Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Diseño de rutas de vehículos en una empresa de transporte de hidrocarburos

Autor: Miguel Pardo Millán
Tutor: José Manuel García Sánchez

Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Diseño de rutas de vehículos en una empresa de transporte de hidrocarburos

Autor:

Miguel Pardo Millán

Tutor:

José Manuel García Sánchez

Profesor titular

Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo Fin de Grado: Diseño de rutas de vehículos en una empresa de transporte de hidrocarburos

Autor: Miguel Pardo Millán

Tutor: José Manuel García Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El secretario del Tribunal

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres y hermano todo el apoyo recibido, ese apoyo que me ha motivado para superar con éxito todo lo que me he propuesto. Tambien darles las gracias a mis abuelos que me han inculcado la filosofía del esfuerzo desde pequeño.

Así mismo, reconocer la labor de la empresa Disagón S.L por su colaboración a la hora de proporcionarme toda la información necesaria para la realización de este proyecto.

Se acaba una etapa muy importante en mi vida, y empieza otra, con ilusión y entusiamo, con seguridad de la calidad de la enseñanza recibida en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla, por ello, también darles las gracias a los profesores por su empeño en mejorar el sistema educativo aportándonos competencias necesarias para ser buenos profesionales el día de mañana.

Por último, pero no por ello menos importante, reconocer el esfuerzo del profesor José Manuel García Sánchez, que me ha guiado en la realización de este proyecto, y que siempre ha estado dispuesto a ayudarme en todo lo que he necesitado.

Miguel Pardo Millán

Sevilla, 2018

Resumen

En un entorno altamente competitivo como es el del transporte de combustible, se hace primordial minimizar en la medida de los posible el tiempo de entrega del producto al cliente, con el fin de aumentar no solo el beneficio sino también la satisfacción del cliente, y consigo, la fidelización del mismo. En lo referente a la compraventa del combustible, el tiempo de entrega puede llegar a ser tan importante como el precio de venta, por lo que entregar el producto al cliente cuando este lo requiere y a un precio competitivo es clave para aumentar la cuota de mercado.

En este proyecto trataremos de resolver uno de los problemas más famosos en el mundo de la optimización, no solo por su complejidad, sino también por su gran utilidad en el sector logístico. Nos referimos al "Vehicle Routing Problem", problema de enrutamiento de vehículos en castellano. Se ha utilizado el modelado matemático para resolver el problema de enrutamiento de vehíulos en Disagón S.L, empresa localizada en Valverde del Camino cuyo objeto social es el transporte de combustible. En el presente trabajo se describirá el funcionamiento del proceso de transporte en Disagón, así como las variantes del VRP existentes, el modelado matemático para el problema de enrutamiento aplicado específicamente a esta empresa, y por último se implementará en Lingo para su resolución.

En el VRP básico se suele trabajar con un único vehículo con límite de capacidad y varios clientes que pueden demandar un único tipo de producto. En nuestro caso se aleja un poco de ese escenario ideal e irrealista, y crearemos un modelo que simule el funcionamiento real de Disagón y de muchas empresas de la competencia. En nuestro caso trabajaremos con varios vehículos de diferente capacidad, los cuales tendrán varios tanques cada uno (también de diferentes capacidades), para así poder transportar varios productos al mismo tiempo (Gasóleo A, Gasóleo B, Gasóleo C, Gasolina 95, Gasolina 98 y Gasóleo A PLUS). Otra gran diferencia con el VRP básico reside en el hecho de poder cargar más de una vez al día, esto es, en el caso de que la demanda del cliente sea superior a la capacidad total del camión, se podrá servir una cantidad y volver a las instalaciones para volver a cargar y seguir con el servicio.

Como vemos, dista mucho del problema de enrutamiento básico. Esto hace que el modelado se complique de manera exponencial, así como el tiempo de procesamiento de este por parte de Lingo. Por ello, este proyecto se puede considerar una primera parte necesaria para la posterior realización de una heurística, pudiendo este modelo ser utilizado para la comprobación de su correcto funcionamiento.

1 ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

2 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE TRANSPORTE EN DISAGÓN

"No sé qué es eso de la "logística" de la que Marshall siempre está hablando, pero quiero un poco de ella".

- Enest. J. King -

DISAGÓN SL fue constituida en 19/11/1996 con el siguiente objeto social: transporte de combustible. En la actualidad, es una empresa especializada en la distribución de productos petrolíferos en la zona sur de la península Ibérica. Esta tiene su base logística en el KM 198.9 de la carretera nacional 435 en Valverde del Camino (Huelva), y desde ella se inicia las rutas de distribución.

Imagen 1: Disagón S.L.

Fuente: Propia.

Los productos que DISAGÓN SL distribuye son los siguientes tipos de combustible:

- Gasóleo A
- Gasóleo B
- Gasóleo C
- Gasolina 95
- Gasolina 98
- A Diesel (Gasóleo A PLUS)

De entre todos los productos, el más demandado es el Gasóleo A. Este es el gasóleo de más calidad. El gasoil A es adecuado para vehículos de automoción. Está más refinado y contiene aditivos que aportan una serie de beneficios para el vehículo como son, por ejemplo, reducir el consumo y las emisiones contaminantes, aumentar las prestaciones del motor y proteger la bomba y el sistema de inyección.

El siguiente producto más demandado es el Gasóleo B. Es el gasoil que se usa para maquinaria agrícola, pesquera, embarcaciones y vehículos autorizados. Está menos filtrado y contiene más parafina que el gasóleo A, con lo que puede generar problemas en el mantenimiento en coches y motos. Además, su uso fuera del ámbito indicado está considerado como un delito de fraude o estafa a la Hacienda Pública ya que se estarían evitando los impuestos estatales a pagar si se tratase de gasóleo A.

DISAGÓN S.L dispone de 20 camiones cisterna y todos están operativos. Dentro de la flota se tienen diferentes capacidades:

- 8 trailers articulados de 32.000 litros de capacidad. Aunque, como ya veremos, la suma de las capacidades los depósitos de almacenamiento dentro del tráiler sumen más de 32.000 litros, nunca se podrá transportar en un mismo viaje más de 32.000 litros, a no ser que se adquiera una cabeza tractora. Lo mismo pasa con los demás camiones.
- 5 rígidos de 2 ejes: 14.000 litros, 13.200 litros, 13.300 litros, 11.200 litros y 4.200 litros.
- 7 rígidos de 3 ejes: 20.000 litros cada uno.
- 1 remolque de 18.000 litros, cuyo uso no es habitual.

Cada tanque de carga va identificado con su matrícula *(R-XXXX-YYY)*. A su vez, cada tanque tiene varios depósitos de diferentes capacidades, con el fin de poder transportar varios tipos de productos en un mismo viaje, denominando a cada uno de los compartimentos del tanque como *c.X.*

Ejemplo ilustrativo de un tanque de carga de 4 compartimentos:

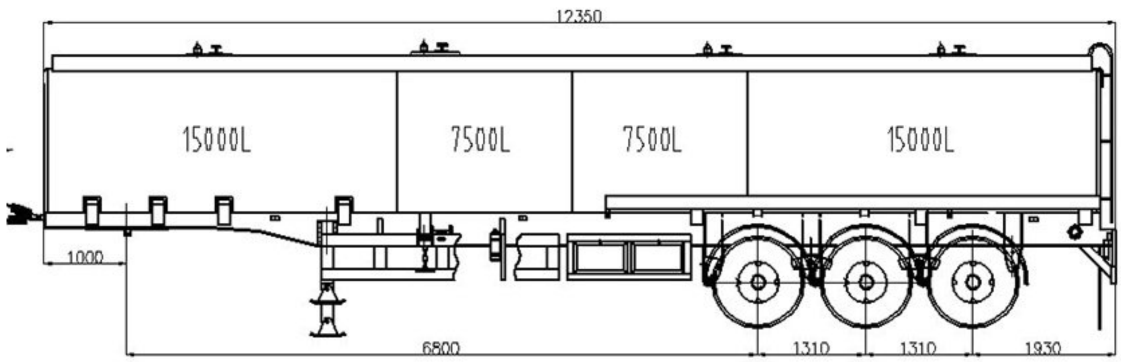

Imagen 2: Ejemplo de camión cisterna genérico.

Fuente: https://spanish.alibaba.com/p-detail/mes-12-calidad-garantizada-3-eje-de-aceite-de-cami%C3%B3n-cisterna-300000937577.html,

- Tráiler:
    - R-6250-BBM:
        - c.1: 10.100 litros.
        - c.2: 5.100 litros.
        - c.3: 6.100 litros.
        - c.4: 12.100 litros.
        - c.5: 5.100 litros.
    - R-6592-BBS:
        - c.1: 10.100 litros.
        - c.2: 5.100 litros.
        - c.3: 6.100 litros.
        - c.4: 12.100 litros.
        - c.5: 5.100 litros.
    - R-6398-BBZ:
        - c.1: 12.100 litros.
        - c.2: 5.100 litros.
        - c.3: 6.100 litros.
        - c.4: 5.100 litros.
        - c.5: 6.100 litros.
        - C.6: 6.100 litros

    - R-1715-BCG:
        - c.1: 10.100 litros
        - c.2: 5.100 litros
        - c.3: 5.100 litros
        - c.4: 13.100 litros
        - c.5: 5.100 litros
    - R-0797-BBC:
        - c.1: 10.100 litros
        - c.2: 6.100 litros
        - c.3: 6.100 litros
    - R-9123-BBS:
        - c.1: 10.127 litros
        - c.2: 5.121 litros
        - c.3: 5.087 litros
        - c.4: 13. 298 litros
        - c.5: 5.193 litros
    - R-3079-BBB:
        - c.1: 10.100 litros
        - c.2: 5.100 litros
        - c.3: 6.100 litros
        - c.4: 12.100 litros
        - c.5: 5.100 litros
    - H-02259-R:
        - c.1: 10.100 litros
        - c.2: 5.100 litros
        - c.3: 6.100 litros
        - c.4: 12.100 litros
        - c.5: 5.100 litros

- Rígidos de 2 ejes:

    - 4326 DKT:
        - c.1: 8.600 litros
        - c.2: 5.500 litros
    - 4486 DYM:
        - c.1: 8.100 litros
        - c.2: 5.100 litros
    - 6259 FKK:
        - c.1: 5.100 litros
        - c.2: 3.100 litros
        - c.3: 5.100 litros
    - 3892 JNW:
        - c.1: 6.100 litros
        - c.2: 5.100 litros
    - 2596 GJK:
        - c.1: 2.100 litros
        - c.2: 2.100 litros

- Rígidos de 3 ejes:

    - Son todos de 3 compartimentos:
        - c.1: 5.100 litros
        - c.2: 10.100 litros
        - c.3: 5.100 litros
- Remolque:

        - c.1: 10000 litros.
        - c.2: 8000 litros.

Hay que destacar que los compartimentos no van asociados a un tipo de producto en específico de forma permanente, es decir, un mismo compartimento puede ser usado en una ruta para transportar, por ejemplo, Gasóleo A y en otra, tras cargar combustible de nuevo, transportar Gasóleo B.

En cada camión solo va un operario, que es el mismo que se encarga de dirigir el camión a los puntos de destino, llamar al cliente si fuera necesario, realizar la operación de descarga e impresión y entrega del albarán al mismo.

El tiempo máximo ininterrumpido de conducción por parte del operario está limitado por ley a 4 horas y 30 minutos, con obligación de hacer al menos un descanso de 45 minutos. Otro aspecto a tener en cuenta es el tiempo máximo de conducción al día, que está limitado a 9 horas/día. De forma excepcional se podrá conducir dos veces en semana hasta 10 horas/día. De forma resumida y para claridad del lector:

- Conducción diaria: 9 horas + 10 horas dos veces por semana. Se mide entre el final de un periodo de descanso diario y el principio del siguiente periodo de descanso diario semanal. No se mide por día natural, entre las 00:00 y las 24:00 horas.

- Conducción semanal: 56 horas. Los tiempos de conducción semanales se miden por semana natural, esto es de las 00:00 horas del lunes hasta las 24:00 horas del domingo, lo que permite que se pueda conducir cuatro días seguidos 10 horas, si se hace el sábado y el domingo de una semana y el lunes y el martes de la siguiente.

- Conducción bisemanal: no se pueden superar las 90 horas en dos semanas consecutivas. Esta comprobación hay que hacerla cada semana en relación con la anterior y también con la posterior.

Respecto a las pausas, si esta es ininterrumpida, debe ser de 45 minutos tras 4:30 horas de conducción. En cambio, si se realizan en dos periodos, primero debe realizarse la pausa de 15min, y luego la de 30min, siempre). Esos tiempos no computan ni en conducción, ni en descanso, es tiempo de disponibilidad, es decir, tiempo en el que no conduces, pero estás disponible para hacerte cargo del vehículo. En una jornada de 10h, las pausas son idénticas a una de 9h, es decir, 4,5h conducción, 45min pausa, 4,5h conducción, 45min pausa, 1h conducción. La normativa que regula los tiempos de conducción y descaso es el Reglamento CE 561/2006, exponiendo la obligación de utilizar un tacógrafo en el vehículo para realizar todas las mediciones.

Los clientes potenciales de DISAGÓN S.L son:

- Construcción
- Panadería
- Industria
- Agricultura
- Hoteles
- Calefacción en hogares
- Transporte
- Particulares

Como ya se ha dicho, el reparto siempre comienza desde la base logística de DISAGÓN SL en el KM 198.9 de la carretera nacional 435 en Valverde del Camino (Huelva). Desde la base, los camiones que van a realizar el reparto se dirigen, o bien, a las instalaciones de almacenamiento de CLH S.A, o directamente comienza el reparto. El caso más habitual es que se carguen los camiones en CLH, pero diariamente cargan camiones rígidos de 2 ejes en la misma base logística de Valverde.

Cuando un camión inicia una ruta, se permite al conductor dar más de una vuelta, es decir, dicho conductor puede abastecer a varios clientes y volver a cargar en CLH o Disagón para seguir con la ruta estipulada. De hecho, lo más habitual es que cada camión cargue 2 o tres veces al día. La normativa de CLH obliga a que cualquier camión que cargue en su centro, esté completamente vacío, lo que obliga a los camiones de DISAGÓN en este caso a vaciar previamente los tanques de sus camiones en la sede de Valverde para poder cargar de nuevo y así seguir con el reparto. Es por lo tanto con estas descargas con las que se abastecen los tanques de la base principal. De no ser así, los camiones que quisieran cargan en CLH deberían vaciar sus depósitos por completo en la propia CLH, perdiendo de esta manera producto en perfecto estado. De esta forma DISAGÓN se aprovechan estos "restos" de combustibles, que se utilizarán para abastecer a clientes de confianza que demanden pequeñas cantidades. La capacidad máxima de los tanques de la base es de 90.000 litros.

Referente a las vías de transporte, siempre que se pueda se circulará por las vías de la RIMP (Red de itinerarios para mercancías peligrosas), que comprende autovías y autopistas y carreteras convencionales.

Imagen 3: Vías de la RIMP.

Fuente: http://www.dgt.es/images/ResolucionMapaRIMPModificada.pdf.

Si se reciben pedidos que no pueden ser abastecidos por falta de capacidad (algo que no es nada habitual), dependerá del tipo de cliente, tamaño de su pedido, y la urgencia de este el que se acepte dicho pedido, intentando por ejemplo aplazar la entrega de otro pedido para que el dicho cliente pueda ser atendida con urgencia.

CLH S.A es una de las principales empresas españolas habilitada para el transporte y almacenamiento de productos petrolíferos. Las instalaciones del Grupo CLH en Huelva se encuentran en Palos de la Frontera (Ctra. Huelva-Mazagón, km. 8. 21810). El horario del servicio de expedición es de lunes a viernes 24 h/día.

Imagen 4: *Centro Logístico de Hidrocarburos, Huelva*

Fuente: http://aiqbe.es/asociado/clh/6

Una vez llegan los camiones de DISAGÓN SL a las instalaciones de CLH S.A, estos se dirigen a la zona de carga de camiones para abastecerse de combustible. Todo el proceso de carga está automatizado. En el control de la entrada a las instalaciones se identifica al conductor mediante un dispositivo electrónico y se comprueba si el camión y la carga están autorizado.

Antes de la carga, se comprueba que todos los equipos necesarios –toma de tierra, brazos de carga, recuperación de gases y sistemas anti-rebose– están correctamente conectados y durante la misma se efectúan controles para garantizar que no se superan ni el grado máximo de llenado de los compartimentos, ni el peso máximo autorizado para el vehículo, que la toma de tierra permanece conectada y que la proporción de aditivación es correcta.

Imagen 5: *Carga de camiones en CLH.*

Fuente: https://www.vozpopuli.com/economia-y-finanzas/empresas/Grupo_CLH-Plan_estrategico-Petroleo-CLH-plan_estrategico_CLH_0_796420368.html.

El siguiente paso es acceder a la zona de impresión de toda la documentación, donde se comprueba de nuevo que la aditivación ha sido correcta, se realiza un nuevo control de peso máximo y se imprime la documentación comercial y fiscal, además de enviarse automáticamente la información a los sistemas centrales de la compañía.

Finalmente, si todos los pasos anteriores se han desarrollado correctamente, el control de salida de la planta permite al camión y al conductor abandonar la instalación. El proceso que comprende desde el control de entrada hasta el control de salida suele durar unos 40 minutos aproximadamente (esto dependerá de la cola que haya en las instalaciones para cargar).

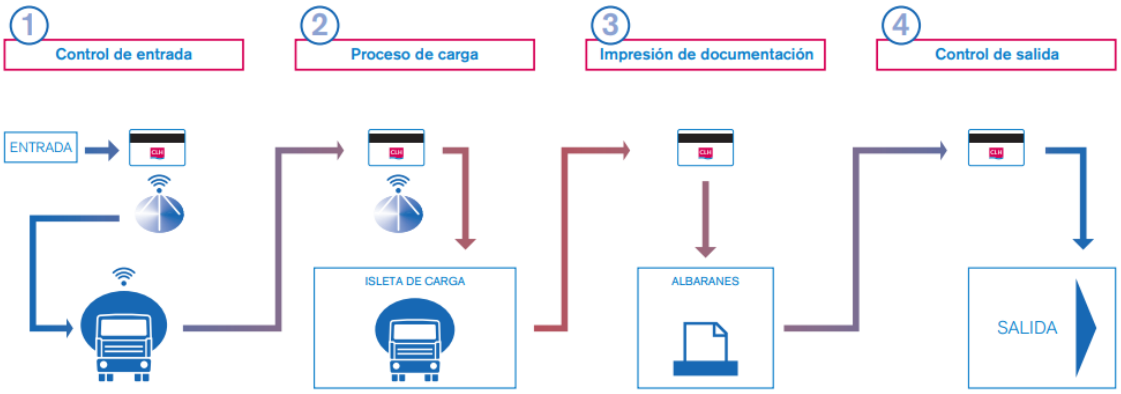

Imagen 6: *Proceso de carga de camiones en CLH.*

Fuente: http://www.clh.es/index.cfm?lang=sp.

Una vez el tráiler sale de las instalaciones de CLH S.A, comienza el reparto de los diferentes productos a los diferentes clientes.

Los pedidos se suelen servir, si no se ha superado la limitación de tiempo de reparto (horas de conducción del transportista) o la capacidad de la flota, al día siguiente de realizar el pedido por parte del cliente. En el caso de que el pedido se realice un viernes, este se serviría el lunes. A la hora de servir al cliente puede existir cierto grado de prioridad a la hora de servir a los clientes. Esto puede ir en función de que el mismo sea un cliente habitual con una urgencia puntual.

Una vez que se llega al punto de descarga, se tarda aproximadamente 10 minuto en colocar el vehículo con las señalizaciones pertinentes y preparar el vehículo para la descarga del combustible. A esto habría que añadir una media de 1 minuto por cada 300 litros descargados.

Un hecho muy habitual es que se reparta a ciertos clientes de forma periódica. Las cantidades suelen ser las mismas, pero de forma excepcional cambian por decisión del cliente.

Como ya se explicó con anterioridad, una vez que la ruta del camión en cuestión termina, este vuelve a la base.

3 TEORÍA DE LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

Antes de comenzar a tratar el problema de ruteo, veo necesario hacer una breve introducción a la teoría de la complejidad computacional.

La teoría de la complejidad estudia cómo crece el coste computacional (principalmente en memoria y tiempo), de resolver un determinado problema en relación a lo que crece el tamaño de dicho problema. Así, podemos clasificar los problemas de acuerdo a su estructura y dificultad. Encontramos dos conjuntos de problemas:

- *P:* Conjunto de problemas en los que podemos **encontrar** una respuesta al problema en un tiempo razonable (tiempo polinomial).

- *NP:* Conjunto de problemas en los que podemos **comprobar** en un tiempo razonable (tiempo polinomial) si una respuesta al problema es correcta o no (es decir, es o no solución).

Con esto podemos afirmar en los problemas que están en P, están también en NP, ya que si podemos encontrar una solución en un tiempo razonable, podremos también comprobar si la respuesta es o no solución. Lo que no está tan claro es si un problema que está en NP, lo estará también en P, o sea, que el que podamos comprobar fácilmente una solución, no implica que podamos encontrar fácilmente una solución. Por ejemplo, imaginemos que nos dan una cantidad finita de números positivos y negativos, y nos piden que elijamos una cantidad definida de ellos de forma que sumen cero. Si te dan una respuesta podremos comprobar fácilmente si es solución de nuestro problema, basta con sumarlos y ver si dan cero, pero encontrar ese conjunto no es para nada tan sencillo. Este problema es conocido como problema de la suma de subconjuntos, y es NP-completo.

EL problema P-NP se pregunta si estos dos conjuntos son iguales o no, es decir, si para cualquier problema para el que podemos ***comprobar*** fácilmente la solución, podemos ***encontrar*** fácilmente una solución.

Otro error muy común es afirmar que P y NP son subconjuntos totalmente distintos, ya que esto aún no está demostrado. De hecho, el demostrar que P y NP son subconjuntos distintos es uno de los problemas del milenio cuya resolución sería premiada, según anunció el Clay Mathematics Institute en el año 2000, con la suma de un millón de dólares.

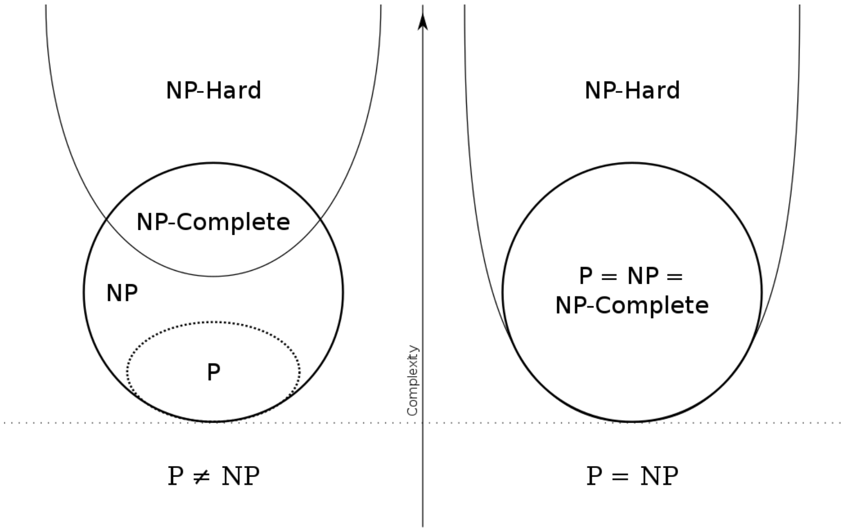

Imagen 7: *P-NP*

Fuente: https://stackoverflow.com/questions/17031505/can-i-automatically-generate-an-euler-venn-diagram-from-a-containment-graph.

El pasado agosto de 2017, Norbert Blum, informático teórico alemán y profesor en la universidad de Bonn, afirmó haber demostrado que P era distinto a NP. Poco después, tuvo que retractarse por su afirmación.

Diez días antes al comienzo de la realización de este documento, concretamente el 15 de febrero, Angelo Raffaele Melo dice haber demostrado la desigualdad de P y NP en su artículo "On the P vs NP question: a proof of inequality" a través del problema "Boolean satisfiability problem". Estaremos atentos a los próximos acontecimientos, pero por lo que opinan los expertos, lo más seguro es que dicha demostración no tenga validez.

Hay muchos problemas en NP que no sabemos resolver en tiempo razonable. Pero ¿Significa eso que no están en P?, ¿O significa quizás que aún no hemos encontrado un algoritmo que lo resuelva?, nadie lo sabe.

Imagen 8: *¿P≠NP?*

Fuente:https://derstandard.at/2000063601714/Groesstes-Problem-der-Informatik-bleibt-vorlaeufig-ungeloest.

La teoría de la complejidad también nos dice que en el momento en el que se encuentre una solución en tiempo polinomial para un problema NP-completo (es decir, que dicho problema NP-completo pertenece a P) habremos demostrado que cualquier problema NP-completo puede resolverse en tiempo polinomial. En el presente trabajo se tratará de resolver el problema de ruteo de vehículos, problema considerado NP-completo.

4 PROBLEMA DE ENRUTAMIENTO DE VEHÍCULOS

4.1 ¿Qué es el enrutamiento de vehículos?

El problema de ruteo de vehículos, comúnmente llamado Vehicle Routing Problem (VRP), es el problema más frecuente dentro de la optimización en logística. Podríamos definirlo como aquel problema en el que vehículos ubicados en un depósito central, son utilizados para visitar a clientes que se encuentran geográficamente en diferentes localizaciones para satisfacer así su demanda. El objetivo del VRP puede ser diverso, pero el más habitual es minimizar el coste del transporte de una flota de vehículos que realizan una ruta de reparto fuera de la base.

4.2 Aplicaciones del enrutamiento de vehíulos

Las aplicaciones más habituales del VRP las encontramos en el sector de la logística. Las compañías de mensajería y paquetería pueden ser quizás las más beneficiadas por la aplicación de algoritmos de resolución del VRP.

Hay infinidad de ejemplos de aplicaciones reales del VRP, como por ejemplo el ruteo de autobuses escolares (Bektaş y Elmastaş, 2007) y en el diseño de tours turísticos para visitar varios puntos de interés en una ciudad (Gavalas et al., 2014). Otro problema común lo encontramos en la ruta de recogida de residuos urbanos (Hemmelmayr et al., 2014). En el sector de la salud nos encontramos problemas como el transporte de donaciones de sangre a centros de almacenamiento.

Uno de los problemas más habituales en este ámbito es el enrutamiento de camiones cisterna en la distribución de productos petrolíferos, cuya resolución será el objeto del presente proyecto.

Las aplicaciones más directas del problema de ruteo lo encontramos en el sector de la logística. Veamos algunas aplicaciones en este sector:

- *Rutas escolares:* Las rutas escolares representan una de las primeras aplicaciones del Problema de ruteo (en este caso TSP). Fue Merrill Floodquien se interesó por el problema del viajante cuando estaba intentando determinar una ruta escolar optima. Actualmente, muchas empresas dedicadas al transporte de personas adquieren software de resolución de TSP que les permite reducir gastos de una manera significativa.

Imagen 9: *Bus escolar*

Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:405_2000_AmTran_RE_T444E.jpg.

- *Repartos:* En el reparto de paquetería ha sido muy habitual el uso de software que llevan implementados algoritmos para la resolución de problemas de ruteo de vehículos. Este apartado es también aplicable al reparto de otro tipo de mercancía (alimento, combustible, etc).

Imagen 10: *Camión cisterna de transporte de hidrocarburos.*

Fuente: *http://camiones26.rssing.com/chan-6653473/all_p862.html.*

- *Turismo:* Es muy habitual que las empresas que ofertan visitas a ciudad importantes tengan un software para el cálculo de rutas de visita a monumentos y lugares emblemáticos. El funcionamiento es exactamente el mismo que en un TSP: el bus parte del hotel donde se hospedan los clientes, y ahora cada nodo es un monumento o lugar emblemático de la ciudad. Al final de la ruta se vuelve al hotel.

Imagen 11: *Tour turístico en Nueva York*

Fuente:http://www.nywaterway.com/YKTTC_AllAroundTownDoubleDeckerBus.aspx

Como se puede apreciar, el ruteo de vehículos tiene aplicaciones ilimitadas. De ahí que sea uno de los problemas más útiles en el mundo de la logística.

4.3 VARIANTES DEL PROBLEMA DE ENRUTAMIENTO

Dentro del problema de ruteo de vehículos podemos diferenciar dos grandes grupos.

- Cuando en nuestro problema hay un único vehículo, que es el mismo que tiene que abastecerá a todos los clientes, hablaremos de TSP ("Travelling salesman problem") y sus variantes.
- Cuando disponemos de varios vehículos para realizar el reparto, se suele hablar directamente de VRP y sus variantes.

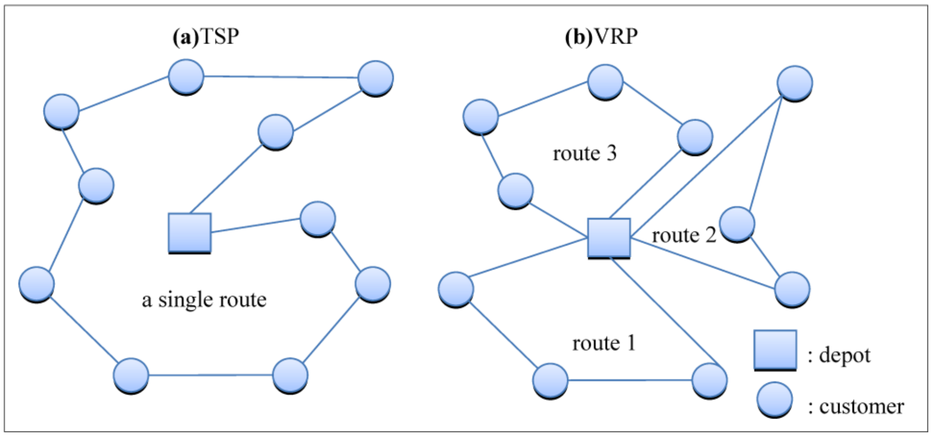

Imagen 12: *TSP y VRP*

Fuente:[*https://www.researchgate.net/figure/Illustration-of-the-traveling-salesman-problem-TSP-and-vehicle-route-problem-VRP_fig1_277673931*](https://www.researchgate.net/figure/Illustration-of-the-traveling-salesman-problem-TSP-and-vehicle-route-problem-VRP_fig1_277673931).

Procedemos pues a modelar ciertas variantes básicas del TSP y VRP que nos pueden ayudar a formular correctamente el problema que nos compete, el enrutamiento de los camiones de DISAGÓN S.L.

4.3.1 TSP Y SUS VARIANTES

Como ya hemos dicho, en el TSP hay un único vehículo que será el que se encargado de repartir el producto a todos los clientes. Al final de la ruta, este vehículo volverá al depósito desde el que partió.

Existen 2 versiones del problema TSP:

- *Simétrico*: El grafo en este caso sería no dirigido, por lo tanto, la matriz de costes es simétrica. El coste de ir del nodo i al j es el mismo que de ir de j a i.

- *Asimétrico*: El grafo sería dirigido, y lo por lo tanto la matriz de costes asimétrica. El coste de ir del nodo i al j es diferente que de ir de j a i.

Procedemos a la construcción del modelo básico del TSP.

Sea $G = (V, A)$ un grafo completo, donde V corresponde a los vértices del grafo (nodos) y A a los arcos del grafo:

<u>Parámetros:</u>

- i: Nodo origen
- j: Nodo destino
- Cij: Coste de ir del nodo origen al nodo destino
- ui: Representa la posición en la que se visita el nodo i.
- n: Número de clientes a visitar

<u>Actividades de decisión:</u>

- $X_{ij} \begin{cases} 1\ si\ el\ vehículo\ va\ de\ i\ a\ j \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$

<u>Restricciones:</u>

1. De cada ciudad se sale únicamente una vez.
2. A cada ciudad se llega únicamente una vez.
3. No pueden formarse ciclos.

Modelo:

$$Min \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} \cdot X_{ij}$$

sa:

$$\sum_{j} X_{ij} = 1 \qquad i = 1 \dots n \quad (1)$$

$$\sum_{i} X_{ij} = 1 \qquad j = 1 \dots n \quad (2)$$

$$u_i - u_j + n \cdot X_{ij} \leq n - 1 \qquad i = 1 \dots n - 1; j = 2 \dots n \quad (3)$$

Procedemos a explicar un poco más a fondo la restricción que elimina los ciclos:

Si vamos de i a j, $X_{ij} = 1$ y $u_i - u_j = -1 \leq 0$. Si vamos de i a j pasando por otros nodos, $X_{ij} = 0$, y $u_i - u_j \leq (n - 1)$. Se cumple pues la inecuación de que la diferencia máxima entre u_i y u_j sea $n - 1$, que es el caso de que $u_1 = 1$ y $u_k = n$.

Tomando como ejemplo la *imagen 8*, veamos cómo actúa la restricción que impide la formación de ciclos (3):

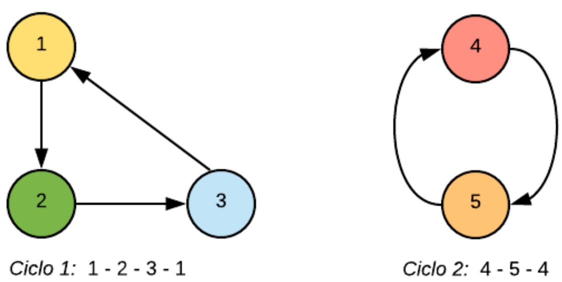

Imagen 8: Ejemplo de ciclos

Fuente: Elaboración propia

Si aplicamos la ecuación de eliminación de ciclos:

$$Ciclo\ 1: \quad \begin{array}{c} u_1 - u_2 + 5X_{12} \leq 4 \\ u_2 - u_3 + 5X_{23} \leq 4 \\ \hline u_1 - u_3 + 10 \leq 8 \end{array}$$

$$Ciclo\ 2: \quad \begin{array}{c} u_4 - u_5 + 5X_{45} \leq 4 \\ u_5 - u_4 + 5X_{54} \leq 4 \\ \hline 10 \leq 8 \end{array}$$

Podemos observar esta restricción se cumplirá siempre que el nodo 1 pertenezca al ciclo, lo que obliga a la existencia de un único ciclo en el problema. En el momento en el exista un ciclo que no contenga al nodo 1, la restricción no se cumplirá.

Existen multitud de variantes del TSP. Explicamos algunas de ellas:

- *TSP generalizado:* Los clientes se encuentran agrupados en subgrupos, y el objetivo del problema es visitar a un cliente de cada subgrupo a coste mínimo.

- *TSP agrupado:* Los clientes se encuentran agrupados en clusters o subgrupos, y el objetivo del problema es visitar a todos los clientes de cada cluster de forma consecutiva.

- *TSPPD (Travelling Salesman Problem with Pick-up and Delivery):* El vehículo que realiza el reparto y/o recogida de productos.

- *TSP con cuello de botella:* La diferencia de esta variante con el TSP estándar es que se trata de minimizar el coste del arco con mayor coste, en lugar de minimizar el coste total.

- *TSPMD (Travelling Salesman Problem with Moving Destinations):* En este caso el cliente debe ser visitanto en una franja horaria en las que se encuentre disponible (time Windows).

- *PTSP (Probabilistic Travelling Salesman Problem):* En esta variante del TSP no tenemos las localizaciones de los clientes, si no que esta viene determinada por una función de probabilidad.

4.3.2 VRP Y SUS VARIANTES

Se suele hablar de VRP cuando más de un vehículo va a realizar la ruta de reparto (o recogida). Al igual que el TSP, al final de la ruta de reparto todos los vehículos vuelven al depósito (o depósitos).

Como pasaba con el TSP, existen dos versiones del VRP:

- *Simétrico:* Se dice que el problema VRP es simétrico cuando se utiliza una matriz de costes Cij simetrica, es decir, el coste de ir de i a j es el mismo que el de ir de j a i.

- *Asimétrico:* Se dice que el problema VRP es asimétrico cuando se utiliza una matriz de costes Cij asimétrica, es decir, el coste de ir de i a j es distinto que el de ir de j a i.

Procedemos pues a modelar el problema VRP en el que hay una serie de clientes a los que hay que abastecer con una flota heterogénea de vehículos.

<u>Parámetros:</u>

- i: Nodo origen
- j: Nodo destino
- h: Índice auxiliar para cliente
- k: Vehículo utilizado
- Cij: Coste de ir del nodo origen al nodo destino
- n: Número de clientes a visitar

- K: Número de vehículos disponibles

Actividades de decisión:

- $X_{ijk}\begin{cases} 1\ si\ el\ vehículo\ k\ va\ de\ i\ a\ j \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$

Restricciones:

1. Todos los vehículos salen del depósito.
2. Todos los vehículos vuelven al depósito.
3. Todo vehículo que visite a un nodo cliente, debe salir de dicho nodo.
4. Cada cliente debe ser servido por un único vehículo.
5. No puede producirse ciclos.

Modelo:

$$Min \sum_i \sum_j \sum_k C_{ij} \cdot X_{ijk}$$

sa:

$$\sum_j X_{0jk} = 1 \qquad k = 1 \dots K \quad (1)$$

$$\sum_i X_{i,n+1,k} = 1 \qquad k = 1 \dots n \quad (2)$$

$$\sum_i X_{ihk} = \sum_j X_{hkj} \qquad h = 1 \dots n; k = 1 \dots K \quad (3)$$

$$\sum_j \sum_k X_{ijk} = 1 \qquad i = 1 \dots n \quad (4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} X_{ijk} \leq |S| - 1 \qquad S \subset C; 2 \leq |S| \leq n; k = 1..K \quad (5)$$

La restricción (1) impone que todo vehículo parte del depósito, es decir, del nodo 0. La restricción (2) obliga a que todos los vehículos, al acabar la ruta, regresen al depósito, que como se ve en la *imagen 9*, sería el nodo $n+1$. La restricción (3) impone que todo vehículo k que visite a un nodo cliente, debe salir de dicho nodo. La restricción (4) obliga a que cada cliente solo pueda ser servido por un solo vehículo. Por último, la restrcción (5) prohibe la formación de ciclos.

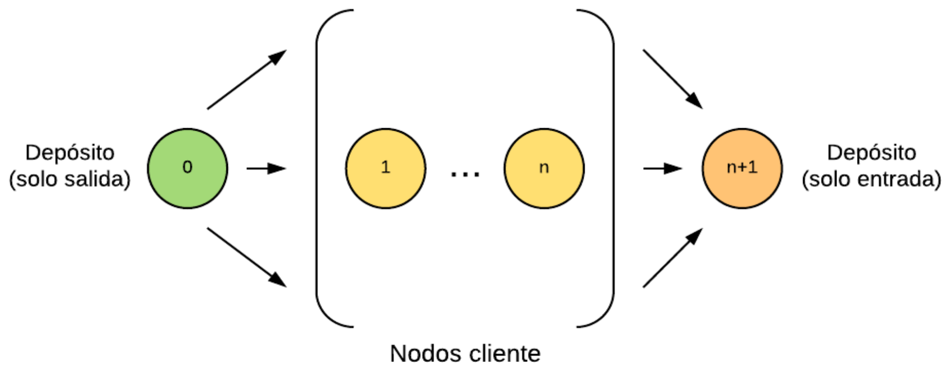

Imagen 9: Grafo.

Fuente: Elaboración propia

Aparte del VRP con flota heterogénea, existen multitud de variantes de VRP. Veamos algunos de ellos:

- *VRPB (Vehicle Routing Problem With Backhauls):* Este problema permite no solo entrega de producto, sino también la recogida del mismo. Una opción de afrontar el problema es la división de clientes en clientes a los que hay que entregar producto *(linehaul)* y clientes a los que hay que recogerle producto *(backhaul).*

- *VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows):* La diferencia con el VRP estándar reside en que los clientes deben ser abastecidos en una franja horaria determinda.

- *PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem):* En los VRP clásicos, generalmente el período de planificación es de un solo día. En este caso se extiende a M días.

- *MDVRP (Mutiple Depot Vehicle Routing Problem):* En este caso tenemos multiplicidad de almacenes, cada uno con una flota de vehículos.

- *FSMVRP (FleetSize and Mix Vehicle Routing Problem):* En esta variante del VRP los vehículos pertenecientes a la flota pueden tener capacidades diferentes, con todo lo que eso conlleva (diferente coste, diferente velocidad, etc).

- *GVRP (Generalized Vehicle Routing Problem):* En este caso los clients se dividiran en clusters y acontinuación se visitará a un cliente de cada cluster únicamente, dejando a los demás clientes de cada cluster sin ser atendidos.

- *VRPPD (Vehicle Routing Problem with Pick-up and Delivery):* Es un VRP en el que se contempla la posibilidad de que los clientes devuelvan producto. Por lo tanto, en esta variante es necesario tener en cuenta que los productos que los clientes devuelven deben caber en él.

- *CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem):* Esta variante del VRP es la más habitual. En ella cada vehículo tiene una capacidad, y estos deben atender la demanda de los diferentes clientes previamente conocidas.

Como vemos existen gran variedad de variantes del problema VRP. Decir también que todas estas variantes (y las que no están expuestas en el documento) pueden unirse para formar otras variantes resultado de esa unión, como por ejemplo el *VRPPDTW (vehicle routing problems with pickup and delivery with time Windows).*

5 Modelado del problema de enrutamiento en Disagón

En este capítulo se va a proceder al modelado del problema de enrutamiento de vehículos aplicado a la empresa Disagón S.L. Para ello comenzaremos describiendo los elementos que intervendrán en el modelo, así como sus atributos o características. Tras ello, describiremos las variables del problema y a partir de las especificaciones, generaremos las restricciones del modelo.

5.1 Elementos del problema

Los elementos del problema son, como su propio nombre indica, los elementos que participarán en el proceso de transporte y que son necesarios para un correcto modelado del problema.

Elementos	*Tipología*	*Características*
Nodo	Conjunto i=1…230	Base: B_i (Binario) CLH: CLH_i (Binario) Origen: O_{ik} Destino: DD_{ik} Pertenencia a nodo: $pert_{ci}$
Cliente	Conjunto c=1…15	Pertenencia a nodo: C_{ci} Demanda cliente: DE_{cp}
Vehículo	Conjunto v=1…20	Horas de conducción: H_v Pertenencia de tanque a vehículo: P_{tv} (Binario).
Arista	Conjunto k=1…329	Coste: $COST_k$ Origen: O_{ik} Destino: DD_{ik}
Producto	Conjunto p=1..6	Velocidad de descarga: V_p Demanda cliente: DE_{cp}

Tanque	Conjunto t=1…70	Capacidad tanque: C_t Pertenencia de tanque a vehículo: P_{tv} (Binario).
Vueltas	Conjunto r =1…3	---

Tabla 1: Elementos del problema.

O_{ik}: Atributo que relaciona el nodo con arista. Arista k tal que i es origen.

DD_{ik}: Atributo que relaciona nodo con arista. Arista k tal que i es destino.

Respecto a los productos, numeraremos cada uno de ellos para facilitar su identificación:

- Gasóleo A: Producto 1
- Gasóleo B: Producto 2
- Gasóleo C: Producto 3
- Gasolina 95: Producto 4
- Gasolina 98: Producto 5
- A Diesel (Gasóleo A PLUS): Producto 6.

De igual manera debemos de hacer con los vehículos:

- Tráiler (vehículo 1):
  - R-6250-BBM:
    - c.1: 10.100 litros: (tanque 1)
    - c.2: 5.100 litros. (tanque 2)
    - c.3: 6.100 litros. (tanque 3)
    - c.4: 12.100 litros. (tanque 4)
    - c.5: 5.100 litros. (tanque 5)
  - R-6592-BBS (vehículo 2):
    - c.1: 10.100 litros. (tanque 6)
    - c.2: 5.100 litros. (tanque 7)
    - c.3: 6.100 litros. (tanque 8)
    - c.4: 12.100 litros. (tanque 9)
    - c.5: 5.100 litros. (tanque 10)
  - R-6398-BBZ (vehículo 3):
    - c.1: 12.100 litros. (tanque 11)
    - c.2: 5.100 litros. (tanque 12)
    - c.3: 6.100 litros. (tanque 13)
    - c.4: 5.100 litros. (tanque 14)
    - c.5: 6.100 litros. (tanque 15)
    - C.6: 6.100 litros. (tanque 16)
  - R-1715-BCG (vehículo 4):
    - c.1: 10.100 litros. (tanque 17)
    - c.2: 5.100 litros. (tanque 18)
    - c.3: 5.100 litros. (tanque 19)
    - c.4: 13.100 litros. (tanque 20)
    - c.5: 5.100 litros. (tanque 21)
  - R-0797-BBC (vehículo 5):
    - c.1: 10.100 litros. (tanque 22)
    - c.2: 6.100 litros. (tanque 23)

        - c.3: 6.100 litros. (tanque 24)
    - R-9123-BBS <u>(vehículo 6):</u>
        - c.1: 10.127 litros. (tanque 25)
        - c.2: 5.121 litros. (tanque 26)
        - c.3: 5.087 litros. (tanque 27)
        - c.4: 13. 298 litros. (tanque 28)
        - c.5: 5.193 litros. (tanque 29)
    - R-3079-BBB <u>(vehículo 7):</u>
        - c.1: 10.100 litros. (tanque 30)
        - c.2: 5.100 litros. (tanque 31)
        - c.3: 6.100 litros. (tanque 32)
        - c.4: 12.100 litros. (tanque 32)
        - c.5: 5.100 litros. (tanque 34)
    - H-02259-R <u>(vehículo 8):</u>
        - c.1: 10.100 litros. (tanque 35)
        - c.2: 5.100 litros. (tanque 36)
        - c.3: 6.100 litros. (tanque 37)
        - c.4: 12.100 litros. (tanque 38)
        - c.5: 5.100 litros. (tanque 39)

- Rígidos de 2 ejes:

    - 4326 DKT <u>(vehículo 9</u>):
        - c.1: 8.600 litros. (tanque 40)
        - c.2: 5.500 litros. (tanque 41)
    - 4486 DYM <u>(vehículo 10):</u>
        - c.1: 8.100 litros. (tanque 42)
        - c.2: 5.100 litros. (tanque 43)
    - 6259 FKK <u>(vehículo 11):</u>
        - c.1: 5.100 litros. (tanque 44)
        - c.2: 3.100 litros. (tanque 45)
        - c.3: 5.100 litros. (tanque 46)
    - 3892 JNW <u>(vehículo 12):</u>
        - c.1: 6.100 litros. (tanque 47)
        - c.2: 5.100 litros. (tanque 48)
    - 2596 GJK <u>(vehículo 13):</u>
        - c.1: 2.100 litros. (tanque 49)
        - c.2: 2.100 litros. (tanque 50)

- Rígidos de 3 ejes:

    - <u>Vehículo 14</u>
        - c.1: 5.100 litros. (tanque 51)
        - c.2: 10.100 litros. (tanque 52)
        - c.3: 5.100 litros. (tanque 53)

    - <u>Vehículo 15</u>
        - c.1: 5.100 litros. (tanque 54)
        - c.2: 10.100 litros. (tanque 55)

- c.3: 5.100 litros. (tanque 56)

- Vehículo 16
  - c.1: 5.100 litros. (tanque 57)
  - c.2: 10.100 litros. (tanque 58)
  - c.3: 5.100 litros. (tanque 59)

- Vehículo 17
  - c.1: 5.100 litros. (tanque 60)
  - c.2: 10.100 litros. (tanque 61)
  - c.3: 5.100 litros. (tanque 62)

- Vehículo 18
  - c.1: 5.100 litros. (tanque 63)
  - c.2: 10.100 litros. (tanque 64)
  - c.3: 5.100 litros. (tanque 65)

- Vehículo 19
  - c.1: 5.100 litros. (tanque 66)
  - c.2: 10.100 litros. (tanque 67)
  - c.3: 5.100 litros. (tanque 68)

- Vehículo 20
  - c.1: 5.100 litros. (tanque 69)
  - c.2: 10.100 litros. (tanque 70)
  - c.3: 5.100 litros. (tanque 71)

- Remolque: (No se tiene en cuenta debido a su uso muy poco habitual)
  - c.1: 10000 litros. (tanque 72)
  - c.2: 8000 litros. (tanque 73)

5.2 Variables del problema

x_{ptrck} : Variable continua que indica la cantidad de producto p que transporta el tanque t en la vuelta r al cliente c en la arista k.

α_{vkr}: Variable binaria que indica si el vehículo v ha pasado por el arco k en la vuelta r.

β_{ptr}: Variable binaria que indica si transporto el producto p en el tanque t en la vuelta r.

O_{irtp}: Variable continua que indica la cantidad de producto p qué cargo en el nodo i en el tanque t en la vuelta r.

Y_{vkr}: Variable continua que indica la cantidad total de producto que transporto en el vehículo v en el arco k en la vuelta r.

YDD_{iptr}: Variable continua que indica la cantidad de producto que demanda el cliente situado en el nodo i que será transportado en el tanque t en la vuelta r.

5.3 Especificaciones del problema

1. Especificación de capacidad: No se puede superar la capacidad de los tanques de los camiones.

$$\sum_{c}\sum_{p} x_{ptrck} \leq C_t \qquad \forall\, r,t,k/\, i \in DIS, CLH \ \ (1)$$

2. Especificaciones de límite de tiempo: Todo conductor tiene un límite de horas de conducción al día (Hv).

Antes de modelar la restricción de límite de tiempo de conducción, debemos saber si el vehículo ha pasado por el arco k :

$$Y_{vkr} = \sum_{t/t\in v}\sum_{p}\sum_{c} x_{ptrck} \qquad \forall v,r,k \ \ (2)$$

$$Y_{vkr} \leq CSy \cdot \alpha_{vkr} \qquad \forall v,r,k \ (3)$$

Con la restricción (2) controlamos si el vehículo v ha pasado por el arco k. La especificación (3) procede del modelado de la especificación lógica:

$$Si\, Y_{vkr} > 0 \quad entonces \quad \alpha_{vkr} = 1$$

Una vez hecho esto, pasamos a modelar la restricción que limita las horas de conducción:

$$\sum_{k}\sum_{r} \alpha_{vkr} \cdot t_k \leq H_v \qquad \forall v \ \ (4)$$

Lo que se tarda en recorrer el arco por el arco por el número de vueltas y por el total de arcos por el total de tiempo, para todo vehículo v.

3. Cada uno de los tanques de cada camión solo puede transportar un único producto.

$$x_{ptrck} \leq CS \cdot \beta_{ptr} \qquad \forall p,t,r,c,k \ (5)$$

$$\sum_{p} \beta_{ptr} \leq 1 \qquad \forall t,r \ (6)$$

La restricción (5) proviene del modelado de la expresión lógica:

$$Si\, x_{ptrck} > 0 \quad entonces \quad \beta_{ptr} = 1$$

para los arcos k origen de flujo.

4. Restricciones de balance de flujo.

a. Balance de flujo en el caso del nodo DIS.

$$O_{i0tp} = \sum_{c} \sum_{k/DD_{ik=1}} x_{pt0ck} \qquad \forall p,t; r = 0, i = DIS \ (7)$$

$$\sum_{k/DD_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt0ck} + O_{i1tp} = \sum_{k/O_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt1ck} \qquad \forall p,t; i = DIS \ (8)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt1ck} + O_{i2tp} = \sum_{k/DD_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt2ck} \qquad \forall p,t; i = DIS \ (9)$$

La restricción (7) es la restricción de inyección de flujo. Viene a decirnos que todo lo que se cargue en la vuelta 0, será lo que se transporte en esa misma vuelta.

i. Capacidad máxima de almacenamiento de sobras en la sede Valverde.

$$\sum_{t} (O_{i0tp} + O_{i1tp} + O_{i2tp}) \leq K_p \qquad \forall p; i = DIS \ (10)$$

Todo lo que sale de DISAGÓN va a ser menor que la capacidad total del tanque de "sobras" de la sede DISAGÓN.

b. Balance de flujo en el caso de nodos transbordo y cliente.

$$\sum_{k/O_{ik=1}} x_{ptcrk} = \sum_{k/DD_{ik=1}} x_{ptcrk} \qquad \forall r, i/pert_{ci} = 0, i \neq DIS, p, c, t \ (11)$$

$$\sum_{k/DD_{ik=1}} x_{ptcrk} = \sum_{k/O_{ik=1}} x_{ptcrk} + YDD_{iptr} \qquad \forall r, i/pert_{ci} = 1, p, c, t \ (12)$$

$$\sum_{t} \sum_{r} YDD_{iptr} = D_{cp} \qquad \forall c, p, i/\ pert_{ci} = 1 \ (13)$$

En el caso de que no hubiera obligación de satisfacer la demanda del cliente, la restricción (12) sería ≤.

c. Balance de flujo en el caso del nodo CLH.

$$\sum_{k/DD_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt0ck} + O_{i1tp} = \sum_{k/O_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt1ck} \qquad \forall p,t; i = CLH \ (14)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt1ck} + O_{i2tp} = \sum_{k/DD_{ik=1}} \sum_{c} x_{pt2ck} \qquad \forall p,t; i = CLH \ (15)$$

5. Restricciones de obligación de volver a DISAGÓN en la última vuelta.

$$O_{i2tp} \leq CS \cdot \sum_{k/DD_{ik=1}} \alpha_{vkr} \qquad \forall p,t,v; i = DIS \ \ (16)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}} \alpha_{vkr} = \sum_{k/DD_{ik=1}} \alpha_{vkr} \qquad \forall i,r,v \ \ (17)$$

La restricción (16) procede del modelado de la especificación lógica:

$$Si\ O_{i2tp} > 0 \quad entonces \quad \sum_{k/DD_{ik=1}} \alpha_{vkr} > 0$$

La restricción (17) es de conservación de flujo, que establece que la masa que entra debe ser igual a la que sale, haciendo referencia a los vehículos.

1. Función objetivo

$$Min \sum_{v} \sum_{k} \sum_{r} \alpha_{vkr} \cdot COST_k \ \ (18)$$

Respecto a la Función Objetivo, con el fin de no añadir más complejidad al problema y facilitar así el obtener el óptimo en la futura implementación en Lingo, únicamente minimizaremos la variable α_{vkr} multiplicado por el coste que se imputa al utilizar cada uno de los arcos.

5.4 Modelo VRP completo aplicado al proceso de transporte en Disagón

$$Min \sum_{v}\sum_{k}\sum_{r}\alpha_{vkr}\cdot COST_k$$

$$\sum_{c}\sum_{p}x_{ptrck} \leq C_t \qquad \forall\, r,t,k/\ i\ \epsilon\ DIS, CLH \ \ (1)$$

$$Y_{vkr} = \sum_{t/t\in v}\sum_{p}\sum_{c}x_{ptrck} \qquad \forall v,r,k \ \ (2)$$

$$Y_{vkr} \leq CSy\cdot\alpha_{vkr} \qquad \forall v,r,k \ \ (3)$$

$$\sum_{k}\sum_{r}\alpha_{vkr}\cdot t_k \leq H_v \qquad \forall v \ \ (4)$$

$$x_{ptrck} \leq CS\cdot\beta_{ptr} \qquad \forall p,t,r,c,k \ (5)$$

$$\sum_{p}\beta_{ptr} \leq 1 \qquad \forall t,r \ (6)$$

$$O_{i0tp} = \sum_{c}\sum_{k/DD_{ik=1}}x_{pt0ck} \qquad \forall p,t; r=0, i=DIS \ \ (7)$$

$$\sum_{k/DD_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt0ck} + O_{i1tp} = \sum_{k/O_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt1ck} \qquad \forall p,t; i=DIS \ \ (8)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt1ck} + O_{i2tp} = \sum_{k/DD_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt2ck} \qquad \forall p,t; i=DIS \ \ (9)$$

$$\sum_{t}(O_{i0tp}+O_{i1tp}+O_{i2tp}) \leq K_p \qquad \forall p; i=DIS \ (10)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}}x_{ptcrk} = \sum_{k/DD_{ik=1}}x_{ptcrk} \qquad \forall r, i/pert_{ci}=0, i\neq DIS, p,c,t \ \ (11)$$

$$\sum_{k/DD_{ik=1}}x_{ptcrk} = \sum_{k/O_{ik=1}}x_{ptcrk} + YDD_{iptr} \qquad \forall r, i/pert_{ci}=1, p,c,t \ \ (12)$$

$$\sum_{t}\sum_{r}YDD_{iptr} = D_{cp} \qquad \forall c,p,i/\ pert_{ci}=1 \ \ (13)$$

$$\sum_{k/DD_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt0ck} + O_{i1tp} = \sum_{k/O_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt1ck} \qquad \forall p,t; i=CLH \ (14)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt1ck} + O_{i2tp} = \sum_{k/DD_{ik=1}}\sum_{c}x_{pt2ck} \qquad \forall p,t; i=CLH \ (15)$$

$$O_{i2tp} \leq CS\cdot\sum_{k/DD_{ik=1}}\alpha_{vkr} \qquad \forall p,t,v; i=DIS \ \ (16)$$

$$\sum_{k/O_{ik=1}}\alpha_{vkr} = \sum_{k/DD_{ik=1}}\alpha_{vkr} \qquad \forall i,r,v \ \ (17)$$

$$x_{ptrck} \geq 0$$

$$O_{irtp} \geq 0$$

$$Y_{vkr} \geq 0$$

$$YDD_{iptr} \geq 0$$

$$\alpha_{vkr} \in \{0,1\}$$

$$\beta_{ptr} \in \{0,1\}$$

6 PROGRAMACIÓN EN LINGO

A la hora de programarlo en Lingo debemos tener en cuenta, entre otras consideraciones, la complejidad del problema VRP (NP-completo), y más concretamente de esta variante (varios vehículos, varios tanques cada vehículo, varios productos ofertados, dos puntos de carga y la posibilidad de que cada vehículo cargue varias veces en un mismo día). Por ello, empezaremos a trabajar con un problema simplificado en el que solo se considera 1 camión con un tanque y que transporta un único producto, así como la no existencia de CLH (segundo punto de carga) y la no posibilidad de que el camión cargue varias veces en un mismo día de trabajo, es decir, cuando la capacidad del camión se agote o bien haya abastecido a todos los clientes, el camión habrá terminado su ruta. De igual forma, hasta el caso simplificado 5 no impondremos que los vehículos vuelvan a la base de Disagón.

Esto lo hacemos por que podemos prever que cada vez que añadamos alguna variación nueva respecto al VRP básico nos acercamos más a la imposibilidad de obtener una solución en tiempo polinomial.

Como grafo utilizaremos el de la imagen 19. En cada arco aparecen dos números: el primero se refiere a su numeración dentro del grafo, y el segundo al coste en el que se incurre por utilizar ese arco.

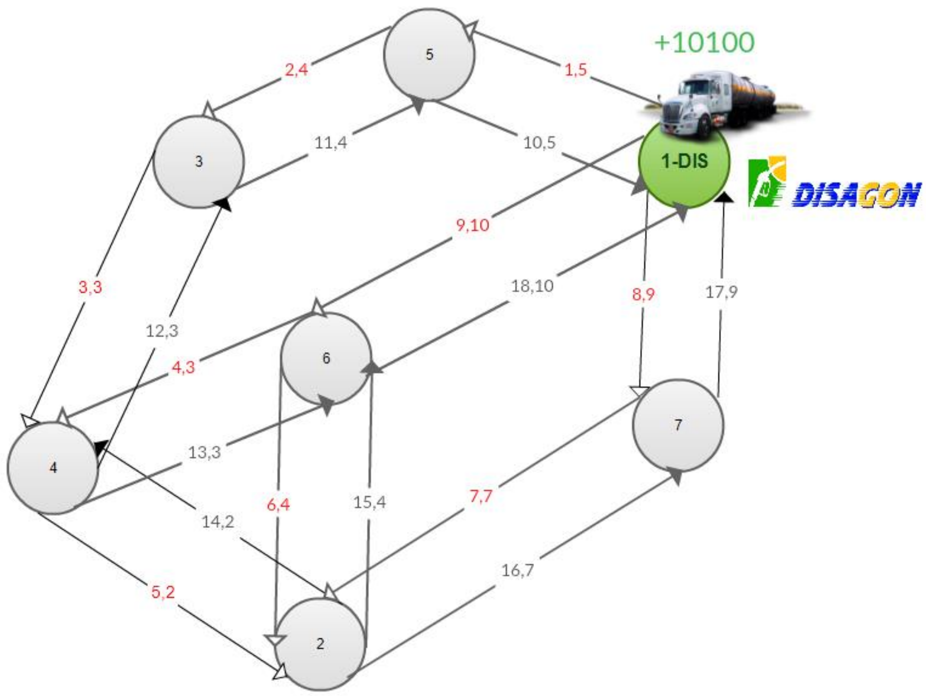

Imagen 13: *Grafo simplificado.*

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se adjunta el código relativo a las restricciones en Lingo, sin añadir la sección DATA, ya que esta varía en función del problema. Dicha sección se añadirá en alguno de los casos simplificados siguientes.

```
MIN=@SUM(VEHICULO(v):@SUM(ARISTA(k):@SUM(VUELTAS(r): Alfa(V,K,R)*COST(K))));


@for(VUELTAS(r):@for(TANQUE(t): @for(ARISTA(k): @for(NODOS(i) | B(i)#EQ#1 #OR# CLH(i)#EQ#1:
@SUM(CLIENTE(c): @SUM(PRODUCTO(p): x(p,t,r,c,k))<= C(t)))));

@for(VEHICULO(v):@for(VUELTAS(r): @for(ARISTA(k):

Y(v,k,r)<=CS * Alfa(v,k,r))));

@for(VEHICULO(v):@for(VUELTAS(r):@for(ARISTA(k):

Y(v,k,r)=@SUM(TANQUE(t) | PTV(v,t)#EQ#1: @SUM(PRODUCTO(p):@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,r,c,k)))))));

@for(VEHICULO(v): @SUM(ARISTA(k):@SUM(VUELTAS(r): Alfa(v,k,r)*COST(k)))<=H(v));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(VUELTAS(r):@for(CLIENTE(c):@for(ARISTA(k):x(p,t,r,c,k)<=CS*B
eta(p,t,r))))));

@for(TANQUE(t):@for(VUELTAS(r):

@SUM(PRODUCTO(p): Beta(p,t,r))<=1));

@for(PRODUCTO(p):@for(NODOS(i) | B(i)#EQ#1:  @SUM(TANQUE(t): O(i,1,t,p)+O(i,2,t,p))<=K(p)));

@for(NODOS_VUELTAS_TANQUE_PRODUCTO(i,r,t,p):@GIN(O(i,r,t,p)));

@for(VUELTAS(r):@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i)|B(i)#EQ#1:
O(i,r,t,p)=@SUM(CLIENTE(c):@SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1: x(p,t,r,c,k)))))));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i)|B(i)#EQ#1: O(i,2,t,p)<= 1000 *
@SUM(Arista(K)|DD(i,k)#EQ#1:@SUM(VEhiculo(v)| PTV(v,t)#EQ#1: Alfa(v,k,1))))));

@for(VUELTAS(r):@for(PRODUCTO(p):@for(CLIENTE(c):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i)|Pert(i,c)#EQ#0
#and# B(i)#EQ#0: @SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1: x(p,t,r,c,k))= @SUM(ARISTA(k) | DD(i,k)#EQ#1:
x(p,t,r,c,k)))))));

@for(VUELTAS(r):@for(PRODUCTO(p):@for(CLIENTE(c):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i)|Pert(i,c)#EQ#1:
@SUM(ARISTA(k) | dd(i,k)#EQ#1: x(p,t,r,c,k))= @SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1: x(p,t,r,c,k)) + YDD(i,p,t,r))))));

@for(NODOS(i): @for(VUELTAS(r):@for(Vehiculo(v): @SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1: Alfa(v,k,r) ) =
@SUM(ARISTA(k) | DD(i,k)#EQ#1: Alfa(v,k,r) ))));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i) | B(i)#EQ#1: @SUM(ARISTA(k) |
dd(i,k)#EQ#1:@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,1,c,k)))+O(i,1,t,p)=@SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1:
@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,1,c,k))))));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i) | B(i)#EQ#1: @SUM(ARISTA(k) |
OO(i,k)#EQ#1:@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,2,c,k))+O(i,3,t,p))=@SUM(ARISTA(k) | DD(i,k)#EQ#1:
@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,3,c,k))))));

@for(CLIENTE(c):@for(PRODUCTO(p):@for(NODOS(i)|Pert(i,c)#EQ#1:
@SUM(TANQUE(t):@SUM(VUELTAS(r):YDD(i,p,t,r))) = DE(c,p))));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i) | CLH(i)#EQ#1:

@SUM(ARISTA(k) | DD(i,k)#EQ#1:@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,1,c,k)+O(i,2,t,p)))=@SUM(ARISTA(k) |
OO(i,k)#EQ#1: @SUM(CLIENTE(c): x(p,t,2,c,k))))));

@for(PRODUCTO(p):@for(TANQUE(t):@for(NODOS(i) | CLH(i)#EQ#1:

@SUM(ARISTA(k) | OO(i,k)#EQ#1:@SUM(CLIENTE(c): x(p,t,2,c,k)+O(i,3,t,p)))=@SUM(ARISTA(k) |
DD(i,k)#EQ#1: @SUM(CLIENTE(c): x(p,t,3,c,k))))));


@for(VEHICULO_ARISTAS_VUELTAS(v,k,r):@BIN(Alfa(v,k,r)));

@for (PRODUCTO_TANQUE_VUELTAS(p,t,r):@BIN(Beta(p,t,r)));

END
```

6.1 Caso simplificado 1

Para este primer caso simplificado, consideramos que únicamente hay que abastecer a un cliente, el cual tiene una demanda de 3000 litros de Gasóleo A. Para abastecer dicha demanda, se utilizará un único vehículo con un único tanque de capacidad 10.100 litros (equivale al tanque número 1 dentro de los camiones de Disagón en la realidad). En este y en todos los ejemplos posteriores se considerará 90.000 litros la capacidad disponible en la base (capacidad real).

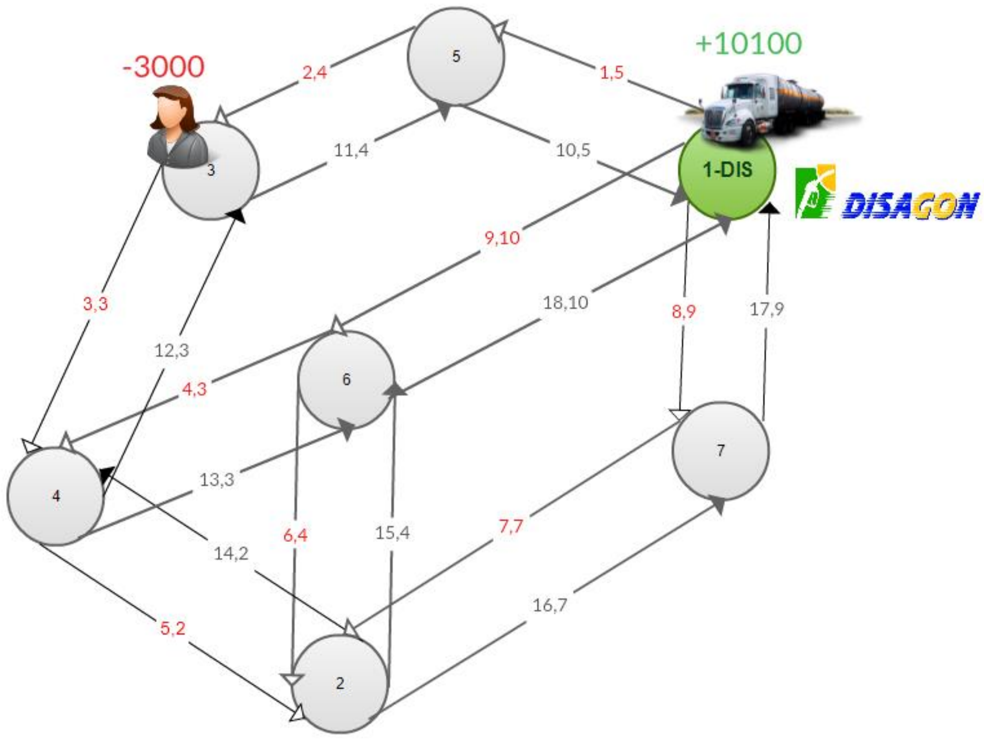

Imagen 14: *Grafo caso simplificado 1.*

Fuente: Elaboración propia.

Consideramos que hay que abastecer una demanda de 3000 litros de Gasóleo A al cliente que se encuentra en el nodo 3. Se adjunta a continuación el código en Lingo.

```
MODEL:
SETS:

NODOS/1..7/:B;
CLIENTE/1..1/;
NODO_CLIENTE(NODOS,CLIENTE):Pert;
VEHICULO/1..1/:H;
ARISTA/1..18/:COST;
PRODUCTO/1..1/;
CLIENTE_PRODUCTO(CLIENTE,PRODUCTO):DE;
```

```
TANQUE/1..1/:CC;
VEHICULO_TANQUE(VEHICULO,TANQUE):P;
VUELTAS/1..1/;
NODOS_ARISTA(NODOS,ARISTA):OO,DD;

P_T_V_C_A(PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS,CLIENTE,ARISTA):x;

VEHICULO_ARISTAS_VUELTAS(VEHICULO,ARISTA,VUELTAS):Alfa,Y;

PRODUCTO_TANQUE_VUELTAS(PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS):Beta;

NODOS_PRODUCTO_TANQUE_VUELTAS(NODOS,PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS):YDD;

NODOS_VUELTAS_TANQUE_PRODUCTO(NODOS,VUELTAS,TANQUE,PRODUCTO):O;

ENDSETS

DATA:
B=1,0,0,0,0,0,0; !Disagón se encuentra en el nodo 1;

H=570; !Máximo de minutos de conducción por vehículo;
K=90;!Capacidad de la base en miles de litros;
COST=5,4,3,3,2,4,7,9,10,5,4,3,3,2,4,7,9,10;
Pert=!Qué nodos son cliente;
0
0
1
0
0
0
0;

DE=3; ¡Demanda del nodo cliente;

P=!Pertenencia de tanque a vehículo;
1;

CC=!Capaciades de los tanques en miles de litros;
10.1;

OO=!Arcos que son de salida de cada nodo;
```

```
1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,
0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0;

DD=!Arcos que son de entrada de cada nodo;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,
0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0;

CS=10000;

ENDDATA
```

He de mencionar que varias de las restricciones adjuntadas de Lingo no se utilizaron para este caso simplificado, ya que no son necesarias (por ejemplo, el de las restricciones de balance de flujo de CLH).

Al correr el código en Lingo vemos que no hay ningún error. Pasamos entonces a analizar la solución en este problema simplificado. En este caso, las variables más interesantes a analizar serían x_{ptrck} y α_{vkr}. En los casos siguientes analizaremos todas las variables.

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 1, 1)        3.000000            0.000000

X( 1, 1, 1, 1, 2)        3.000000            0.000000
```

Como podemos observar, las variables x_{1111} y x_{1112} valen 3. Esto quiere decir que la cantidad que llevo del producto 1 (el único que hemos considerado) en el tanque 1 (el único que hemos considerado) en la vuelta 1 (la única que hemos considerado) al cliente 1 (el único cliente que hemos considerado) en la arista 1, vale 3. Con $x_{1112} = 3$ se nos está informando de lo mismo, pero que esa cantidad de producto se transporta en el arco 2.

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 1, 1)        1.000000            5.000000

ALFA( 1, 2, 1)        1.000000            4.000000
```

Analizando las α_{vkr} (en lingo denominado como ALFA), vemos que tanto α_{111} como α_{121} valen 1. Con la primera variable binaria se nos está informando que el vehículo 1 (el único considerado) ha usado el arco 1 en la vuelta 1 (la única considerada). Con la $\alpha_{121} = 1$ se nos está informando de que el vehículo 1 ha usado el arco 2 en la vuelta 1. Esta información concuerda con la proporcionada por la variable x_{ptrck}.

El valor de ambas variables concuerda también con el sentido común, ya que si el único cliente existente (nodo 3) tiene una demanda de 3 unidades de producto (3000 litros), el vehículo usará el arco 1 y 2 para ir del nodo 1 al 5, y del 5 al 3, con el fin de abastecer la demanda de dicho cliente.

También se debe destacar el valor de la función objetivo. En nuestro problema minimizamos el tiempo de transporte. Analizando el valor de las variables α_{vkr} , se usan los arcos 1 y 2, con "coste" de 5 y 4 respectivamente. Como estamos minimizando la suma de los costes (tiempos), la FO debería salir 9, lo cual concuerda con la solución ofrecida por Lingo.

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              9.000000
  Extended solver steps:                               0
  Total solver iterations:                            22
```

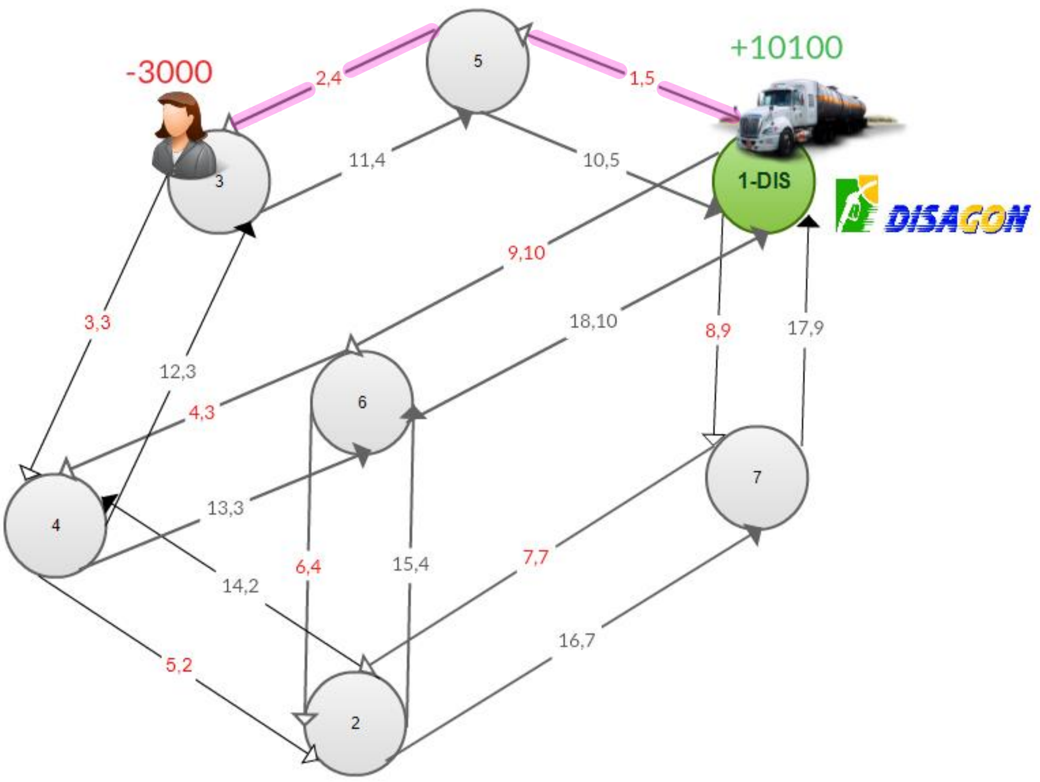

Imagen 15: *Arcos utilizados en el casos simplificado 1.*

Fuente: Elaboración propia

6.2 Caso simplificado 2

Pasamos ahora a considerar el mismo problema, pero teniendo que abastecer a tres clientes. El primer cliente se encuentra en el nodo 2 y tiene una demanda de 3000 litros de Gasóleo A. El segundo cliente se encuentra en el nodo 4 y tiene una demanda de 4000 litros de este mismo producto. El último cliente se encuentra en el nodo 6 y su demanda es de 2000 litros. La carga del producto se hará en el nodo 1, al igual que el caso anterior, que corresponde a la base de la empresa Disagón, es decir, en este nodo comenzará el reparto de combustible.

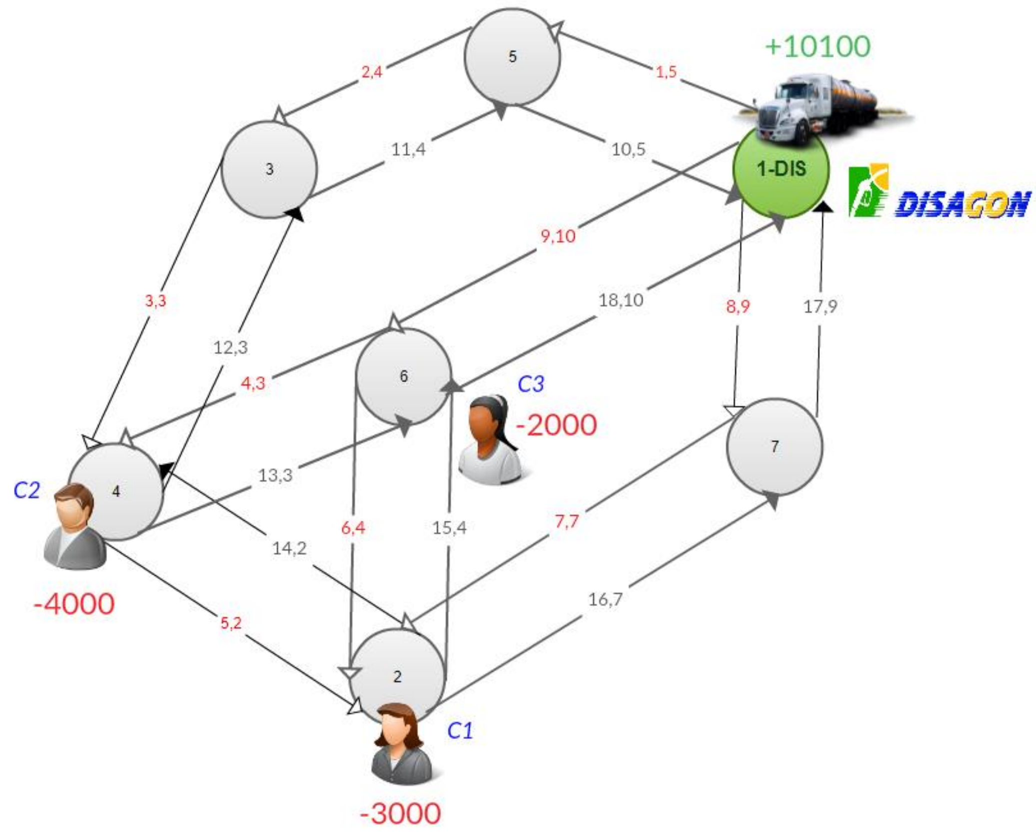

Imagen 16: *Grafo caso simplificado 2.*

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se muestra el código en Lingo (omitiendo las restricciones, porque son exactamente las mismas que en el problema anterior), así como el valor que toman las variables de interés y la FO. Tras esto, pasaremos a analizar el valor de dichas variables y el valor de la FO.

```
MODEL:
SETS:

NODOS/1..7/:PP,B;!Pendiente prioridad;
CLIENTE/1..3/;
NODO_CLIENTE(NODOS,CLIENTE):Pert;
VEHICULO/1..1/:H;
ARISTA/1..18/:COST;
```

```
PRODUCTO/1..1/;
CLIENTE_PRODUCTO(CLIENTE,PRODUCTO):DE;
TANQUE/1..1/:CC;
VEHICULO_TANQUE(VEHICULO,TANQUE):P;
VUELTAS/1..1/;
!SECTOR/1..20/;
NODOS_ARISTA(NODOS,ARISTA):OO,DD;
!NODOS_SECTOR(NODOS,SECTOR):A;!pendiente;

P_T_V_C_A(PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS,CLIENTE,ARISTA):x;

VEHICULO_ARISTAS_VUELTAS(VEHICULO,ARISTA,VUELTAS):Alfa,Y;

PRODUCTO_TANQUE_VUELTAS(PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS):Beta;

NODOS_PRODUCTO_TANQUE_VUELTAS(NODOS,PRODUCTO,TANQUE,VUELTAS):YDD;

NODOS_VUELTAS_TANQUE_PRODUCTO(NODOS,VUELTAS,TANQUE,PRODUCTO):O;

ENDSETS

DATA:

B=1,0,0,0,0,0,0;

H=5400;

K=90;!En miles de litros;

COST=5,4,3,3,2,4,7,9,10,5,4,3,3,2,4,7,9,10;


V= 300;!300litros/min;

T=10;!Se tarda 10 minutos aprox. en colocar el camión con las señalizacion
pertinente y preparar el vehículo para descargar;

Pert=!Qúe nodos son cliente;!Serán clientes el nodo 2, 4 y 6;
0,0,0,
1,0,0,
0,0,0,
0,1,0,
```

```
0,0,0,
0,0,1,
0,0,0;

DE=!El primer cliente demanda 3, el segundo 4 y el tercero 2 (en miles de litros);
3
4
2;

P=!Pertenencia de tanque a vehículo;
1 ;

CC=!Capaciades de los tanques en miles de litros;
10.1;

OO=!El nodo 1 y 2 sn origen de flujo;
1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,
0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0;

DD=!El nodo 1 y 2 son destino de flujo;
0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1,
0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0;

CS=10000 ;

ENDDATA
```

Solución reportada por Lingo (solo de las variables de interés diferentes de cero):

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 1, 4)        3.000000
X( 1, 1, 1, 1, 5)        3.000000
X( 1, 1, 1, 1, 9)        3.000000
X( 1, 1, 1, 2, 4)        4.000000
X( 1, 1, 1, 2, 9)        4.000000
X( 1, 1, 1, 3, 9)        2.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 4, 1)        1.000000
ALFA( 1, 5, 1)        1.000000
ALFA( 1, 9, 1)        1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 4, 1)        7.000000
Y( 1, 5, 1)        3.000000
Y( 1, 9, 1)        9.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 1)        9.000000
```

Como x_{ptrck} indica la cantidad de producto p que transporta el tanque t en la vuelta r al cliente c en la arista k, vemos que el transporte de la cantidad demandada por el cliente 1 se transporta por el arco 4, 5 y 9 vale 3 (3000 en miles de litros). Lo demandando por el cliente 2 se transporta por el arco 4 y 9, y vale 4 (4000 en miles de litros). Por último, vemos que la cantidad demandada por el cliente 3 se transporta únicamente a través del arco 9, y la cantidad transportada que va a depositarse en el nodo del cliente 3 (nodo 6) será de 2 (2000 en miles de litros).

Como α_{vkr} muestra si el vehículo v usa o no el arco k en la vuelta r, podemos ver que el vehículo que hemos considerado usa los arcos 4, 5 y 9 para abastecer a los clientes que se encuentran en los nodos 2, 4 y 6, lo cual vemos que cuadra si miramos el grafo.

La variable Y_{vkr} indica la cantidad total de producto que transporto en el vehículo v en el arco k en la vuelta r. Si Y_{191} vale 9, se nos está informando de que por el arco 9 (y vehículo 1 y vuelta 1) está circulando 9 unidades de producto (9000 litros), lo cual tiene sentido ya que partiendo del nodo 1 (Disagón), el primer arco por el que pasa es el 9, y por ese arco deberá transportar toda la cantidad a entregar a los clientes. La mecánica es la misma para el resto.

Con respecto a O_{irtp}, que nos indica la cantidad de producto p qué cargo en el nodo i en el tanque t en la vuelta r, vemos que, como establecimos en un principio, el vehículo que se encarga del reparto del combustible solo carga el producto en el nodo $i = 1$ (nodo Disagón), lo cual es correcto para este ejemplo simplificado.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              15.00000
Extended solver steps:                              33
Total solver iterations:                          1342
```

Respecto a la Función Objetivo, como minimiza la suma de los tiempos de los arcos, nos sale 15 que es la suma de los tiempos de cada arco utilizado para realizar la ruta.

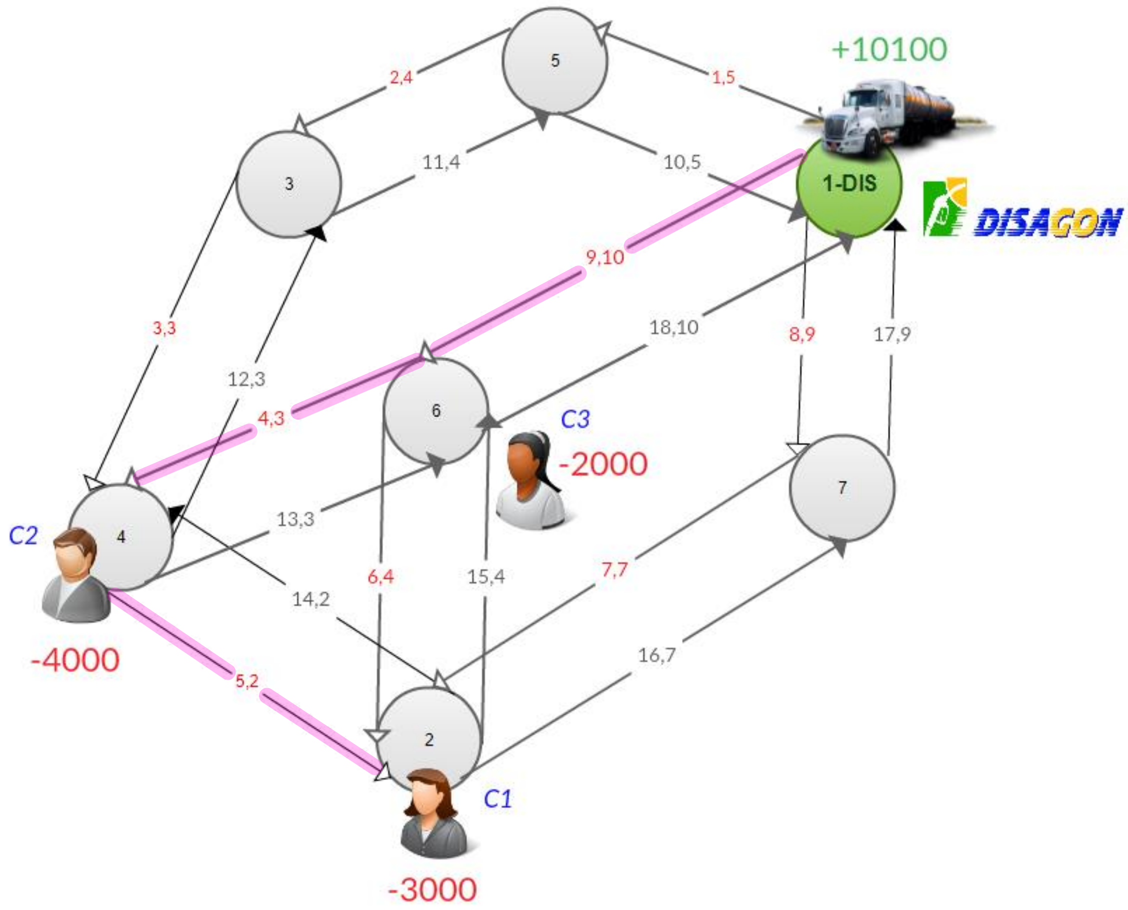

Imagen 17: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 2.*

Fuente: Elaboración propia.

6.3 Caso simplificado 3

En el caso simplificado 2 el camión disponía de un único tanque, por lo que únicamente se transportaba un único tipo de producto, gasóleo A (producto más demandado). Vemos que, a pesar de ser un problema con gran cantidad de variables y restricciones, va respondiendo bien, por lo que pasamos entonces a añadirle 3 tanques a dicho camión. Añadimos por lo tanto gasóleo B y gasóleo C a los productos disponibles, al ser los dos más demandados después del gasóleo A.

Suponemos en este ejemplo los 3 mismos clientes que en el ejemplo anterior (nodos 2, 4 y 5), pero cambiaremos sus demandas añadiendo los nuevos productos:

Demanda (litros)	Gasóleo A	Gasóleo B	Gasóleo C
Cliente 1 (nodo 2)	3000	-	1000
Cliente 2 (nodo 4)	4000	-	-
Cliente 3 (nodo 6)	2000	3000	-

Tabla 1: Demanda de clientes en el caso simplificado 3

En cuanto a la capacidad de los tanques, utilizamos las de los 3 primeros tanques del Vehículo 1 en la realidad:

- Tráiler (Vehículo 1):
  - R-6250-BBM:
    - c.1: 10.100 litros: (tanque 1)
    - c.2: 5.100 litros. (tanque 2)
    - c.3: 6.100 litros. (tanque 3)
    - c.4: 12.100 litros. (tanque 4)
    - c.5: 5.100 litros. (tanque 5)

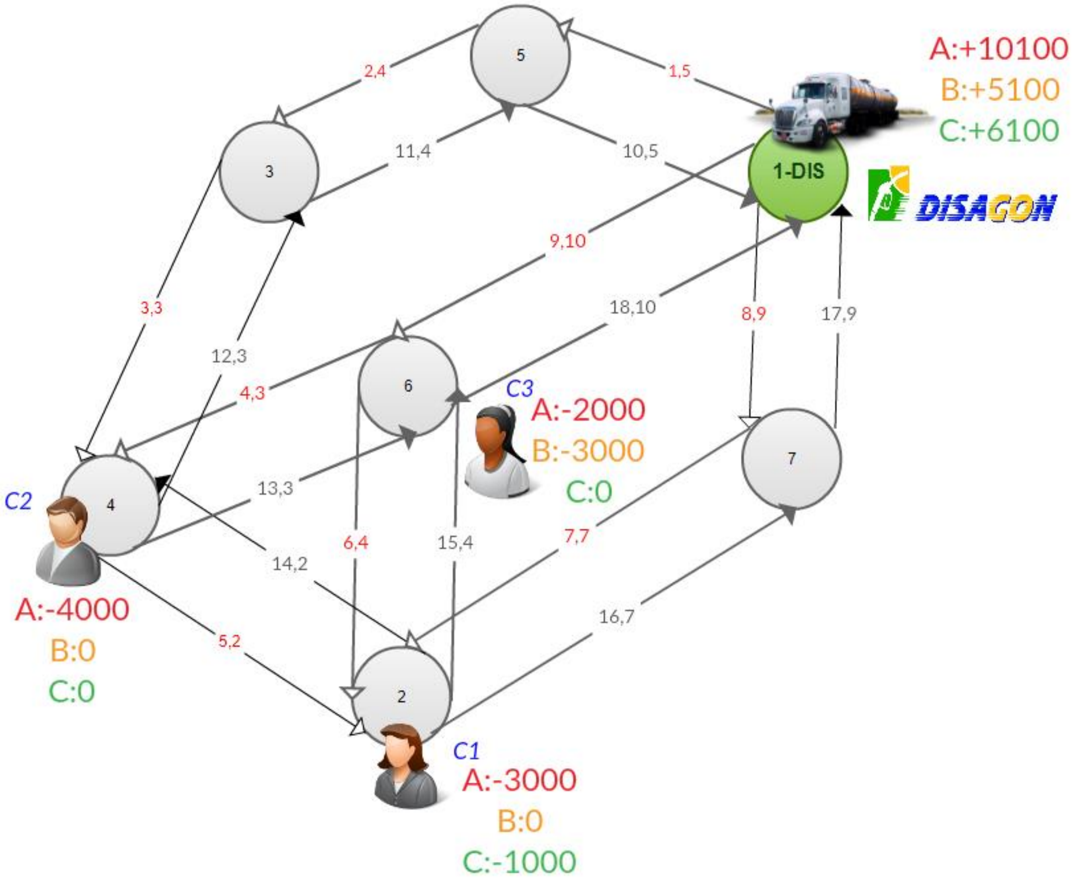

Imagen 18: *Grafo Caso simplificado 3.*

Fuente: Elaboración propia.

Al correr el código nos damos cuenta de que tiempo de procesamiento es bastante mayor que antes, tardando Lingo 29 segundo en devolver la solución al problema del caso simplificado 3, cuando en los anteriores la solución era instantánea. Esto es normal teniendo en cuenta que el número de iteraciones ha ascendido hasta las 157.109, cuando en el caso anterior solo tuvo que efectuar 1.342.

Pasamos pues a analizar la solución reportada por Lingo, comentando solo aquellas variables diferentes de 0:

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 3, 1, 1, 4)        3.000000
X( 1, 3, 1, 1, 5)        3.000000
X( 1, 3, 1, 1, 9)        3.000000
X( 1, 3, 1, 2, 4)        4.000000
X( 1, 3, 1, 2, 9)        4.000000
X( 1, 3, 1, 3, 9)        2.000000
```

Observando las variables anteriores, vemos que el producto 1 se encuentra en el tanque 3, y que este se ha servido al cliente 1, cliente 2 y al cliente 3 (todos habían demandado Gasóleo A). Los arcos en los que son transportados dichos productos son el 4, 5 y 9. Si analizamos el valor de alguna de las variables anteriores, por ejemplo, la

x_{13124}=4, vemos que la cantidad de producto 1 (Gasóleo A) que se transporta en el tanque 3 en la vuelta 1 dirigido al cliente 2 que se transporta por el arco 4 vale 4 (es decir, 4000 litros).

```
X( 2, 2, 1, 3, 9)         3.000000
```

Analizando ahora a x_{22139}=3, se nos está informando de que la cantidad de producto tipos 2 (Gasóleo B), que se encuentra en el tanque 2 del vehículo, que se transporta en la vuelta 1 (única considerada) que va dirigida al cliente 3 y que se transporta por el arco 9, vale 3. Si observamos el grafo, nos damos cuenta de que el cliente 3 (situado en el nodo 6) era el único que demandaba producto tipo 2 (Gasóleo B), y precisamente 3000 litros de este. A su ve vemos que el camino más corto para llegar a este cliente y servirle el producto es el arco 9 (como nos informaba la variable). Esta variable también tendrá consonancia con la O_{irtp}, que indica la cantidad de producto p qué cargo en el nodo i en el tanque t en la vuelta r, que teniendo en cuenta que este producto es solo demandando por el cliente 3, O_{1122} (cantidad que cargo en el nodo 1 (1-Dis) en la vuelta 1, en el tanque 2 (tanque que contiene producto 2) del producto 2 (Gasóleo B) debería valer 3. Efectivamente si observamos la solución reportada por lingo (antes adjuntada), vemos que su valor es correcto.

```
O( 1, 1, 2, 2)         3.000000
```

Respecto al producto 3 (Gasóleo C), solo es demandando por el cliente 1, así que debería ocurrir algo similar que con el cliente 3 y el producto 2. El camión solo cargará en el nodo 1 la cantidad de producto 3 (Gasoleo C) que demanda el cliente 1 ($O_{1113} = 1$). Las explicaciones anteriores son válidas también para las variables x_{ptrck} referentes al producto 3 (Gasóleo C).

```
X( 3, 1, 1, 1, 4)         1.000000
X( 3, 1, 1, 1, 5)         1.000000
X( 3, 1, 1, 1, 9)         1.000000
```

Respecto a la variable β_{ptr}, como ya hemos indicado, es una variable binaria que indica si transporto el producto p en el tanque t en la vuelta r.

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 3, 1)         1.000000
BETA( 2, 2, 1)         1.000000
BETA( 3, 1, 1)         1.000000
```

Como podemos observar, el producto 1 está contenido en el tanque 3, el producto 2 en el tanque 2, y el producto 3 en el tanque 1.

Analizando la variable Y_{vkr}, que es una variable continua que indica la cantidad total de producto que transporto en el vehículo v en el arco k en la vuelta r, vemos que en el arco 9 (el primero que se utiliza) se debería transportar $\sum\sum DE_{cp}$ (la suma de todas las demandas de todos los clientes de todos los productos, o sea, 13.000 litros). En el siguiente arco utilizado, la variable debería valer la suma de todas las demandas de todos los productos menos lo demandando por el primer cliente servido, es decir, 8. El funcionamiento el mismo para los siguientes arcos. Vemos el valor de las variables:

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 4, 1)         8.000000
Y( 1, 5, 1)         4.000000
Y( 1, 9, 1)         13.00000
```

Analizando la variable YDD_{iptr}, es una variable continua que indica la cantidad de producto que demanda el cliente situado en el nodo i que será transportado en el tanque t en la vuelta r, vemos que coincide con las demandas de los productos en los nodos.

```
YDD( 2, 1, 3, 1)        3.000000
YDD( 2, 3, 1, 1)        1.000000
YDD( 4, 1, 3, 1)        4.000000
YDD( 6, 1, 3, 1)        2.000000
YDD( 6, 2, 2, 1)        3.000000
```

Por último, podríamos observar que la ruta que hace el camión es la óptima, comparando el valor de las variables α_{vkr} y el grafo. Recordando la definición de *conjunto de problemas clase NP,* vemos que en estos problemas podemos **comprobar** en un tiempo razonable (tiempo polinomial) si una respuesta al problema es correcta o no (es decir, es o no solución). Por ello analizamos las variables α_{vkr} que valgan diferente de 1 y lo comparamos con el grafo.

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 4, 1)        1.000000
ALFA( 1, 5, 1)        1.000000
ALFA( 1, 9, 1)        1.000000
```

El único vehículo utilizado (vehículo 1) utiliza los arcos 4, 5 y 9 para servir a los clientes sus respectivas demandas, lo cual vemos que es óptimo simplemente viendo el grafo.

Como la única variable que imputa coste (tiempo) es la α_{vkr}, es facil comprobar que el valor de la FO es correcta: $FO = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 15.$

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              15.00000
  Extended solver steps:                             169
  Total solver iterations:                        157109
```

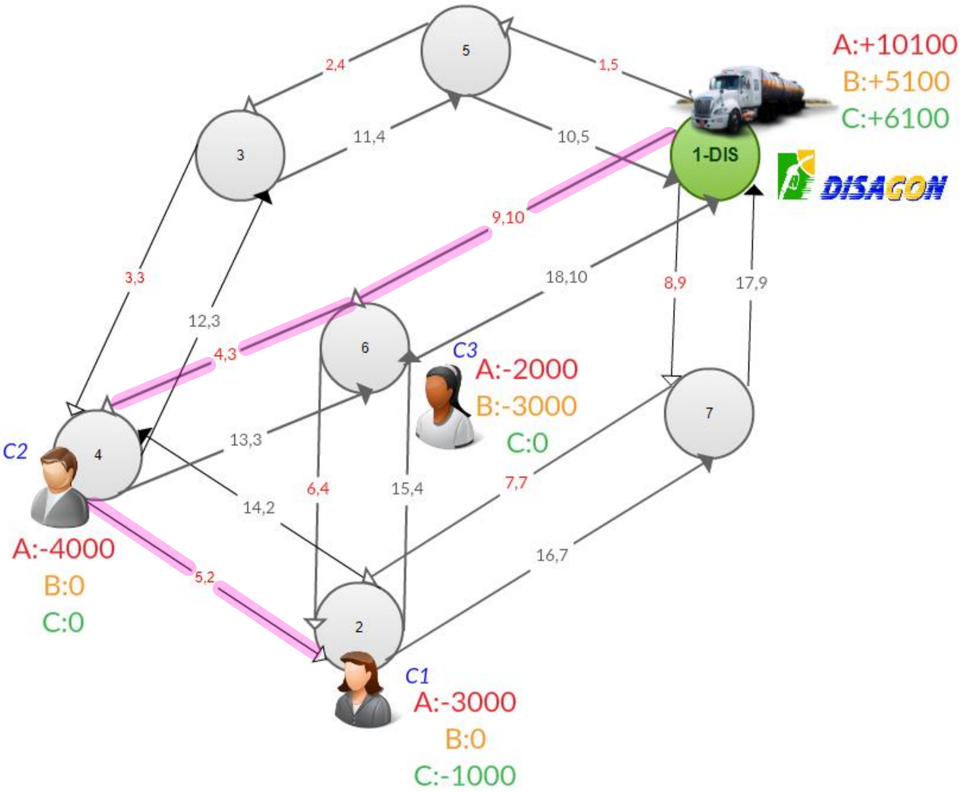

Imagen 19: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 3.*

Fuente: Elaboración propia.

6.4 Caso simplificado 4

En este caso mantenemos el grafo del caso simplificado 3*,* solo habrá 2 clientes, pudiendo estos demandar hasta 3 tipos de productos. Se podrá servir a dichos clientes mediante 2 camiones cisterna con 3 tanques cada uno. Mantenemos el hecho de que el único punto de carga se encuentra en el nodo 1 que corresponde con la base de Disagón, así como que cuando los camiones sirven a todos los clientes, acaban sus respectivas rutas. La suma de las demandas de los clientes será mayor a la capacidad de un único camión, para obligar al otro disponible a servir al otro cliente.

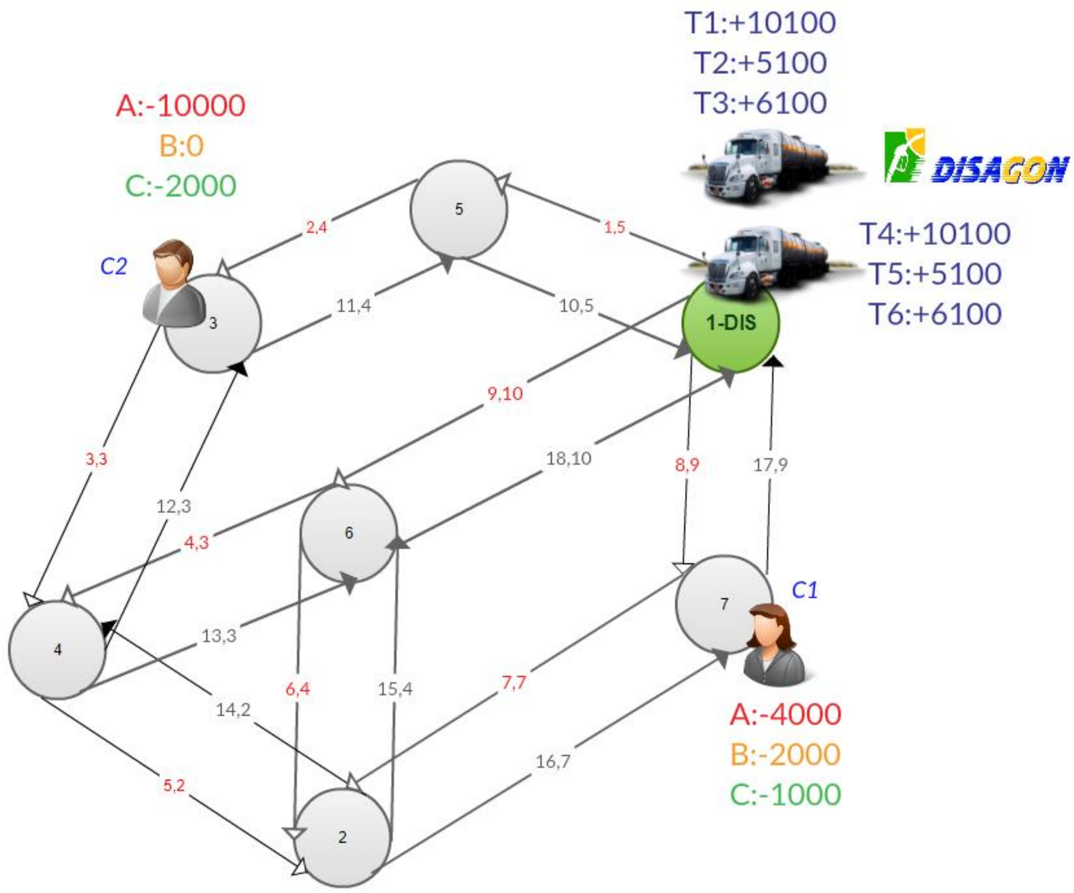

Imagen 20: *Grafo Caso simplificado 4.*

Fuente: Elaboración propia.

El tiempo de procesamiento por parte de Lingo ha sido esta vez de 1 minutos y 27 segundos, bastante superior al caso anterior.

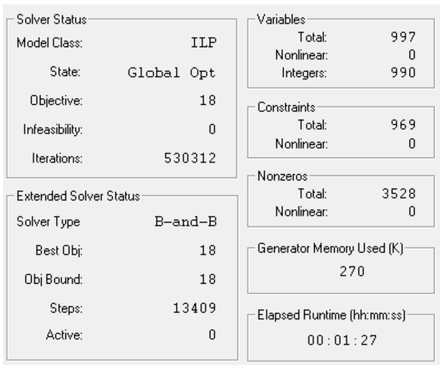

Imagen 26: Lingo solver status para el caso simplificado 4.

Fuente: Lingo.

De todas las variables, adjuntamos solo las que son diferentes de cero.

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 2, 1, 2, 1)        10.00000
X( 1, 2, 1, 2, 2)        10.00000
X( 1, 5, 1, 1, 8)        4.000000
X( 2, 3, 1, 1, 8)        2.000000
X( 3, 1, 1, 1, 8)        1.000000
X( 3, 6, 1, 2, 1)        2.000000
X( 3, 6, 1, 2, 2)        2.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 8, 1)        1.000000
ALFA( 2, 1, 1)        1.000000
ALFA( 2, 2, 1)        1.000000
```

Como podemos observar, el modelo ha decidido que el vehículo 1 va a servir al cliente 1 (nodo 7) y el vehículo 2 va a servir al cliente 2 (nodo 3). Vemos que el vehículo 1 utiliza el arco 8 para servir al cliente 1 y el vehículo 2 usa los arcos 1 y 2 para servir al cliente 2. El razonamiento del resto de variables es exactamente igual que el caso anterior.

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 8, 1)        7.000000
Y( 2, 1, 1)        12.00000
Y( 2, 2, 1)        12.00000
```

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 2, 1)        1.000000
BETA( 1, 5, 1)        1.000000
BETA( 2, 3, 1)        1.000000
BETA( 2, 4, 1)        1.000000
BETA( 3, 1, 1)        1.000000
BETA( 3, 6, 1)        1.000000
```

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

```
YDD( 3, 1, 2, 1)        10.00000
```

```
YDD( 3, 3, 6, 1)        2.000000
YDD( 7, 1, 5, 1)        4.000000
YDD( 7, 2, 3, 1)        2.000000
YDD( 7, 3, 1, 1)        1.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 3)        1.000000
O( 1, 1, 2, 1)        10.00000
O( 1, 1, 3, 2)        2.000000
O( 1, 1, 5, 1)        4.000000
O( 1, 1, 6, 3)        2.000000
```

Como la única variable que imputa coste (tiempo) es la α_{vkr}, es fácil comprobar que el valor de la FO es correcta: $FO = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 18$

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              18.00000
  Extended solver steps:                            5486
  Total solver iterations:                        405635
```

Se confirma pues el correcto funcionamiento del modelo para el caso de disponibilidad de dos vehículos con tres depósitos cada uno y con clientes con demandas de tres productos diferentes a los que servir.

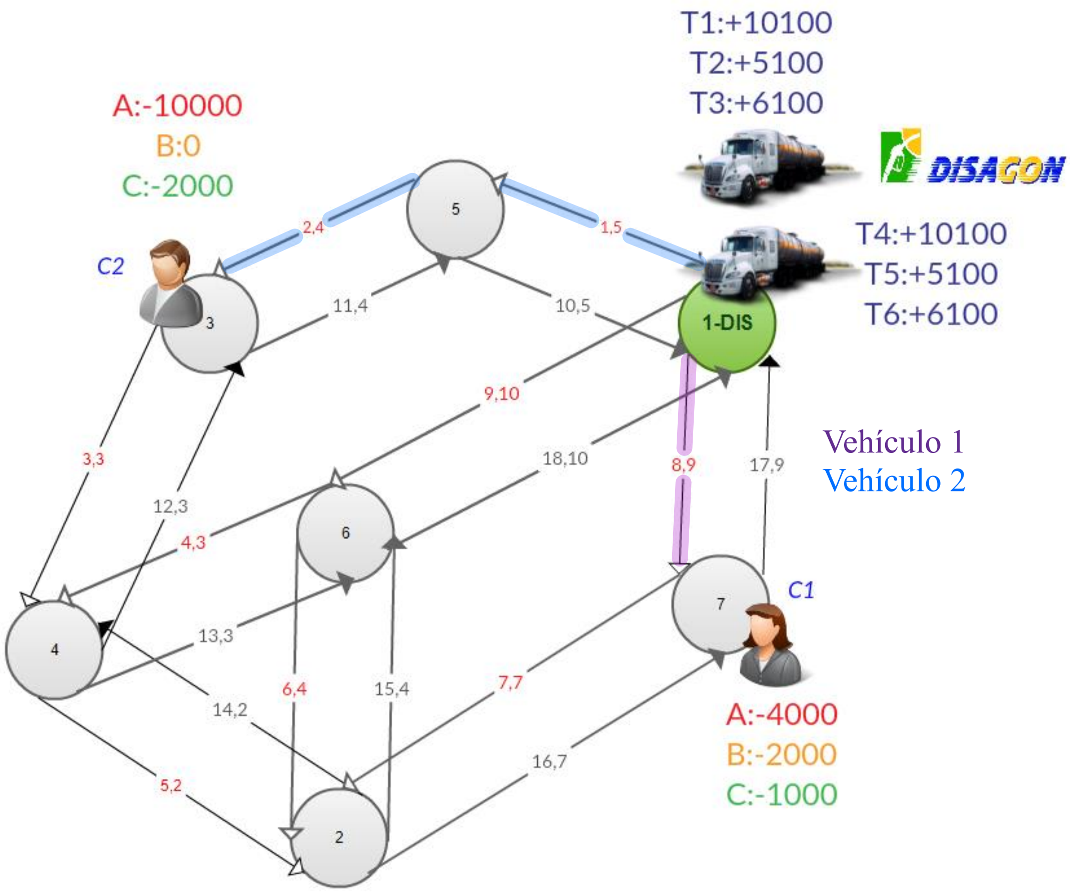

Imagen 21*: Arcos utilizados en el Caso simplificado 4.*

Fuente: Elaboración propia.

6.5 Caso simplificado 5

En este caso vamos a incorporar las vueltas, esto quiere decir que cada vehículo, en el caso de quedarse sin producto que servir porque su capacidad sea menor que la demanda del cliente tendrá la posibilidad volver a la base de Disagón y cargar el producto que necesite. Esto se acerca mucho al funcionamiento real del proceso de reparto en la empresa Disagón.

Pongamos un ejemplo en el que tenemos un único vehículo disponible, con 1 tanque, y 3 clientes a los que servir, esta vez, con la posibilidad de volver a la Base a cargar más producto si lo necesita. En este caso forzaremos que la capacidad del único tanque considerado (del único vehículo disponible) sea únicamente de 5000 litros (menor que la demanda), para obligar al camión a volver a cargar.

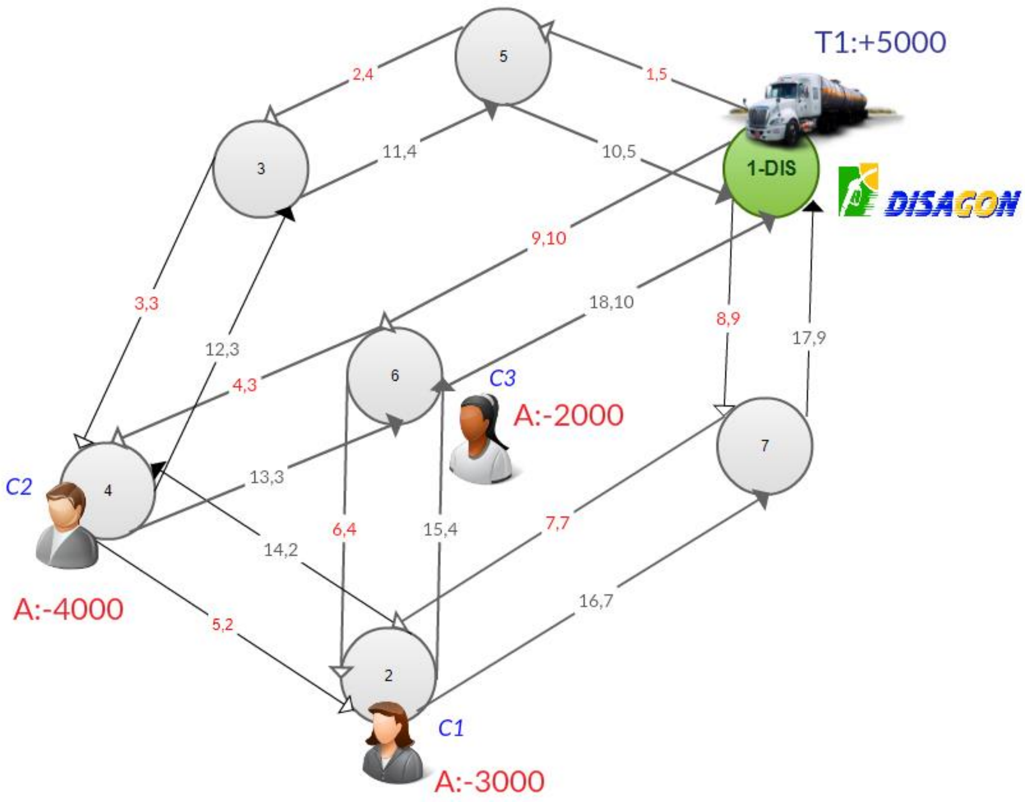

Imagen 22: *Grafo Caso simplificado 5 (añadimos vuelta a la Base).*

Fuente: Elaboración propia.

Vemos la solución que nos reporta Lingo, y pasamos a analizarla:

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 1, 6)        3.000000
X( 1, 1, 1, 1, 9)        3.000000
X( 1, 1, 1, 3, 9)        2.000000
X( 1, 1, 2, 2, 1)        4.000000
X( 1, 1, 2, 2, 2)        4.000000
X( 1, 1, 2, 2, 3)        4.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 1, 2)        1.000000
ALFA( 1, 2, 2)        1.000000
ALFA( 1, 3, 2)        1.000000
ALFA( 1, 6, 1)        1.000000
```

```
ALFA( 1, 9, 1)          1.000000
ALFA( 1, 10, 2)         1.000000
ALFA( 1, 11, 2)         1.000000
ALFA( 1, 12, 2)         1.000000
ALFA( 1, 15, 1)         1.000000
ALFA( 1, 18, 1)         1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 1, 2)         4.000000
Y( 1, 2, 2)         4.000000
Y( 1, 3, 2)         4.000000
Y( 1, 6, 1)         3.000000
Y( 1, 9, 1)         5.000000
```

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 1, 1)         1.000000
BETA( 1, 1, 2)         1.000000
```

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

```
YDD( 2, 1, 1, 1)         3.000000
YDD( 4, 1, 1, 2)         4.000000
YDD( 6, 1, 1, 1)         2.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 1)         5.000000
O( 1, 2, 1, 1)         4.000000
```

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              52.00000
  Extended solver steps:                            1525
  Total solver iterations:                        117536
```

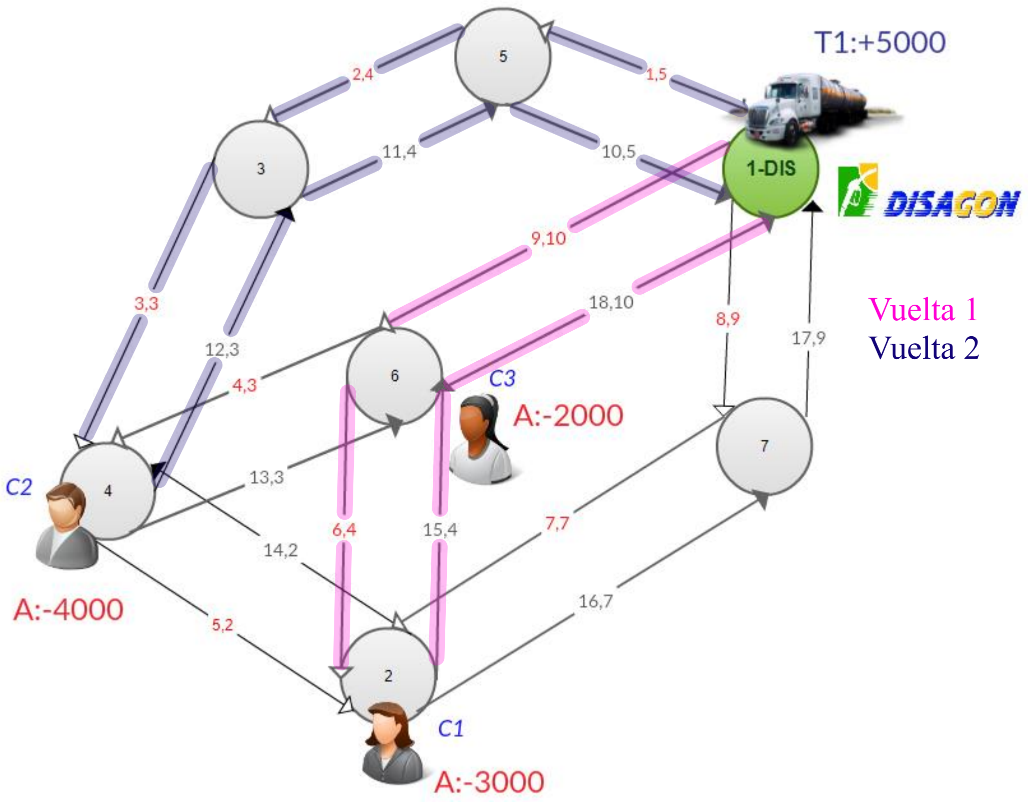

Imagen 23: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 5.*

Fuente: Elaboración propia.

6.6 Caso simplificado 6

Para el caso simplificado 6, supondremos un único cliente y oferta/demanda de 2 productos (Gasóleo A y B). Dicho cliente ubicado en el nodo 2 demandará 4000 litros de Gasóleo A y 5000 litros de Gasóleo B. La capacidad del camión es de 6000 litros (dividido en dos tanques de 3000 litros cada uno), por lo que el conductor del vehículo se verá obligado a volver a la Base de Disagón para cargar el producto que le queda por servir a los clientes.

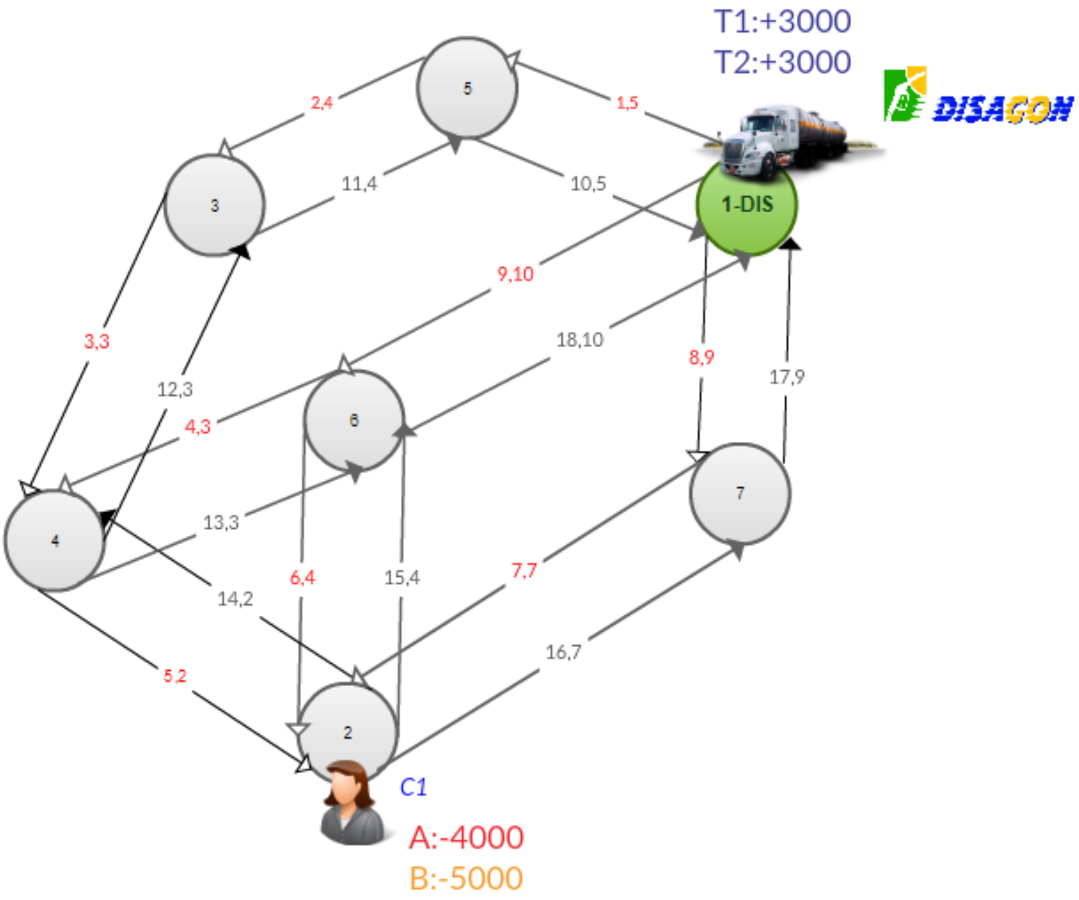

Imagen 24: *Grafo Caso simplificado 6.*

Fuente: Elaboración propia.

A lingo le ha tomado 23 segundo resolverlo. Pasamos a analizar la solución:

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 1, 6)        1.000000
X( 1, 1, 1, 1, 9)        1.000000
X( 1, 1, 2, 1, 6)        3.000000
X( 1, 1, 2, 1, 9)        3.000000
X( 2, 2, 1, 1, 6)        2.000000
X( 2, 2, 1, 1, 9)        2.000000
X( 2, 2, 2, 1, 6)        3.000000
X( 2, 2, 2, 1, 9)        3.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 6, 1)          1.000000
ALFA( 1, 6, 2)          1.000000
ALFA( 1, 9, 1)          1.000000
ALFA( 1, 9, 2)          1.000000
ALFA( 1, 10, 1)         1.000000
ALFA( 1, 11, 1)         1.000000
ALFA( 1, 12, 1)         1.000000
ALFA( 1, 14, 1)         1.000000
ALFA( 1, 15, 2)         1.000000
ALFA( 1, 18, 2)         1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 6, 1)          3.000000
Y( 1, 6, 2)          6.000000
Y( 1, 9, 1)          3.000000
Y( 1, 9, 2)          6.000000
```

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 1, 1)          1.000000
BETA( 1, 1, 2)          1.000000
BETA( 2, 2, 1)          1.000000
BETA( 2, 2, 2)          1.000000
```

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

```
YDD( 2, 1, 1, 1)          1.000000
YDD( 2, 1, 1, 2)          3.000000
YDD( 2, 2, 2, 1)          2.000000
YDD( 2, 2, 2, 2)          3.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 1)          1.000000
O( 1, 1, 2, 2)          2.000000
```

```
O( 1, 2, 1, 1)        3.000000
O( 1, 2, 2, 2)        3.000000



Global optimal solution found.
  Objective value:                           56.00000
  Extended solver steps:                         9264
  Total solver iterations:                     244404
```

Comprobando la solución vemos que es correcta. Como nota podríamos añadir que en la vuelta 1 el vehículo decide volver por los arcos 14, 12, 11 y 10, mientras que en la segunda vuelva, el vehículo vuelve por los arcos 14 y 18. Esto es porque el coste de los arcos 14, 12, 11 y 10 suma exactamente lo mismo que el de los arcos 14 y 18 (pura casualidad). Por ello, el modelo decide por si solo que el vehículo vuelva por unos arcos en la primera vuelta y por otros en la segunda, ya que lo único que nos importa aquí es el coste.

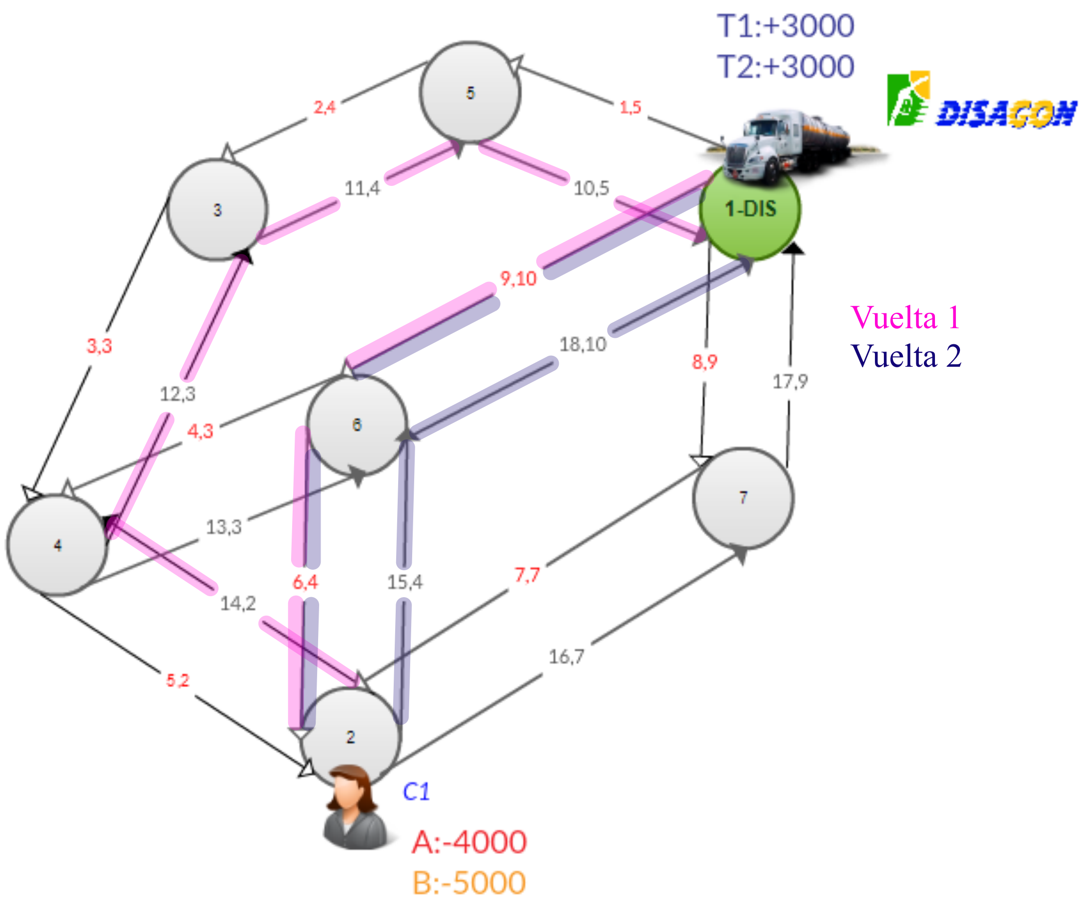

Imagen 25: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 6.*

Fuente: Elaboración propia.

6.7 Caso simplificado 7

Probamos ahora con la misma configuración que en el caso simplificado 6, pero añadiendo 1 producto más a la variedad de productos disponibles.

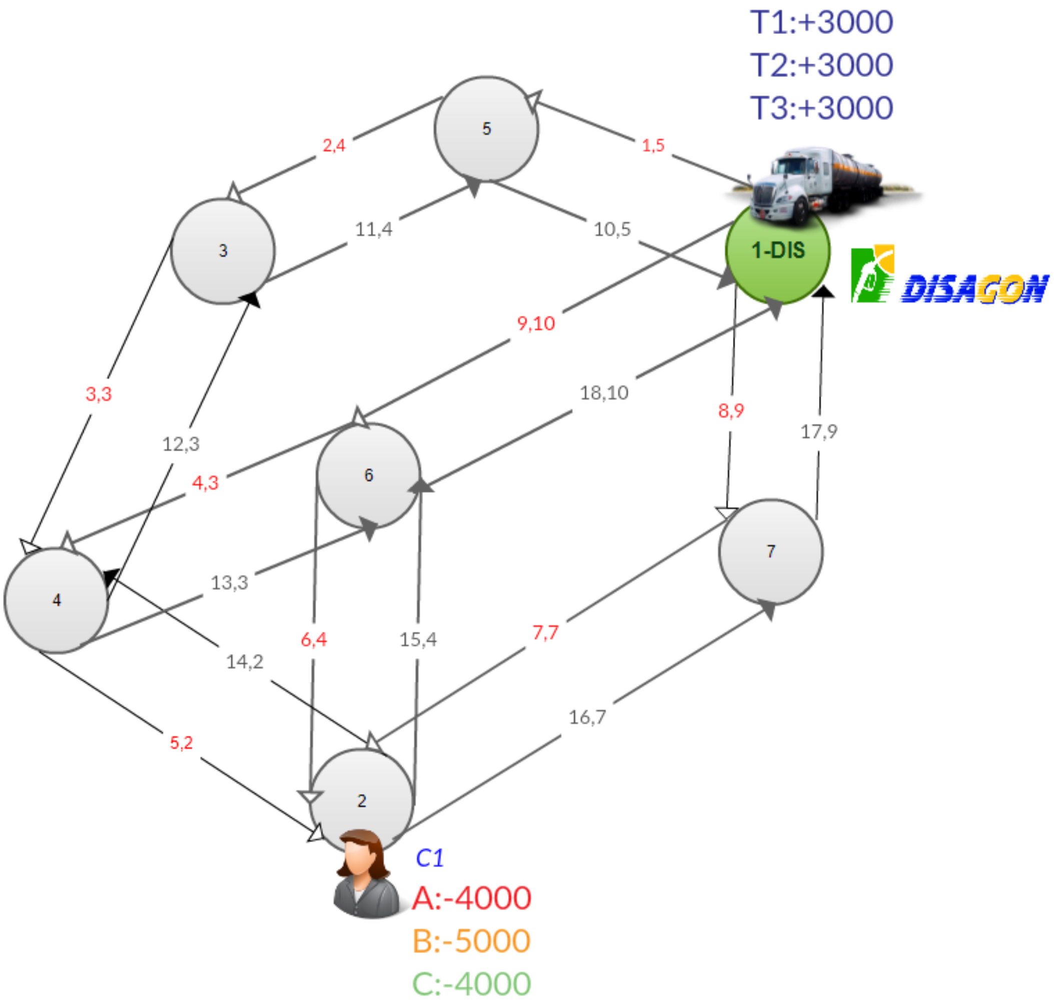

Imagen 26: *Grafo Caso simplificado 7.*

Fuente: Elaboración propia.

El tiempo de resolución de este ha sido muy superior a cualquiera de los anteriores. A Lingo le ha llevado 16 minutos y 36 segundo encontrar la solución óptima.

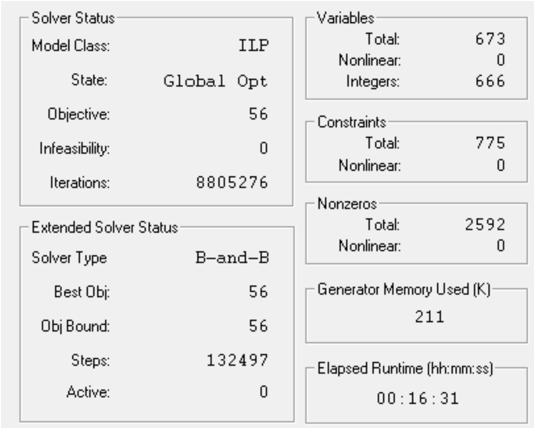

Imagen 27: *Lingo solver status para el caso simplificado 7.*

Fuente: Lingo.

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 2, 1, 6)        1.000000
X( 1, 1, 2, 1, 9)        1.000000
X( 1, 3, 1, 1, 6)        3.000000
X( 1, 3, 1, 1, 9)        3.000000
X( 2, 2, 2, 1, 6)        3.000000
X( 2, 2, 2, 1, 9)        3.000000
X( 2, 3, 2, 1, 6)        2.000000
X( 2, 3, 2, 1, 9)        2.000000
X( 3, 1, 1, 1, 6)        3.000000
X( 3, 1, 1, 1, 9)        3.000000
X( 3, 2, 1, 1, 6)        1.000000
X( 3, 2, 1, 1, 9)        1.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 6, 1)        1.000000
ALFA( 1, 6, 2)        1.000000
ALFA( 1, 9, 1)        1.000000
ALFA( 1, 9, 2)        1.000000
ALFA( 1, 15, 1)       1.000000
ALFA( 1, 15, 2)       1.000000
ALFA( 1, 18, 1)       1.000000
ALFA( 1, 18, 2)       1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 6, 1)        7.000000
Y( 1, 6, 2)        6.000000
Y( 1, 9, 1)        7.000000
Y( 1, 9, 2)        6.000000
```

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 1, 2)        1.000000
BETA( 1, 3, 1)        1.000000
BETA( 2, 2, 2)        1.000000
BETA( 2, 3, 2)        1.000000
BETA( 3, 1, 1)        1.000000
BETA( 3, 2, 1)        1.000000
```

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

```
YDD( 2, 1, 1, 2)        1.000000
YDD( 2, 1, 3, 1)        3.000000
YDD( 2, 2, 2, 2)        3.000000
YDD( 2, 2, 3, 2)        2.000000
YDD( 2, 3, 1, 1)        3.000000
YDD( 2, 3, 2, 1)        1.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 3)        3.000000
O( 1, 1, 2, 3)        1.000000
O( 1, 1, 3, 1)        3.000000
O( 1, 2, 1, 1)        1.000000
O( 1, 2, 2, 2)        3.000000
O( 1, 2, 3, 2)        2.000000
```

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              56.00000
  Extended solver steps:                          132497
  Total solver iterations:                       8805276
```

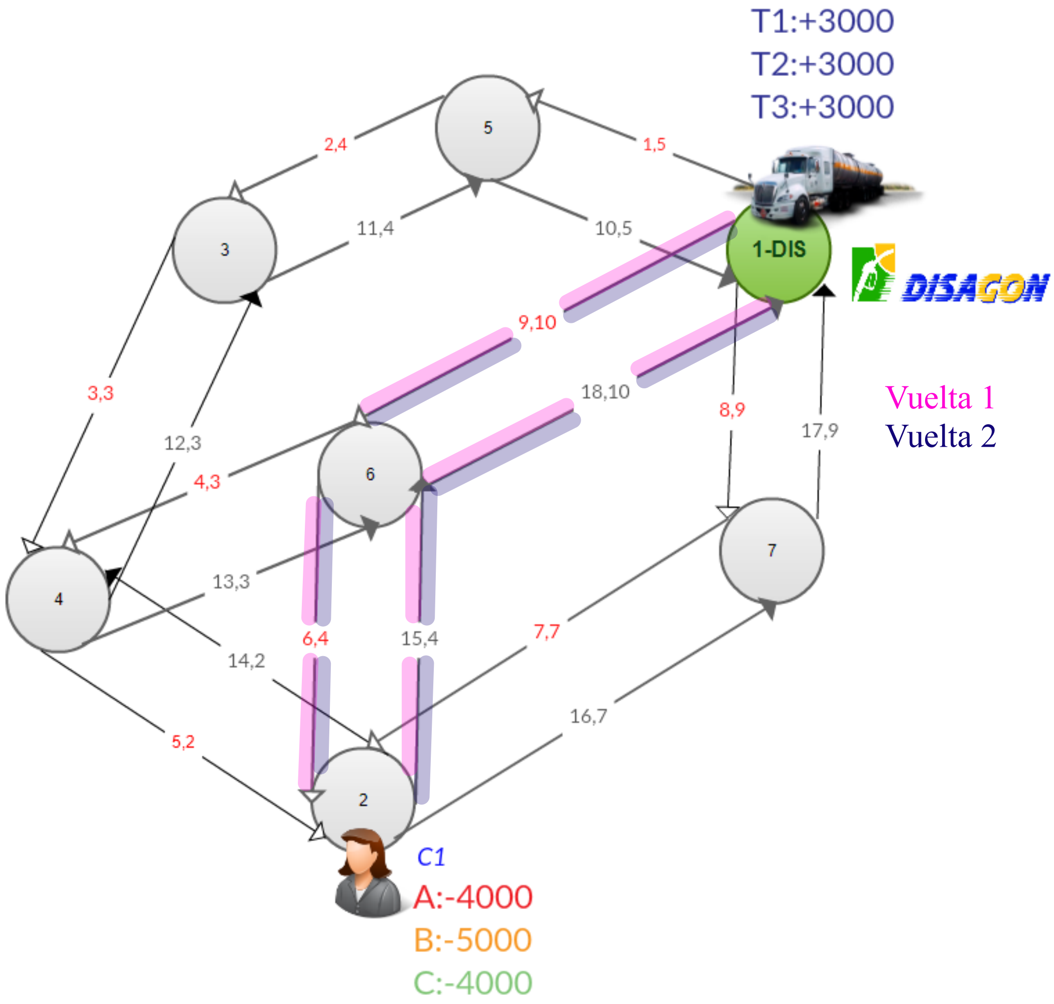

Imagen 28: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 7.*

Fuente: Elaboración propia.

6.8 Caso simlpificado 8

Tomando como referencia el ejemplo del caso simplificado 7*,* añadimos un cliente más con demandas de 4000 litros, 1000 litros y 0 litros de Gasóleo A, B y C respectivamente. Al ser la capacidad total del vehículo menor que la demanda total de los clientes, se verá obligado a volver a la Base (por el camino más corto obviamente) para volver a cargar y servir a los clientes la cantidad que no pudo por problemas de capacidad en la primera vuelta.

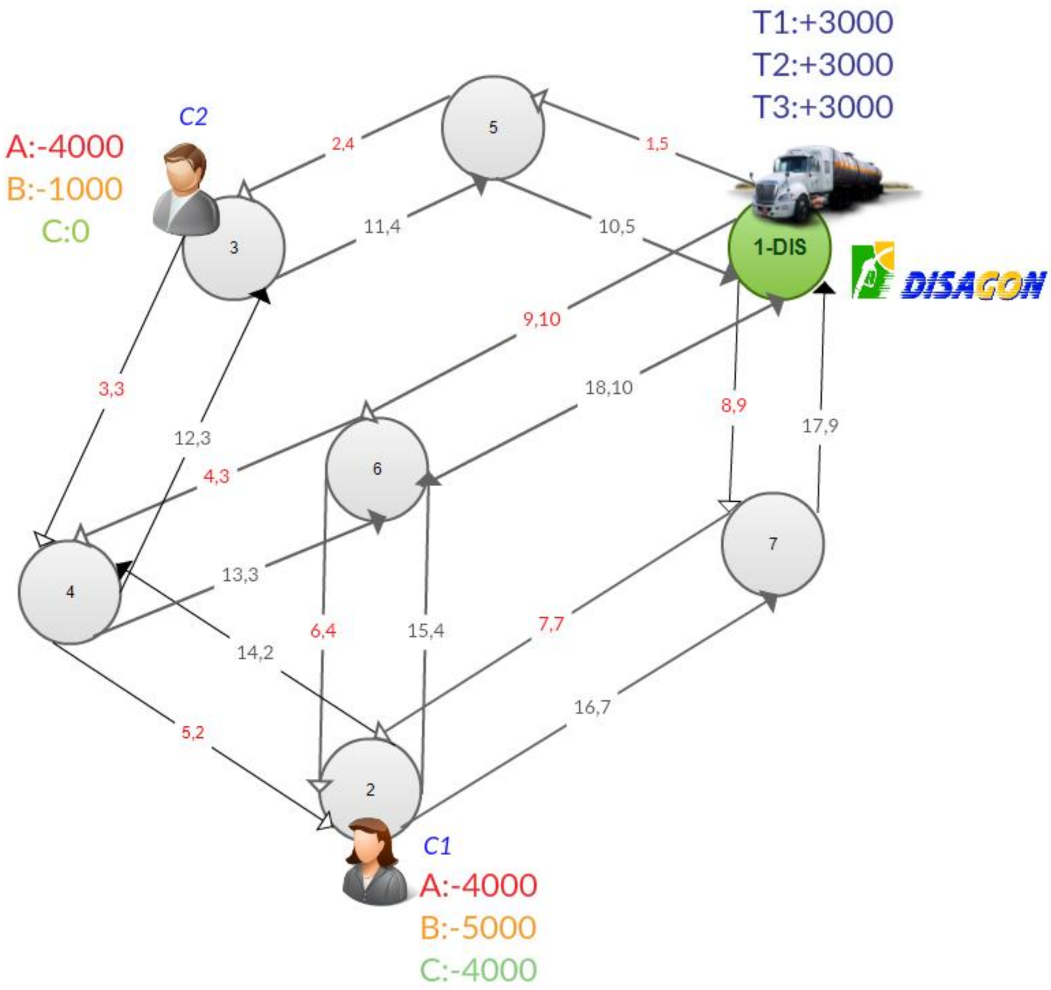

Imagen 29: *Grafo Caso simplificado 8.*

Fuente: Elaboración propia.

Como vemos en la imagen 34, el simple hecho de haber añadido un cliente más a nuestro problema ha aumentado en 25 minutos y 53 segundos el tiempo de procesamiento por parte de Lingo.

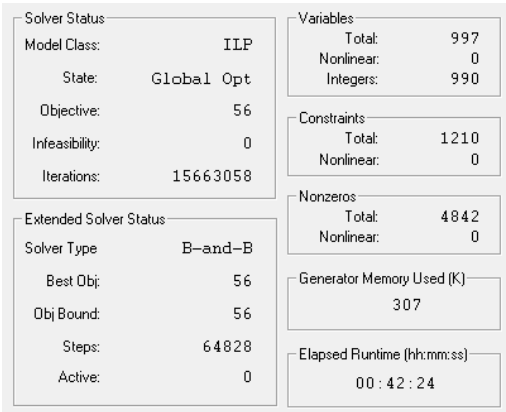

Imagen 30: *Lingo solver status para el caso simplificado 8.*

Fuente: Lingo.

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 1, 6)          4.000000
X( 1, 1, 1, 1, 9)          4.000000
X( 1, 2, 1, 2, 6)          4.000000
X( 1, 2, 1, 2, 9)          4.000000
X( 1, 2, 1, 2, 12)         4.000000
X( 1, 2, 1, 2, 14)         4.000000
X( 2, 1, 2, 1, 1)          2.000000
X( 2, 1, 2, 1, 2)          2.000000
X( 2, 1, 2, 1, 3)          2.000000
X( 2, 1, 2, 1, 5)          2.000000
X( 2, 1, 2, 2, 1)          1.000000
X( 2, 1, 2, 2, 2)          1.000000
X( 2, 3, 1, 1, 6)          3.000000
X( 2, 3, 1, 1, 9)          3.000000
X( 3, 2, 2, 1, 1)          4.000000
X( 3, 2, 2, 1, 2)          4.000000
X( 3, 2, 2, 1, 3)          4.000000
X( 3, 2, 2, 1, 5)          4.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 1, 2)          1.000000
ALFA( 1, 2, 2)          1.000000
ALFA( 1, 3, 2)          1.000000
ALFA( 1, 5, 2)          1.000000
ALFA( 1, 6, 1)          1.000000
ALFA( 1, 9, 1)          1.000000
ALFA( 1, 10, 1)         1.000000
ALFA( 1, 11, 1)         1.000000
ALFA( 1, 12, 1)         1.000000
ALFA( 1, 14, 1)         1.000000
ALFA( 1, 15, 2)         1.000000
ALFA( 1, 18, 2)         1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

Y(1, 1, 2)	7.000000
Y(1, 2, 2)	7.000000
Y(1, 3, 2)	6.000000
Y(1, 5, 2)	6.000000
Y(1, 6, 1)	11.00000
Y(1, 9, 1)	11.00000
Y(1, 12, 1)	4.000000
Y(1, 14, 1)	4.000000

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

BETA(1, 1, 1)	1.000000
BETA(1, 2, 1)	1.000000
BETA(1, 3, 2)	1.000000
BETA(2, 1, 2)	1.000000
BETA(2, 3, 1)	1.000000
BETA(3, 2, 2)	1.000000

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

YDD(2, 1, 1, 1)	4.000000
YDD(2, 2, 1, 2)	2.000000
YDD(2, 2, 3, 1)	3.000000
YDD(2, 3, 2, 2)	4.000000
YDD(3, 1, 2, 1)	4.000000
YDD(3, 2, 1, 2)	1.000000

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

O(1, 1, 1, 1)	4.000000
O(1, 1, 2, 1)	4.000000
O(1, 1, 3, 2)	3.000000
O(1, 2, 1, 2)	3.000000
O(1, 2, 2, 3)	4.000000

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              56.00000
  Extended solver steps:                           64828
  Total solver iterations:                      15663058
```

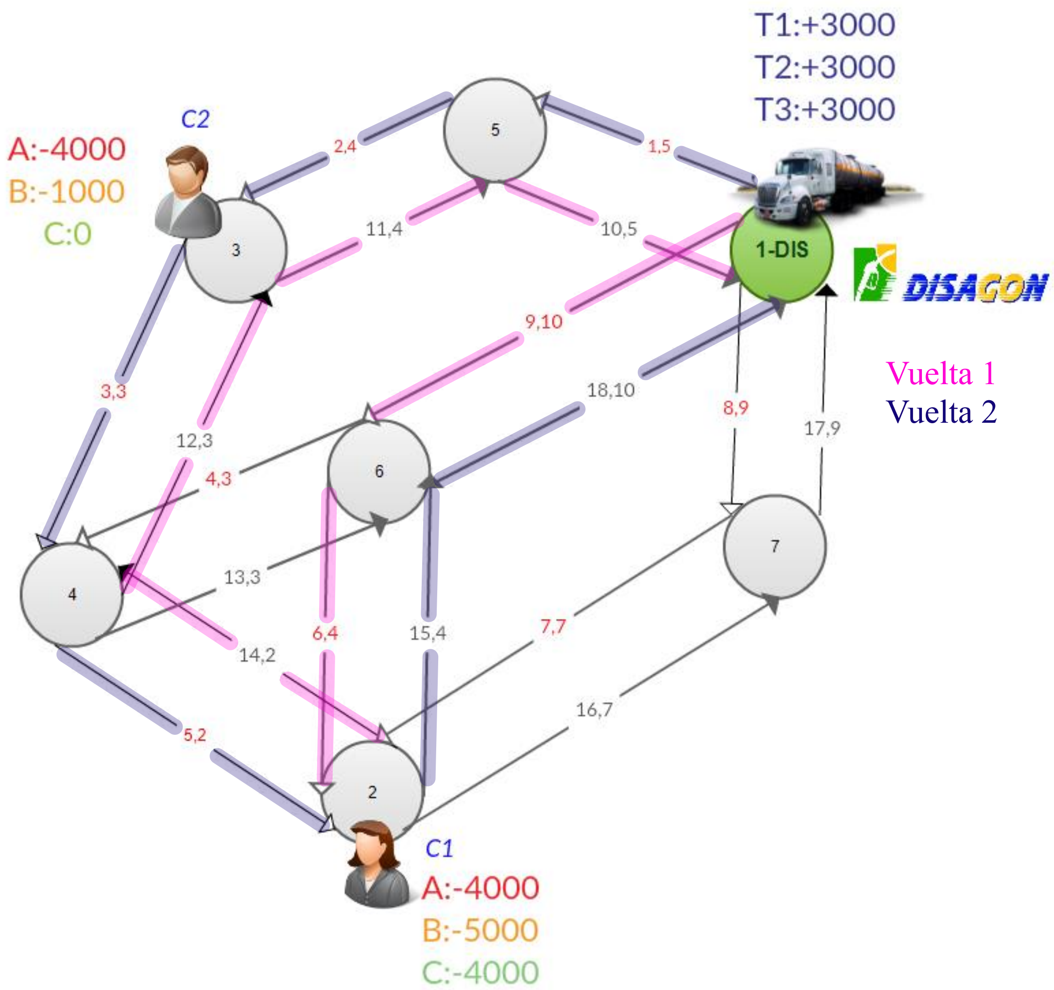

Imagen 31: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 8.*

Fuente: Elaboración propia.

6.9 Caso simplificado 9

Para el caso simplificado 9 probaremos con la misma configuración del caso simplificado 8 pero añadiendo un vehículo disponible más. Las capacidades de los tanques corresponden a la de los tres primeros tanques de los trailers reales usados en Disagón.

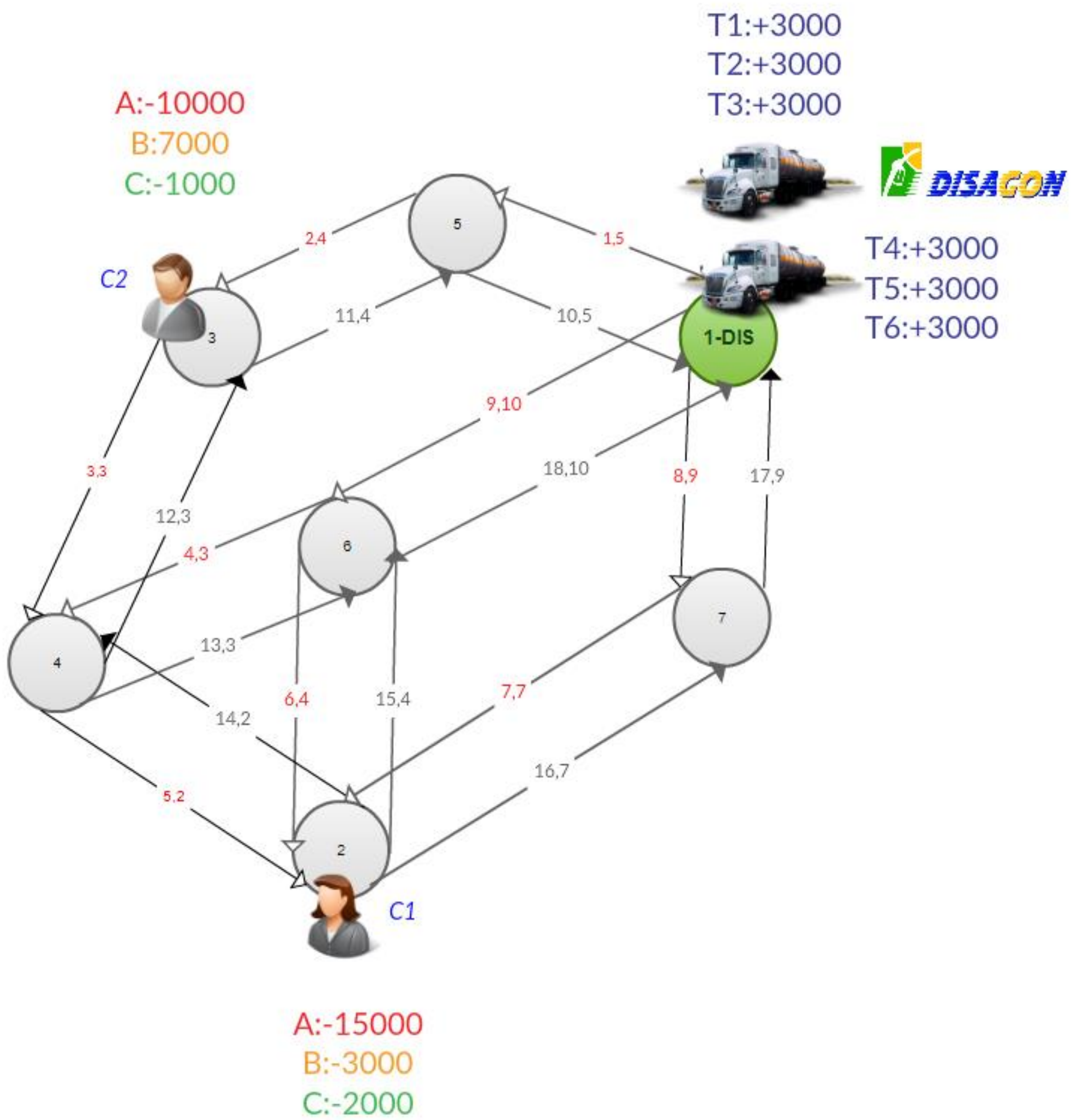

Imagen 32: *Grafo Caso simplificado 9.*

Fuente: Elaboración propia.

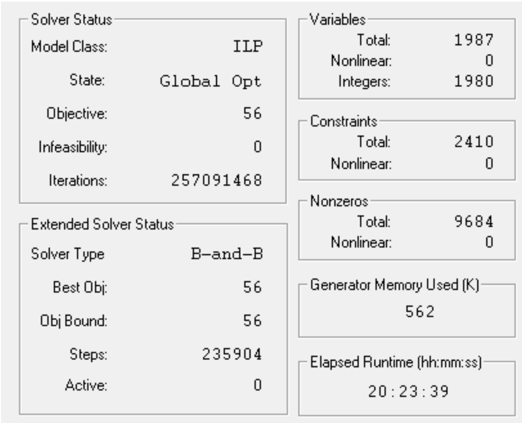

Imagen 33: *Lingo solver status para el caso simplificado 9.*

Fuente: Lingo.

Como podemos observas en la imagen 37, el tiempo de procesamiento ha sido de 20 horas, 23 minutos y 39 segundos, lo que supone un incremento de 19 horas 41 minutos y 15 segundos respecto al caso simplificado 8.

Solución Lingo:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              56.00000
  Extended solver steps:                          235904
  Total solver iterations:                     257091468
```

- Variable x_{ptrck} *(producto, tanque, vuelta, cliente, arco):*

```
X( 1, 1, 1, 2, 6)         10.00000
X( 1, 1, 1, 2, 9)         10.00000
X( 1, 1, 1, 2, 12)        10.00000
X( 1, 1, 1, 2, 14)        10.00000
X( 1, 4, 1, 1, 6)         10.00000
X( 1, 4, 1, 1, 9)         10.00000
X( 1, 5, 1, 1, 6)         5.000000
X( 1, 5, 1, 1, 9)         5.000000
X( 2, 2, 1, 2, 6)         5.000000
X( 2, 2, 1, 2, 9)         5.000000
X( 2, 2, 1, 2, 12)        5.000000
X( 2, 2, 1, 2, 14)        5.000000
X( 2, 3, 1, 1, 6)         3.000000
X( 2, 3, 1, 1, 9)         3.000000
X( 2, 3, 1, 2, 6)         2.000000
```

```
X( 2, 3, 1, 2, 9)        2.000000
X( 2, 3, 1, 2, 12)       2.000000
X( 2, 3, 1, 2, 14)       2.000000
X( 3, 6, 1, 1, 6)        2.000000
X( 3, 6, 1, 1, 9)        2.000000
X( 3, 6, 1, 2, 6)        1.000000
X( 3, 6, 1, 2, 9)        1.000000
X( 3, 6, 1, 2, 12)       1.000000
X( 3, 6, 1, 2, 14)       1.000000
```

- Variable α_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
ALFA( 1, 6, 1)        1.000000
ALFA( 1, 9, 1)        1.000000
ALFA( 1, 10, 1)       1.000000
ALFA( 1, 11, 1)       1.000000
ALFA( 1, 12, 1)       1.000000
ALFA( 1, 14, 1)       1.000000
ALFA( 2, 6, 1)        1.000000
ALFA( 2, 9, 1)        1.000000
ALFA( 2, 10, 1)       1.000000
ALFA( 2, 11, 1)       1.000000
ALFA( 2, 12, 1)       1.000000
ALFA( 2, 14, 1)       1.000000
```

- Variable Y_{vkr} *(vehículo, arco, vuelta):*

```
Y( 1, 6, 1)        20.00000
Y( 1, 9, 1)        20.00000
Y( 1, 12, 1)       12.00000
Y( 1, 14, 1)       12.00000
Y( 2, 6, 1)        18.00000
Y( 2, 9, 1)        18.00000
Y( 2, 12, 1)       6.000000
Y( 2, 14, 1)       6.000000
```

- Variable β_{ptr} *(producto, tanque, vuelta):*

```
BETA( 1, 1, 1)          1.000000
BETA( 1, 4, 1)          1.000000
BETA( 1, 4, 2)          1.000000
BETA( 1, 5, 1)          1.000000
BETA( 2, 2, 1)          1.000000
BETA( 2, 2, 2)          1.000000
BETA( 2, 3, 1)          1.000000
BETA( 2, 3, 2)          1.000000
BETA( 2, 6, 2)          1.000000
BETA( 3, 1, 2)          1.000000
BETA( 3, 5, 2)          1.000000
BETA( 3, 6, 1)          1.000000
```

- Variable YDD_{iptr} *(nodo, producto, tanque, vuelta):*

```
YDD( 2, 1, 4, 1)          10.00000
YDD( 2, 1, 5, 1)          5.000000
YDD( 2, 2, 3, 1)          3.000000
YDD( 2, 3, 6, 1)          2.000000
YDD( 3, 1, 1, 1)          10.00000
YDD( 3, 2, 2, 1)          5.000000
YDD( 3, 2, 3, 1)          2.000000
YDD( 3, 3, 6, 1)          1.000000
```

- Variable O_{irtp} *(nodo, vuelta, tanque, producto):*

```
O( 1, 1, 1, 1)          10.00000
O( 1, 1, 2, 2)          5.000000
O( 1, 1, 3, 2)          5.000000
O( 1, 1, 4, 1)          10.00000
O( 1, 1, 5, 1)          5.000000
O( 1, 1, 6, 3)          3.000000
```

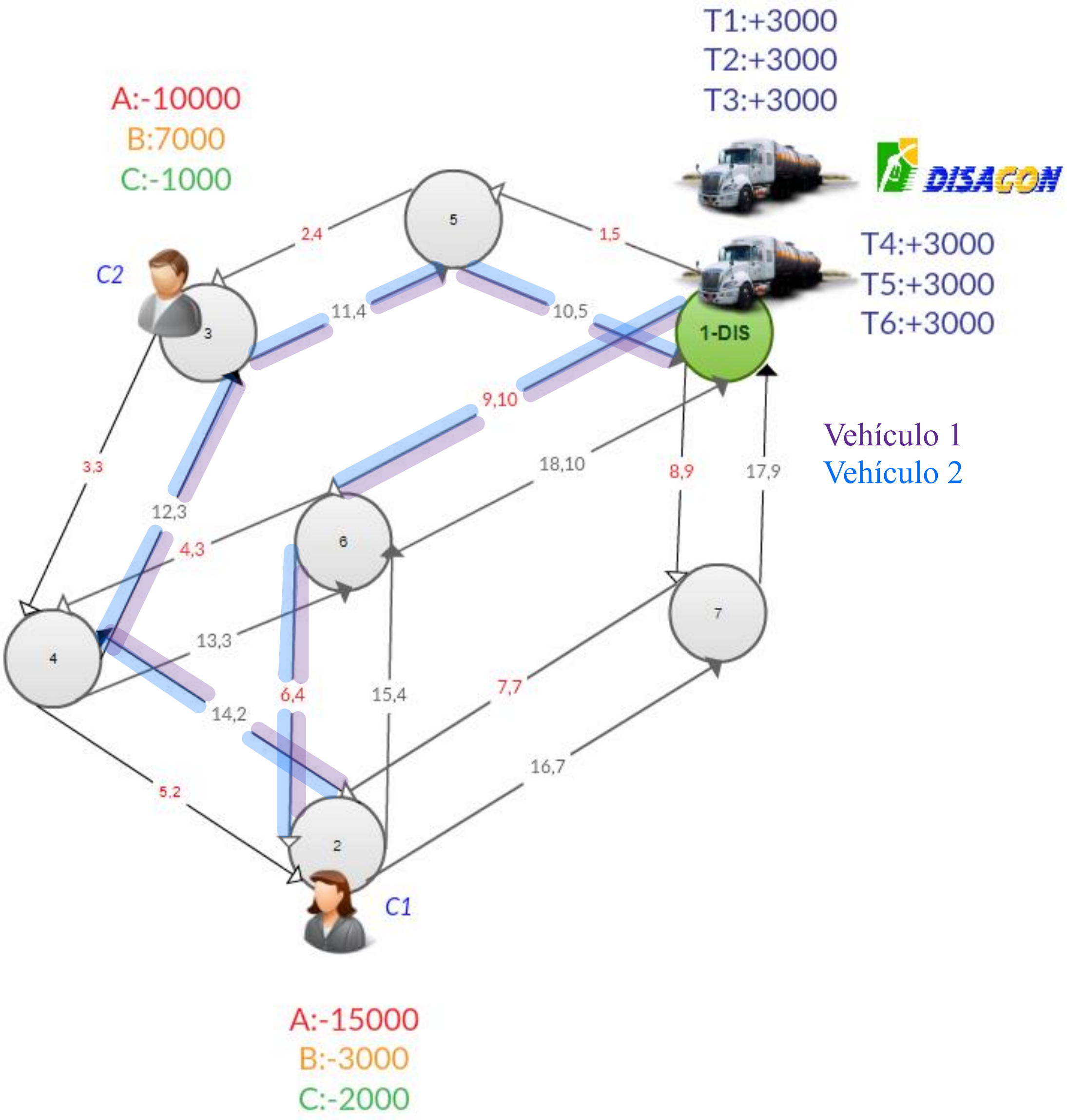

Imagen 34: *Arcos utilizados en el Caso simplificado 9.*

Fuente: Elaboración propia

7 CONCLUSIÓN

Tras la realización de este Proyecto Fin de Grado, podemos concluir que el fucionamiento del modelo VRP creado específicamente para la empresa Disagón S.L funciona correctamente para instancias pequeñas, siendo complicada su utilización, por ejemplo, para el grafo completo de Huelva y Sevilla del capítulo 7. Pensamos que la realización de este modelo puede considerarse una primera parte necesaria para la posterior programación de una heurística, ya que el modelo nos puede ser muy útil para comprobar el correcto funcionamiento de esta.

Debemos ser conscientes de la complejidad del problema, no solo por el número de variables y restricciones que se generan, sino por la complejidad de su modelado. Al ser un problema NP-completo, ya preveíamos que la obtención del óptimo se complicaría conforme se fueran incorporando más elementos al problema, tales como, más tanques a los vehículos o la inclusión de las vueltas para volver a cargar combustible.

Hay que destacar el tiempo dedicado a la implementación en Lingo y chequeo de errores. Esta fase puede considerarse la más ardua ya que, al ser un problema tan complejo, la comprobación de las soluciones y búsqueda de errores en el modelo ha sido una parte importante de este trabajo.

Es muy posible que modelos como este que se hacen muy complicados o incluso imposibles de resolver para situaciones reales como la de Disagón, dentro de unos años, gracias al avance de la computación cuántica, puedan ser resueltos en segundos.

8 BIBLIOGRAFÍA

[1] *Sáez Aguado, J. (2015). Resolución del Problema del Viajante de Comercio (TSP) y su variante con Ventanas de Tiempo (TSPTW) usando métodos heurísticos de búsqueda local. Universidad de Valladolid.*

[2] *Salinero, A. (2016). Desarrollo de algoritmos e interfaz gráfica para el problema de ruteo de vehículos. Universidad de Sevilla.*

[3] *Luer, A., Benavente, M., Bustos, J. and Venegas, B. (2009). El problema de rutas de vehículos: Extensiones y métodos de resolución, estado del arte. Doctor. Universidad de La Frontera - Chile.*

ANEXO

En un principio la intención era implementar el modelo en Lingo incluyendo el grafo completo de Huelva y Sevilla. Una vez que se empezó a probar el funcionamiento del modelo en Lingo en los casos simplificados, nos dimos cuenta de que el tamaño del problema era tal (número de variables y restricciones) que iba a ser muy complicado o incluso imposible que Lingo pudiera trabajar con el grafo completo de Huelva y Sevilla. Por ello, este podrá ser utilizado para la realización de una posterior heurística y/o interfaz de usuario que pueda ser usada de forma rápida e intuitiva en Disagón S.L.

Para la creación del grafo, nos hemos ayudado de la herramienta Google Maps, a través de la cual, nodo a nodo, hemos ido creando el grafo completo. En este caso, consideramos nodo no solo a los posibles clientes, sino también a todas las bifurcaciones. Consideramos arcos a la unión de 2 nodos que efectivamente están conectados.

Disagón tiene clientes en toda Andalucia y parte de Extremadura, pero es en Huelva y Sevilla donde se encuentra cerca del 80% de los clientes.

➢ HUELVA

- *Grafo provincia de Huelva completo:*

Imagen 35: *Grafo de la provincia de Huelva.*

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se muestra este mismo mapa dividido en Sectores para una mejor visualización.

- *Huelva zona sur:*

Imagen 36: *Zona sur de la provincia de Huelva.*

Fuente: Elaboración propia.

- *Zona centro:*

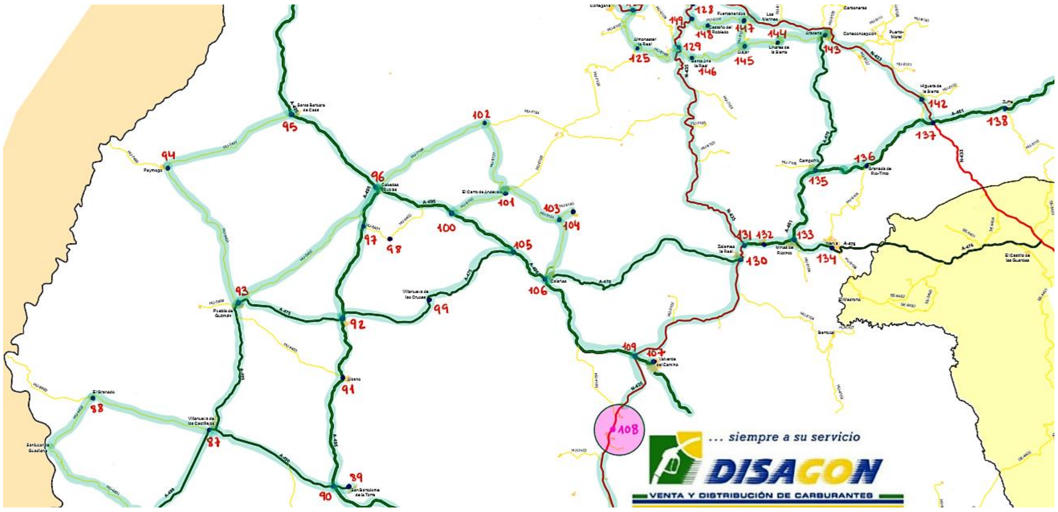

Imagen 37: *Zona centro de la provincia de Huelva.*

Fuente: Elaboración propia.

- *Zona norte:*

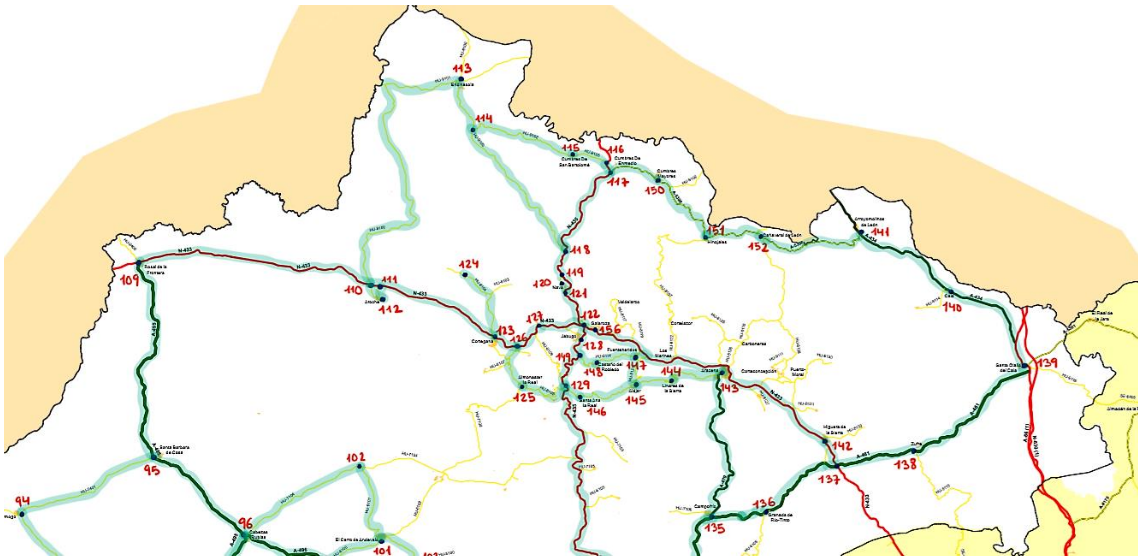

Imagen 38: *Zona norte de la provincia de Huelva.*

Fuente: Elaboración propia.

➢ SEVILLA

Mostramos ahora de la misma forma el grafo de la provincia de Sevilla.

- *Grafo de la provincia de Sevilla completo:*

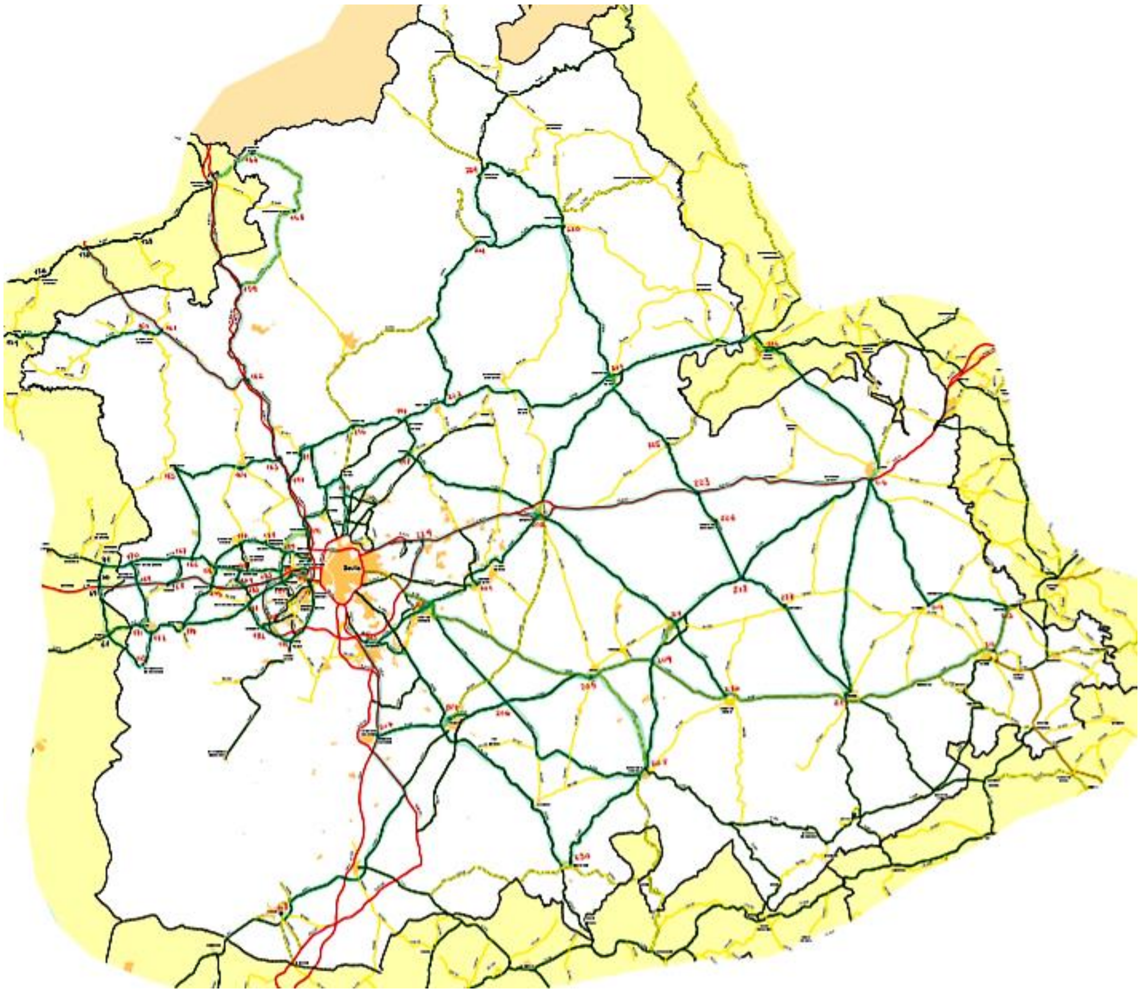

Imagen 39: *Grafo de la provincia de Sevilla.*

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se muestra este mismo mapa dividido en Sectores para una mejor visualización.

- Zona sur:

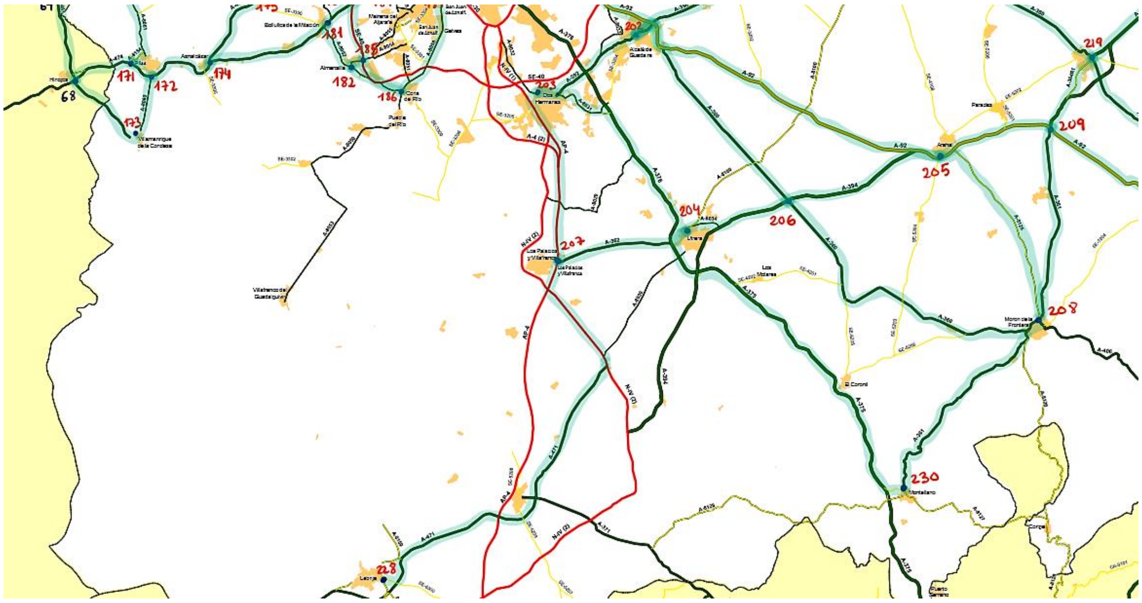

Imagen 40: *Zona sur de la provincia de Sevilla.*

Fuente: Elaboración propia.

- Zona centro:

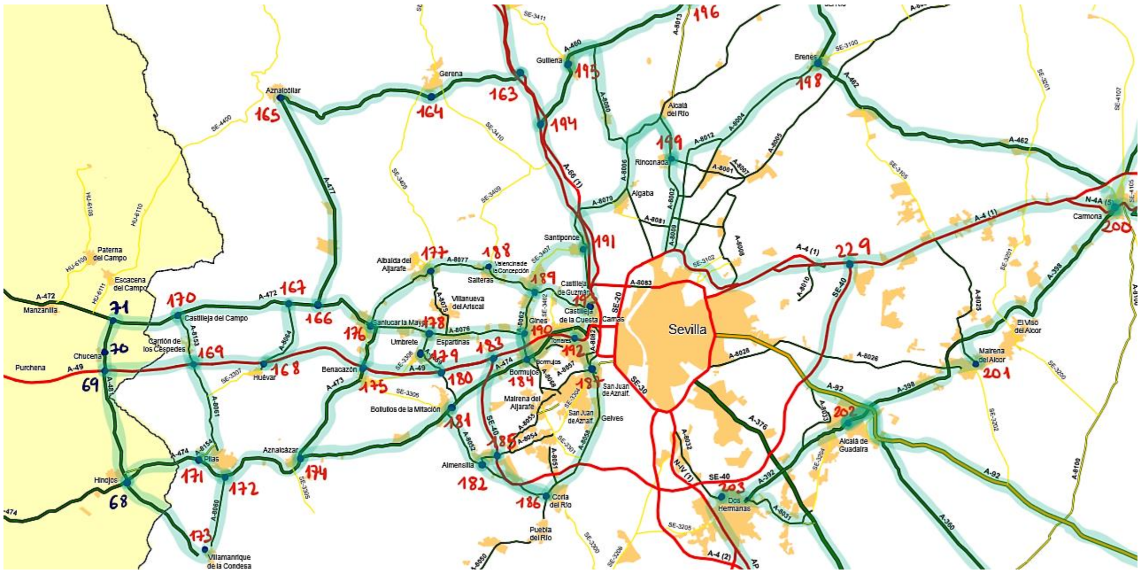

Imagen 41: *Zona centro de la provincia de Sevilla.*

Fuente: Elaboración propia.

- Zona norte:

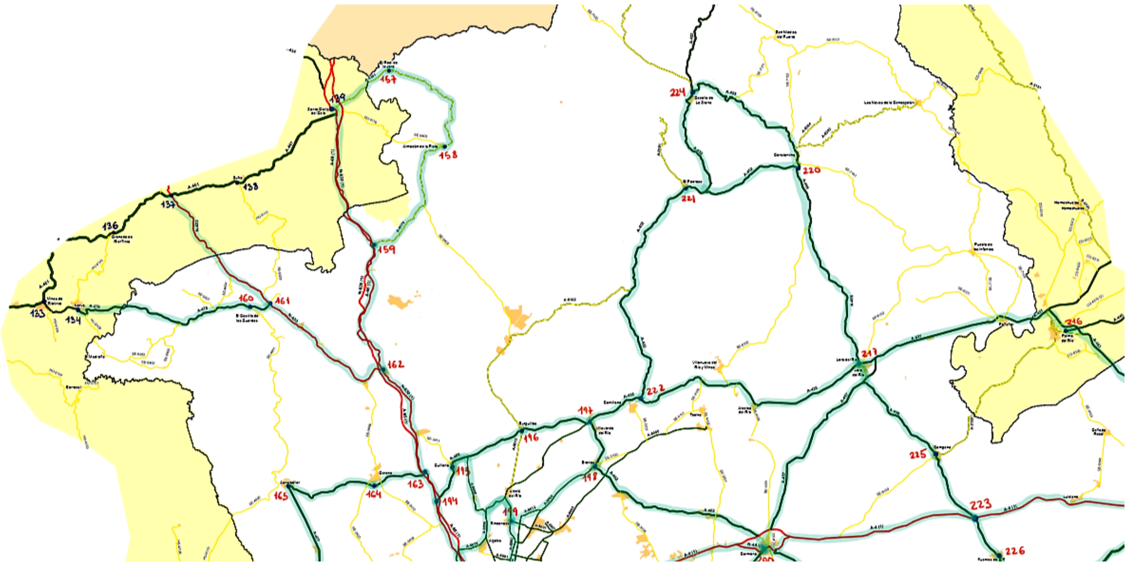

Imagen 42: *Zona norte de la provincia de Sevilla.*
Fuente: Elaboración propia.

- Este:

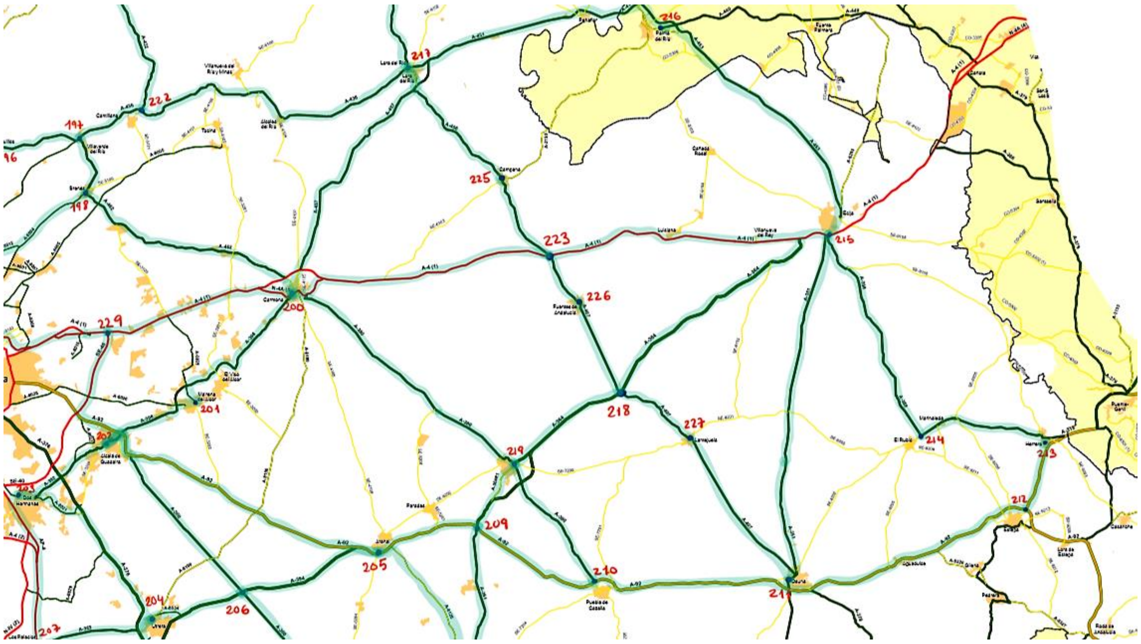

Imagen 43: *Zona Este de la provincia de Sevilla.*
Fuente: Elaboración propia.

Una vez representado el grafo completo, se deben calcular los costes que supone la utilización de cada uno de los arcos del grafo (en nuestro caso, tiempo). Como ya se ha dicho, se ha utilizado la Google Maps para el cálculo de tiempos medios entre nodos (considerando tráfico ordinario). Se adjunta a continuación varias tablas Excel con los tiempos medios (en minutos) de ir del nodo i al j, la vía que se utiliza para ir de cada nodo origen a cada nodo destino, así como la numeración de cada uno de los posibles clientes que puede tener que abastecer en un diá de trabajo. Como ya se ha indicado, no todos los nodos son poblaciones (posibles clientes), sino que también se contemplan todas las posibles bifurcaciones, con el fin de mejorar la eficiencia de la ruta, no obligando así a realizar un recorrido prededeterminado. Se adjunta así mismo una tabla con la numeración de cada una de las localidades.

➢ HUELVA

Tiempos medios y vía utilizada para ir del nodo i al nodo j:

Índice del arco	Nodo i	Nodo j	Tiempo (min)	Vía
1	1	2	7	A-49
2	2	4	2	N-431
3	3	4	6	Pista de Valdivia
4	4	82	1	N-431
5	82	5	3	N-431
6	82	84	1	A-499
7	2	84	2	A-49
8	84	14	2	A-49
9	5	6	3	A-5150
10	6	7	7	A-5150
11	7	8	7	A-5054
12	8	9	2	HU-3400
13	6	9	7	HU-3300
14	8	10	5	A-5054
15	9	11	6	HU-3400
16	10	12	7	A-5056
17	10	13	7	A-5076
18	13	12	4	N-431
19	14	5	1	N-446
20	5	15	4	N-431
21	15	13	1	N-431
22	12	16	5	N-431
23	16	17	5	N-431

24	18	16	3	N-444
25	17	19	4	A-5053
26	19	20	5	A-5053
27	20	21	9	A-5052
28	19	22	5	A-5058
29	23	24	1	A-497
30	24	25	1	A-5051
31	25	26	1	A-5051
32	26	28	4	A-5051
33	25	28	4	A-5050
34	21	26	6	A-5052
35	22	21	5	A-5059
36	24	29	5	A-497
37	23	27	4	A-497
38	27	30	1	A-5077
39	27	31	2	A-497
40	31	32	7	A-497
41	32	33	4	Paseo Marítimo
42	33	34	4	H-30
43	34	36	4	N-431
44	33	35	2	h-30
45	35	36	2	H-31
46	34	37	2	N-431
47	37	38	3	A-49
48	36	38	2	H-31
49	38	39	1	A-49
50	35	40	2	H-30
51	40	41	5	A-5000
52	36	41	1	A-5000-R
53	41	42	4	A-5000
54	42	43	4	A-5000
55	39	43	1	A-494
56	43	44	1	A-494
57	44	45	4	A-494

58	45	46	4	A-494
59	47	48	3	A-5025
60	48	49	2	A-5025
61	40	49	8	H-30
62	49	50	8	N-442
63	50	51	19	A-494
64	51	52	13	A-483
65	52	53	12	A-483
66	53	54	2	HU-4200
67	54	55	4	A-484
68	55	56	5	A-5100
69	55	57	3	A-484
70	44	58	5	A-486
71	58	59	5	A-486
72	59	60	11	A-5001
73	60	61	5	A-5001
74	61	62	6	HU-4105
75	43	62	12	A-472
76	56	63	10	HU-4102
77	63	64	4	A-472
78	64	65	7	A-493
79	65	66	2	A-49
80	66	67	5	A-483
81	67	56	8	HU-3109
82	53	68	13	A-474
83	68	69	6	A-481
84	69	70	2	A-481
85	70	71	5	A-481
86	71	72	1	A-472
87	72	73	4	HU-6111
88	73	74	5	HV-7009
89	74	75	7	HU-6109
90	75	76	5	A-472
91	76	64	14	A-472
92	39	77	7	N-435

93	77	78	6	HU-3105
94	78	79	5	HU-3105
95	79	37	3	N-431
96	79	80	2	N-431
97	80	81	8	N-431
98	77	85	4	N-435
99	83	84	7	A-499
100	14	153	3	A-49
101	153	18	2	A-49
102	153	13	3	N-445
103	18	16	3	N-444
104	18	81	9	A-49
105	17	81	6	N-431
106	81	37	7	A-49
107	81	30	6	A-492
108	30	31	4	A-492
109	47	20	4	A-5026
110	46	154	4	A-494
111	154	50	6	A-494
112	47	46	3	A-5025
113	39	61	8	A-49
114	59	155	2	A-486
115	61	155	4	A-484
116	61	66	5	A-49
117	62	63	6	A-472
118	67	54	4	A-483
119	65	69	7	A-49
120	83	86	10	A-499
121	86	87	10	A-499
122	87	88	9	HU-4402
123	88	86	23	HU-4401
124	90	89	6	A-495
125	87	90	11	A-490
126	90	80	12	A-495

127	89	91	11	A-495
128	91	92	7	A-495
129	92	93	9	A-475
130	87	93	13	A-499
131	93	94	15	HU-5401
132	94	95	13	HU-7401
133	95	96	9	A-495
134	96	97	4	A-495
135	97	98	3	A-495
136	92	99	10	A-475
137	96	100	8	A-496
138	100	101	5	HU-6100
139	101	102	11	HV-1421
140	101	103	7	HU-5101
141	103	104	1	HV-1472
142	105	106	6	A-496
143	106	109	13	A-496
144	109	107	4	A-496
145	109	108	9	N-435
146	85	108	11	N-435
147	107	64	24	A-493
148	95	109	17	A-495
149	103	106	7	HU-5101
150	97	92	8	A-495
151	96	102	13	HU-7104
152	109	110	17	N-433
153	110	111	1	N-433
154	110	112	2	HV-1431
155	111	112	2	HV-1431
156	110	113	28	HU-8100
157	113	114	7	H-211
158	114	115	17	HU-9102
159	115	116	5	HU-9105
160	116	117	1	N-435
161	117	118	8	N-435

162	118	119	3	N-435
163	119	120	3	H-2216
164	120	121	4	H-2216
165	119	121	2	N-435
166	121	122	4	N-435
167	111	123	9	N-433
168	123	124	10	HU-8104
170	126	125	7	HU-8105
171	126	127	4	N-433
172	127	122	4	N-433
173	122	128	3	N-435
175	128	149	2	N-435
176	149	129	5	N-435
177	125	129	9	HU-8105
178	129	131	24	N-435
179	131	130	3	N-435
180	106	130	24	A-478
181	109	130	14	N-435
184	131	132	2	A-461
185	132	133	3	A-461
186	133	134	4	A-476
187	133	135	9	A-461
188	135	136	5	A-461
189	136	137	7	A-461
190	137	138	7	A-461
191	138	139	14	A-461
192	139	140	12	A-434
193	140	141	11	A-434
194	137	142	4	N-433
195	142	143	11	N-433
196	143	135	20	A-479
197	143	144	15	HU-8105
198	144	145	7	HU-8105
199	145	146	10	HU-8105

200	146	129	3	HU-8105
201	145	147	11	HU-121
202	147	148	7	HU-8114
203	148	149	6	HU-8114
204	143	147	9	N-433
205	147	156	7	N-433
206	156	122	2	N-433
207	117	150	8	A-5300
208	150	151	12	A-5300
209	151	152	9	A-5300
210	152	141	18	A-5300
211	123	126	3	N-433
212	118	114	19	HU-9103

Tabla 2: *Tiempos medios entre cada par de nodos y vía utilizada para ir del nodo i al j (Huelva).*

Numeración de cada uno de los nodos de posibles clientes en la provincia de Huelva (aquí no se incluyen las bifurcaciones):

NODOS	
Numeración	**NOMBRE**
49	CLH S.A.
3	Ayamonte
6	Pozo del camino
7	Isla Cristina
9	La Redondela
11	Urbanización Pinar de la Bota
10	Islantilla
12	Lepe
17	Cartaya
19	Aquopolis Cartaya
20	El Rompido
21	El Portil
29	Punta Umbría
30	Aljaraque
31	Corrales
32	Huelva centro

39	San Juan del Puerto (1)
42	San Juan del Puerto (2)
45	Moguer
47	Palos de la Frontera
48	La Rábida
50	Mazagón
51	Matalascañas
52	El Rocío
53	Almonte (1)
54	Almonte (2)
56	Rociana del Condado
58	Lucena del Puerto
60	Bonares
62	Niebla
63	Villarasa
64	Palma del Condado
67	Bollulos del Condado
68	Hinojos
70	Chucena
73	Escacena del Campo
74	Paterna del campo
75	Manzanilla
76	Villalba del Alcor
77	Trigueros
78	El Judío
79	Gibraleón
83	Villablanca
85	Beas
86	San Silvestre de Guzman
87	Villanueva de los Castillejos
88	El Granado
89	San Batolomé de la Torre
91	Alosno
92	Tharsis

93	Puebla de Guzmán
94	Paymogo
95	Santa Bárbara de Casa
96	Cabezas Rubias
98	Montes de San Benito
99	Villanueva de Las Cruces
101	El Cerrro de Andévalo
102	San Telmo
104	Perrunal
106	Calañas
107	Valverde del Camino
108	DISAGÓN S.L.
109	Rosal de la Frontera
112	Aroche
113	Escinasola
115	Cumbres de San Bartolomé
120	Nava
123	Cortegana
124	Las Cefiñas
125	Almonaster la Real
127	El Repilado
128	Jabugo
130	Zalamea la Real
132	El Campillo
133	Minas de Rio Tinto
134	Nerva
135	Campofrío
136	Granada de Rio-Tinto
138	Zufre
139	Santa Olalla del Cala
140	Cala
141	Arrollomolinos de León
142	Higuera de la Sierra
143	Aracena
144	Linares de la Sierra

145	Alájar
146	Santa Ana la Real
147	Fuenteheridos
148	Castaño del Robledo
149	Galaroza
150	Cumbres Mayores
151	Hinojales
152	Cañaveral de León

Tabla 3: *Numeración de los posibles clientes en la provincia de Huelva.*

Fuente: Elaboración propia.

➢ SEVILLA

Índice del arco	Nodo i	Nodo j	Tiempo (min)	Vía
213	139	157	10	SE-177
214	157	158	21	A-8175
215	158	159	16	A-8175
216	139	159	12	A-66
217	134	160	18	A-476
218	160	161	2	A-476
219	137	161	16	N-433
220	161	162	13	N-433
221	162	159	12	A-66
222	162	163	9	A-66
223	163	164	5	A-477
224	164	165	11	A-477
225	165	166	11	A-477
226	166	167	1	A-472
227	167	168	6	A-8064
228	168	169	3	A-49
229	167	170	6	A-472
230	170	169	8	SE-636/SE-637

231	69	169	4	A-49
232	169	171	7	A-8061
233	171	68	5	A-474
234	171	172	2	A-474
235	172	173	6	A-8060
236	173	68	6	A-481
237	172	174	6	A-474
238	174	175	8	A-473
239	168	175	5	A-49
240	175	176	5	A-473
241	166	176	7	A-472
242	176	177	8	A-8077
243	176	178	5	A-8076
244	178	179	4	A-8059
245	179	180	2	A-8059
246	175	180	3	A-49
247	181	174	9	A-474
248	180	183	3	A-49
249	181	184	5	A-474
250	183	184	2	A-8062
251	184	185	12	A-8055
252	182	185	6	A-8054
253	182	186	6	A-8052
254	186	187	13	A-8058
255	187	185	12	SE-655
256	180	181	5	A-8059
257	181	182	4	A-8052
258	185	186	6	A-8051
259	177	188	8	A-8077
260	188	189	6	A-8077
261	189	190	5	A-8062
262	190	184	3	A-8062
263	189	191	9	SE-3407
264	192	187	6	A-49
265	192	184	4	A-49

266	192	193	9	A-49
267	193	191	10	N-630
268	189	193	8	A-8077
269	164	177	13	SE-527
270	163	194	3	A-66
271	194	195	5	A-460
272	195	196	11	A-460
273	196	197	11	A-460
274	197	198	9	A-462
275	198	199	11	A-8004
276	199	191	15	SE-020
277	199	195	19	SE-188
278	199	229	15	A-4/SE-20
279	229	200	11	A-4
280	229	202	7	SE-40/A-92
281	200	201	20	A-4/A-8025
282	201	202	17	A-398
283	202	203	20	A-392
284	203	187	19	N-4/SE-30
285	203	204	18	A-376
286	204	206	9	A-394
287	205	206	8	A-394
288	202	206	10	A-360
289	202	205	12	A-92
290	204	207	13	A-362
291	203	207	12	AP-4
292	205	208	21	A-8125
293	206	208	23	A-360
294	205	209	4	A-92
295	209	210	7	A-92
296	210	211	11	A-92
297	211	212	17	A-92
298	212	213	10	A-92
299	213	214	15	A-388

300	214	215	18	A-388
301	215	216	25	A-453
302	216	217	24	A-431
303	200	217	17	A-457
304	215	218	18	A-364
305	218	219	8	A-362
306	219	209	7	A-364
307	217	220	19	A-455
308	220	221	11	A-452
309	221	222	22	A-432
310	197	222	10	A-436
311	215	223	14	A-4
312	200	223	18	A-4
313	224	221	15	A-432
314	224	220	34	A-432/A-452
315	200	219	18	A-380
316	217	225	13	A-456
317	225	223	8	A-456
318	223	226	6	A-3202
319	226	218	8	SE-221
320	218	227	8	SE-700
321	227	211	14	SE-710
322	215	211	22	A-351
323	219	210	16	A-380
324	209	208	16	A-361
325	222	217	24	A-436
326	198	200	18	A-462
327	207	228	31	A-471
328	204	230	22	A-375
329	230	208	21	A-361

Tabla 4: *Tiempos medios entre cada par de nodos y vía utilizada para ir del nodo i al j (Sevilla).*

Fuente: Elaboración propia.

Numeración de cada uno de los nodos de posibles clientes en la provincia de Sevilla (no se incluyen las bifurcaciones):

NODOS	
Numeración	Nombre
157	El Real de la Jara
158	Almadén de la Plata
160	Castillo de las Guardas
164	Gerena
165	Aznalcóllar
168	Huévar
169	Carrión de los Céspedes
170	Castilleja del Campo
171	Pilas norte
172	Pilas sur
173	Villamanrique de la Condesa
174	Aznalcázar
175	Benacazón
176	Sanlucar la Mayor
177	Albadía del Aljarafe (Olivares)
179	Umbrete
181	Bollullos de la Mitación
182	Almensilla
184	Bormujos
185	Palomares del Río
186	Coria del Río
187	San Juan de Aznalfarache
188	Salteras
189	Valencina de la Concepción
190	Gines
191	Santiponce
192	Tomares-Castilleja de la Cuesta
193	Camas

195	Guillena
196	Burguillos
197	Villaverde del río
198	Brenes
199	Rinconada
200	Carmona
201	Mairena del Alcor
202	Alcalá de Guadaira
203	Dos Hermanas
204	Utrera
205	Arahal
208	Morón de la frontera
210	Puebla de Cazalla
211	Osuna
212	Estepa
213	Herrera
215	Écija
216	Palma del río
217	Lora del Río
219	Marchena
220	Constantina
221	El Pedroso
222	Cantillana
225	Campana
226	Fuentes de Andalucía
227	Lantejuela
228	Lebrija
230	Montellano

Tabla 5: *Numeración de los posibles clientes en la provincia de Sevilla.*

Fuente: Elaboración propia