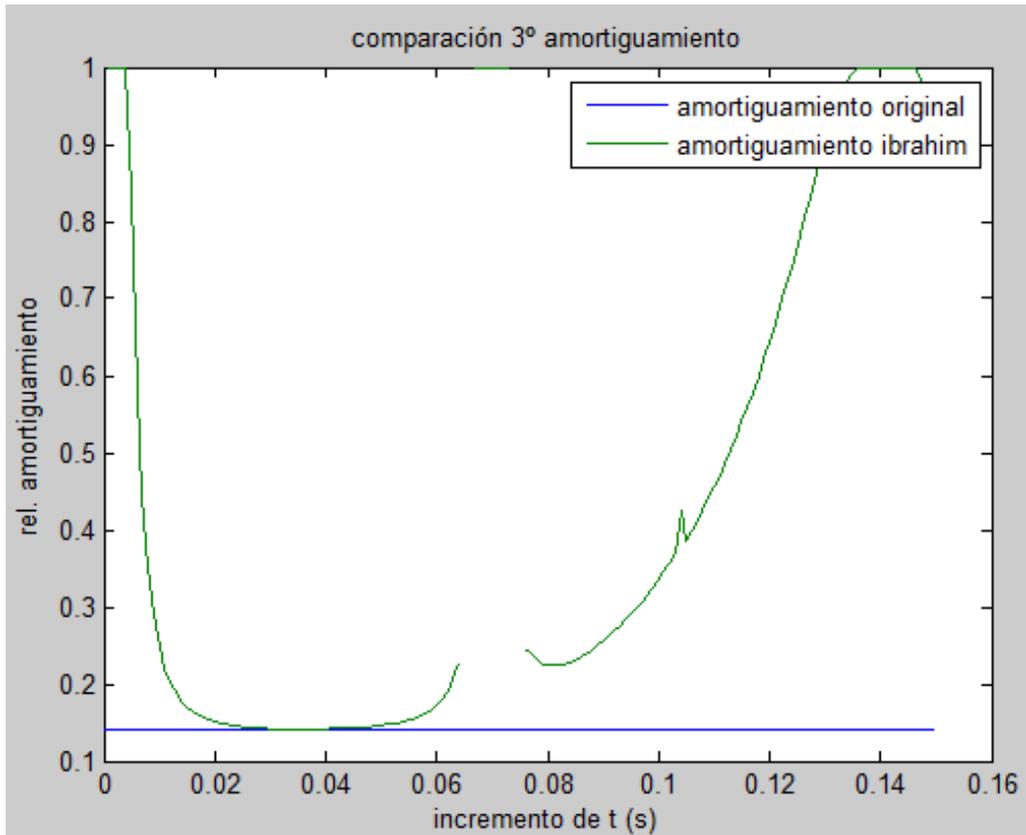


Figura 14: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de Ibrahim

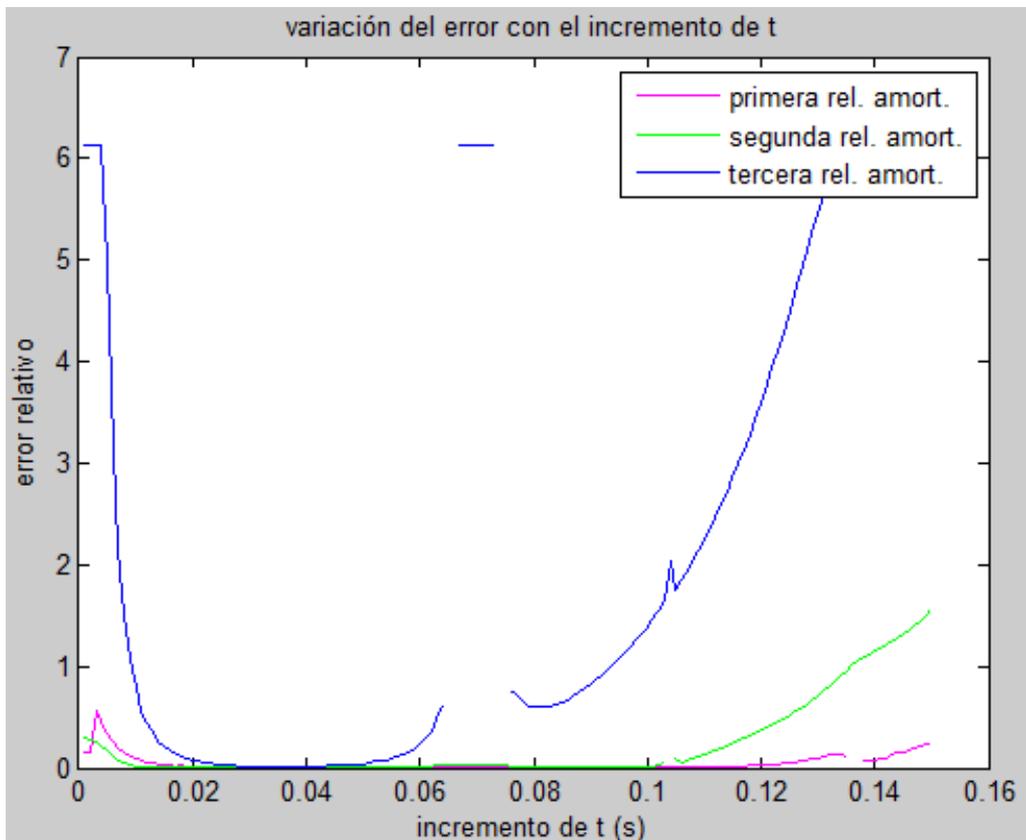


Figura 15: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con Δt en tanto por uno. Método de Ibrahim

Con las relaciones de amortiguamiento pasa lo mismo, el funcionamiento es casi perfecto cuando Δt es 0.35

segundos, pero al aumentar van colapsando en el mismo orden que las frecuencias naturales.

3.3.2 Variación del número de puntos

Lo segundo que se va a comparar es cómo varían los resultados al tomar más o menos puntos tomando un Δt de 0.35 segundos. Se puede ver cómo al aumentar los puntos que se toman, al tener más información, los datos son mejores, de hecho, basta con tomar unos 200 puntos para que los resultados sean perfectos. Hay que decir que, se está trabajando con unas condiciones en la que se ha tomado como punto inicial el cero y se han tomado todos los puntos sin ningún tipo de separación, es decir, si se cogen pocos puntos y todos seguidos por lo que no se llega a coger información de un periodo entero, en cambio cómo se verá más adelante cogiendo tan sólo seis puntos bien situados podemos conseguir información no demasiado mala.

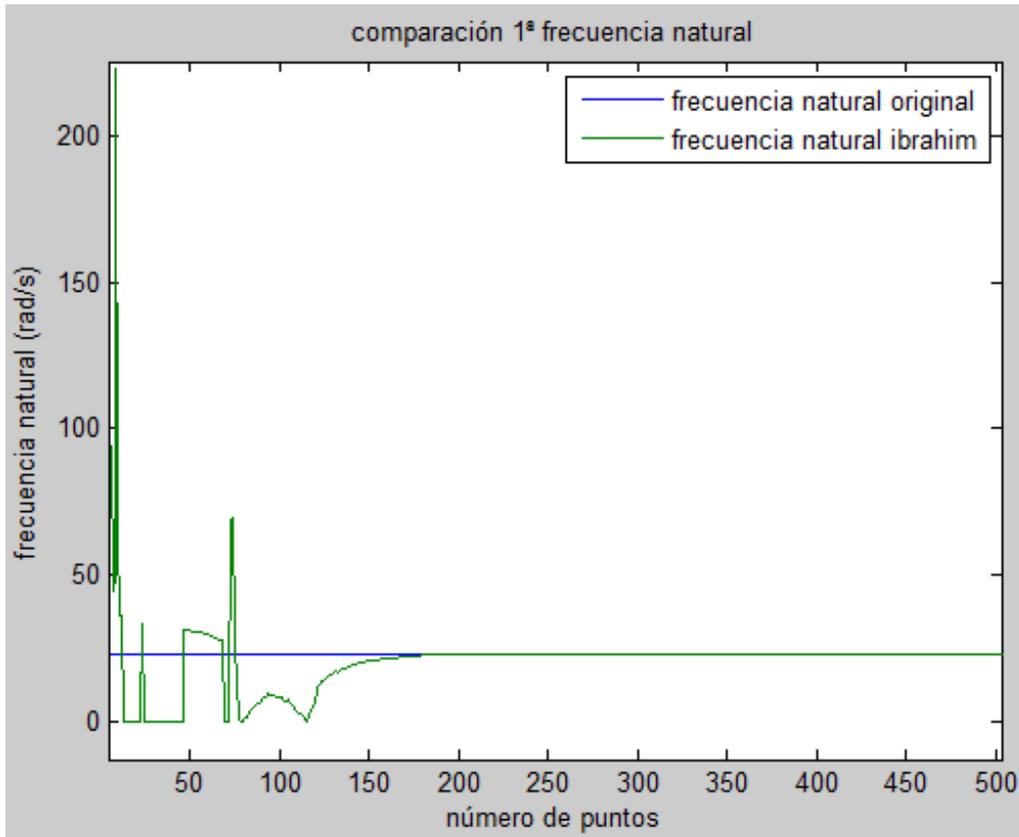


Figura 16: Cambios en la primera frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim

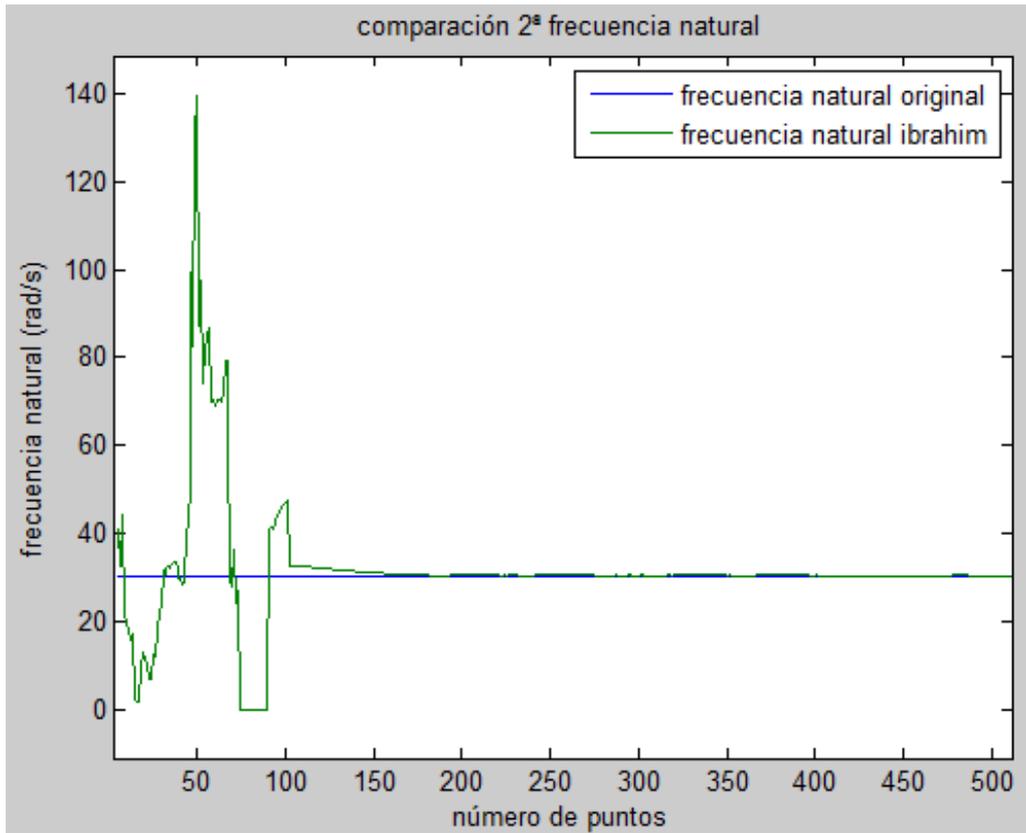


Figura 17: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim

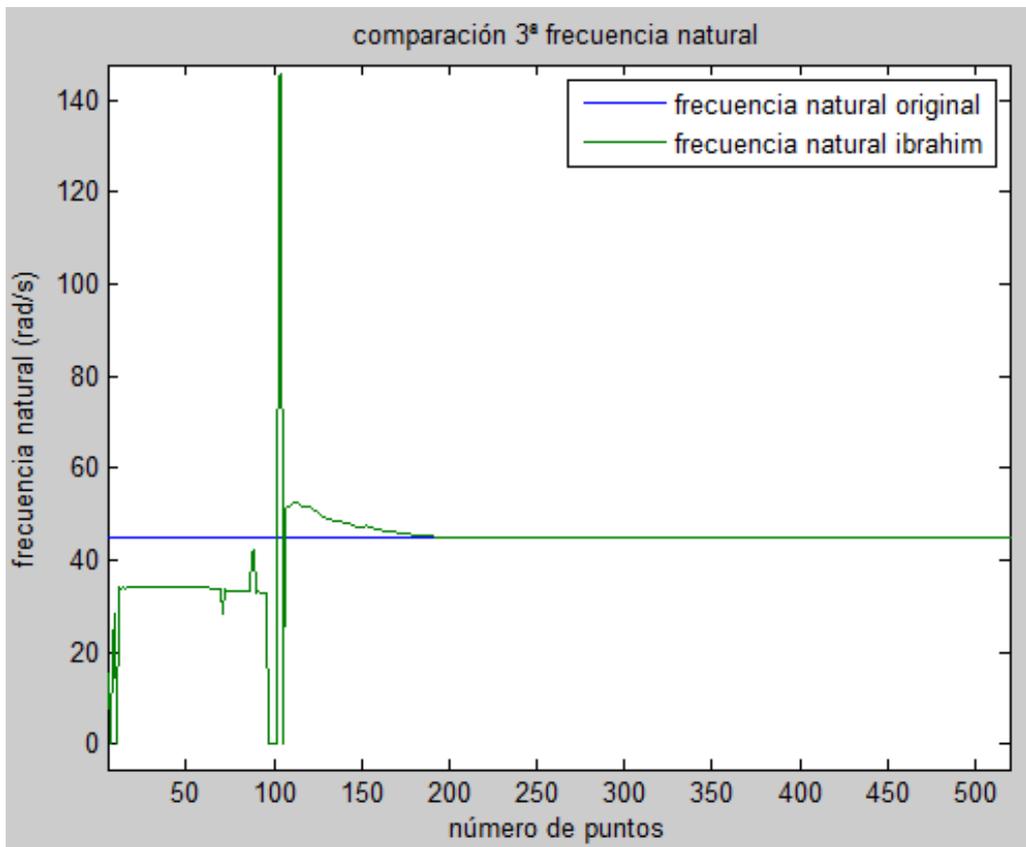


Figura 18: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el número de puntos. Método de Ibrahim

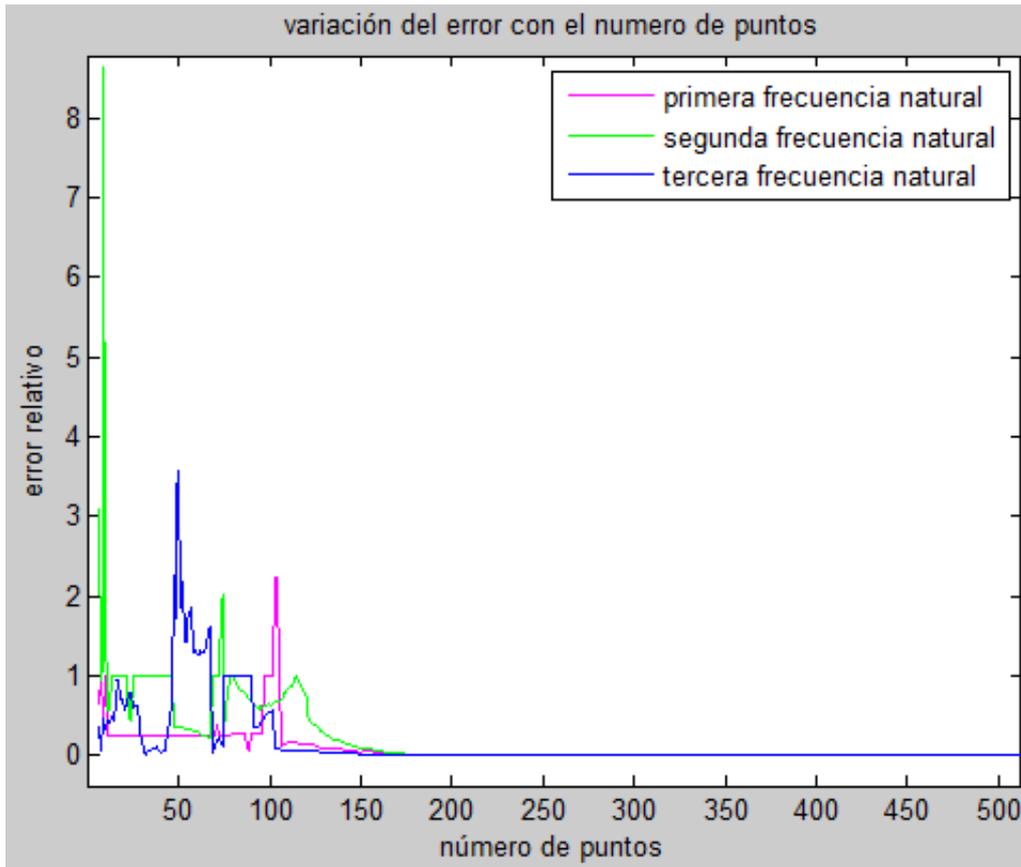
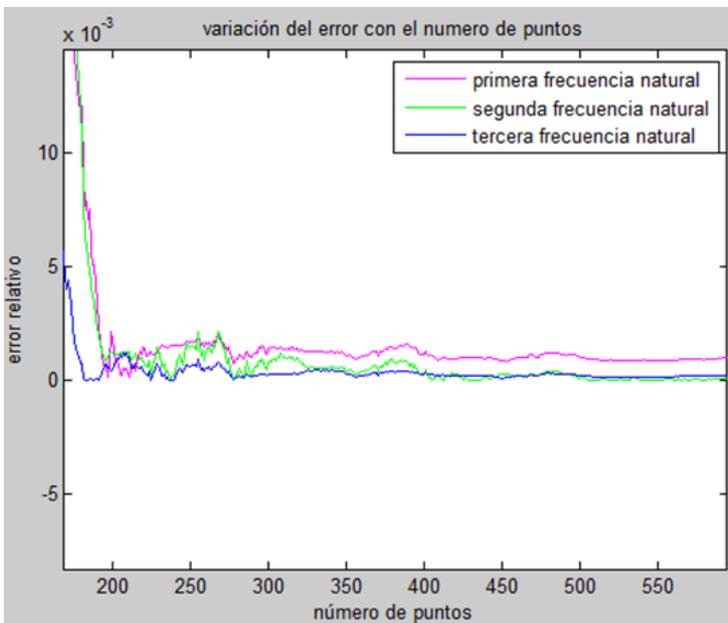


Figura 19: Variación del error en las frecuencias naturales con el número de puntos en tanto por uno. Método de Ibrahim



Cómo se ve en la gráfica ampliada, el error de las frecuencias naturales a partir unos 200 puntos es menor del 0.5%, error que puede venir simplemente del ruido que se ha introducido al sistema.

Figura 20: Variación del error en las frecuencias naturales con el número de puntos en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim

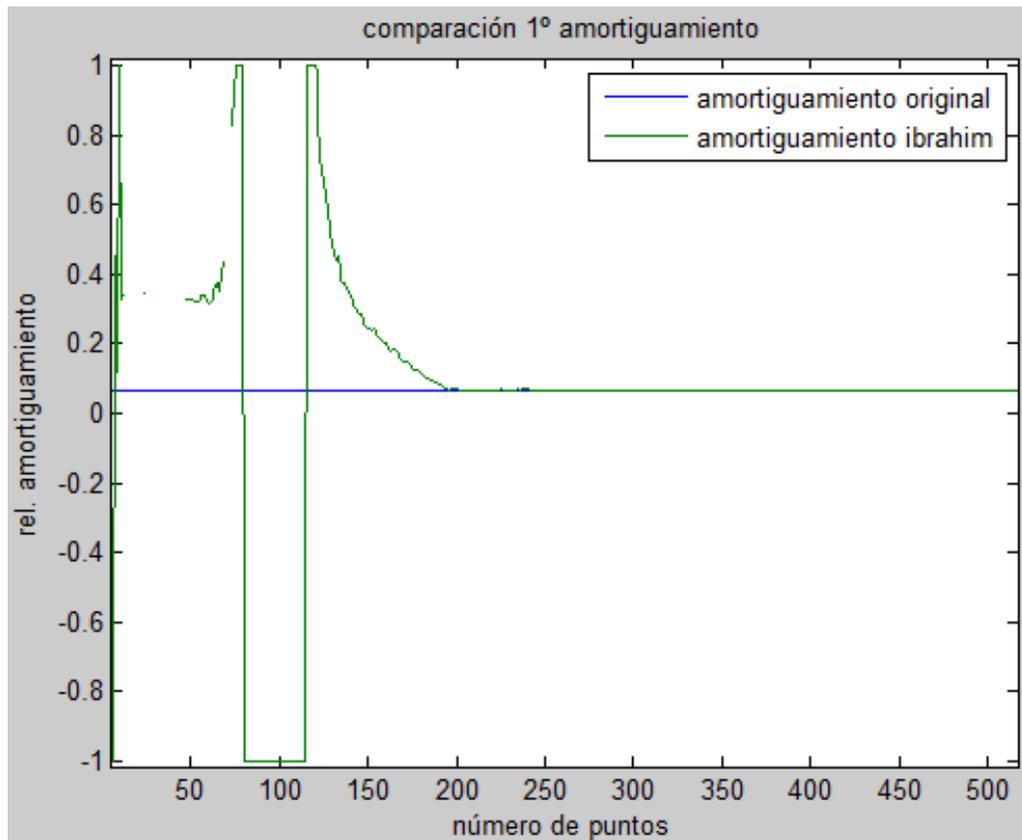


Figura 21: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim

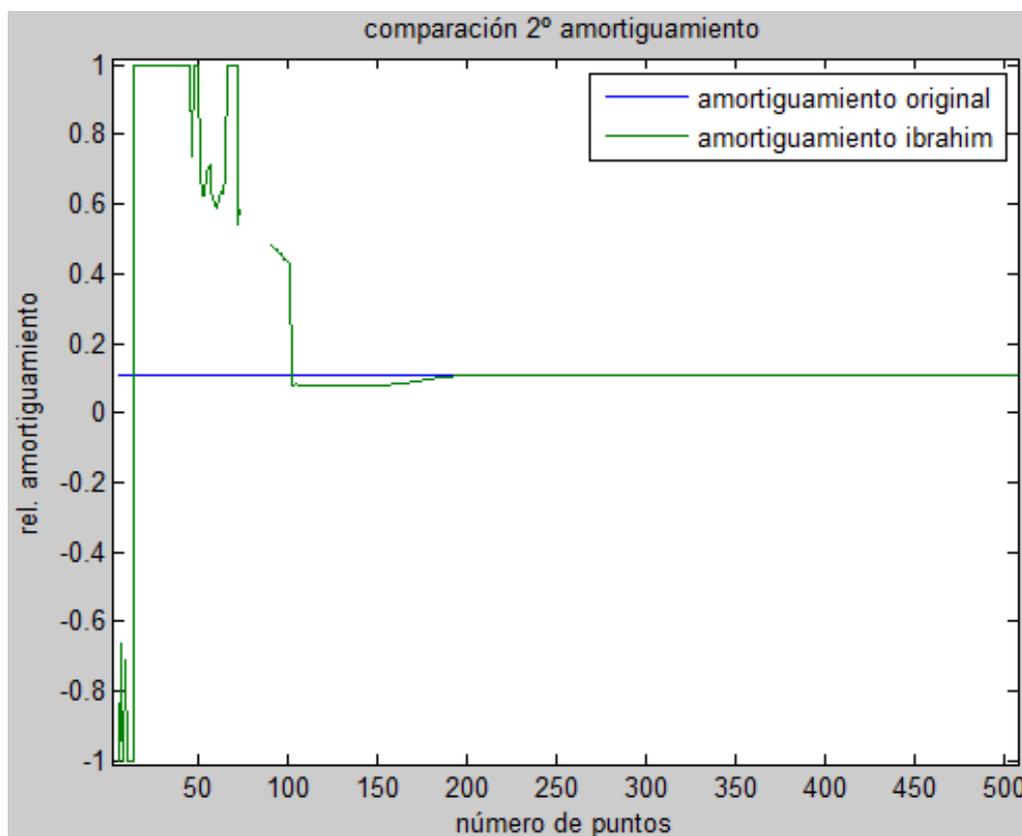


Figura 22: Cambios en segunda relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim

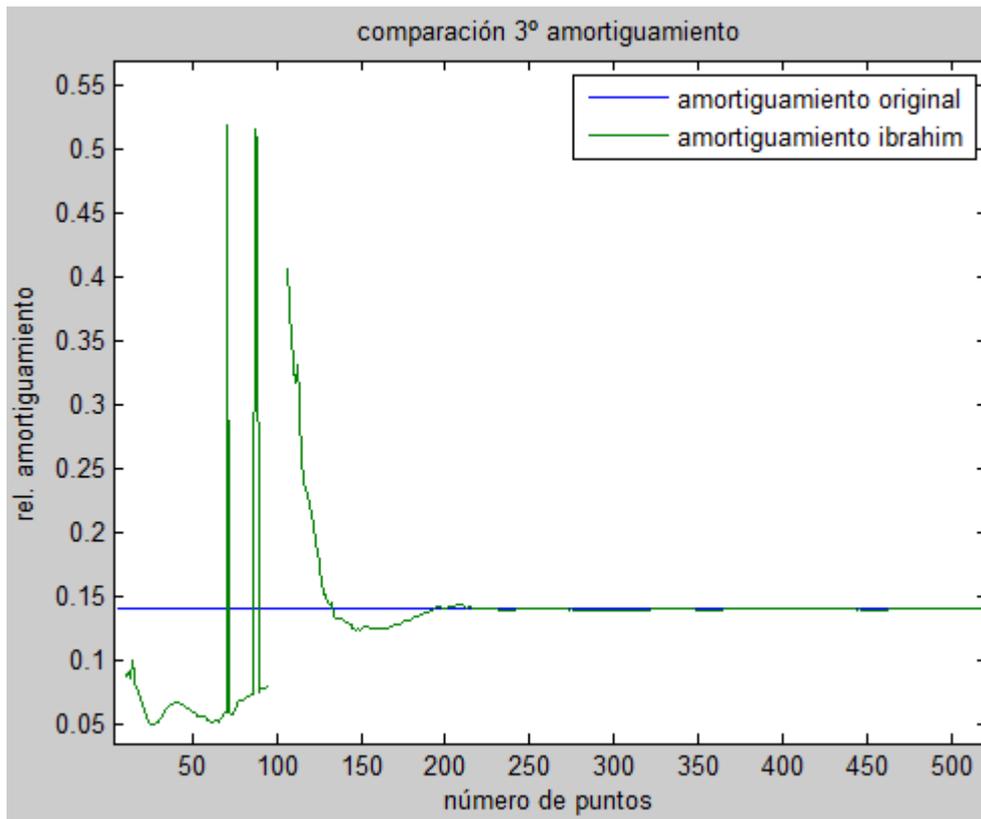


Figura 23: Cambios en segunda relación de amortiguamiento variando el número de puntos. Método de Ibrahim

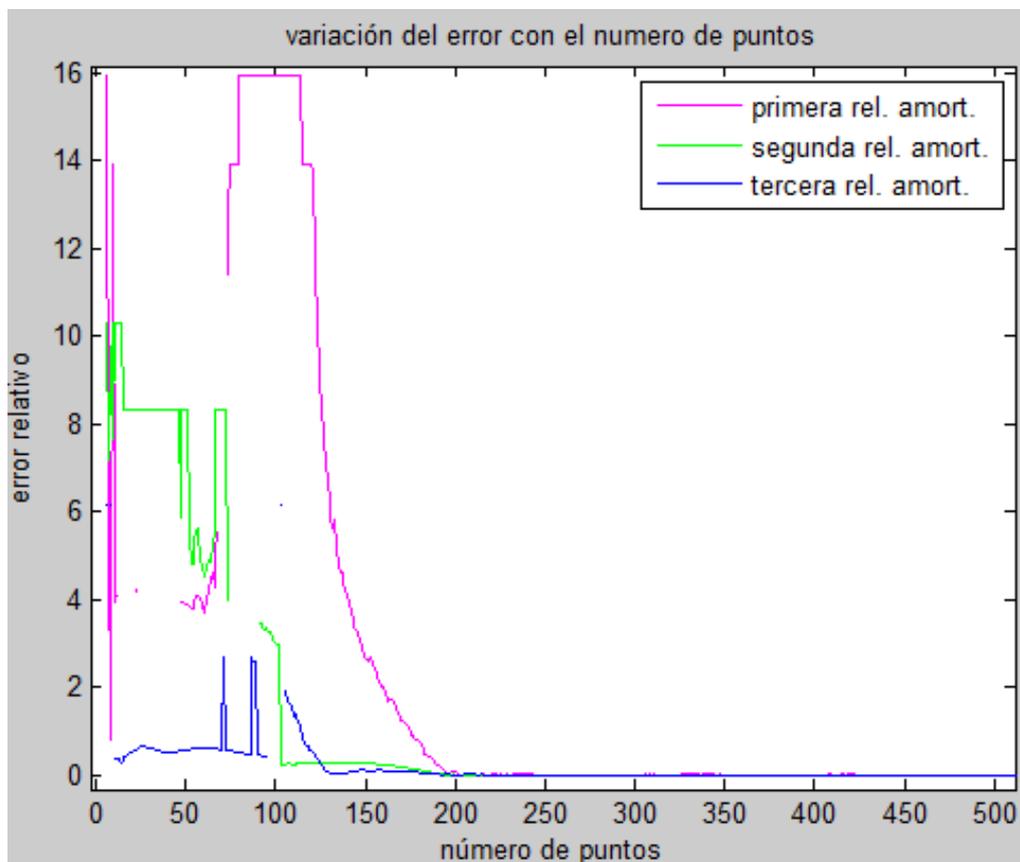


Figura 24: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con el número de puntos en tanto por uno. Método de Ibrahim

Con las relaciones de amortiguamiento el error se mantiene algo más, aunque los resultados son bastante buenos, a partir de los 250 puntos el error no supera el 6% que, aunque no es tan bajo como en las frecuencias naturales, es un muy buen resultado.

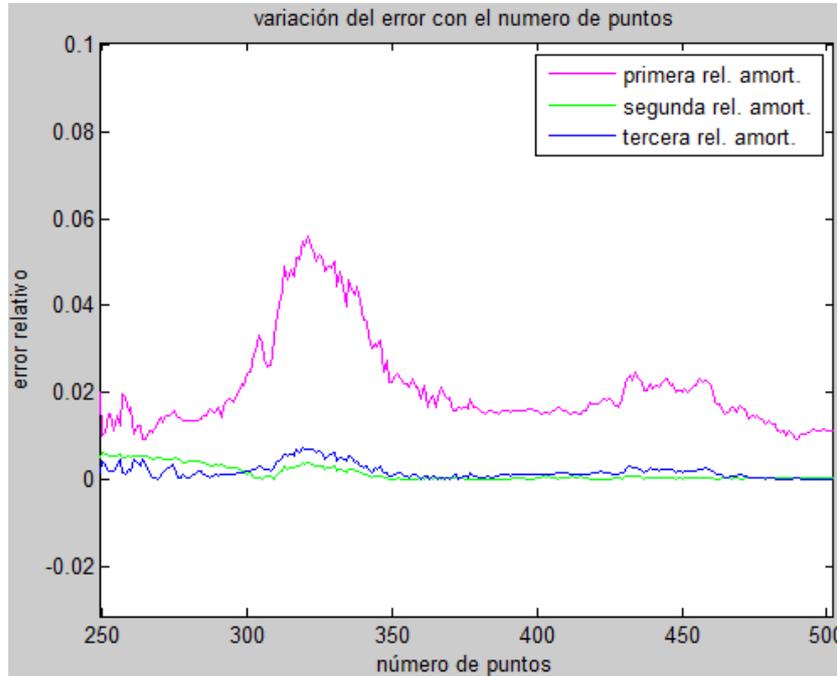


Figura 25: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con el número de puntos en tanto por uno ampliado. Método de Ibrahim

En ambos casos habría que destacar que, aunque se lleguen a resultados muy exactos, los errores iniciales son mucho mayores que en el caso de la variación del Δt manteniendo el número de puntos en 3940, los errores en el caso de Δt no superaban el 100% y aquí se tienen errores de hasta el 1600%.

3.3.3 Variación del ruido

Otra de las variaciones que se han hecho ha sido variar el ruido que estropea la respuesta obteniendo los siguientes resultados:

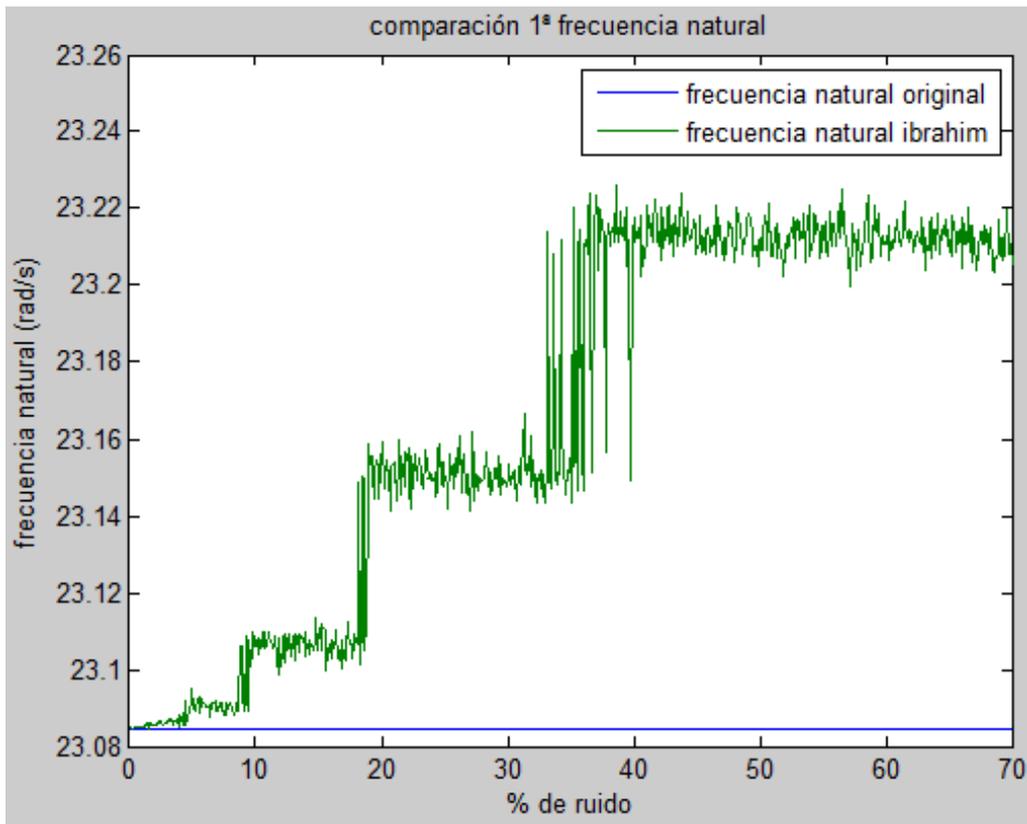


Figura 26: Cambios en la primera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

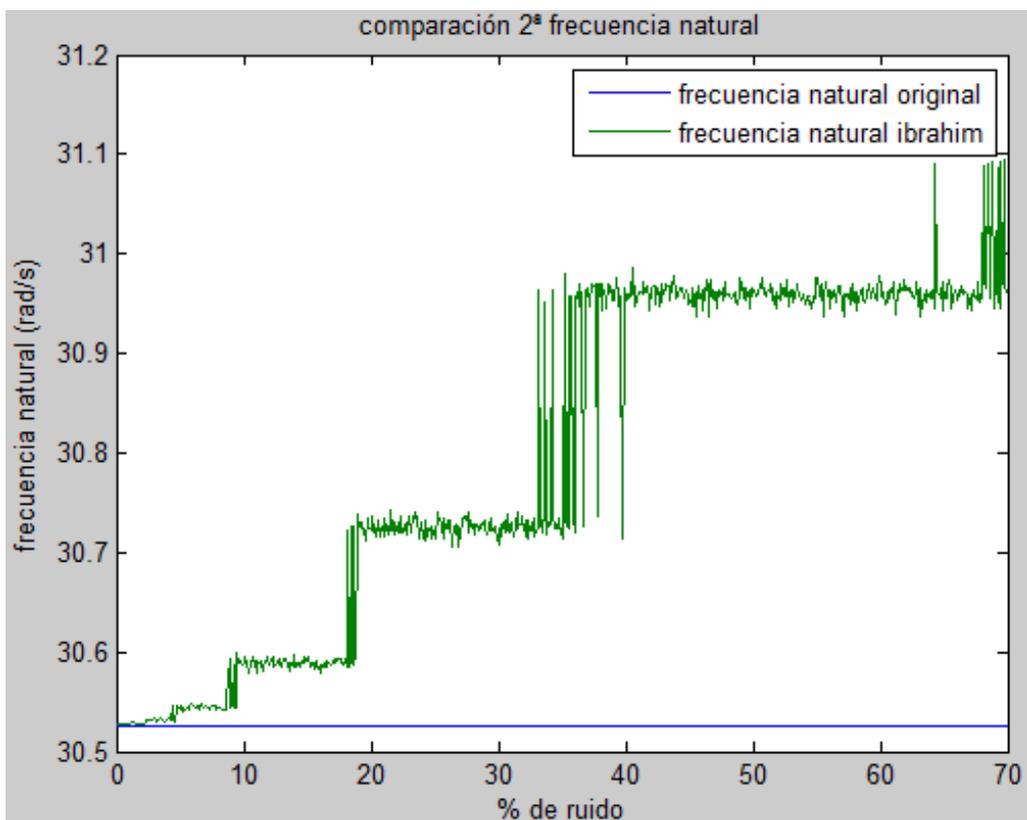


Figura 27: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

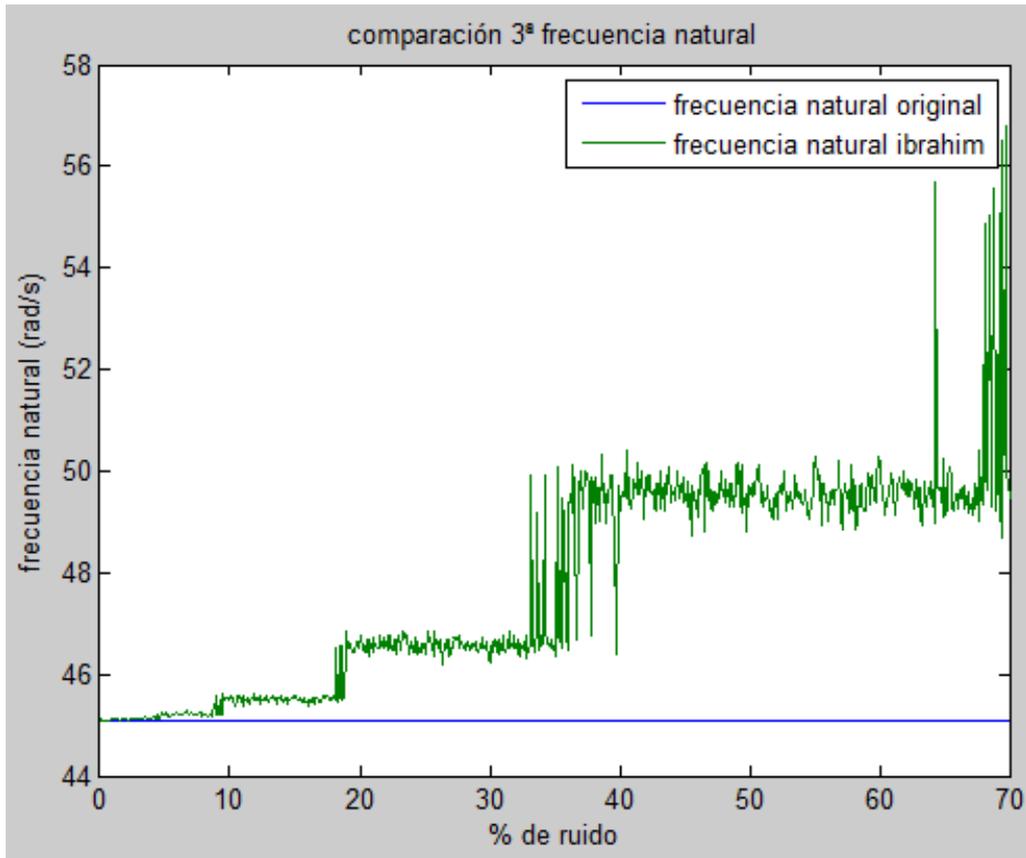


Figura 28: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

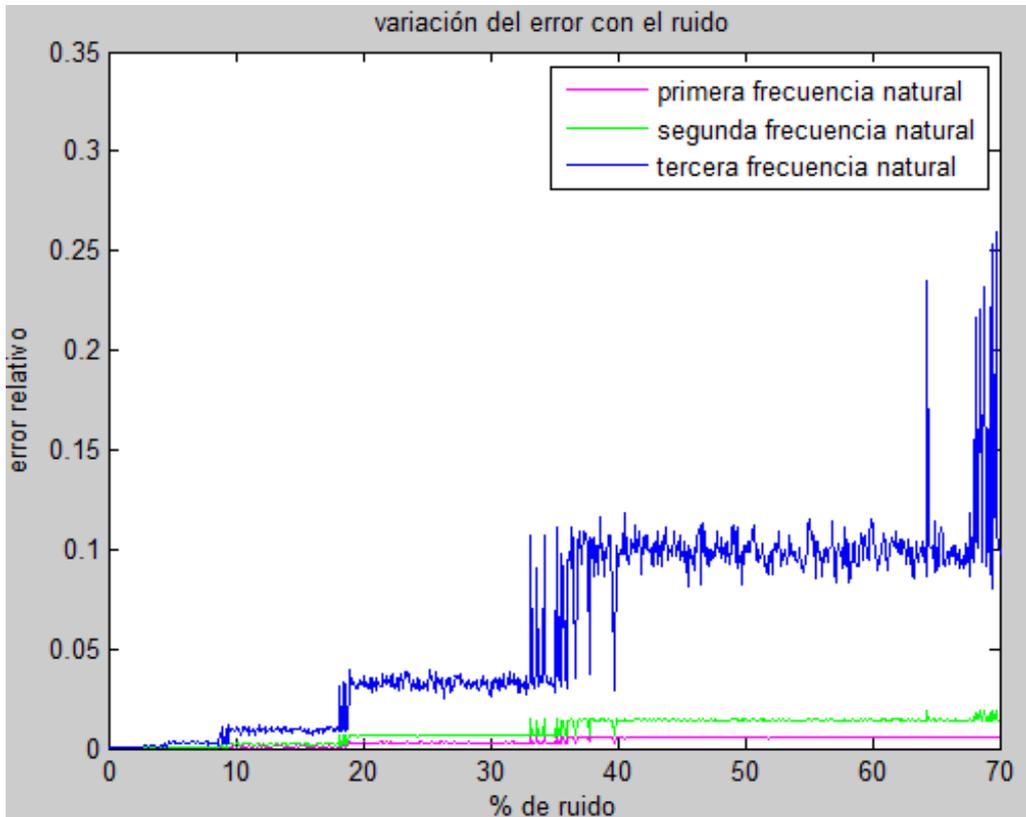


Figura 29: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

Lo que más llama la atención de variar el ruido es cómo afecta mucho más de nuevo a la tercera frecuencia

natural que a las otras dos, hasta el punto de que en esta primera llegamos a errores de hasta el 25% mientras que en las dos otras no pasamos del 5% aun así, se puede decir que los resultados obtenidos con un ruido de hasta el 70% son bastante buenos para el error que se está introduciendo.

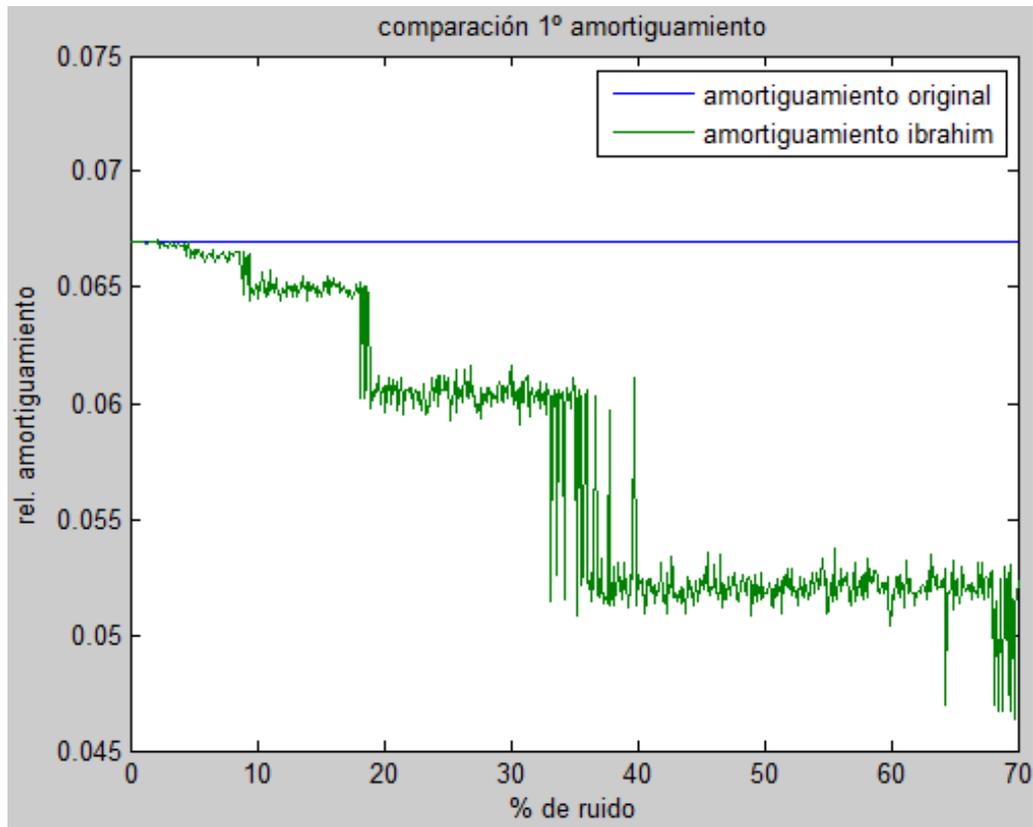


Figura 30: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

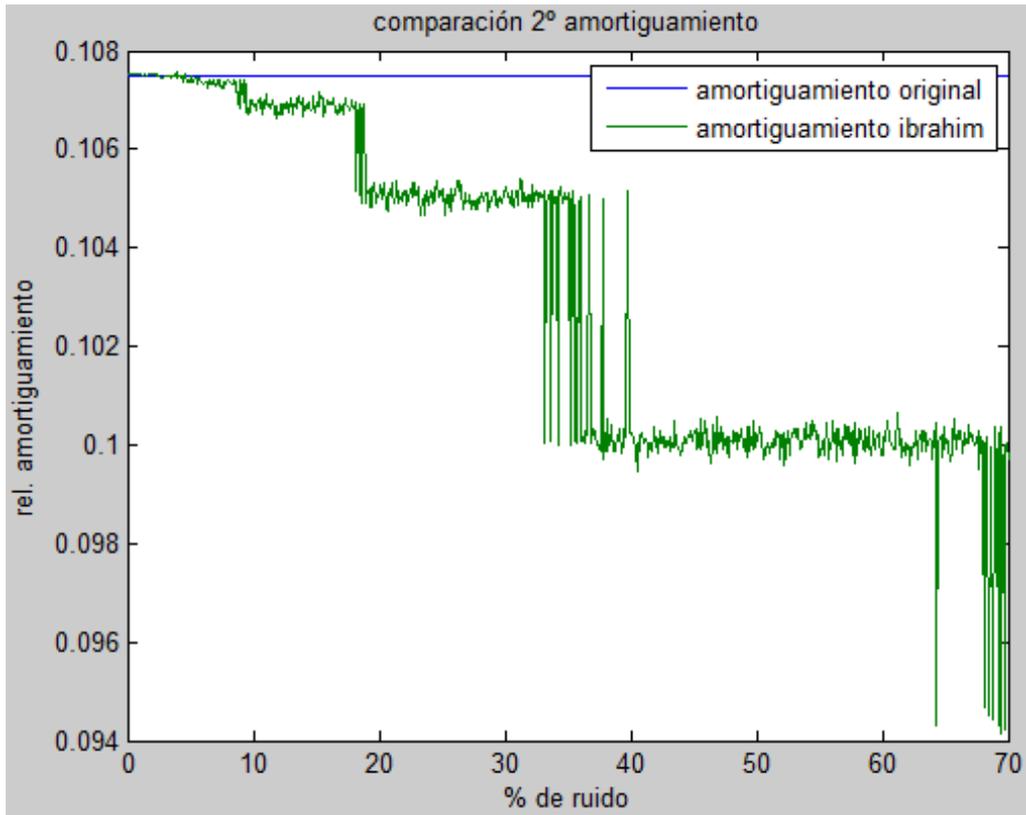


Figura 31: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

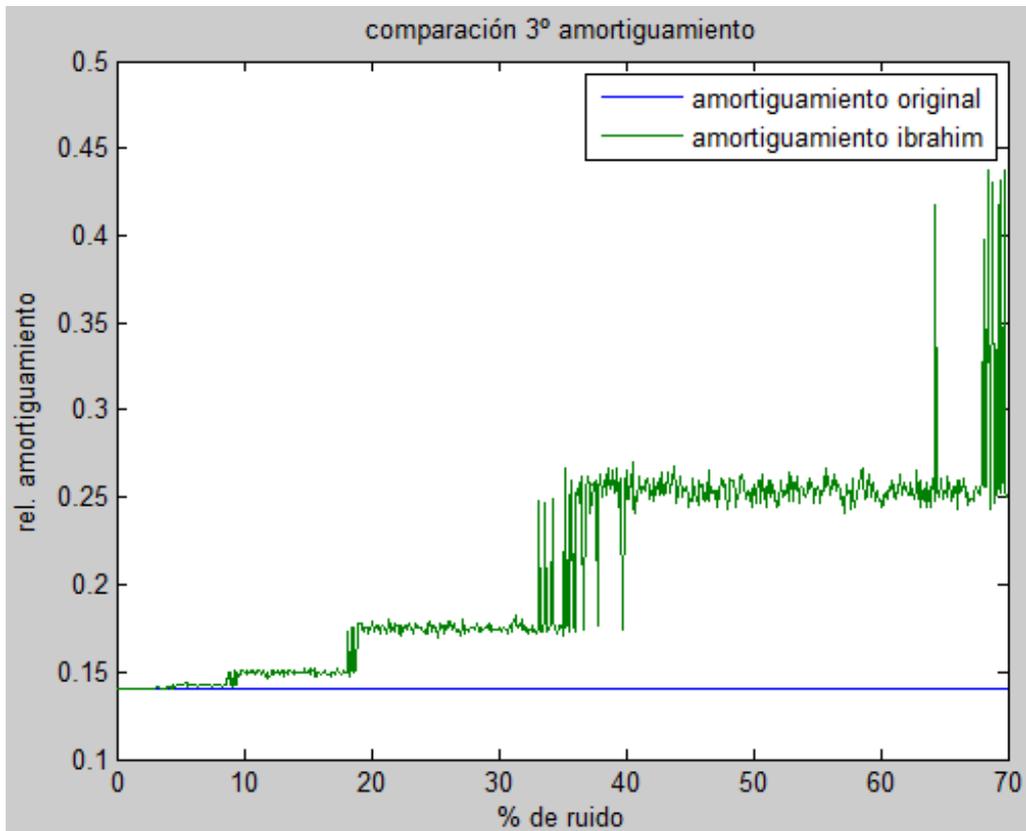


Figura 32: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

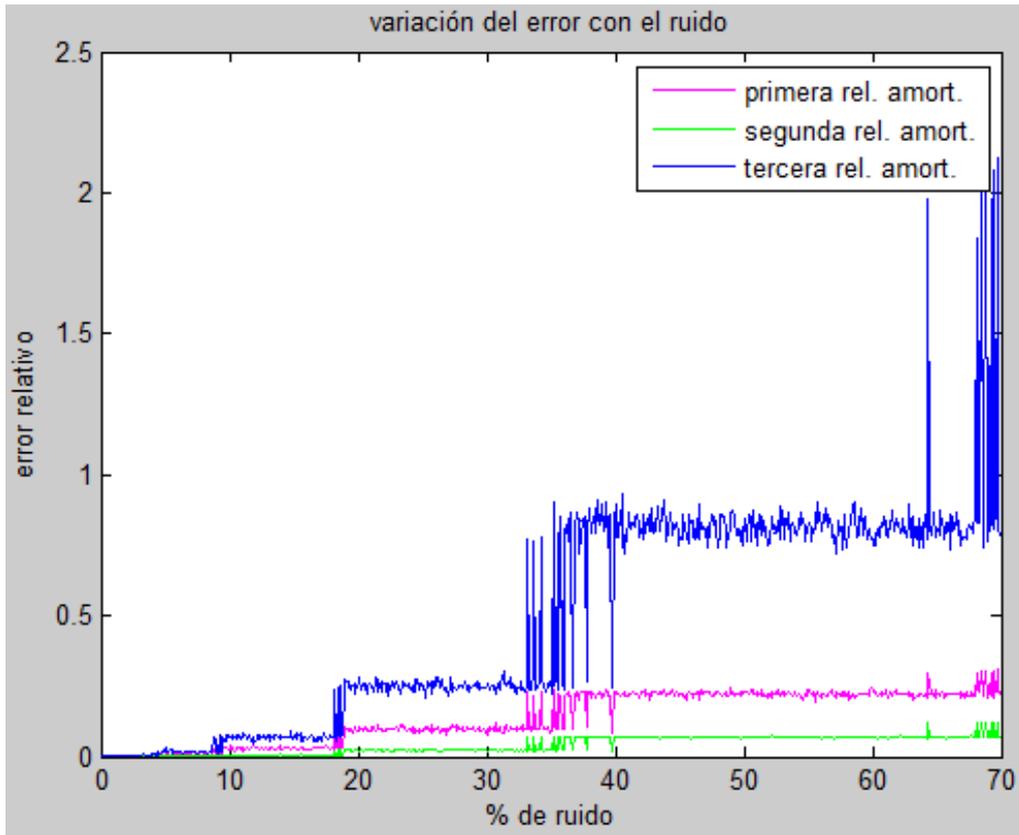


Figura 33: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método de Ibrahim

Vuelve a ocurrir que el error en términos de amortiguamiento es mucho mayor que cuando se habla de frecuencias naturales llegando a más del 200% en el caso de la tercera relación de amortiguamiento y quedándose por debajo del 50% en la primera y segunda, que sigue siendo un error enorme.

3.3.4 Variación del tiempo de integración

Se ha probado a cambiar el tiempo de integración del sistema original para obtener la respuesta manteniendo el ruido posteriormente introducido en un 5%, el Δt de 0.03 segundos y tomando los puntos de todo t . El tiempo de integración se ha ido variando hasta un máximo que hemos impuesto como:

$$T_m = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{f_{\text{máx}}}$$

Si llegamos a tiempos de integración mucho mayores nos arriesgamos a que se produzca aliasing.

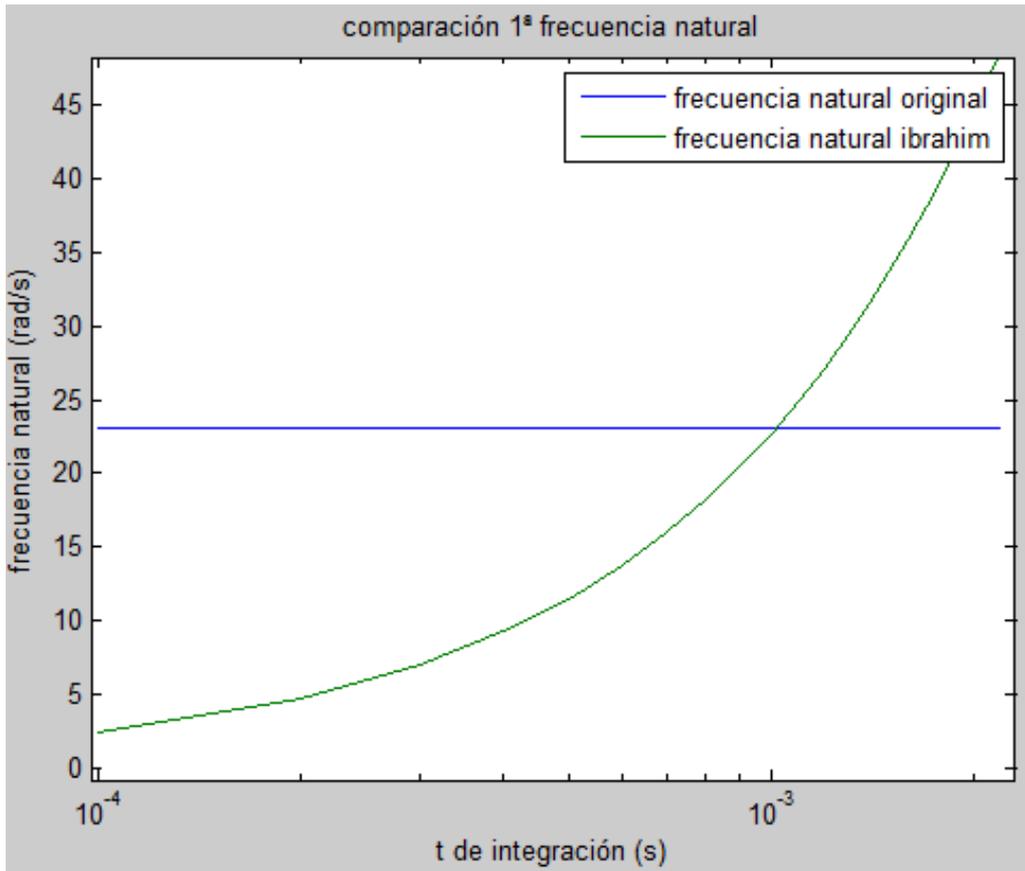


Figura 34: Cambios en la primera frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim

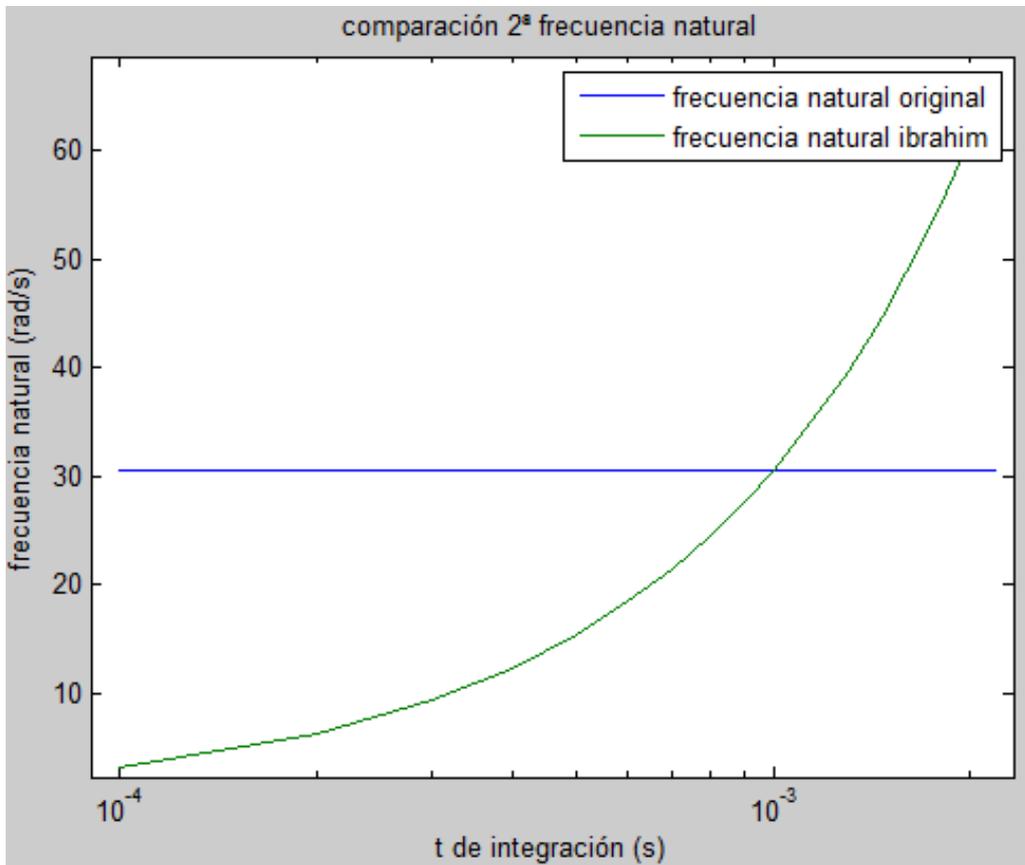


Figura 35: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim

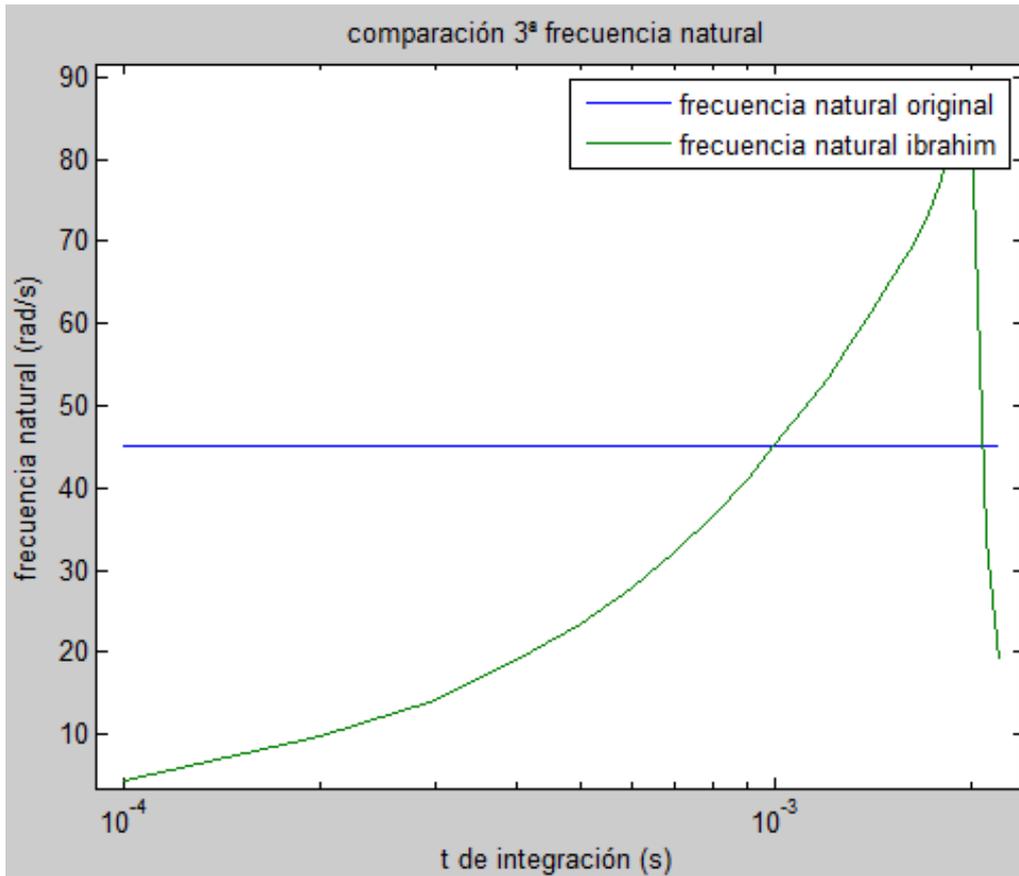


Figura 36: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el tiempo de integración. Método de Ibrahim

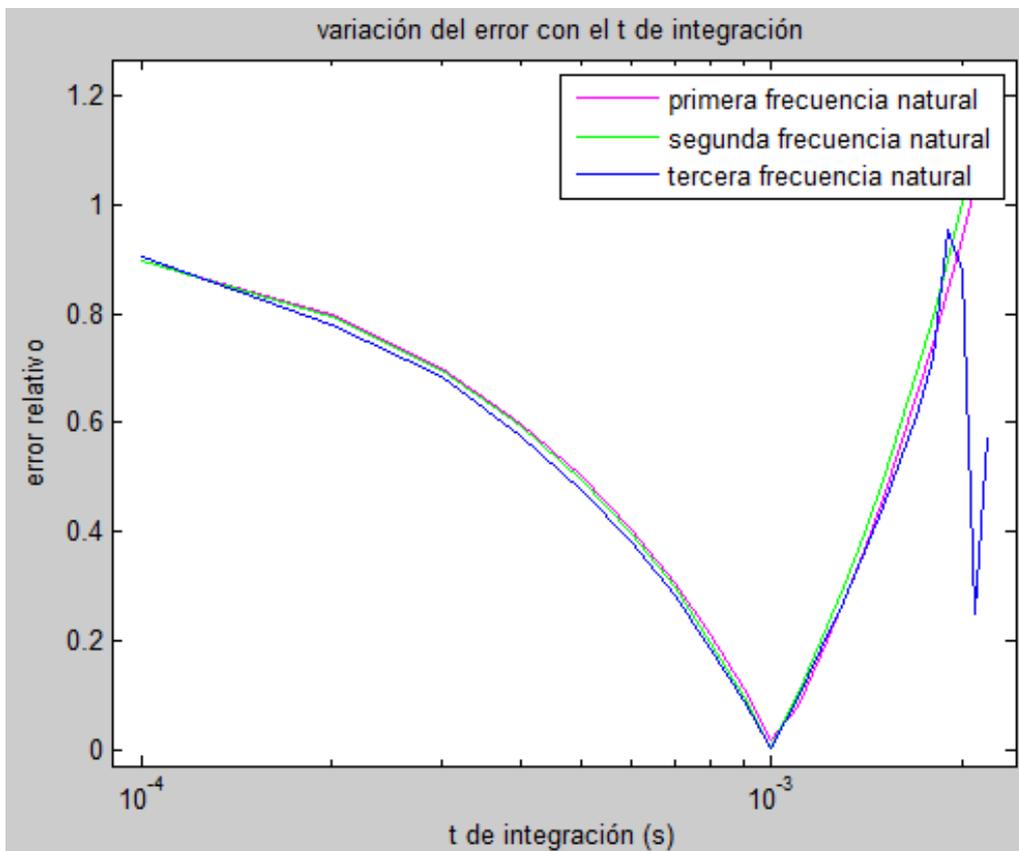


Figura 37: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el tiempo de integración. Método de Ibrahim

El tiempo de integración afecta muchísimo en la obtención de unos buenos resultados, con 10^{-3} segundos los resultados son óptimos y a medida que disminuimos o aumentamos el tiempo los resultados empeoran muchísimo y de la misma forma para las tres frecuencias naturales.

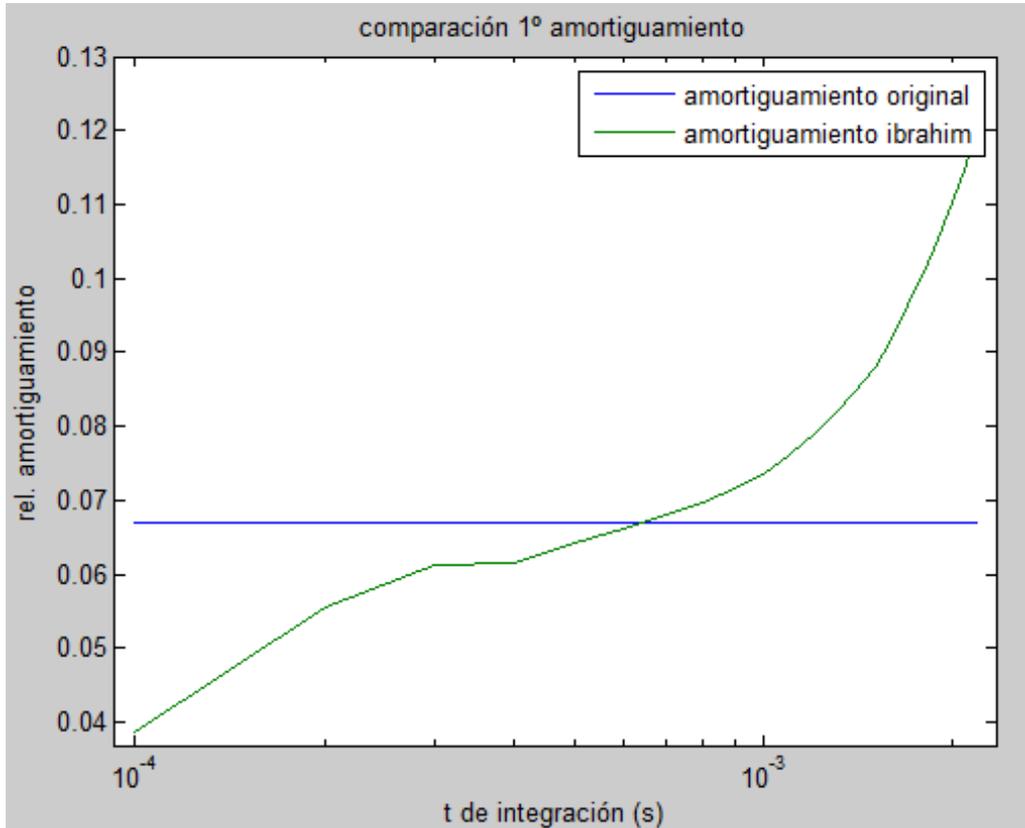


Figura 38: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM

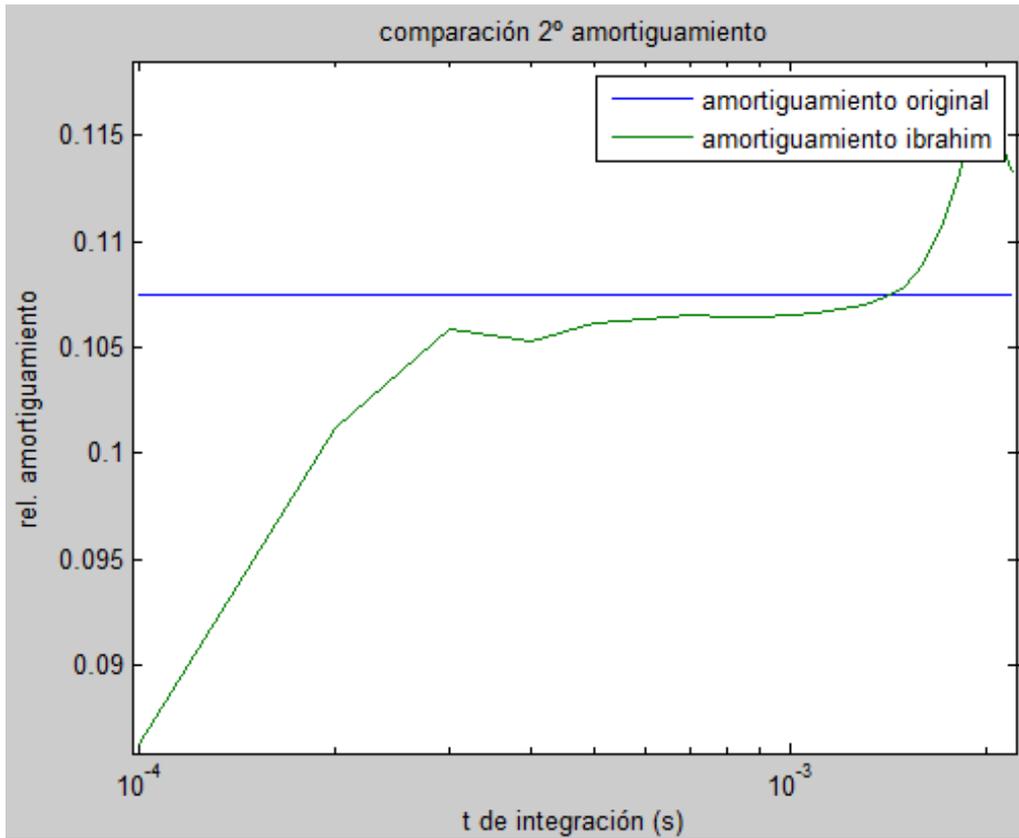


Figura 39: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM

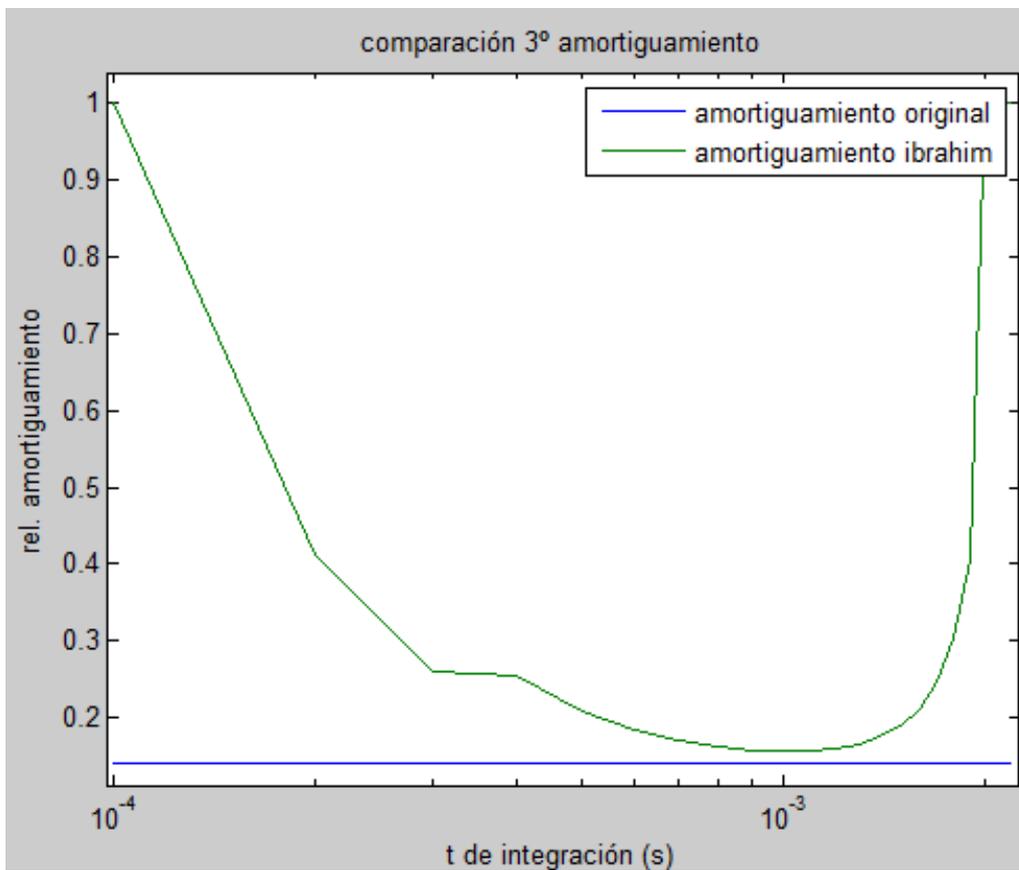


Figura 40: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método de

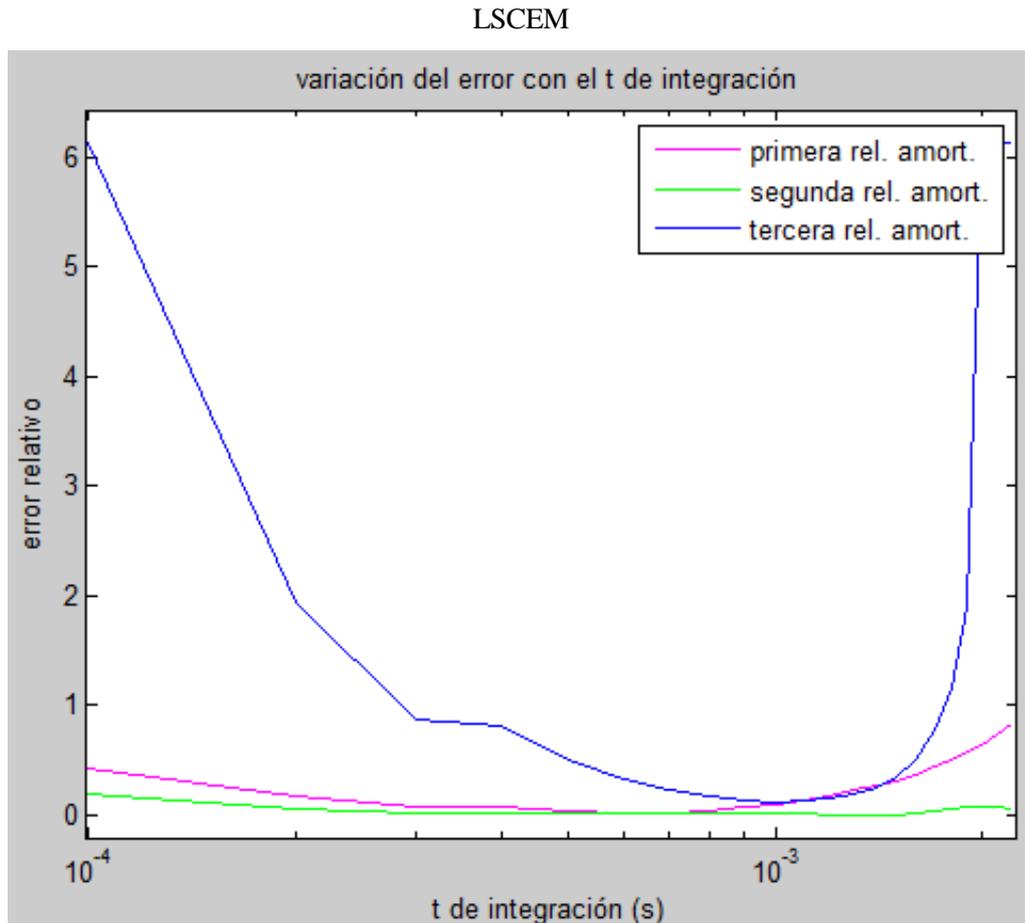


Figura 41: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el tiempo de integración. Método de Ibrahim

En las relaciones de amortiguamiento los resultados son del orden para la primera y segunda pareja de autovalores, pero los errores en la tercera se disparan superando errores del 100%. Al igual que con las frecuencias el punto óptimo está en 10^{-3} .

3.3.5 Elección de puntos

Como se ha comentado al principio, el método se puede plantear también en 2N puntos y funcionará tan bien como se haya sido capaz de elegir los puntos.

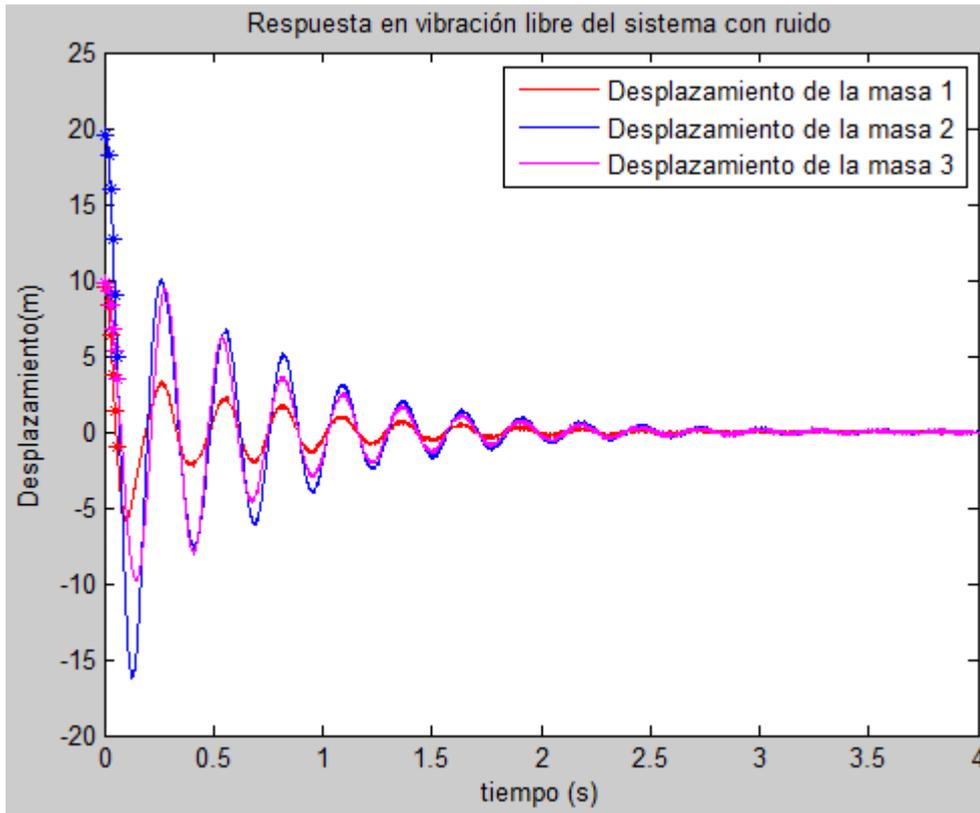


Figura 42: Toma de puntos primera

Si se toman los puntos como los elegidos en la figura anterior obviamente los resultados van a ser pésimos. Comparando solo autovalores:

Autovalores	$84.71 \pm 104.72i$	$-3.35 \pm 35.03i$	$-8.62 \pm 32.69i$
--------------------	---------------------	--------------------	--------------------

Tabla 5: Autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos

Error Autovalores	109.07	56.17	65.38
--------------------------	--------	-------	-------

Tabla 6: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos

De hecho, los resultados son tan malos que, al dar Matlab los autovalores desordenados, no se es capaz ni de saber qué autovalor corresponde a cuál de los calculados.

En cambio, si se va cogiendo los puntos más espaciados y que abarquen una onda entera se puede ir mejorando, aunque nunca se llegará a una respuesta tan buena como abarcando todo t con tan solo 6 puntos.

Se hace una segunda toma de puntos:

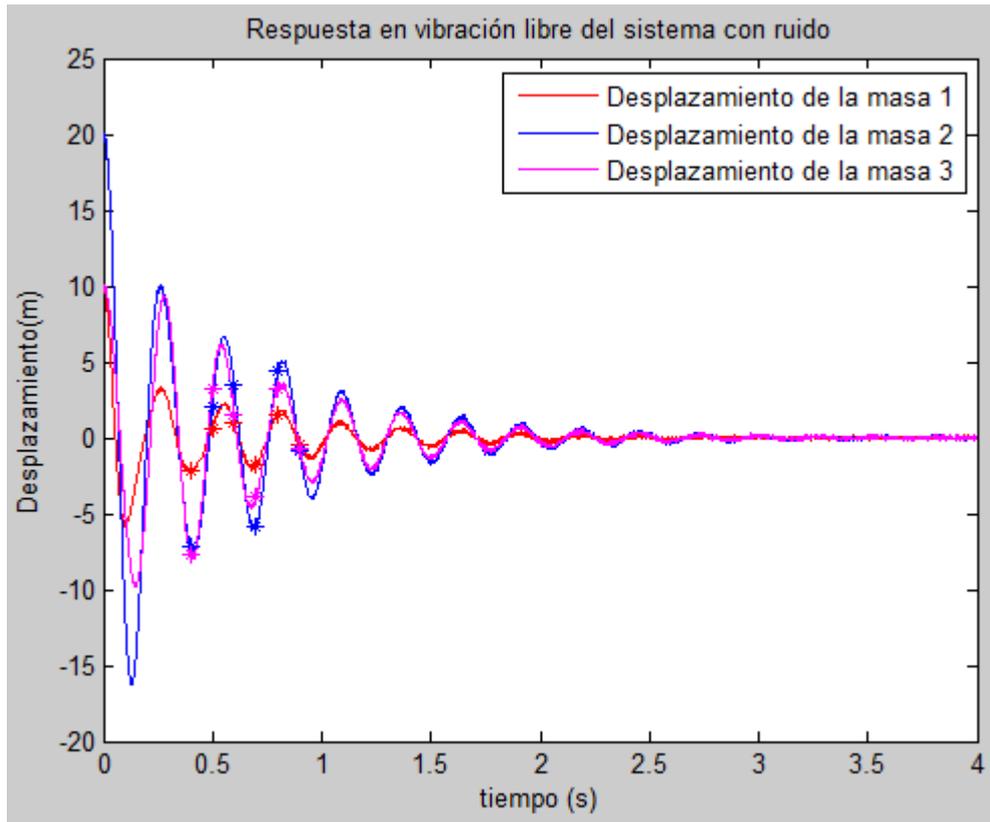


Figura 43: Toma de puntos segunda

Autovalores	$-1.53 \pm 22.75i$	$21.67 \pm 12.67i$	$-6.48 \pm 29.97i$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Tabla 7: Autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos

Error Autovalores	0.28	30.56	14.67
--------------------------	------	-------	-------

Tabla 8: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos

Como se ve al coger una onda entera el resultado es mucho mejor sobre todo para el primer y tercer autovalor, pero esto puede seguir variando, si se cogen otros puntos también puede ser que salga mejor el segundo que los otros dos.

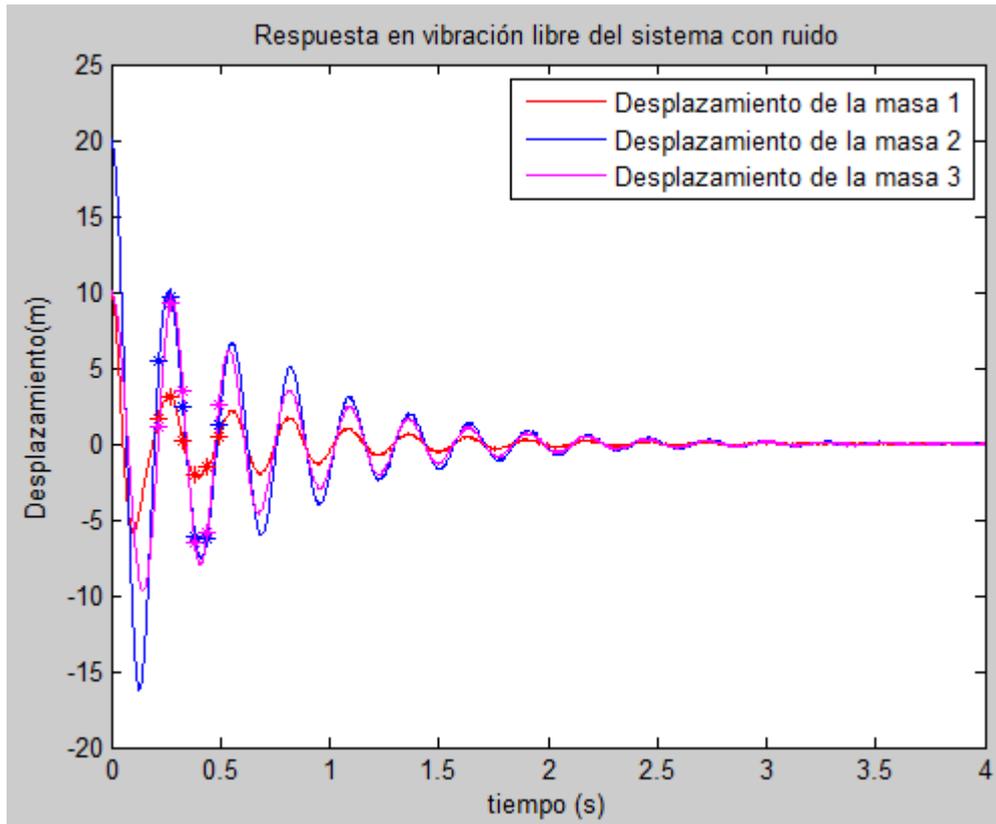


Figura 44: Toma de puntos tercera

Autovalores	$-1.91 \pm 23.18i$	$-3.50 \pm 30.26i$	$-7.44 \pm 48.41i$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Tabla 9: Autovalores comparando por parejas de complejos tercera toma de puntos

Error Autovalores	0.39	0.23	3.93
--------------------------	------	------	------

Tabla 10: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos

En este caso, cómo se ve, al coger justo una onda entera con los puntos bien espaciados en ella los resultados son bastante buenos, ya que se tiene información de cómo es un periodo entero.

3.4 Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja

Al igual que con el método de Ibrahim éste se puede plantear en su forma reducida en todo t, para comprobar cómo funciona el método se va a ver qué resultados da para todo t.

Los autovalores resultantes son los siguientes, tomando de incremento 0.05s. Como se ha dicho antes este método no calcula autovectores.

Autovalores	$-1.34 \pm 22.98i$	$-3.91 \pm 30.02i$	$-7.41 \pm 45.09i$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Tabla 11: Autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s

Error Autovalores	0.21	0.71	1.18
--------------------------	------	------	------

Tabla 12: Error absoluto al calcular los autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s. Realizando el mismo estudio con las mismas condiciones, pero teniendo en cuenta cada respuesta de las tres masas por separado, es decir, nuestro sistema

$$M * \beta = -V$$

está compuesto de

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} * \beta = - \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

si se calculan por separado cada $M_i * \beta = -V_i$ se obtienen los siguientes autovalores de cada respuesta:

Autovalores			
Primera respuesta	$-1.31 \pm 22.86i$	$-5.72 \pm 29.59i$	$-6.01 \pm 45.81i$
Segunda respuesta	$-1.31 \pm 22.91i$	$-4.49 \pm 30.35i$	$-9.85 \pm 44.96i$
Tercera respuesta	$-1.39 \pm 22.91i$	$-3.72 \pm 30.38i$	No salen parejas

Tabla 13: Autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s calculando cada respuesta por separado

Error autovalores			
Primera respuesta	0.29	2.56	1.21
Segunda respuesta	0.26	1.21	3.55
Tercera respuesta	0.19	0.44	No salen parejas

Tabla 14: Error absoluto autovalores mediante el método de LSCEM en todo t con Δt de 0.05s calculando cada respuesta por separado

Los errores al calcular autovalores tratando cada respuesta por separado son algo mayores que si se hace con el conjunto, como era de esperar, habría que destacar que en el caso de la tercera respuesta los errores en los dos primeros autovalores son menores, pero con el tercero son tan grandes que en el tercer autovalor no llega ni a salir una pareja de autovalores conjugados, una vez mas se ve que el error en el tercer autovalor es bastante mayor.

3.4.1 Variación del Δt

Se va a comprobar cómo afecta el Δt tomado en los cálculos de los parámetros dinámicos evaluando el método en todo t

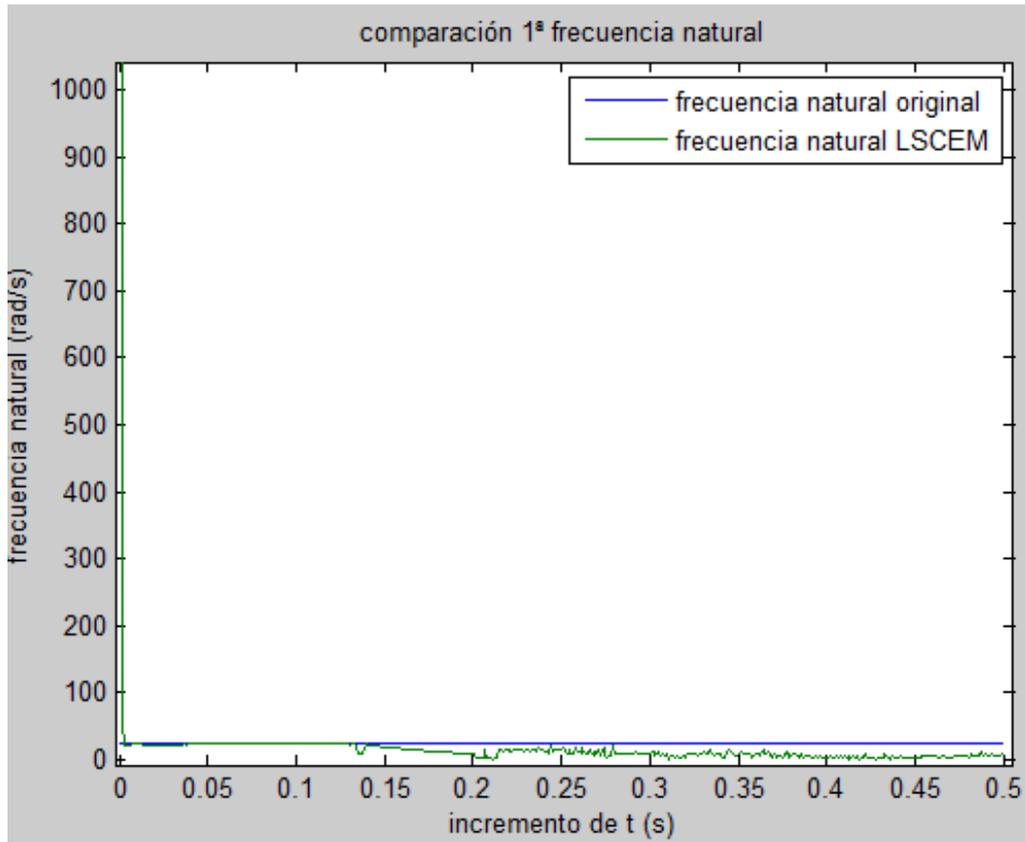


Figura 45: Cambios en la primera frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM

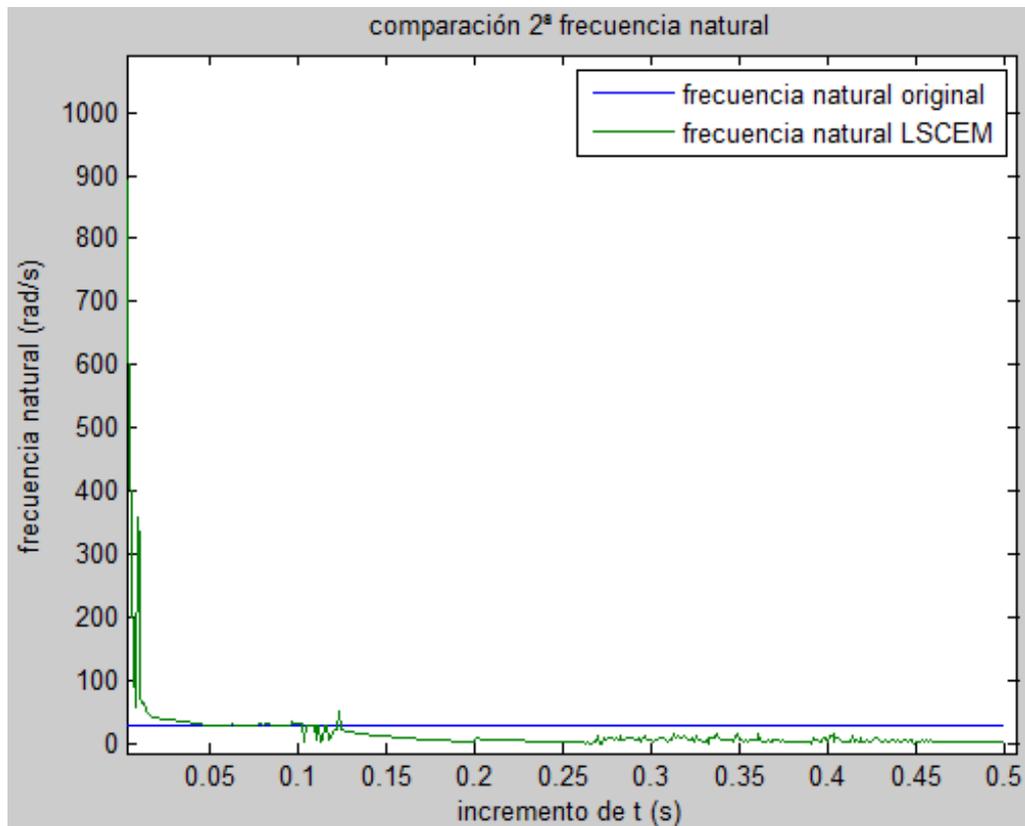


Figura 46: Cambios en la segunda frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM

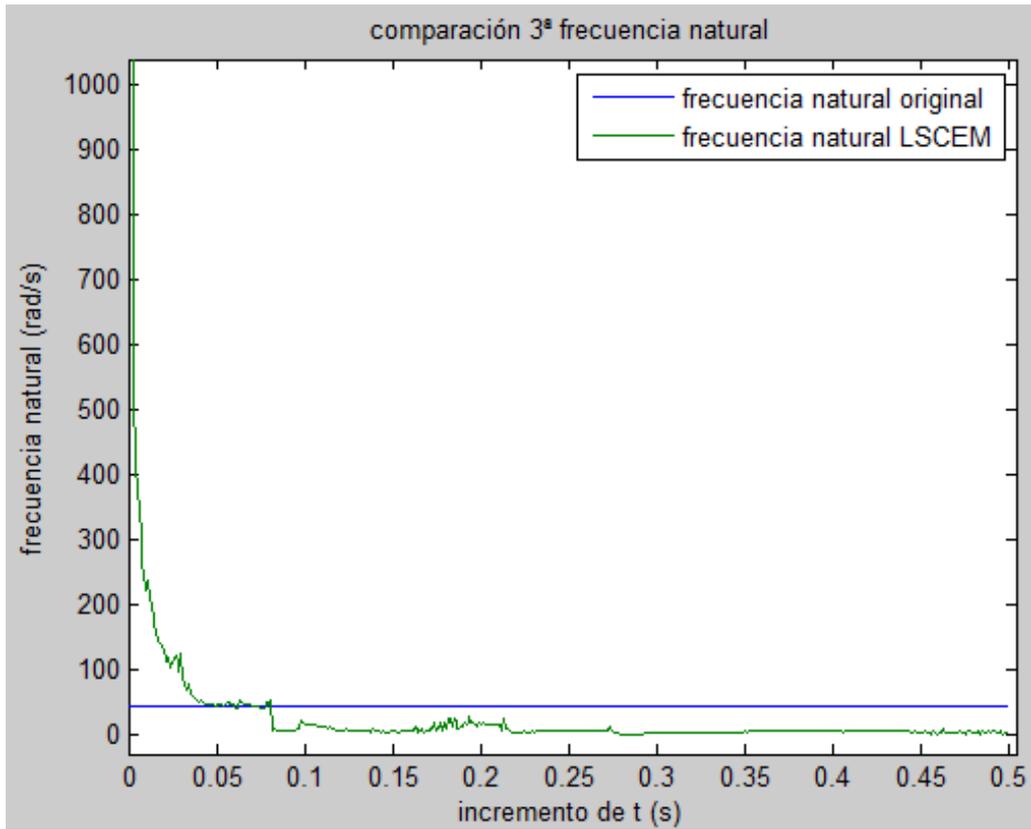


Figura 47: Cambios en la tercera frecuencia natural variando Δt . Método de LSCEM

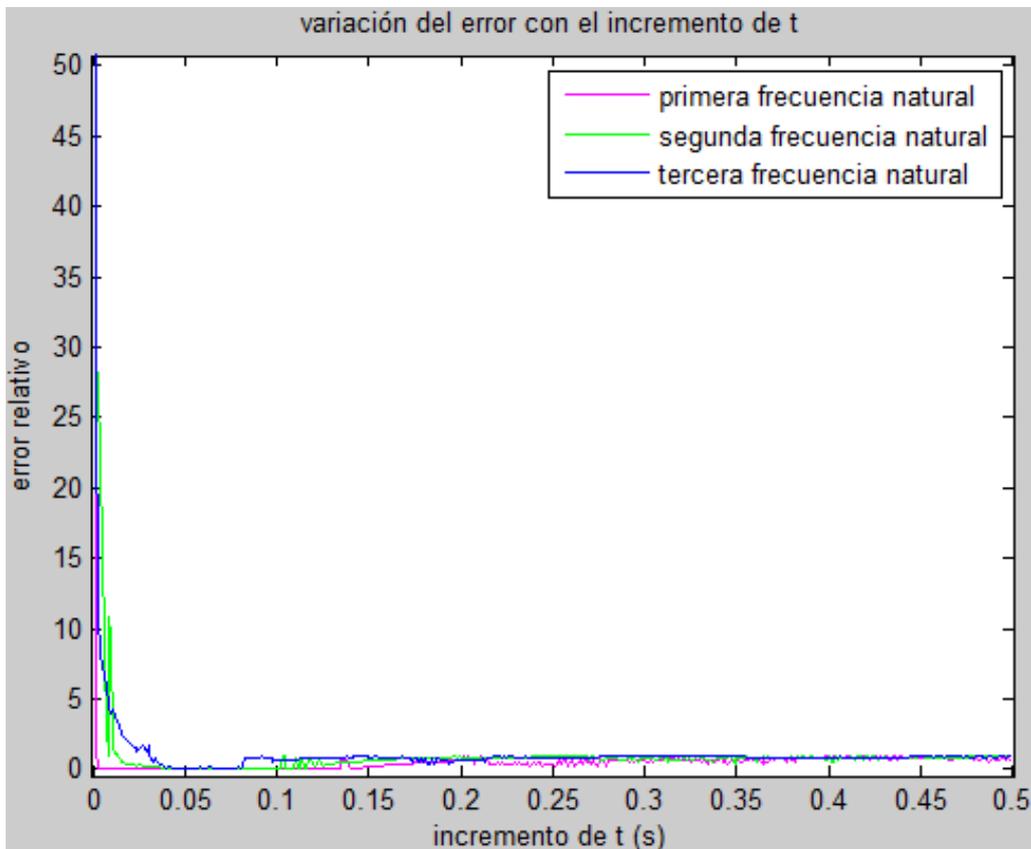


Figura 48: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno. Método de LSCEM

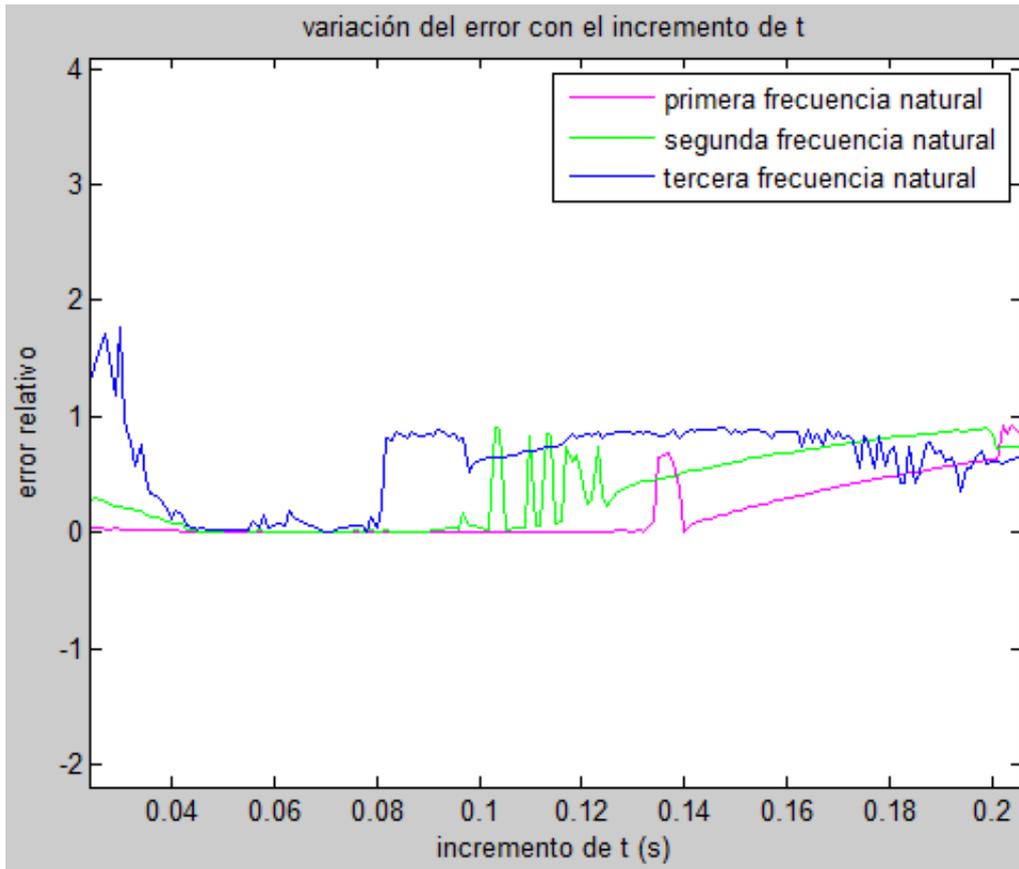


Figura 49: Variación del error en las frecuencias naturales con Δt en tanto por uno ampliado. Método de LSCEM

Se puede ver, sobre todo en la figura con los errores ampliados, que las frecuencias se asemejan bastante a las reales cuando Δt va de 0.05 hasta 0.07 a partir de entonces van colapsando una a una las frecuencias empezando por la tercera, al igual que ocurría con el método de Ibrahim. Este método tiene un intervalo de funcionamiento del Δt muy pequeño ya que rápidamente el error aumenta llegando a ser casi del 100%.

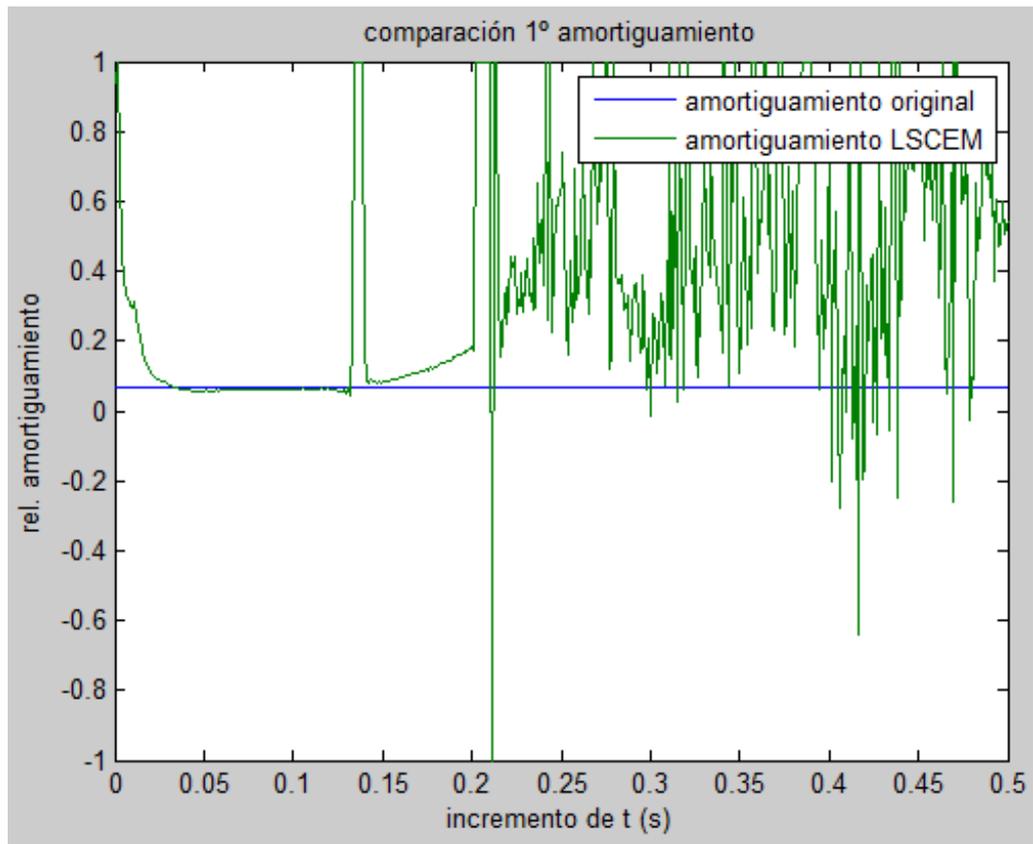


Figura 50: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCEM

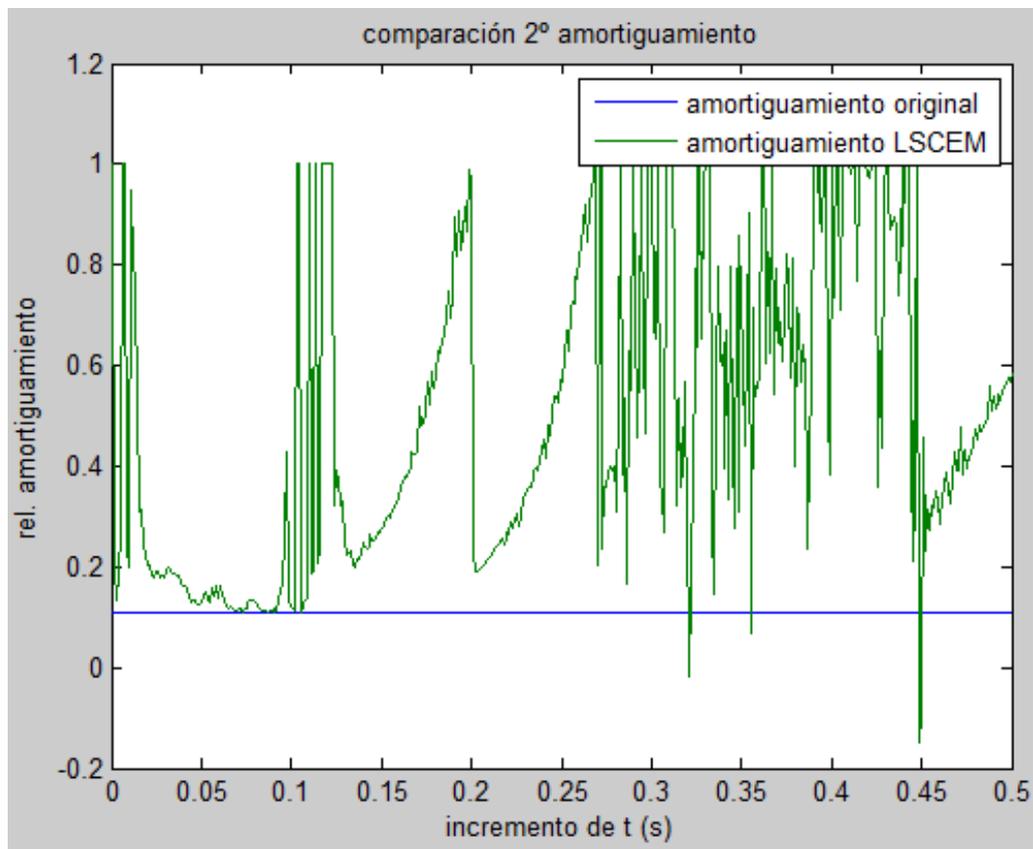


Figura 51: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCEM

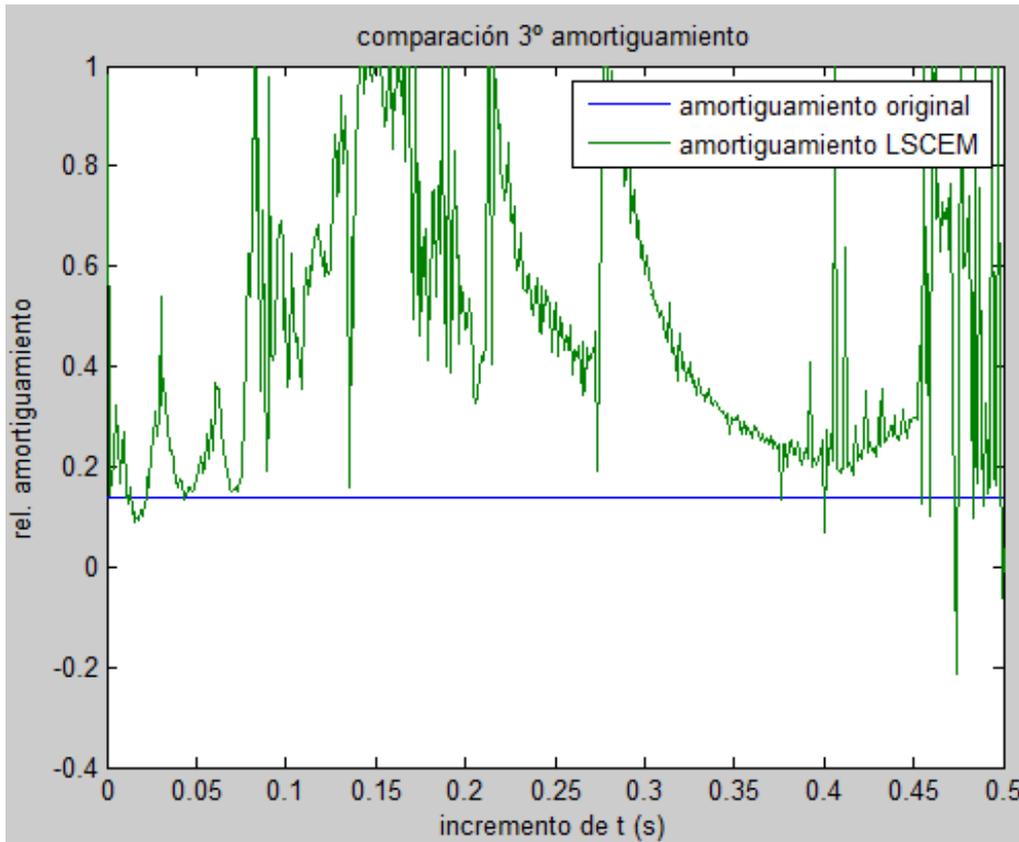


Figura 52: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando Δt . Método de LSCM

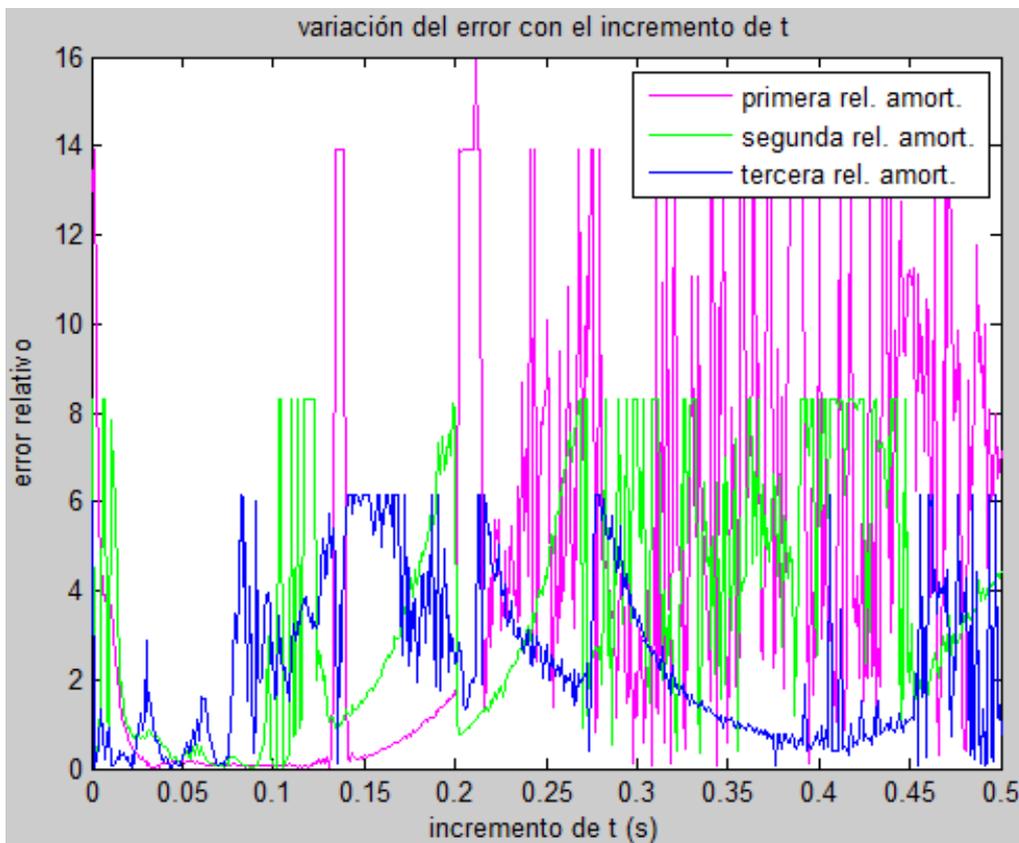


Figura 53: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento con Δt en tanto por uno. Método de LSCM

El error en término de relaciones de amortiguamiento es mucho mayor que con las frecuencias naturales, esto es porque si se ven los autovalores calculados, lo que va empeorando más es la parte imaginaria, que en el cálculo de frecuencias naturales se suaviza por el efecto de la parte real, pero aquí afecta más la parte imaginaria que la real. Como se ve los resultados obtenidos esta vez son malísimos, no se puede siquiera identificar un tramo donde se diga que funciona más o menos bien.

3.4.2 Variación del ruido

Se ha ido variando el ruido hasta un 70% tomando como Δt 0.05 segundos los resultados obtenidos son los siguientes:

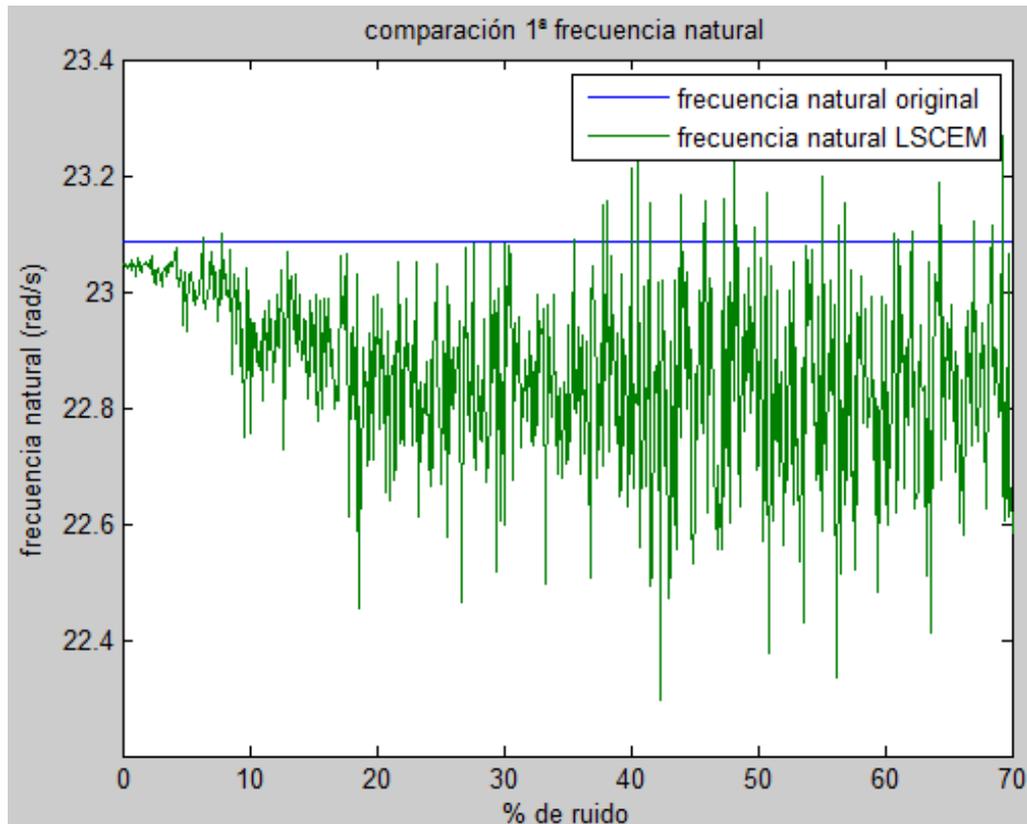


Figura 54: Cambios en la primera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM

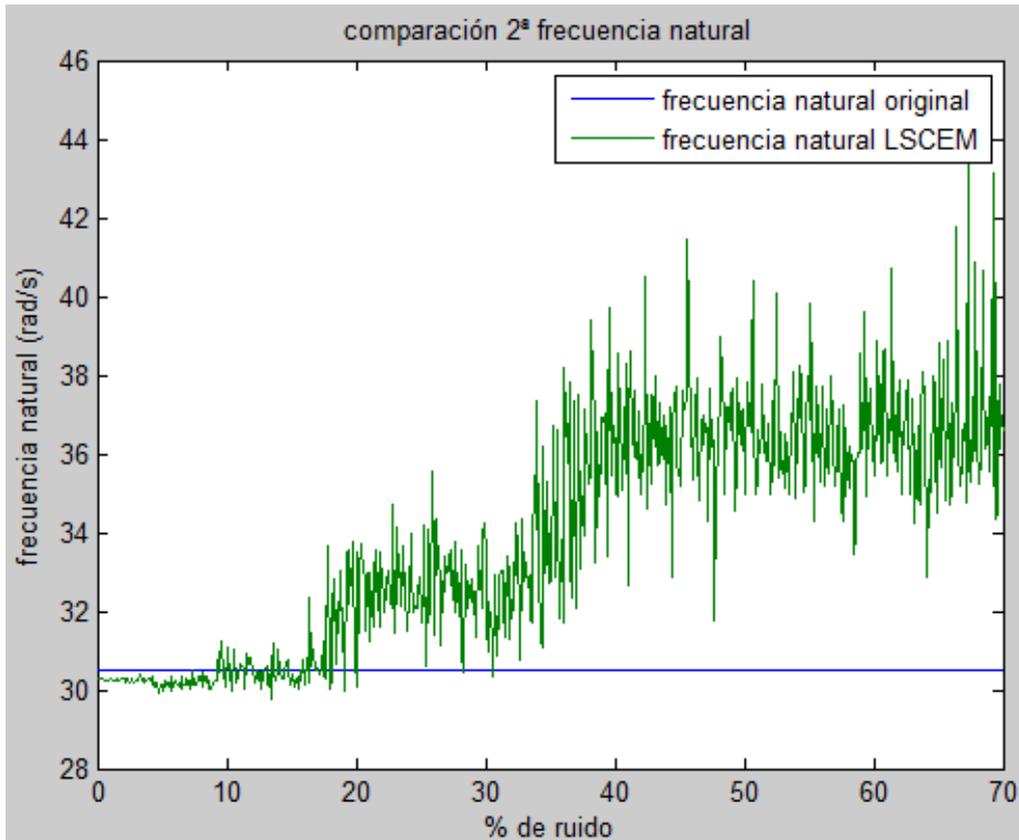


Figura 55: Cambios en la segunda frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM

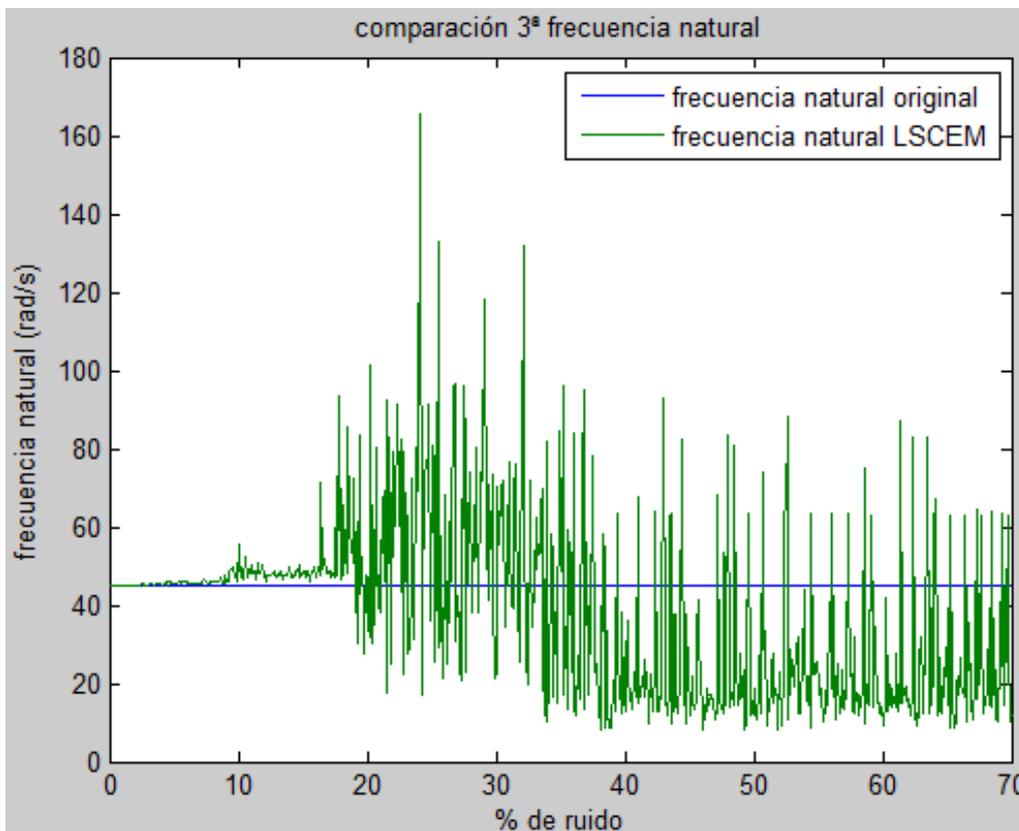


Figura 56: Cambios en la tercera frecuencia natural variando el porcentaje de ruido. Método de LSCEM

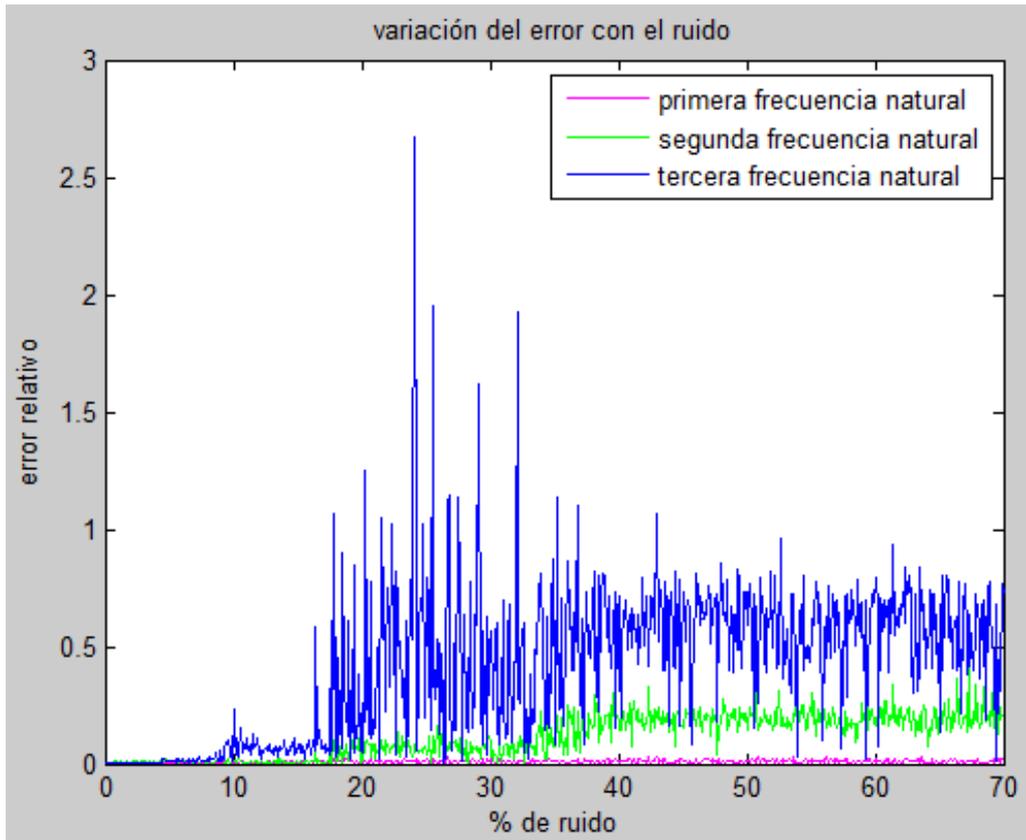


Figura 57: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método LSCEM

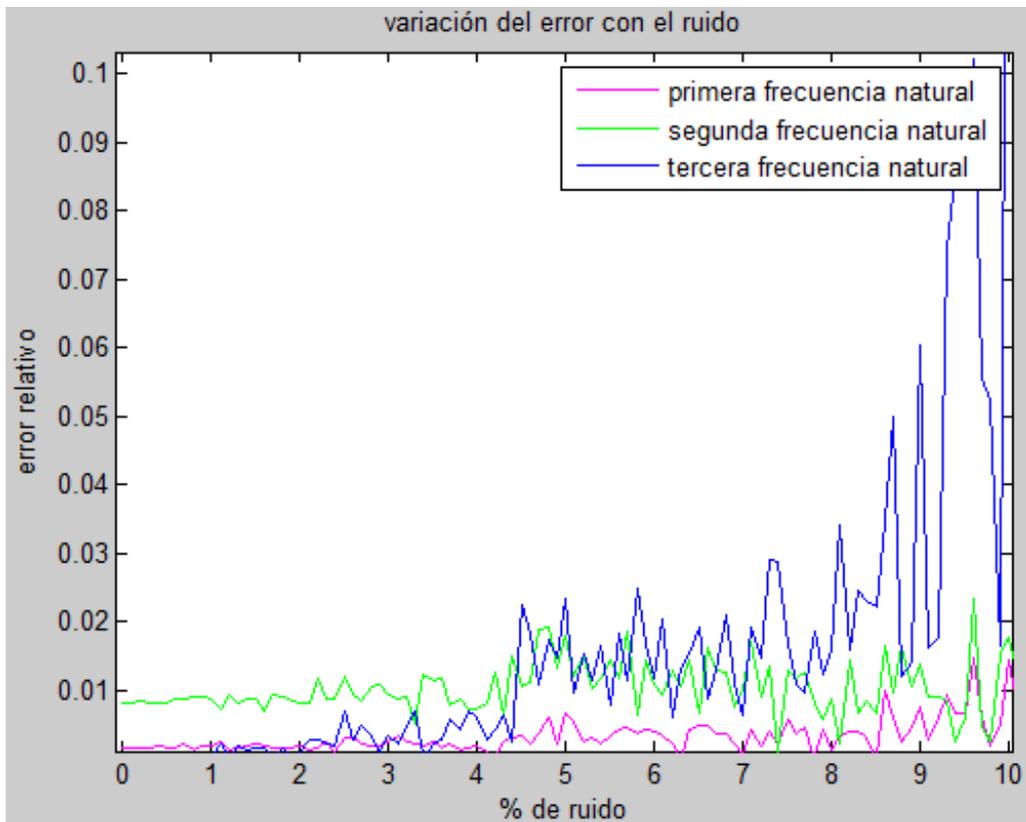


Figura 58: Variación del error en las frecuencias naturales en tanto por uno con el porcentaje de ruido ampliado. Método LSCEM

El error se puede ver que, si el ruido es menor del 10%, es mínimo, no supera el 10% en ninguna de las

frecuencias naturales, a medida que aumenta el porcentaje aumenta el error hasta un punto en el que oscila entre valores parecidos para cada frecuencia natural. Para la tercera los errores llegan a ser de hasta el 100% o incluso algo más, pero es destacable que con la primera y segunda frecuencia los errores no superan el 50%, de hecho con la primera el máximo que se alcanza es del 30%.

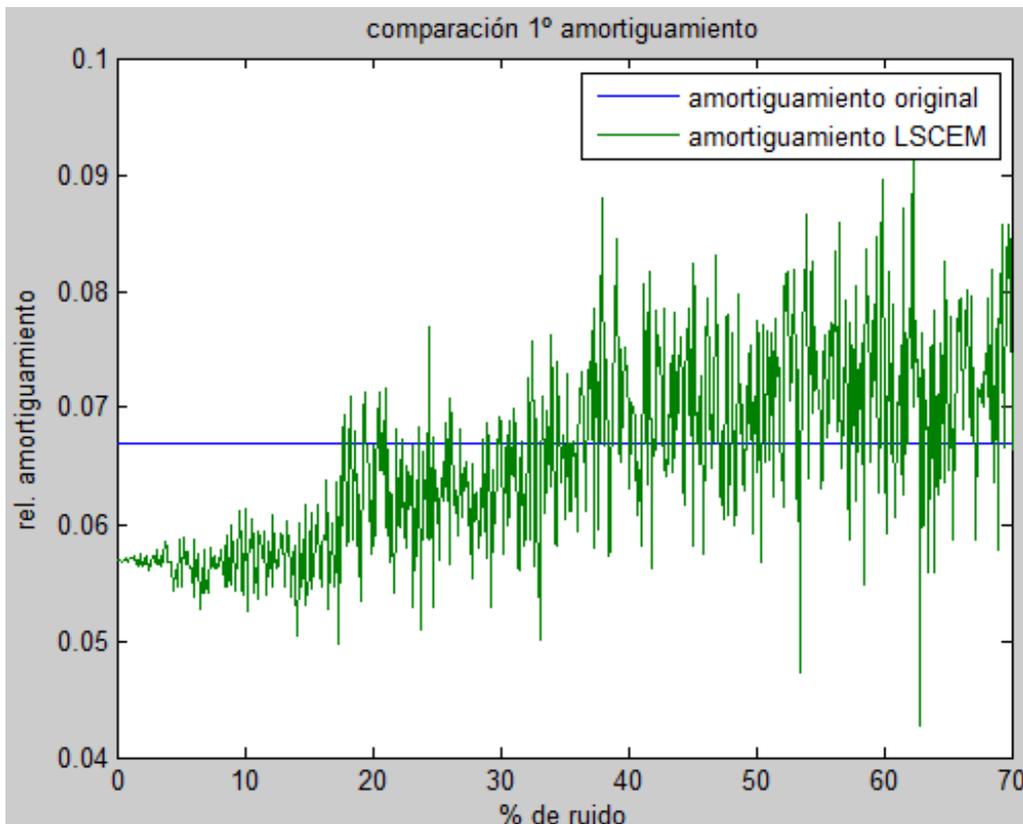


Figura 59: Cambios en la primera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCM

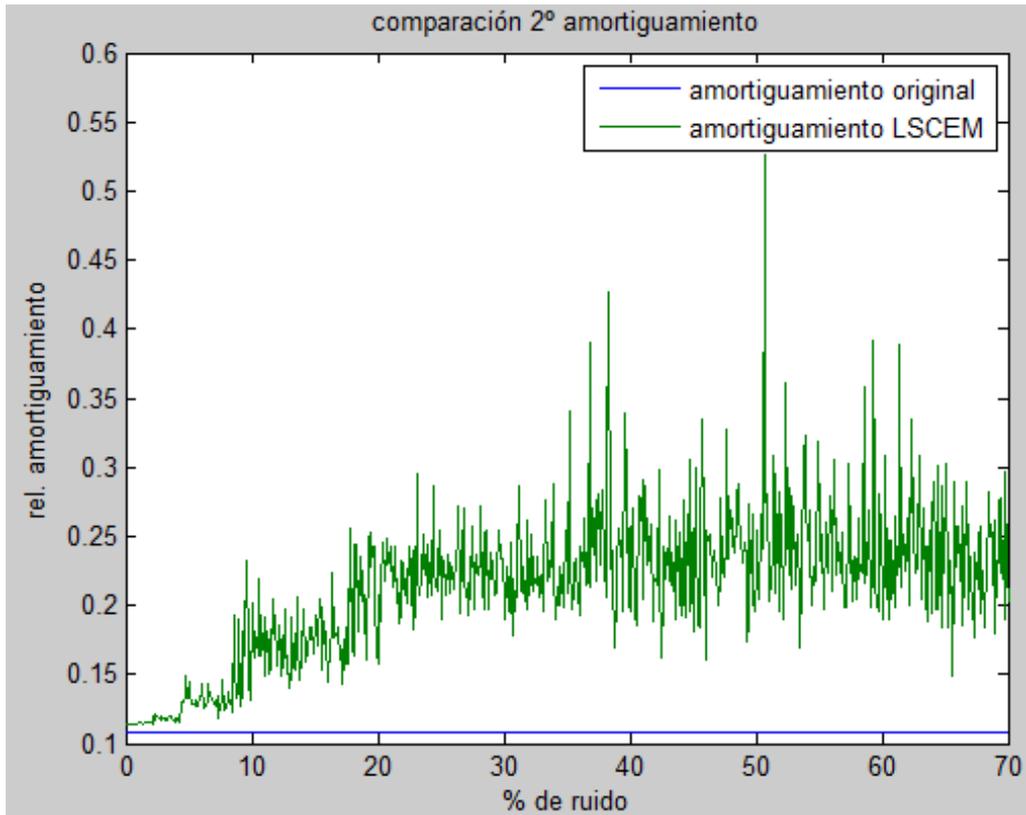


Figura 60: Cambios en la segunda relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCEM

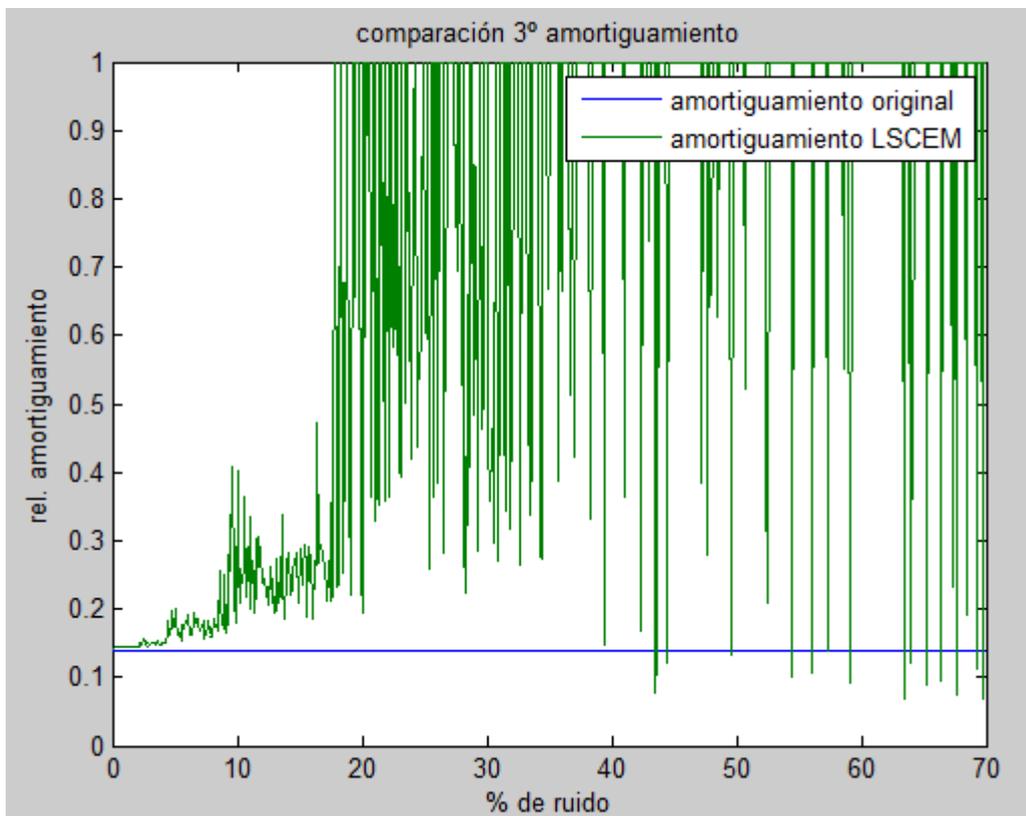


Figura 61: Cambios en la tercera relación de amortiguamiento variando el porcentaje de ruido. Método LSCEM

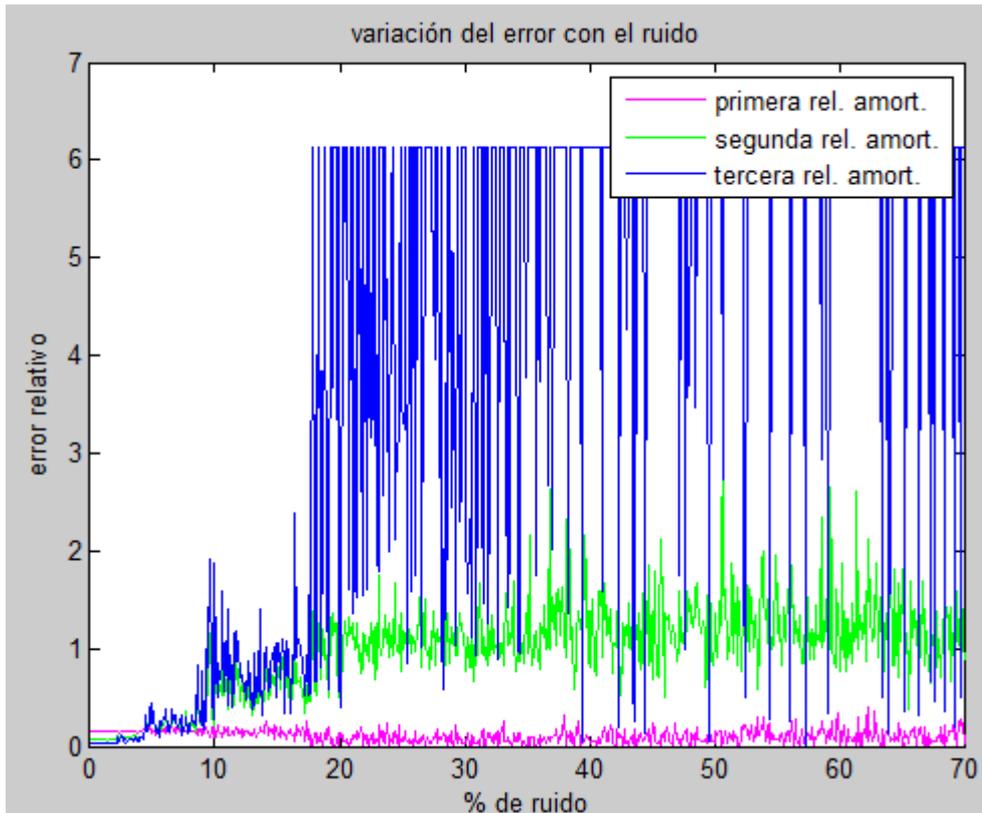


Figura 62: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido. Método LSCM

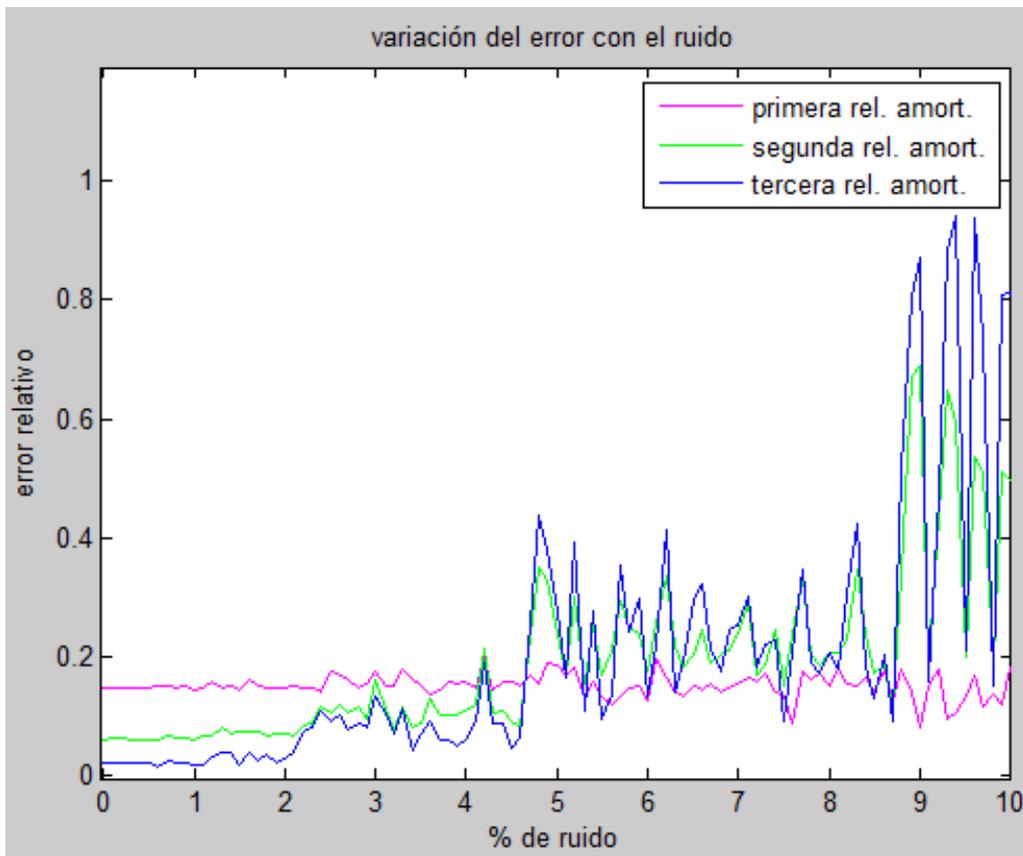


Figura 63: Variación del error en las relaciones de amortiguamiento en tanto por uno con el porcentaje de ruido ampliado. Método LSCM

Con las relaciones de amortiguamiento una vez más los errores son bastante mayores. Si no se supera el 5% de ruido los errores están por debajo del 20%, que no es poco, pero a medida que crece el porcentaje de ruido el error en las relaciones de amortiguamiento crece enormemente, en el caso de la tercera relación llegamos a errores de hasta el 600%. Por esto, para tener valores adecuados en términos de relaciones de amortiguamiento el ruido no debe superar el 5%.

3.4.3 Elección de puntos

Al igual que con el método de Ibrahim, si se aplica el método en su forma sencilla, tomando solo $2n_q-1$, que en este caso son 11, si se es capaz de elegir bien estos puntos se pueden obtener resultados bastante buenos.

Como se ha dicho antes, si se es capaz de coger los puntos que incluyan justo un periodo entero los resultados serán muy buenos, en cambio, si los puntos no están bien tomados iremos perdiendo información de los autovalores.

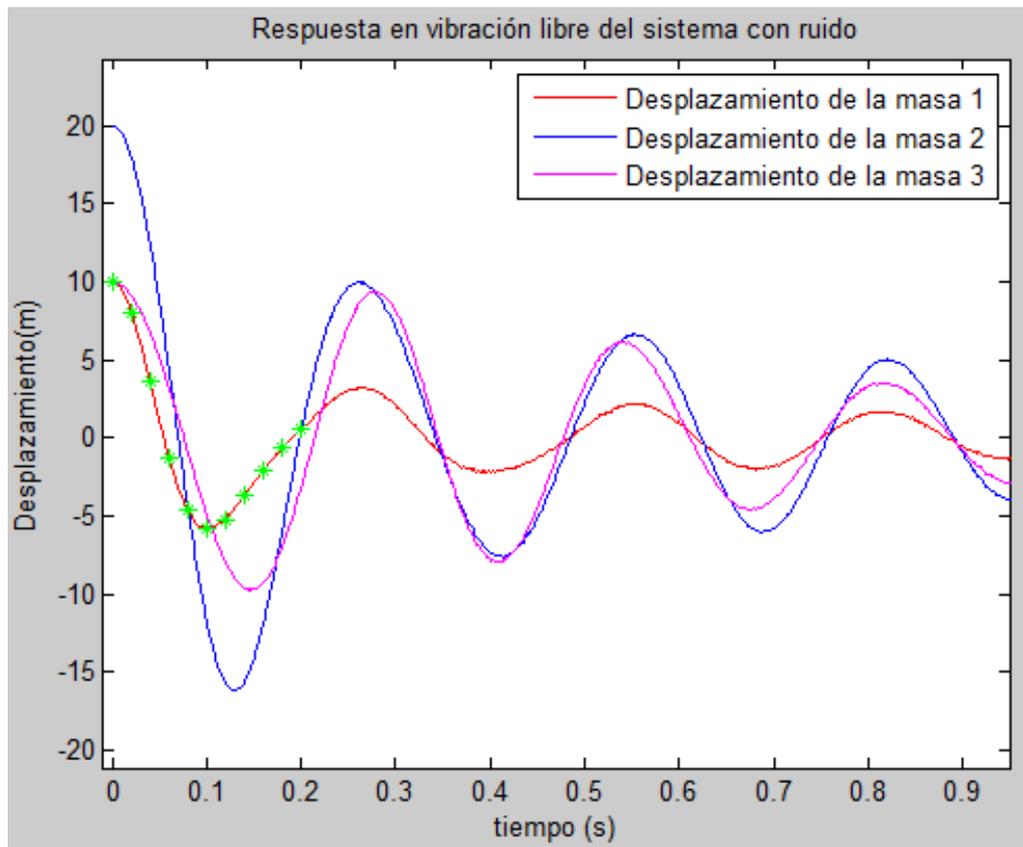


Figura 64: Toma de puntos primera

Autovalores	$4.22 \pm 21.22i$	No salen parejas	$-6.47 \pm 42.62i$
--------------------	-------------------	------------------	--------------------

Tabla 15: Autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos

Error Autovalores	3.23	No salen parejas	2.03
--------------------------	------	------------------	------

Tabla 16: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos primera toma de puntos

Como se ve al no coger un periodo completo los errores son grandes sobre todo en el caso de la segunda pareja de autovalores en la que no sale un complejo conjugado.

A continuación, se coge algo más de un periodo entero y se ve la exactitud que permite obtener el método.

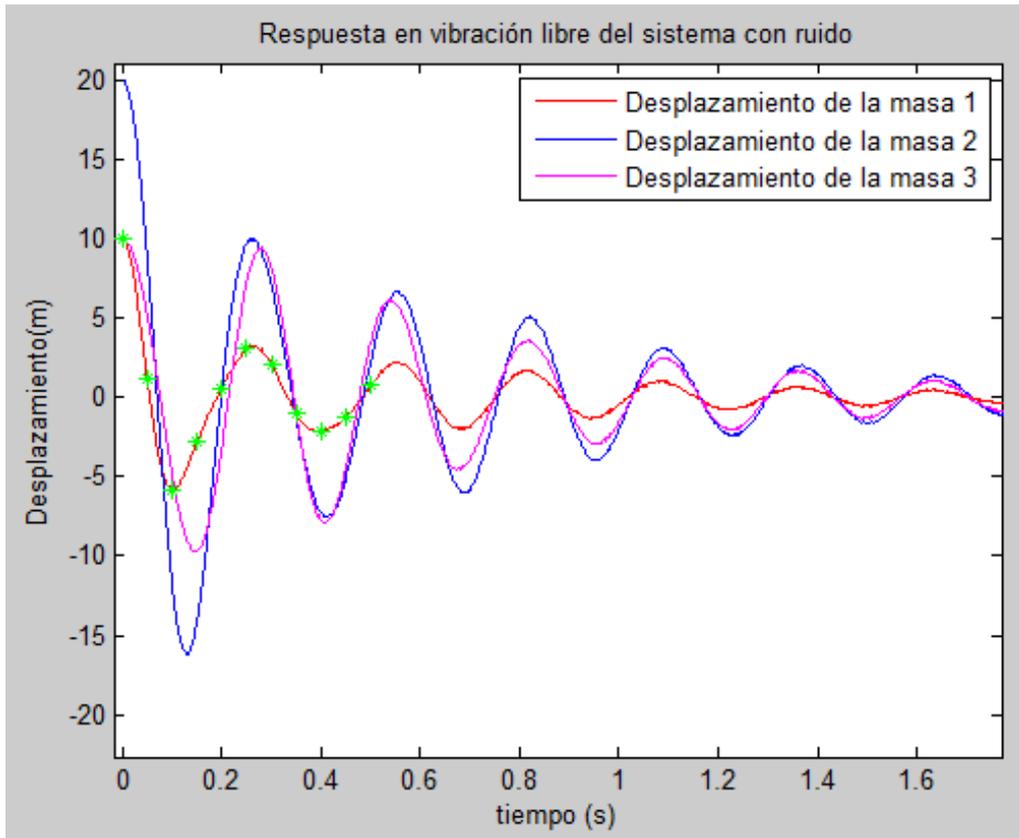


Figura 65: Toma de puntos segunda

Autovalores	$1.25 \pm 23.04i$	$-3.50 \pm 30.23i$	$-6.99 \pm 44.84i$
--------------------	-------------------	--------------------	--------------------

Tabla 17: Autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos

Error Autovalores	0.30	0.24	0.70
--------------------------	------	------	------

Tabla 18: Error absoluto autovalores comparando por parejas de complejos segunda toma de puntos

Con estos resultados se demuestra que se pueden obtener los valores prácticamente exactos tomando únicamente 11 puntos si se eligen bien y sin necesidad de hacer tantos cálculos. De hecho, si se comparan con los valores sacados de aplicar el método a todo t los resultados aquí son incluso mejores.

4 APLICACIÓN EN UN SISTEMA MECÁNICO

Tras hacer un primer análisis a un sistema inventado se ha hecho lo mismo con un sistema real comprobando así cómo funcionan realmente los métodos estudiados.

4.1 Sistema a estudiar

El sistema planteado es una viga empotrada por uno de sus extremos a la cual se le han puesto cinco acelerómetros conectados a una placa y ésta a su vez al ordenador.

Para sacar nuestras respuestas se han colocado los acelerómetros de dos formas distintas y se ha golpeado la barra con un martillo, de la respuesta recogida quitamos los primeros segundos para no tener en cuenta el impacto ni el tiempo en el que la biga está estática.

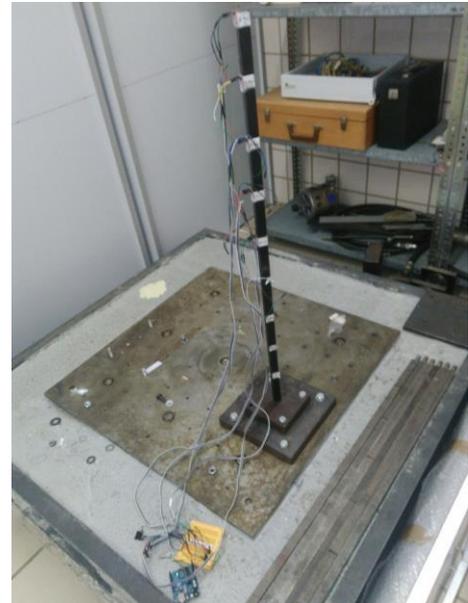


Figura 66: Sistema a estudiar

4.1.1 La viga

La viga utilizada es una viga de acero, es decir, Modulo de Young de 210 GPa y densidad 7850 kg/m³, cuyas dimensiones son:

- Longitud, 0.9m
- Sección, 0.02x0.015m



Figura 67: Viga a estudiar



Figura 68: Posiciones acelerómetros

Las posiciones en las que se han colocado los acelerómetros son las siguientes, sabiendo que entre los puntos

marcados hay diez centímetros y entre el punto 1 y la base hay diez:

Posición 1				
4	5	6	7	8
Posición 2				
1	3	5	7	8

Tabla 19: Posición acelerómetros

4.1.2 Acelerómetros

Los acelerómetros usados son los de la marca Analog Devices modelo ADXL335 sus dimensiones son 4x4x1.45 mm y funcionan en las 3 direcciones de los ejes.

En el ensayo realizado se han puesto los acelerómetros de forma que el eje usado sea el z el cual tiene una respuesta en frecuencia de 550 Hz, es decir, puede dar información cada 0.0018 segundos.

El sensor tiene un rango de medida de $\pm 3g$.

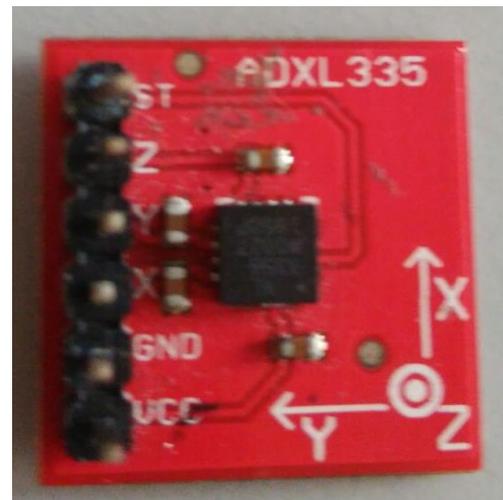


Figura 69: Acelerómetro ADXL335

El microcontrolador usado en el laboratorio ha sido un Arduino Uno R2 el cual al disponer de conexión USB



Figura 70: Microcontrolador Arduino UNO R2

se ha conectado al ordenador.

4.2 Procedimiento

El procedimiento que se ha seguido para las dos posiciones de los acelerómetros ha sido el mismo, se ha golpeado la viga con un martillo en la dirección z de los acelerómetros y se han recogido y procesado los datos de estos cinco gracias al microcontrolador para finalmente introducirlo en un programa de Matlab que represente las respuestas en función de t. Tras procesar la información se ha visto que los datos no estaban recogidos en intervalos de tiempo equiespaciados por lo que se ha realizado una interpolación para conseguir que lo estén.

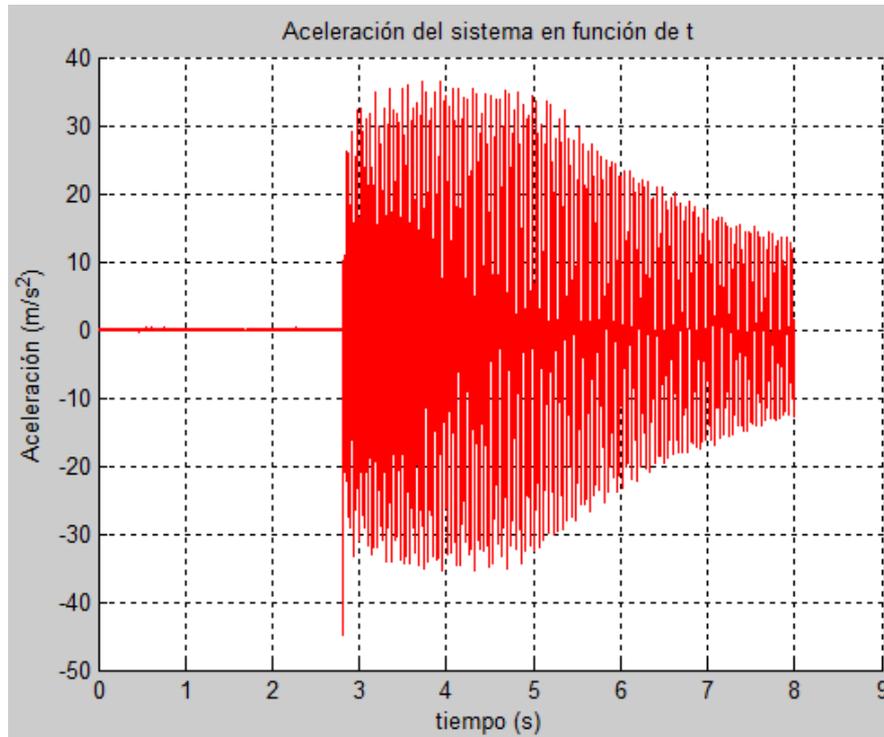


Figura 71: Respuesta en aceleración del sistema

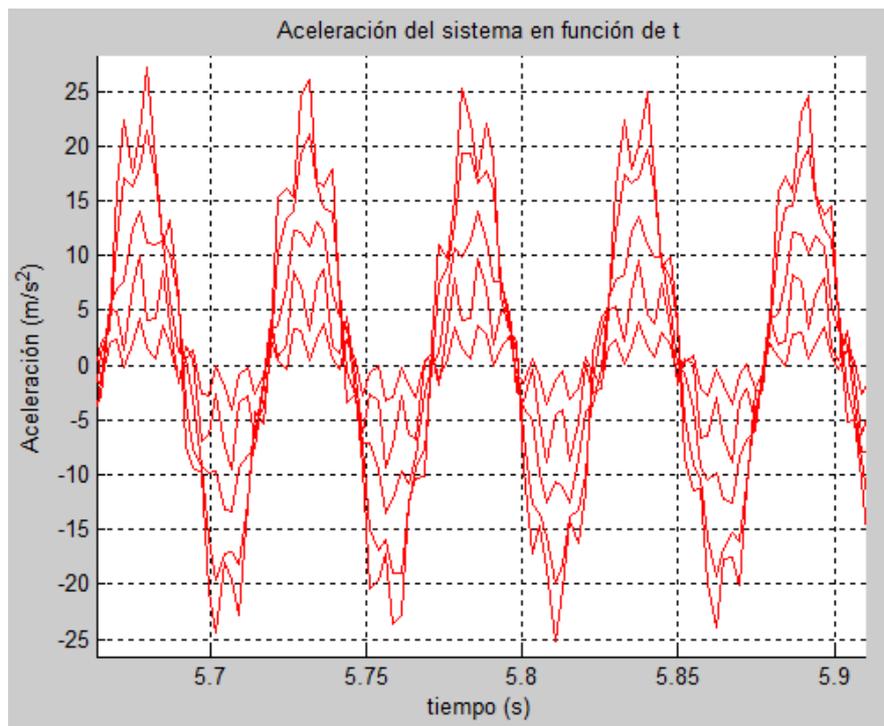


Figura 72: Respuesta en aceleración del sistema ampliada

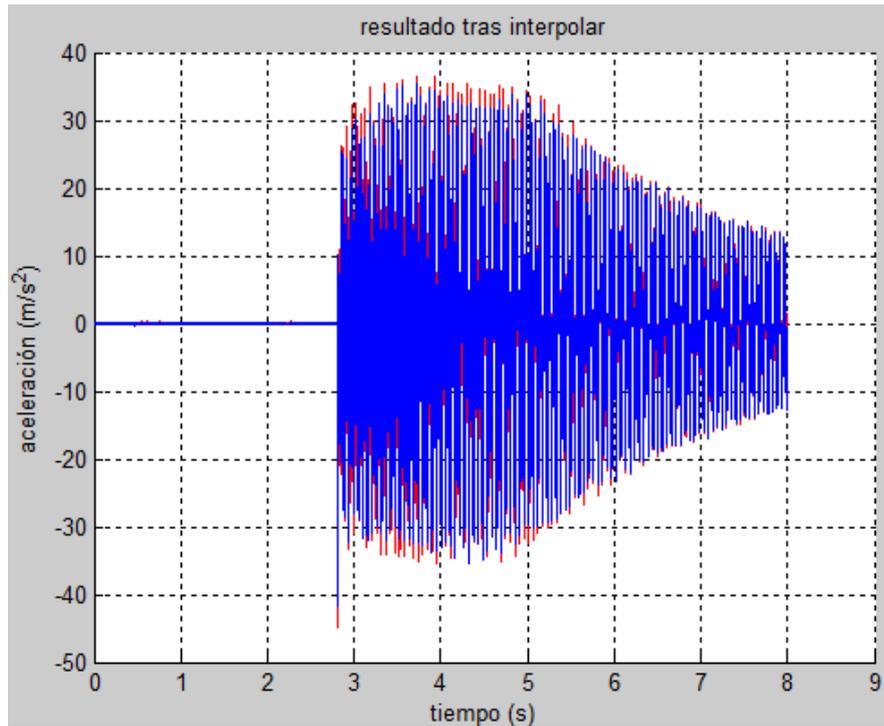


Figura 73: Resultado tras interpolar en azul, original en rojo

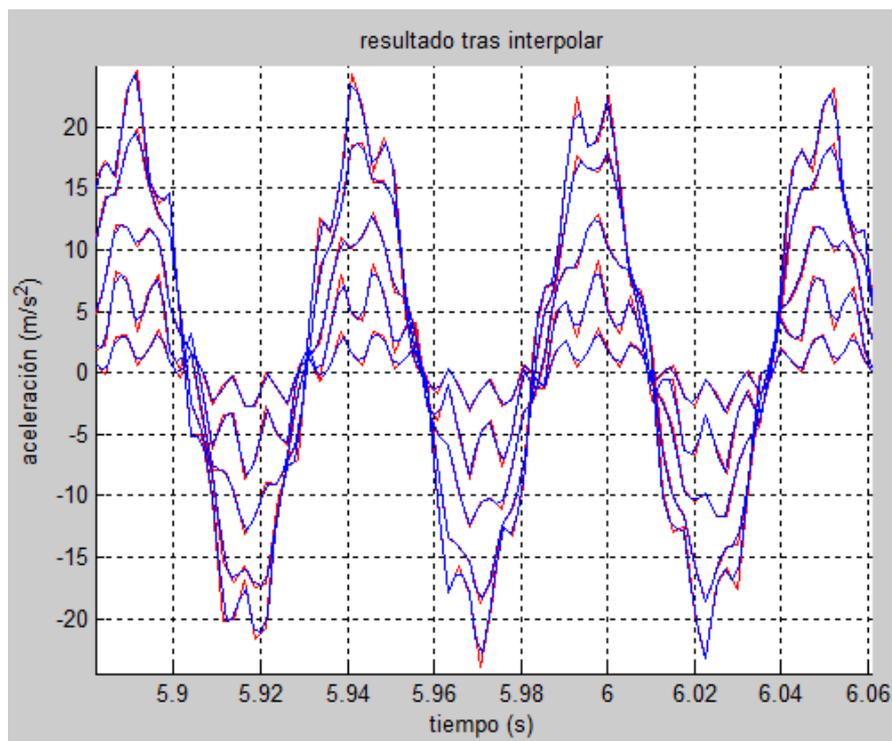


Figura 74: Resultado ampliado tras interpolar en azul, original en rojo

Las respuestas obtenidas son del tipo de la mostrada en la imagen, al poner el programa a funcionar y luego golpear la barra se tiene una respuesta que es nula en un inicio, después se recoge el golpe y después es cuando se encuentra la respuesta real del sistema con sus frecuencias naturales. Por esto que se acaba de explicar no se estudiará toda la respuesta obtenida si no solo a partir de cuando no hay perturbaciones por el golpe.

Hay que decir que tras interpolar se ha obtenido una respuesta equiespaciada cada 0.0016 segundos por lo que nuestra frecuencia de muestreo será 625 siguiendo el Teorema de Nyquist de muestreo que dice que para obtener información de una frecuencia f_{\max} es necesario adoptar una frecuencia de muestreo al menos el doble de la máxima analizada.

$$f_m = \frac{1}{\Delta t} \geq 2f_{max}$$

Por lo que, siendo nuestra $f_m = 625$ la máxima frecuencia que se podrá analizar será menor que 312. A esta frecuencia f_m se le conoce como frecuencia de Nyquist. Sabiendo esto hay que tener en cuenta que no se podrán encontrar frecuencias naturales del orden de 300 ni mayores.

4.3 Frecuencias naturales de la viga

Tras hacer un estudio de la viga en sí teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- Comportamiento lineal
- Pequeños desplazamientos
- Vibraciones en un solo plano principal de inercia
- No se consideran deformaciones debidas al cortante
- Se desprecian las inercias de giro de las secciones

y haciendo uso de la expresión de la deformada y sus derivadas:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= B_1 \text{sen}(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x) + B_3 \text{senh}(\lambda x) + B_4 \cosh(\lambda x) \\ \Phi'(x) &= B_1 \lambda \cos(\lambda x) - B_2 \lambda \text{sen}(\lambda x) + B_3 \lambda \cosh(\lambda x) + B_4 \lambda \text{senh}(\lambda x) \\ \Phi''(x) &= -B_1 \lambda^2 \text{sen}(\lambda x) - B_2 \lambda^2 \cos(\lambda x) + B_3 \lambda^2 \text{senh}(\lambda x) + B_4 \lambda^2 \cosh(\lambda x) \\ \Phi'''(x) &= -B_1 \lambda^3 \cos(\lambda x) + B_2 \lambda^3 \text{sen}(\lambda x) + B_3 \lambda^3 \cosh(\lambda x) + B_4 \lambda^3 \text{senh}(\lambda x)\end{aligned}$$

Si se aplican las condiciones de contorno correspondientes:

$$\Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 0 \quad \Phi''(l) = 0 \quad \Phi'''(l) = 0$$

Se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned}B_4 &= -B_2 \\ B_1 &= -B_3 \\ -B_1 \text{sen}(\lambda l) - B_2 \cos(\lambda l) + B_3 \text{senh}(\lambda l) + B_4 \cosh(\lambda l) &= 0 \\ -B_1 \cos(\lambda l) - B_2 \text{sen}(\lambda l) + B_3 \cosh(\lambda l) + B_4 \text{senh}(\lambda l) &= 0\end{aligned}$$

Con lo que operando se llega a:

$$\cos(\lambda l) \cdot \cosh(\lambda l) = -1$$

de aquí se pueden sacar las primeras 5 frecuencias naturales:

Frecuencias Naturales (Hz)	
1	15.47
2	96.96
3	271.5
4	532.45
5	879.45

Tabla 20: Frecuencias naturales de la viga estudiada

4.4 Método de Ibrahim

Con los datos sacados se han vuelto a aplicar los métodos estudiados empezando por el método de Ibrahim, hay que decir que esta respuesta, al ser obtenida en laboratorio, ya tiene errores de por sí por lo que no se le ha introducido un ruido como en el método analítico.

4.4.1 Posición 1

En esta posición se han hecho dos análisis, golpeando arriba de la barra, entre los puntos 8 y 9 y golpeando abajo, debajo del 4.

Cómo se ha dicho antes, solo se podrá obtener cómo máximo hasta la tercera frecuencia natural, por lo que se tendrán algunas que no representan ninguna frecuencia natural del sistema. Las obtenidas son las siguientes:

Frecuencias Naturales (Hz)
18.96
77.26
87.87
118.03
259.33

Tabla 21: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9

Frecuencias Naturales (Hz)
19.52
74.13
78.62
118.31
271.38

Tabla 22: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4

Los resultados obtenidos no permiten identificar qué frecuencia es cada una y cuáles se deben descartar, pero al poder interpretar los modos se puede llegar a saber cuál es cual por la forma de estos.

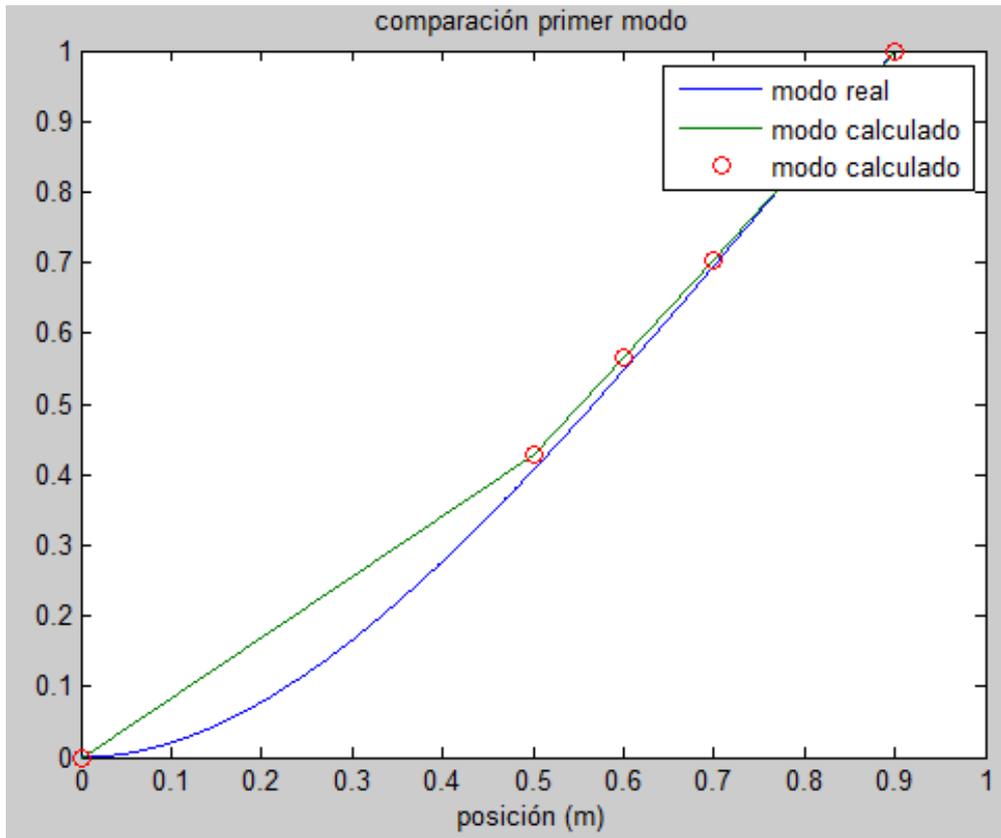


Figura 75: Representación primer modo

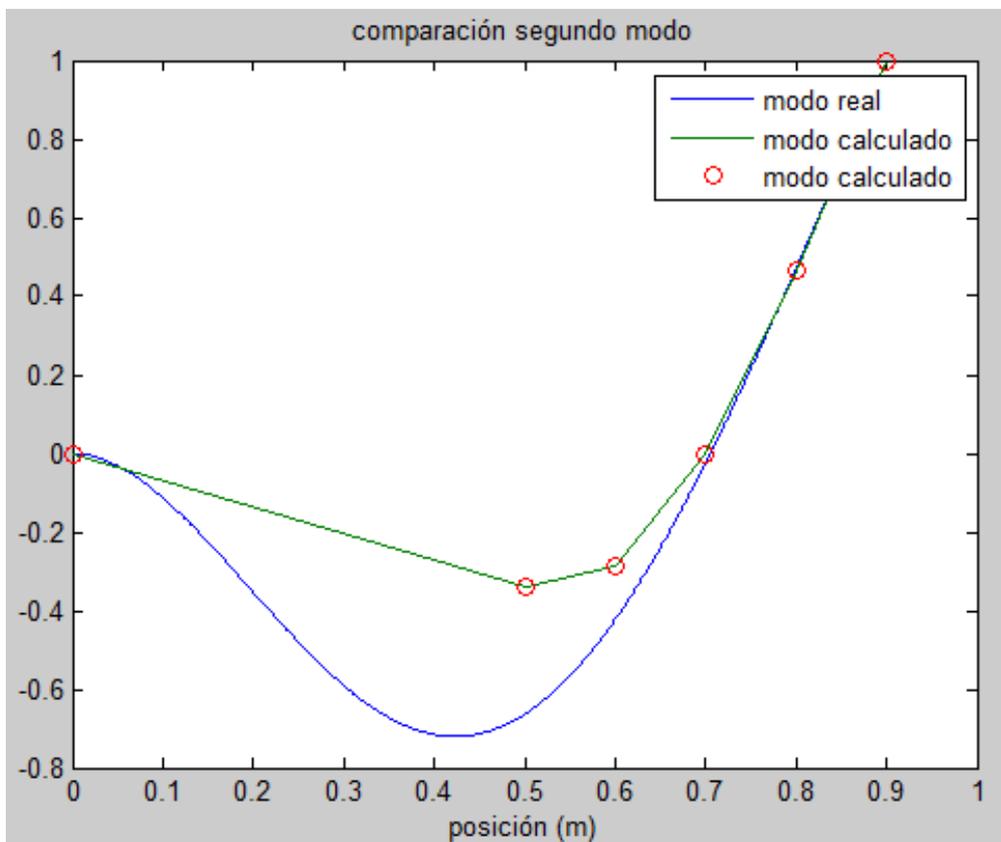


Figura 76: Representación segundo modo

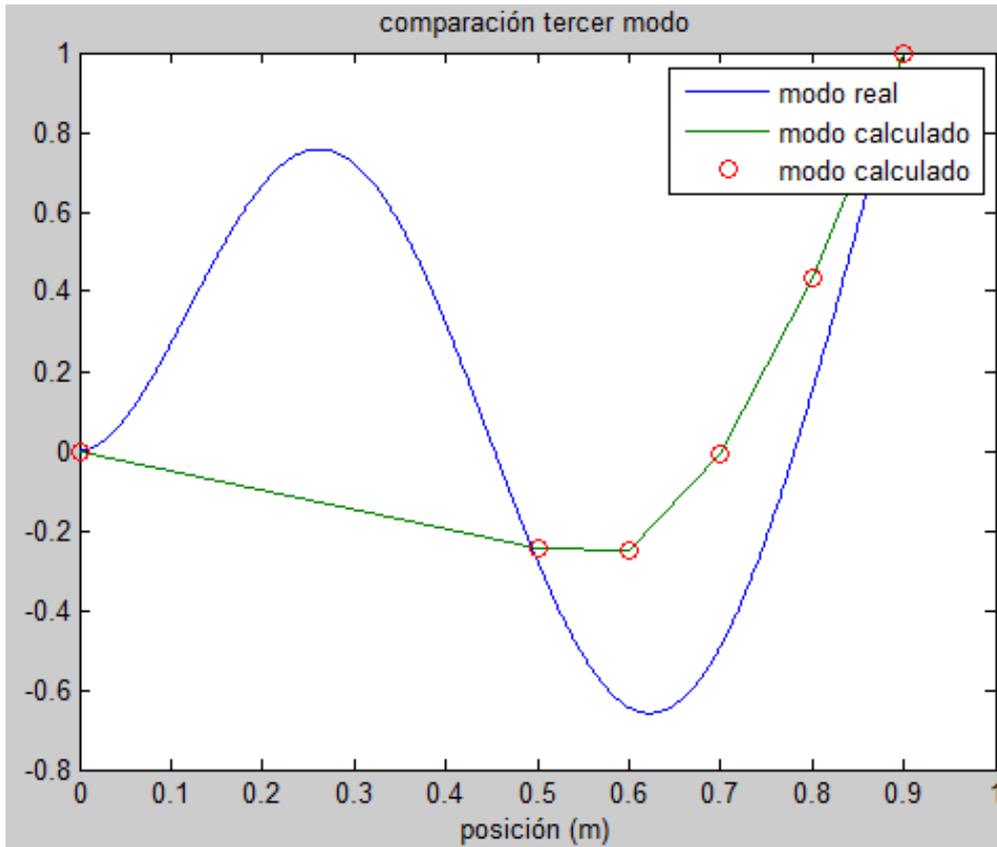


Figura 77: Representación tercer modo.

Se ha mostrado la representación de los modos cuando golpeamos en el punto más alto, ya que los resultados son muy parecidos y así no se repiten imágenes prácticamente idénticas. Se ve claramente que el modo que da la frecuencia que ronda por 18 es el primero por lo que esta será la primera frecuencia como era de esperar. Se ve que el segundo modo corresponde al que se obtiene de representar el correspondiente a la frecuencia que ronda por 118 y, por último, la de 270, que parecía ser la tercera ya que se asemeja a la real calculada, no lo es porque el modo no tiene nada que ver con el que debería ser realmente, así que la respuesta obtenida por los acelerómetros debe tener unos fallos que no permiten calcular esta frecuencia.

4.4.2 Posición 2

De nuevo se prueba golpeando entre los puntos 8 y 9 y entre el 3 y 4.

Frecuencias Naturales (Hz)
18.89
79.60
82.40
118.05
272.55

Tabla 23: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9

Frecuencias Naturales (Hz)
18.86
81.94
86.91
117.93
271.53

Tabla 24: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4

Los resultados de nuevo muestran una frecuencia muy parecida a la primera, otra muy parecida a la tercera y tres que podrían ser la segunda. Si se comparan los modos:

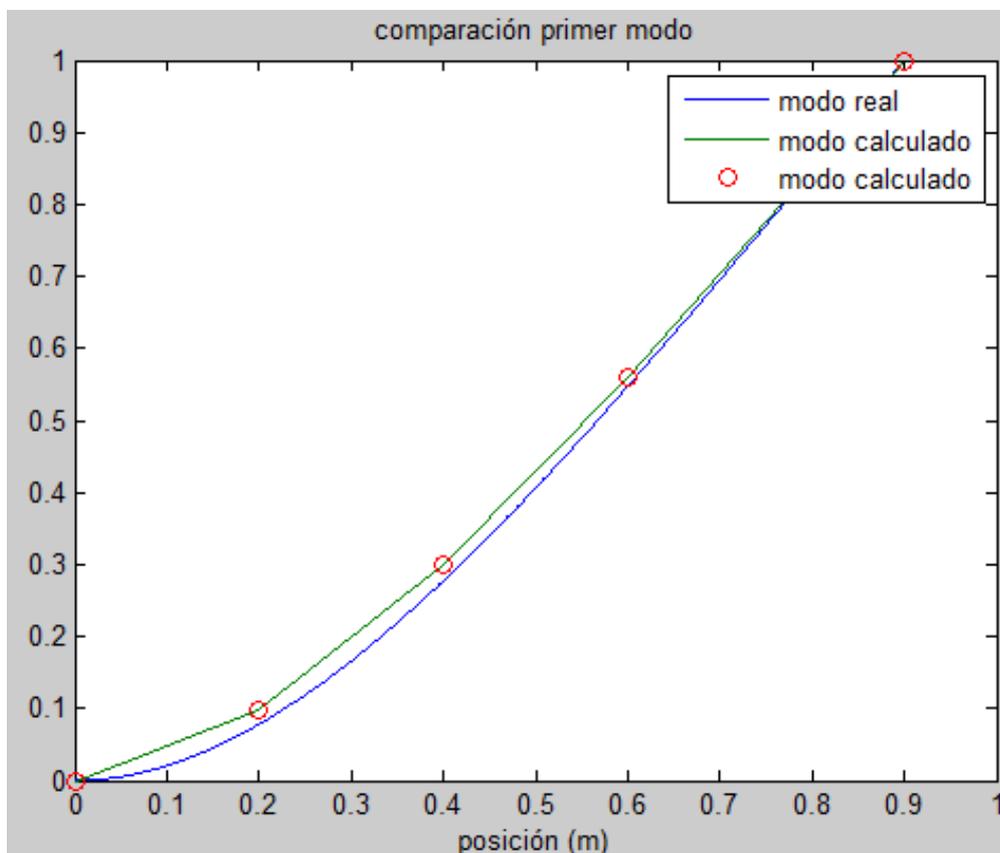


Figura 78: Representación primer modo

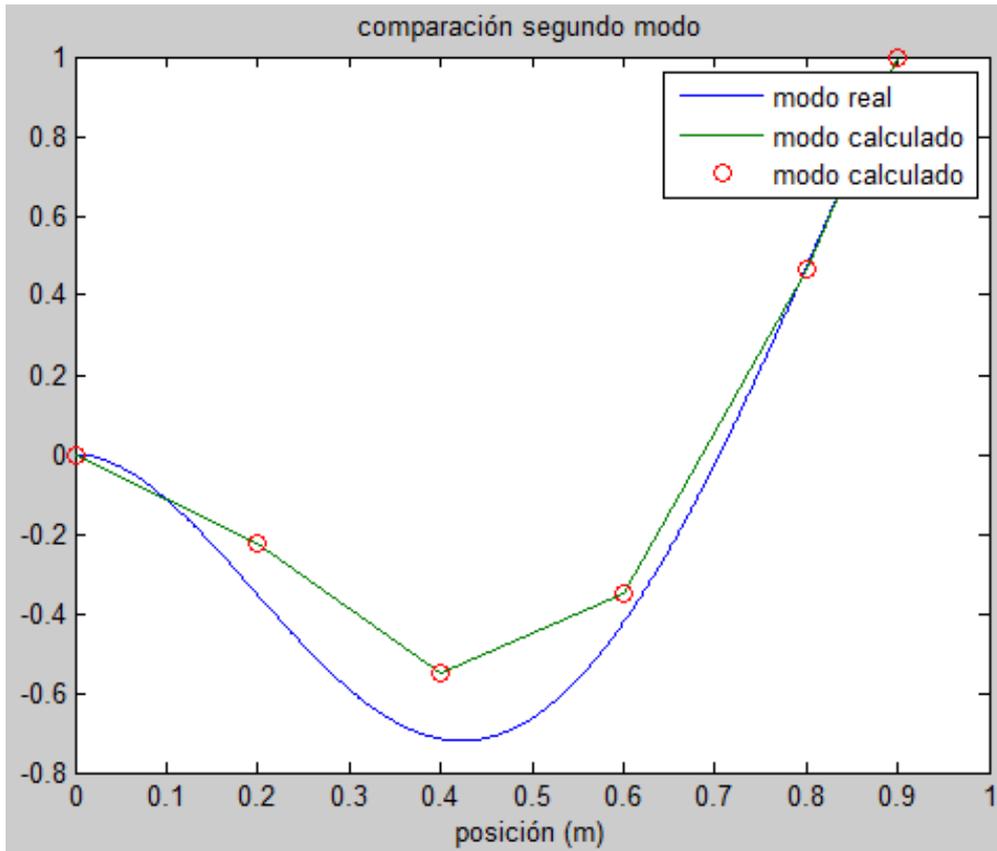


Figura 79: Representación segundo modo

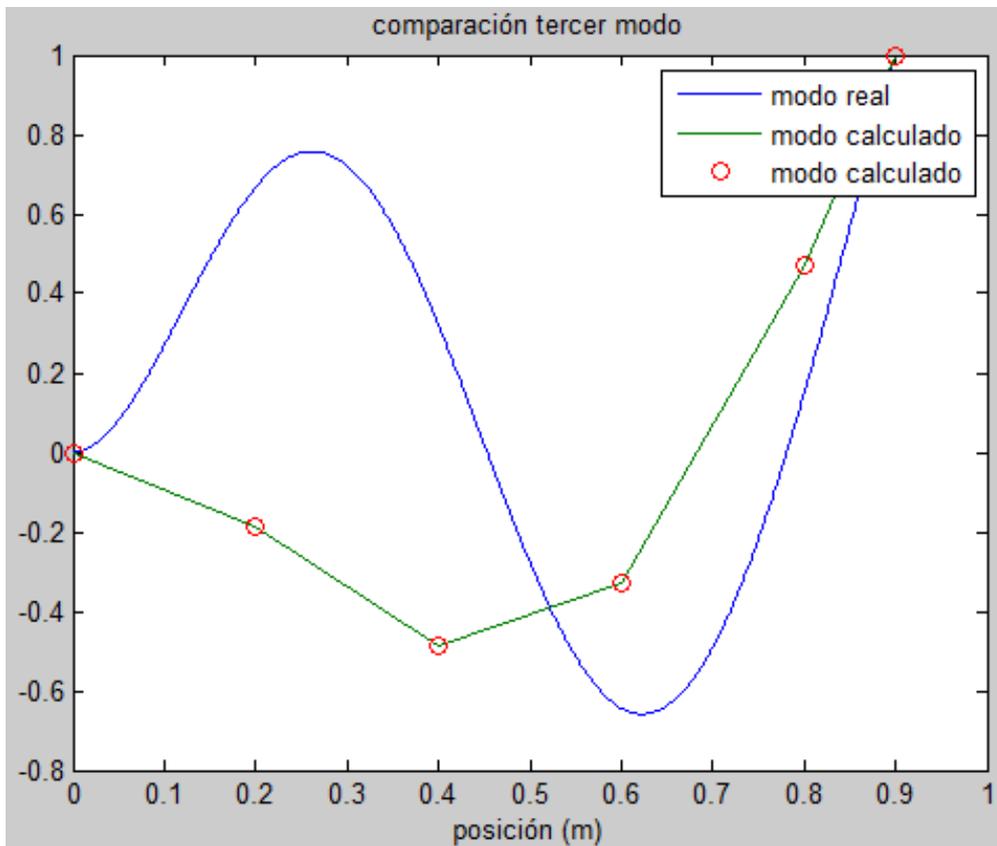


Figura 80: Representación tercer modo

Vuelve a pasar lo mismo que antes, queda claro que la frecuencia de 18 corresponde a la primera, la de 118 a

la segunda y de nuevo la que parecía aparentar ser la tercera no lo es.

Habría que comentar que, aunque las frecuencias calculadas no sean exactamente las obtenidas, éstas son siempre similares lo que lleva a pensar que puede haber ciertas imperfecciones en la viga que haga que las frecuencias naturales reales de esta sean las obtenidas y no las calculadas.

De hecho, si se amplía un periodo completo y calculamos la primera frecuencia natural:

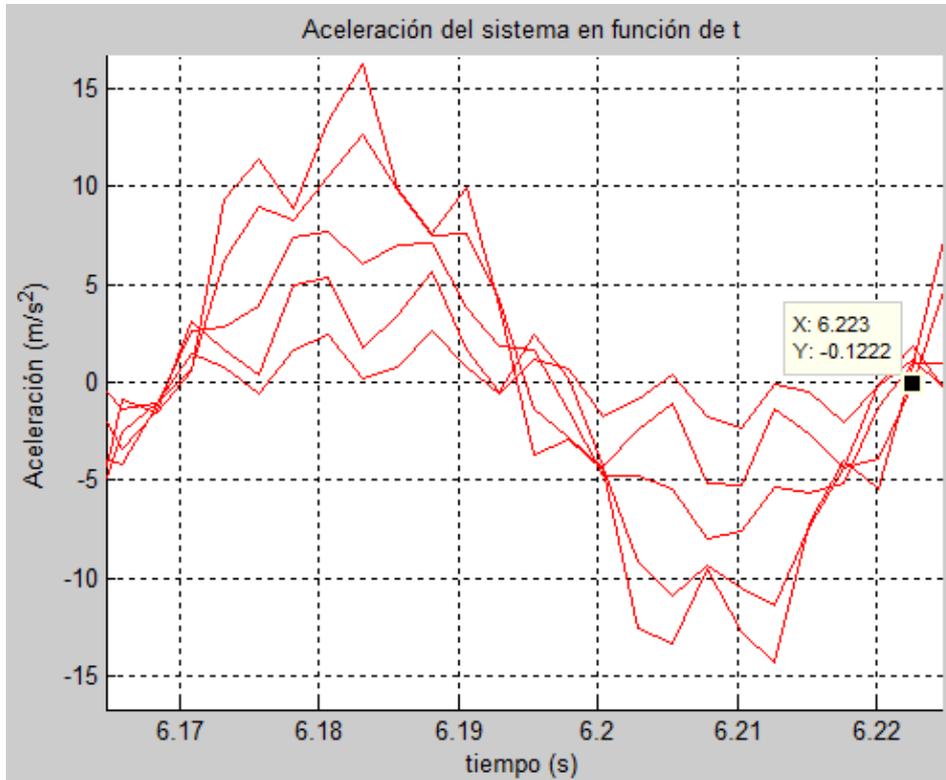


Figura 81: Ampliación de un periodo completo

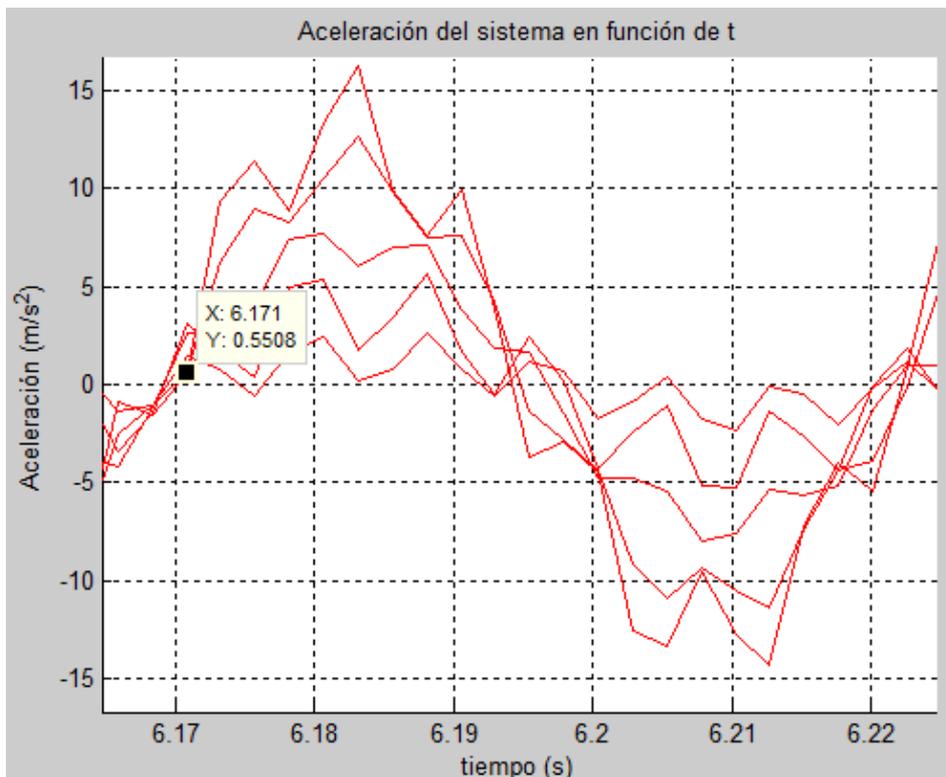


Figura 82: Ampliación de un periodo completo

$$f_1 = \frac{1}{6.223 - 6.171} = 19.23Hz$$

Por lo que el resultado del método parece parecerse más a esta primera frecuencia que lo calculado analíticamente.

4.5 Método de ajuste por mínimos cuadrados de exponencial compleja

De nuevo se ha introducido la respuesta, esta vez en el método LSCEM, obteniendo los siguientes resultados colocando los acelerómetros en las dos posiciones indicadas anteriormente:

4.5.1 Posición 1

Se vuelven a diferenciar los dos puntos donde se golpea la viga.

Frecuencias Naturales (Hz)
17.56
44.86
73.66
114.11
134.73

Tabla 25: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre los puntos 8 y 9

Frecuencias Naturales (Hz)
17.82
54.69
76.26
112.48
131.48

Tabla 26: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4

4.5.2 Posición 2

Frecuencias Naturales (Hz)
17.94
44.48
79.22
113.05
132.45

Tabla 27: Frecuencias naturales de la viga golpeando entre el punto 8 y 9

Frecuencias Naturales (Hz)
17.95
45.92
79.79
113.06
141.73

Tabla 28: Frecuencias naturales de la viga golpeando debajo del punto 4

Esta vez, el método ofrece una primera frecuencia natural, que se parece bastante a la que debería ser y entre la tercera y cuarta se sabe que una de las dos podría corresponder a la segunda. Como este método no ofrece autovectores no se es capaz de diferenciar cuál de las frecuencias calculadas equivale al segundo modo y cuáles son las de descarte, aunque por semejanza con el método de Ibrahim se podría optar por la de 113. También hay que decir que con este método los resultados para la tercera frecuencia natural son malísimos siendo irreconocible esta entre las frecuencias obtenidas.

4.6 Paso a posición

Para tener más información de cómo funciona la señal se coge una de las respuestas por separado y se integra para obtener velocidad y posición en función de t.

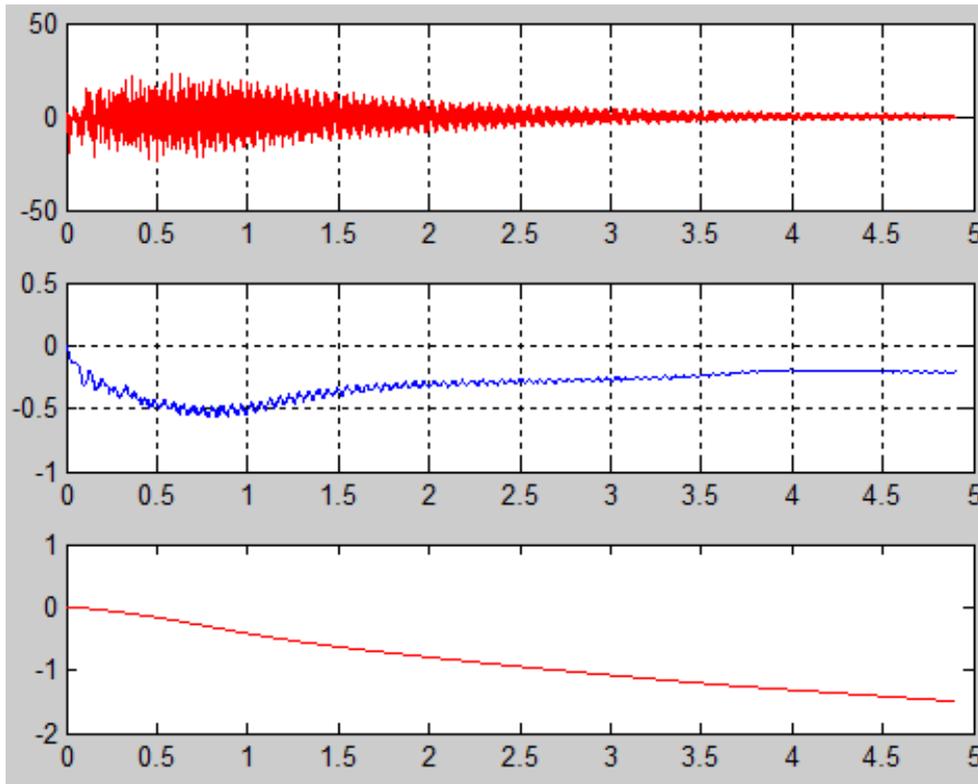


Figura 83: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras integrar.

Tras integrar la señal se observa que la velocidad no tiene la forma típica de una vibración si no que está superpuesta a una curva. Esto se debe a que la señal recogida por los acelerómetros no es lo suficientemente buena y va aportando un error que varía con la amplitud de la aceleración, por lo que se procede a pasarle un filtro de bajas frecuencias a la onda para eliminar estos errores.

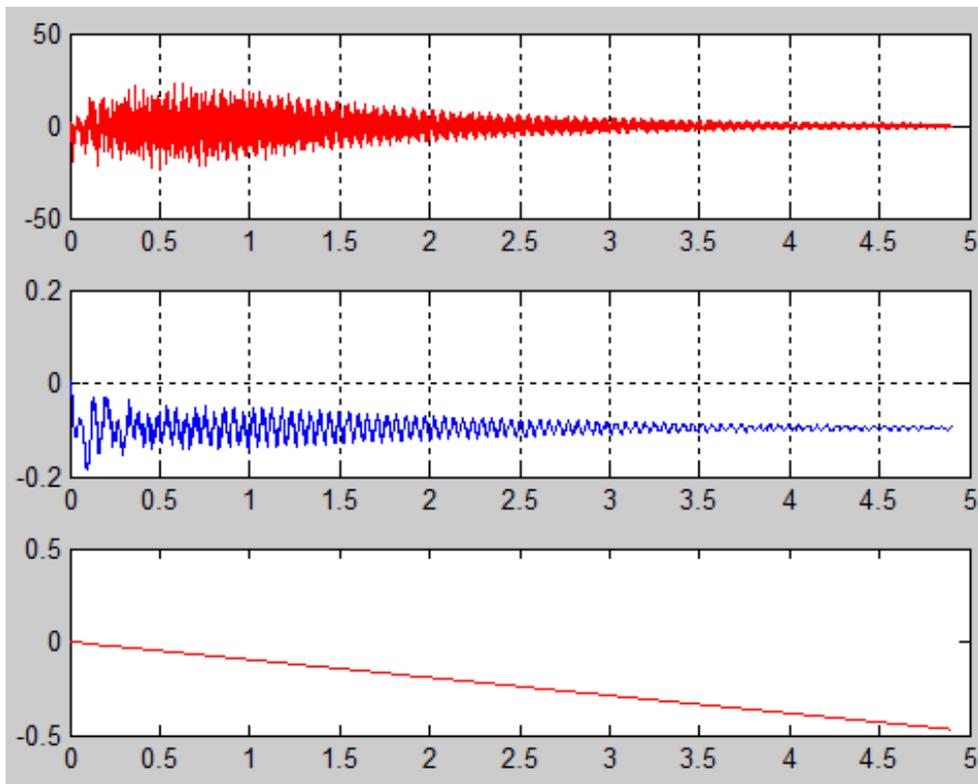


Figura 84: Aceleración (m/s^2), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras aplicar un filtro de bajas frecuencias.

Teniendo ya la onda de velocidades con la forma que debería tener, se le resta la media de ésta para centrarla y obtener la onda de posiciones correctamente.

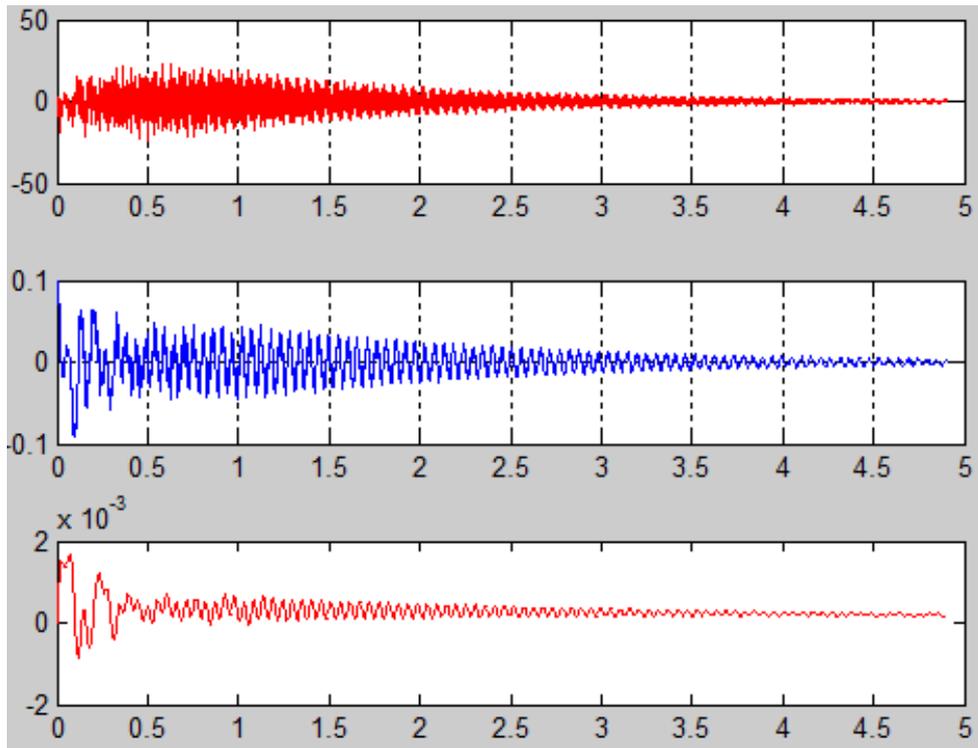


Figura 85: Aceleración (m/s²), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras restar la media a la velocidad.

Finalmente obtenemos las tres respuestas reales a falta de centrar las posiciones.

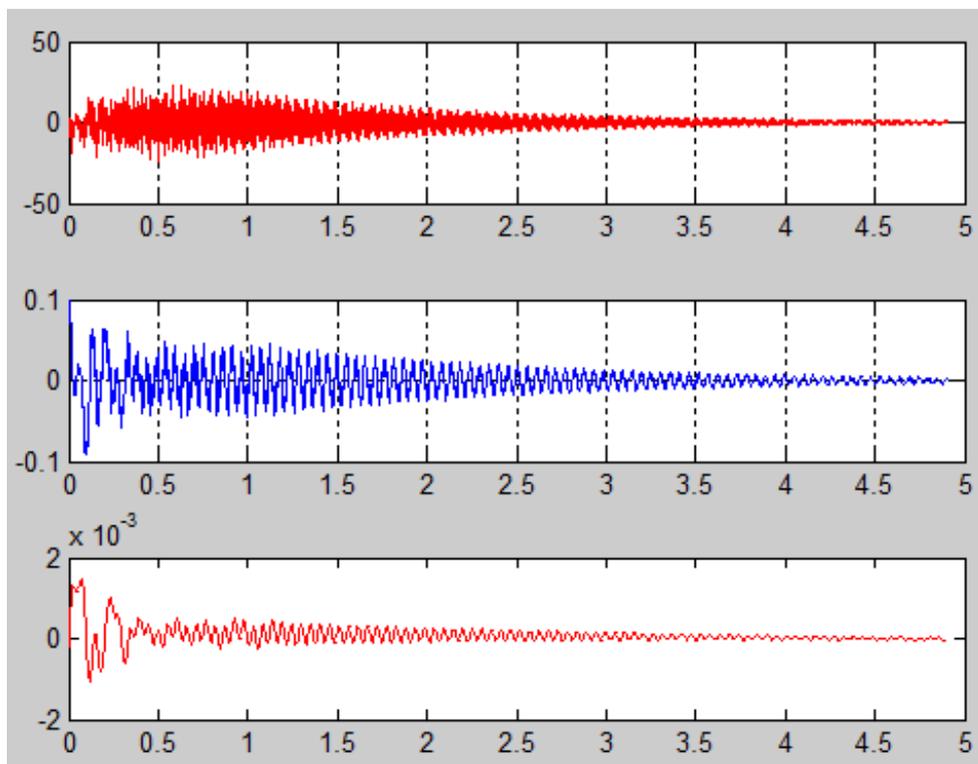


Figura 86: Aceleración (m/s²), velocidad (m/s) y posición (m) en función de t (s) tras restar la media a la posición.

Con la media ya restada se tienen las tres respuestas originales del sistema.

Con todo esto se quiere demostrar que la respuesta obtenida en términos de aceleraciones no es demasiado buena por lo que los resultados sacados en términos de frecuencias naturales y modos de vibración son bastante buenos para la cantidad de errores a los que está sujeto el sistema. De hecho, ésta podría ser una de las razones por las cuales no se es capaz de captar la tercera frecuencia natural, aunque el criterio de Nyquist diga que está dentro del rango.

Estos errores pueden venir del sistema de medida que se ha usado que era bastante básico, constando de una única placa base que ha recogido y procesado toda la información para después transmitirla al ordenador.

5 CONCLUSIÓN

Finalmente, con todo lo explicado, se puede hacer un análisis del funcionamiento de ambos métodos y ver cual da mejores resultados.

El método de Ibrahim ha demostrado ser capaz de obtener muy buenos resultados. Si se toma un Δt comprendido entre 0.03 y 0.045 segundos el resultado será óptimo, pero incluso se pueden obtener buenos resultados con un Δt algo mayor, hasta 0.06 segundos.

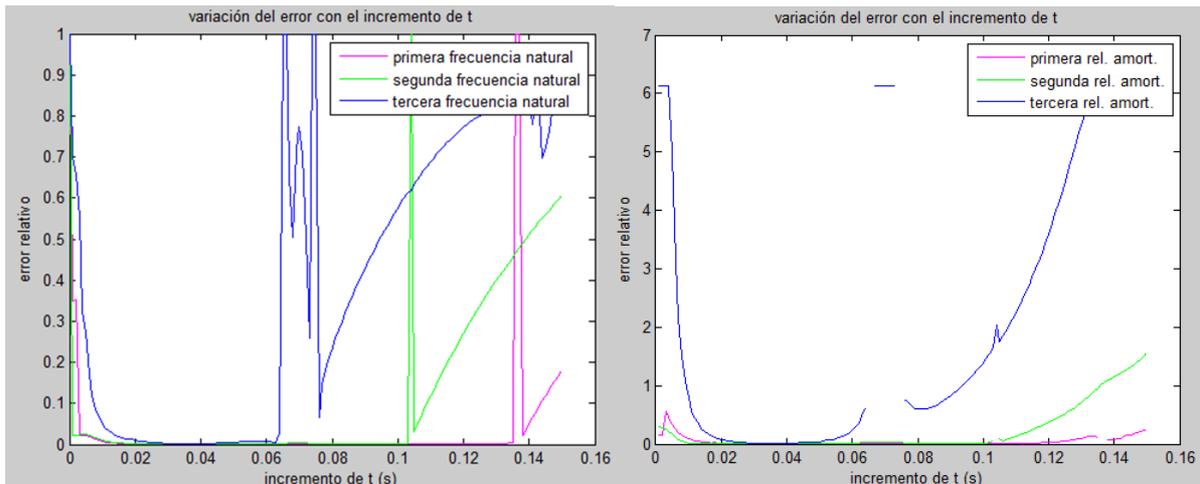


Figura 87: Errores relativos con Δt en tanto por uno. ITD

Cuando se han ido variando los puntos tomados, obviamente los resultados son malísimos ya que los puntos han sido tomados aleatoriamente, pero a partir de unos 150 puntos los resultados son buenísimos, algo que como ya se ha visto se puede conseguir con muchos menos puntos si se eligen correctamente.

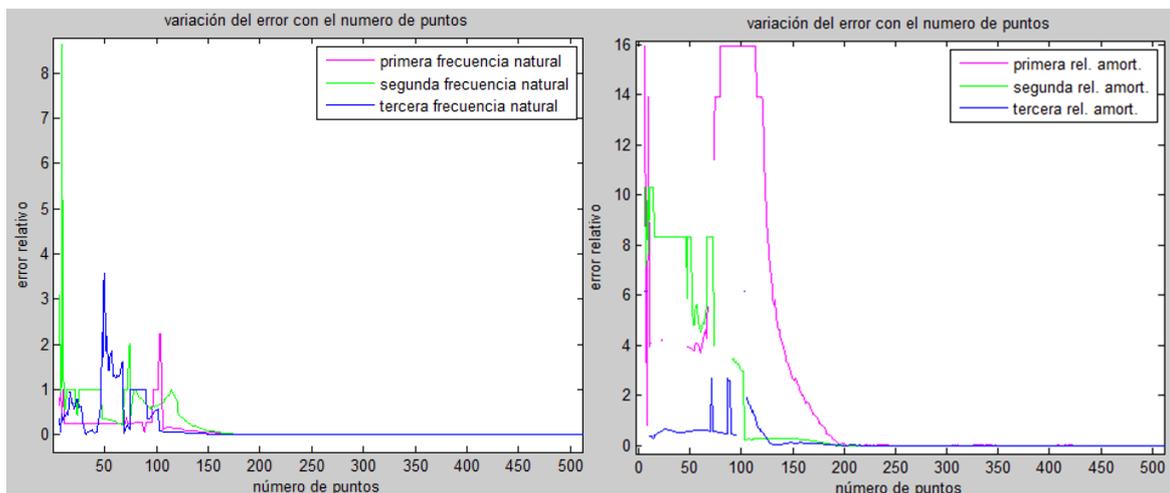


Figura 88: Errores relativos con el número de puntos en tanto por uno. ITD

Con esta elección de puntos arbitraria se ha visto que se pueden conseguir errores del 0.5% en términos de frecuencias naturales con unos 200 puntos. Si se eligen bien los puntos:

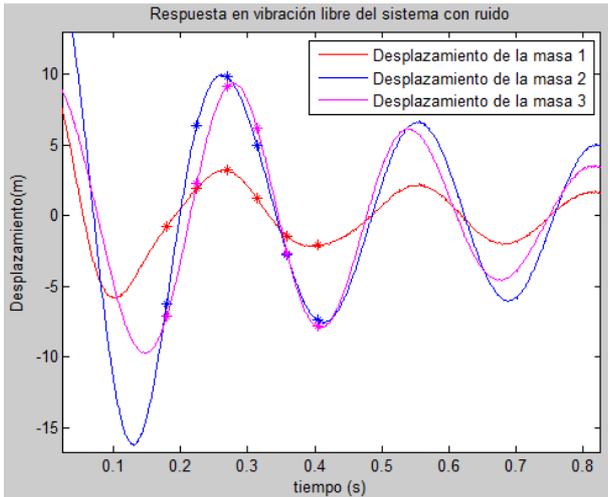


Figura 89: Elección de 6 puntos. ITD

Se obtienen unos errores relativos del orden de 0.5% para dos de los tres autovalores.

Error W_n (%)	
1	3.29
2	0.26
3	0.91

Tabla 29: Errores relativos con los puntos elegidos

Con todo esto, se plantea la idea de tomar unos cuantos puntos más, sin llegar a 200 pero bien elegidos:

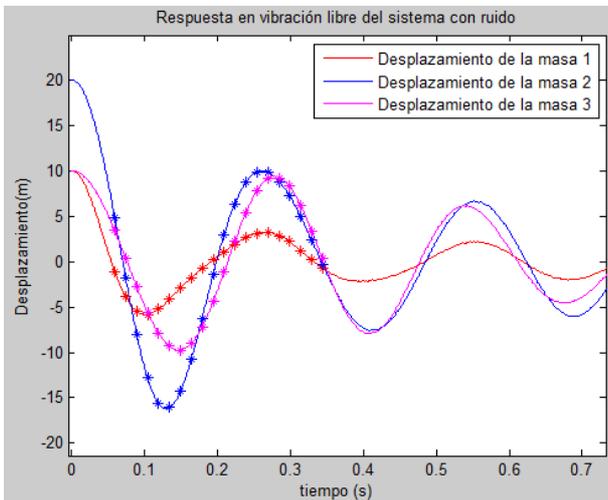


Figura 90: Elección de 20 puntos. ITD

Con 20 puntos se consiguen errores menores del 0.5% lo que demuestra que era cierto que con pocos puntos bien elegidos se pueden obtener resultados prácticamente exactos.

Error W_n (%)	
1	0.14
2	0.11
3	0.02

Tabla 30: Errores relativos con los puntos elegidos

Si se comprueban los problemas del ruido, que es la base del estudio, con el ruido del 5% que se planteaba en un principio en el problema los errores son más que aceptables. Cuando el ruido alcanza el 20% es cuando empieza a dar problemas sobre todo en términos de relaciones de amortiguamiento, en las que los errores siempre son mayores.

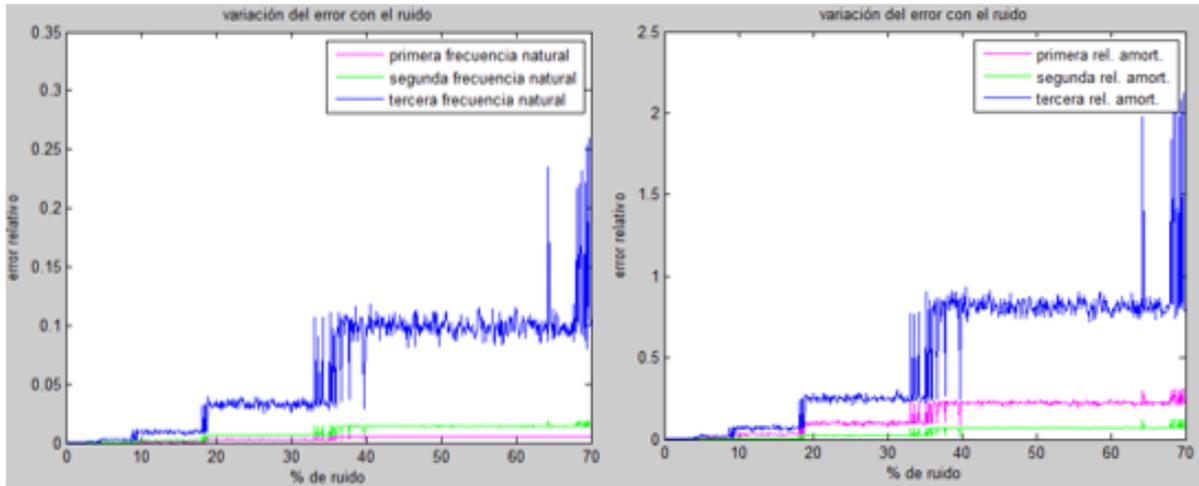


Figura 91: Errores relativos con el ruido en tanto por uno. ITD.

Por último, se ha comprobado como le afecta al método la elección del tiempo de integración del sistema para obtener su respuesta comprobando que los resultados son malísimos para cualquier tiempo de integración distinto de 10^{-3} .

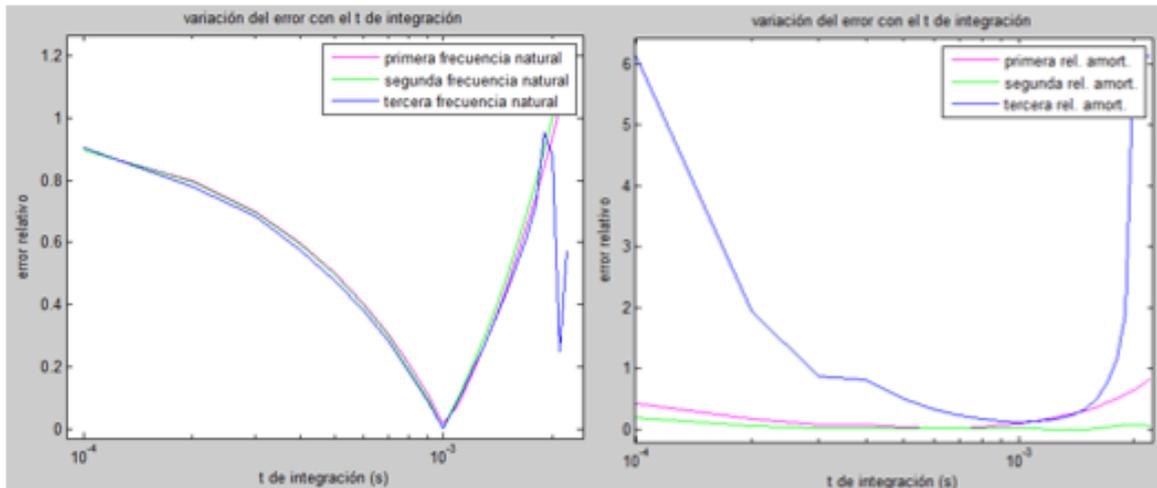


Figura 92: Errores relativos con el $t_{integración}$ en tanto por uno. ITD.

Parándonos ahora a comprobar el funcionamiento del segundo método se observa que es mucho más sensible a un cambio en el Δt , de hecho, los errores en términos de relaciones de amortiguamiento sólo son algo menores cuando Δt es 0.05 segundo y en nada se disparan.

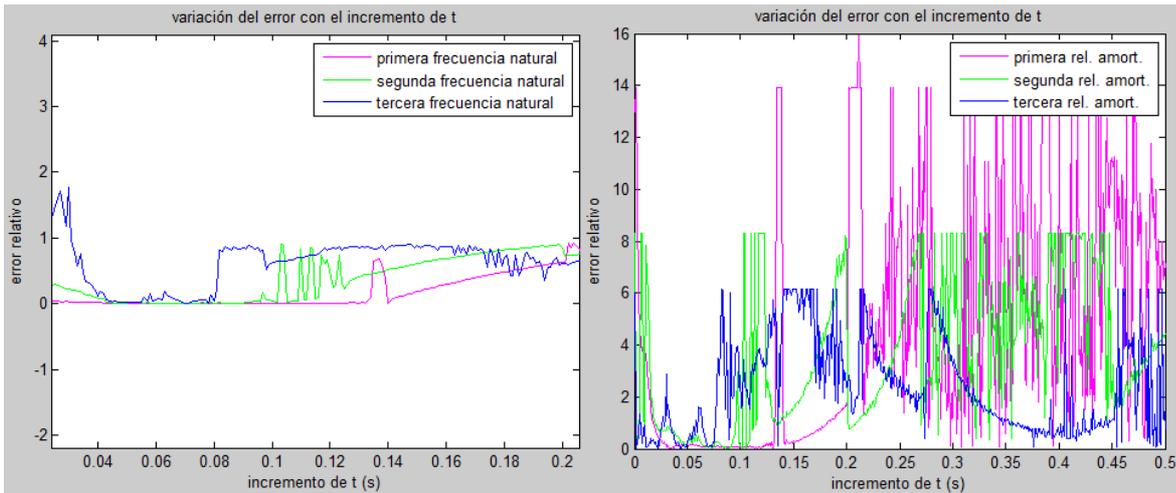


Figura 93: Errores relativos con el Δt en tanto por uno. LSCEM.

Si se varia el ruido en el método LSCEM esto afecta bastante más que en el ITD, sobre todo en términos de relaciones de amortiguamiento que con el 20% el error es de un 600%.

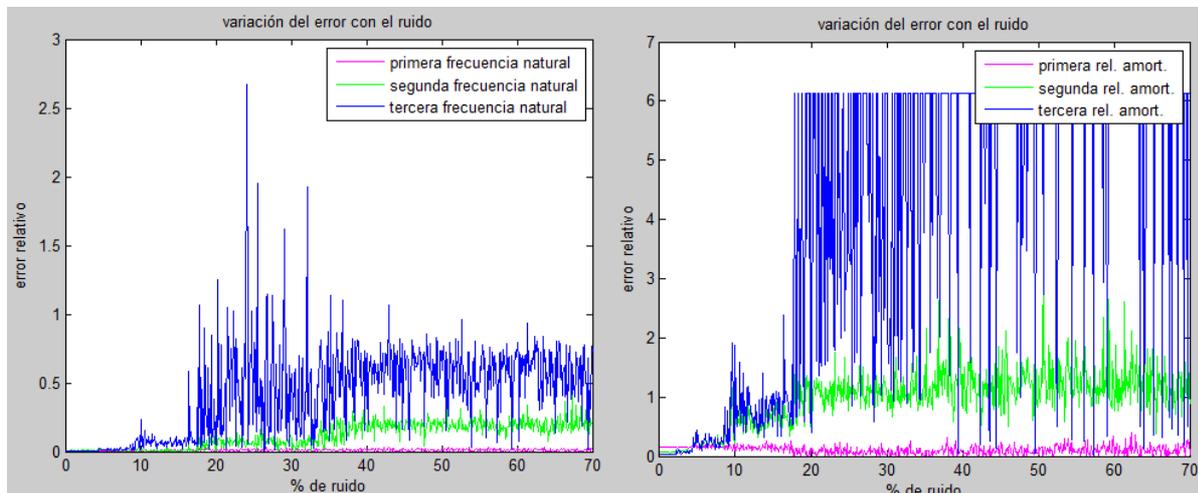


Figura 94: Errores relativos con el Δt en tanto por uno. LSCEM.

Con todo esto, se ha comprobado que el funcionamiento de ambos métodos es bastante bueno, y que son capaces de soportar ciertos cambios dentro de un margen. Habría que destacar algo que ha ocurrido con todo cambio, es el hecho de que los errores en términos de relaciones de amortiguamiento son mucho mayores que en términos de frecuencias naturales. Esto puede ser porque la parte imaginaria los autovalores obtenidos contiene muchos más errores y esto se ve reflejado en las relaciones de amortiguamiento.

También se ha visto que los errores son mayores cuanto mayor es nuestra frecuencia natural estudiada y esto ocurre así en todas las variaciones que hemos hecho.

Un problema que se ha tenido a lo largo de todo el estudio ha sido que las graficas tanto de frecuencias naturales como de relaciones de amortiguamiento no ha seguido un orden concreto y al obtener los autovalores de los métodos desordenados ha habido que hacer muchos cambios para conseguir finalmente unas graficas con sentido. Obviamente cuando estaba cerca del punto de buen funcionamiento el orden era fácil de identificar, pero una vez que se va separando empiezan a distorsionarse los resultados y a volver este gran desorden.

Por último, en el estudio de la viga en voladizo habría que decir que, para la calidad de los aparatos de medida utilizados, y con los errores obtenidos como se ha visto al pasar de aceleración a posición, se han obtenido muy buenos resultados, hasta donde se ha podido debido al criterio de Nyquist. También hay que decir que el hecho de poder calcular los modos en el método ITD ha ayudado mucho a que se pueda identificar la relación entre w_n calculadas y reales.

Por todo lo explicado, se puede decir que los métodos han dado bastante buenos resultados por lo que podrán ser útiles para cálculos futuros siempre teniendo en cuenta los valores de los parámetros que serán óptimos y hasta qué punto un ruido es despreciable.

REFERENCIAS

- [1] Presentación asignatura Dinámica de Sólidos, Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica. Daniel García Vallejo.

ANEXOS

Para que no haya un exceso de código sólo se ha incluido los códigos originales de cada método sin las variaciones estudiadas.

Función por integrar:

```
function f=funcion1(t,z)
%Sistema 3gdl
m1=5;
m2=3;
m3=7;
k1=1000*7;
k2=1000*2;
k3=1000*1;
k4=1000*4;
c1=10*2;
c2=10*2;
c3=10*1;
c4=10*2;

%%simulacion respuesta
M=[m1 0 0;0 m2 0;0 0 m3];
K=[k1+k2 -k2 0;-k2 k2+k3 -k3;0 -k3 k3+k4];
C=[c1+c2 -c2 0;-c2 c2+c3 -c3;0 -c3 c3+c4];

%transformación primer orden
A=[zeros(3,3) M; M C];
B=[-M zeros(3,3);zeros(3,3) K];
C=inv(A)*(-B);

for i=1:6
    f(i,1)=C(i,1)*z(1)+C(i,2)*z(2)+C(i,3)*z(3)+C(i,4)*z(4)+C(i,5)*z(5)+C(i,6)*z(6);
end
end
```

Método de Ibrahim sin variaciones:

```
clear all; clc;
```

close all;

%Método de Ibrahim

%Sistema 3gdl

m1=5;

m2=3;

m3=7;

*k1=1000*7;*

*k2=1000*2;*

*k3=1000*1;*

*k4=1000*4;*

*c1=10*2;*

*c2=10*2;*

*c3=10*1;*

*c4=10*2;*

%%simulacion respuesta

M=[m1 0 0;0 m2 0;0 0 m3];

K=[k1+k2 -k2 0;-k2 k2+k3 -k3;0 -k3 k3+k4];

C=[c1+c2 -c2 0;-c2 c2+c3 -c3;0 -c3 c3+c4];

%transformación primer orden

A=[zeros(3,3) M; M C];

B=[-M zeros(3,3);zeros(3,3) K];

%calculo autoval y autovec

[Vec, Val]=eig(-B,A);

*comp=B*Vec+A*Vec*Val;*

for i=1:3

for j=1:6

autovec(i,j)=Vec(i,j);

end

end

for i=1:3

for j=1:6

modvec(j)=norm(autovec(:,j));

Vecnorm(i,j)=autovec(i,j)/modvec(j);

modulovec(i,j)=norm(Vecnorm(i,j));

```

    end
end

autov=[Val(1,1),Val(2,2),Val(3,3),Val(4,4),Val(5,5),Val(6,6)];

y0=[0 0 0 10 20 10];%ci
t=0:0.001:4;
[t,y]=ode45(@funcion1,t,y0);

x1=y(:,4);
x2=y(:,5);
x3=y(:,6);

figure (1)
plot(t,x1,'r',t,x2,'b',t,x3,'m')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('Desplazamiento (m)')
title('Respuesta en vibración libre del sistema')
legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3')

%ruido
z=length(x1);
ruido=randn(1,z);
amp=max(x1)+10;
while amp>0.05*max(x1)
    amp=max(ruido)-min(ruido);
    ruido=ruido*0.5;
end

figure (2)
plot(t,x1,'r',t,x2,'b',t,x3,'m',t,ruido,'g')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('Desplazamiento (m)')
title('Respuesta en vibración libre del sistema')
legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3','Ruido')

x11=x1+ruido;
x22=x2+ruido;

```

$x33=x3+ruido;$

$xsum=x11+x22+x33;$

figure (3)

plot(t,x11,'r',t,x22,'b',t,x33,'m')

xlabel('tiempo (s)')

ylabel('Desplazamiento(m)')

title('Respuesta en vibración libre del sistema con ruido')

legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3')

%Metodo ibrahim

deltt=50;

inc=3;

inct=30;

%2N

for i=1:6

*Xs(:,i)=[x11((i+inc)*deltt);x22((i+inc)*deltt);x33((i+inc)*deltt)];*

*Xts(:,i)=[x11((i+inc)*deltt+inct);x22((i+inc)*deltt+inct);x33((i+inc)*deltt+inct)];*

*Xtts(:,i)=[x11((i+inc)*deltt+2*inct);x22((i+inc)*deltt+2*inct);x33((i+inc)*deltt+2*inct)];*

end

Xincrs=[Xs;Xts];

Xdoblincrs=[Xts;Xtts];

*Xibs=Xdoblincrs*inv(Xincrs);*

[Vecibs,Valibexps]=eig(Xibs);

*Valibs=(1/(inct*0.001))*log(Valibexps);*

autovibs=[Valibs(1,1),Valibs(2,2),Valibs(3,3),Valibs(4,4),Valibs(5,5),Valibs(6,6)]';

for i=1:3

for j=1:6

autovecibs(i,j)=Vecibs(i,j);

end

end

for i=1:3

```

for j=1:6
    modvecibs(j)=norm(autovecibs(:,j));
    Vecnormibs(i,j)=autovecibs(i,j)/modvecibs(j);
end
end

figure (4)
plot(t,x11,'r',t,x22,'b',t,x33,'m')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('Desplazamiento(m)')
title('Respuesta en vibración libre del sistema con ruido')
legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3')
for i=1:6
    hold on
    plot (t((i+inc)*deltt),Xs(1,i),'r*',t((i+inc)*deltt),Xs(2,i),'b*',t((i+inc)*deltt),Xs(3,i),'m*')
end

%todo t
for i=1:3940
    X(:,i)=[x11(i);x22(i);x33(i)];
    Xt(:,i)=[x11(i+inct);x22(i+inct);x33(i+inct)];
    Xtt(:,i)=[x11(i+2*inct);x22(i+2*inct);x33(i+2*inct)];
end

Xincr=[X;Xt];
Xdoblincr=[Xt;Xtt];

Xib=(Xdoblincr*(Xincr'))*inv(Xincr*(Xincr'));
[Vecib,Valibexp]=eig(Xib);

Valib=(1/(inct*0.001))*log(Valibexp);
autovib=[Valib(1,1),Valib(2,2),Valib(3,3),Valib(4,4),Valib(5,5),Valib(6,6)];

for i=1:3
    for j=1:6
        autovecib(i,j)=Vecib(i,j);
    end
end

```

```
end
```

```
for i=1:3
```

```
    for j=1:6
```

```
        modvecib(j)=norm(autovecib(:,j));
```

```
        Vecnormib(i,j)=autovecib(i,j)/modvecib(j);
```

```
    end
```

```
end
```

Método de LSCEM sin variaciones:

```
clear all; clc;
```

```
close all;
```

```
%Método de LSCEM
```

```
%Sistema 3gdl
```

```
m1=5;
```

```
m2=3;
```

```
m3=7;
```

```
k1=1000*7;
```

```
k2=1000*2;
```

```
k3=1000*1;
```

```
k4=1000*4;
```

```
c1=10*2;
```

```
c2=10*2;
```

```
c3=10*1;
```

```
c4=10*2;
```

```
%%simulacion respuesta
```

```
M=[m1 0 0;0 m2 0;0 0 m3];
```

```
K=[k1+k2 -k2 0;-k2 k2+k3 -k3;0 -k3 k3+k4];
```

```
C=[c1+c2 -c2 0;-c2 c2+c3 -c3;0 -c3 c3+c4];
```

```
%transformación primer orden
```

```
A=[zeros(3,3) M; M C];
```

```
B=[-M zeros(3,3);zeros(3,3) K];
```

```
%calcula autoval y autovec
```

```
[Vec, Val]=eig(-B,A);
```

```
autov=[Val(1,1),Val(2,2),Val(3,3),Val(4,4),Val(5,5),Val(6,6)];
```

```
%respuesta del sistema
```

```
y0=[0 0 0 10 20 10];%ci
```

```
t=0:0.001:4;
```

```
[t,y]=ode45(@funcion1,t,y0);
```

```
x1=y(:,4);
```

```
x2=y(:,5);
```

```
x3=y(:,6);
```

```
%ruido
```

```
z=length(x1);
```

```
ruido=randn(1,z);
```

```
amp=max(x1)+10;
```

```
while amp>0.05*max(x1)
```

```
    amp=max(ruido)-min(ruido);
```

```
    ruido=ruido*0.5;
```

```
end
```

```
figure (2)
```

```
plot(t,x1,'r',t,x2,'b',t,x3,'m',t,ruido,'g')
```

```
xlabel('tiempo (s)')
```

```
ylabel('Desplazamiento (m)')
```

```
title('Respuesta en vibración libre del sistema')
```

```
legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3','Ruido')
```

```
x11=x1+ruido;
```

```
x22=x2+ruido;
```

```
x33=x3+ruido;
```

```
xsum=x11+x22+x33;
```

```
figure (3)
```

```
plot(t,x11,'r',t,x22,'b',t,x33,'m')
```

```
xlabel('tiempo (s)')
```

```
ylabel('Desplazamiento(m)')
```

```
title('Respuesta en vibración libre del sistema con ruido')
```

```
legend('Desplazamiento de la masa 1','Desplazamiento de la masa 2','Desplazamiento de la masa 3')
```

%Metodo LSCEM

inc=35;

for nq=0:5

for nt=0:(length(t)-1)/inc-6;

*M1(nt+1,nq+1)=x11((nq+nt)*inc+1);*

*M2(nt+1,nq+1)=x22((nq+nt)*inc+1);*

*M3(nt+1,nq+1)=x33((nq+nt)*inc+1);*

*V1(nt+1)=-x11((6+nt)*inc);*

*V2(nt+1)=-x22((6+nt)*inc);*

*V3(nt+1)=-x33((6+nt)*inc);*

end

end

M=[M1;M2;M3];

V=[V1';V2';V3'];

Beta=M\V;

Beta=Beta(6:-1:1);

Beta=[1;Beta];

sol=roots(Beta);

*polos=log(sol)/(inc*0.001);*

Beta1=M1\V1';

Beta2=M2\V2';

Beta3=M3\V3';

Beta1=Beta1(6:-1:1);

Beta2=Beta2(6:-1:1);

Beta3=Beta3(6:-1:1);

Beta1=[1;Beta1];

Beta2=[1;Beta2];

Beta3=[1;Beta3];

sol1=roots(Beta1);

*polos1=log(sol1)/(inc*0.001);*

sol2=roots(Beta2);

```

polos2=log(sol2)/(inc*0.001);
sol3=roots(Beta3);
polos3=log(sol3)/(inc*0.001);

```

Método de Ibrahim en la viga:

```
clear all; clc;
```

```
close all;
```

```
load experimento.txt;
```

```
acel = experimento;
```

```
mvol_ms2 = 0.1405;
```

```
figure(1);
```

```
hold on;
```

```
grid on;
```

```
t1 = (acel(:,1)-acel(1,1))/1000000;
```

```
for acc = 1:5
```

```
    aZ(:,acc)=(acel(:,acc+1)-mean(acel(1:200,acc+1)))*mvol_ms2;
```

```
    plot(t1,aZ,'r');
```

```
end
```

```
%interpolacion
```

```
t=0:0.0016:8;
```

```
t=t';
```

```
for j=1:5
```

```
for i=1:length(t)
```

```
    c=1;
```

```
    while t1(c)<t(i) || abs(t1(c)-t(i))<0.0001
```

```
        c=c+1;
```

```
    end
```

```
    c=c-1;
```

```
if abs(t1(c)-t(i))<0.0001
```

```
    az(i,j)=aZ(c,j);
```

```

else
    az(i,j)=aZ(c,j)+((aZ(c+1,j)-aZ(c,j))*(t(i)-t1(c)))/(t1(c+1)-t1(c));
end
end
end

x1=az(:,1);
x2=az(:,2);
x3=az(:,3);
x4=az(:,4);
x5=az(:,5);

in=floor(5/0.0016);

final=length(x1);

x1=x1(in:final);
x2=x2(in:final);
x3=x3(in:final);
x4=x4(in:final);
x5=x5(in:final);

%Metodo ibrahim

inct=1;

fin=final-in-2*inct-1;

for i=1:fin
    X(:,i)=[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i)];
    Xt(:,i)=[x1(i+inct);x2(i+inct);x3(i+inct);x4(i+inct);x5(i+inct)];
    XtT(:,i)=[x1(i+2*inct);x2(i+2*inct);x3(i+2*inct);x4(i+2*inct);x5(i+2*inct)];
end

Xincr=[X;Xt];
Xdoblincr=[Xt;XtT];

Xib=(Xdoblincr*(Xincr'))*inv(Xincr*(Xincr'));

```

```
[Vecib, Valibexp]=eig(Xib);
```

```
Valib=(1/(incr*0.0016))*log(Valibexp);
```

```
autovib=[Valib(1,1),Valib(2,2),Valib(3,3),Valib(4,4),Valib(5,5),Valib(6,6),Valib(7,7),Valib(8,8),Valib(9,9),Valib(10,10)];
```

```
for i=1:10
```

```
    w(i)=norm(autovib(i));
```

```
    f(i)=w(i)/2/pi;
```

```
end
```

```
f
```

```
%Representación modos
```

```
for i=1:5
```

```
    for j=1:10
```

```
        autovecib(i,j)=Vecib(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=1:5
```

```
    for j=1:10
```

```
        modvecib(j)=norm(autovecib(:,j));
```

```
        Vecnormib(i,j)=autovecib(i,j)/modvecib(j);
```

```
    end
```

```
end
```

```
for i=1:5
```

```
    for j=1:10
```

```
        normaliz(i,j)=Vecnormib(i,j)/Vecnormib(5,j);
```

```
        ab(i,j)=norm(normaliz(i,j));
```

```
        arr(i,j)=angle(normaliz(i,j));
```

```
        trig(i,j)=ab(i,j)*cos(arr(i,j));
```

```
        rep(i,j)=real(normaliz(i,j));
```

```
    end
```

```
end
```

```
%%experimento1
```

```
% x=0.5:0.1:0.9;
% x=[0,x];
% repp=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 ; rep];
% for i=1:2:9
% figure(i)
% plot(x,repp(:,i),x,repp(:,i),'or')
% end
```

```
% %experimento2
x=[0,0.2,0.4,0.6,0.8,0.9];
repp=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 ; rep];
for i=1:2:9
figure(i)
plot(x,repp(:,i),x,repp(:,i),'or')
end
```

Método de LSCEM en la viga

```
clear all; clc;
close all;
```

```
load experimento.txt;
acel = experimento;
mvol_ms2 = 0.1405;
```

```
figure(1);
hold on;
grid on;
```

```
t1 = (acel(:,1)-acel(1,1))/1000000;
for acc = 1:5
    aZ(:,acc)=(acel(:,acc+1)-mean(acel(1:200,acc+1)))*mvol_ms2;
    %plot(t1,aZ,'r');
end
```

```
%interpolacion
```

```
int=0.0016;
```

```

t=0:0.0016:8;
t=t';

for j=1:5
for i=1:length(t)

    c=1;
    while t1(c)<t(i) || abs(t1(c)-t(i))<0.0001
        c=c+1;
    end
    c=c-1;

    if abs(t1(c)-t(i))<0.0001
        az(i,j)=aZ(c,j);
    else
        az(i,j)=aZ(c,j)+((aZ(c+1,j)-aZ(c,j))*(t(i)-t1(c)))/(t1(c+1)-t1(c));
    end
end
end

x1=az(:,1);
x2=az(:,2);
x3=az(:,3);
x4=az(:,4);
x5=az(:,5);

in=floor(5/0.0016); %variando el 5 dependiendo de cuando empiece la respuesta real
final=length(x1);

x11=x1(in:final);
x22=x2(in:final);
x33=x3(in:final);
x44=x4(in:final);
x55=x5(in:final);

%LSCEM

inc=2;

```

```

for nq=0:9
    for nt=0:(length(x11)-1)/inc-10;

        M1(nt+1,nq+1)=x11((nq+nt)*inc+1);
        M2(nt+1,nq+1)=x22((nq+nt)*inc+1);
        M3(nt+1,nq+1)=x33((nq+nt)*inc+1);
        M4(nt+1,nq+1)=x44((nq+nt)*inc+1);
        M5(nt+1,nq+1)=x55((nq+nt)*inc+1);

        V1(nt+1)=-x11((10+nt)*inc);
        V2(nt+1)=-x22((10+nt)*inc);
        V3(nt+1)=-x33((10+nt)*inc);
        V4(nt+1)=-x44((10+nt)*inc);
        V5(nt+1)=-x55((10+nt)*inc);

    end
end
M=[M1;M2;M3;M4;M5];
V=[V1';V2';V3';V4';V5'];

Beta=M\V;
Beta=Beta(10:-1:1);
Beta=[1;Beta];
sol=roots(Beta);
polos=log(sol)/(inc*0.0016);

for i=1:10
    w(i)=norm(polos(i));
    f(i)=w(i)/2/pi;
end

```