Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelo paramétrico de compresor volumétrico

Autor: Carlos Rodríguez Andrade
Tutor: Francisco José Jiménez-Espadafor Aguilar

Dpto. de Ingeniería Energética
Grupo de Máquinas y Motores Térmicos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2018

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelo paramétrico de compresor volumétrico

Autor:
Carlos Rodríguez Andrade

Tutor:
Francisco José Jiménez-Espadafor Aguilar
Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería Energética
Grupo de Máquinas y Motores Térmicos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2018

Contents

Página

1 Introducción **1**
1.1 Máquinas de paletas . . . 2

2 Definición de la geometría **3**
2.1 Variables geométricas de entrada . . . 3
2.2 Ecuación del rótor y estátor en coordenadas polares . . . 3
2.3 Ángulo entre paletas . . . 4
2.4 Geometría de las paletas en detalle . . . 4
2.5 Verificación de la geometría . . . 5
2.6 Volúmenes adyacentes . . . 6

3 Cálculo de las variables geométricas del problema **6**
3.1 Mallado . . . 7
3.2 Cálculo del volumen de cada célula . . . 7
3.2.1 Cálculo del área ideal . . . 7
3.2.2 Cálculo del área de las paletas . . . 8
3.2.3 Volumen . . . 9
3.2.4 Comprobación del cálculo del volumen . . . 9
3.3 Cálculo de la derivada del volumen . . . 10
3.3.1 Derivada del área ideal . . . 10
3.3.2 Derivada del área de las paletas . . . 10
3.3.3 Derivada del volumen . . . 10
3.3.4 Comprobación del cálculo de la derivada del volumen . . . 11

4 Cálculo de las variables termodinámicas del problema **11**
4.1 Hipótesis . . . 11
4.2 Fluido de trabajo . . . 12
4.2.1 Modelo de gases . . . 12
4.2.2 Composición del gas . . . 12
4.2.3 Propiedades del fluido de trabajo . . . 12
4.3 Modelo de gastos . . . 15
4.3.1 Gastos de entrada y salida . . . 16
4.3.2 Gastos de fugas . . . 18
4.4 Modelo de refrigeración . . . 19
4.5 Ecuación del Primer Principio . . . 20
4.6 Ecuación de conservación de la materia . . . 21
4.7 Cálculo numérico . . . 21
4.8 Cálculo de la temperatura y número de moles . . . 22
4.9 Cálculo de la presión . . . 22

5 Cálculo de las variables de salida **22**
5.1 Trabajo indicado . . . 22
5.2 Potencia indicada . . . 22
5.3 Potencia de fricción . . . 23
5.4 Potencia total . . . 24
5.5 Masa de salida . . . 24
5.6 Gasto de salida . . . 24

5.7 Masa de fugas . . . 25
5.8 Rendimiento volumétrico . . . 25
5.9 Rendimiento termodinámico . . . 25
5.10 Temperatura de los gases de salida . . . 27
5.11 Volumen muerto . . . 27
5.12 Par en el eje . . . 27

6 Herramienta para el análisis de la máquina 27
6.1 Ejemplo parámetros y gráficas de salida . . . 30

7 Mapas de actuación 33
7.1 Ejemplos de mapas de actuación . . . 33

8 Estudio de sensibilidad 36
8.1 Holgura . . . 36
8.2 Excentricidad . . . 36
8.3 Longitud, Diámetro del estátor, Diámetro del rótor . . . 36
8.4 Espesor de las paletas . . . 36
8.5 Número de paletas . . . 36
8.6 Tamaño de los volúmenes adyacentes . . . 36
8.7 Constante y temperatura de refrigeración . . . 37
8.8 Coeficiente de descarga . . . 37
8.9 Velocidad de giro . . . 37

9 Optimización 37

References 35

List of Figures

1 Tipos de compresores volumétricos . . . 1
2 Esquema de un compresor de paletas . . . 2
3 Tomas de entrada y salida . . . 3
4 Parámetros geométricos . . . 4
5 Geometría de la máguina . . . 5
6 Representación del mallado . . . 7
7 Área ideal . . . 8
8 Área de las paletas a sustraer (A_p) . . . 9
9 Holgura . . . 9
10 Una sección del volumen de control es el área sombreada. Gastos de entrada y salida y gastos de fugas . . . 15
11 Representación esquemática del modelo de tobera convergente . . . 16
12 Area de entrada y salida . . . 18
13 Representación esquemática de las tomas de entrada o salida . . . 19
14 Potencia específica $[KW/(m^3/min)]$ . . . 23
15 Comparativa entre compresión/expansión real e isentrópica . . . 26
16 Aplicación desarrollada con un ejemplo . . . 28
17 Ventana de selección de la composición del gas . . . 29
18 Menús desplegables . . . 29
19 Presión . . . 30
20 Temperatura . . . 30
21 Masa . . . 31
22 Evolución de la presión en los volúmenes adyacentes . . . 31
23 Evolución de la temperatura en los volúmenes adyacentes . . . 31
24 Evolución de la masa en los volúmenes adyacentes . . . 32
25 Gastos de fugas con las células anterior y siguiente . . . 32
26 Diagrama HS y Dibujo de la máquina . . . 32
27 Mapa de relación de compresión frente a gasto corregido . . . 34
28 Mapa de potencia frente a gasto corregido . . . 35
29 Mapa de potencia corregida frente a gasto corregido . . . 35
30 Diagrama P-V sin optimizar . . . 38
31 Diagrama P-V tras la 1^a iteración . . . 38
32 Diagrama P-V tras la 2^a iteración . . . 39

List of Tables

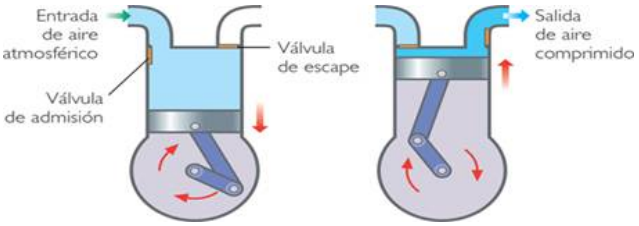
1 Tabla de coeficientes para $1000 < T < 5000$ 13
2 Tabla de coeficientes para $T < 1000$ 13
3 Tabla de coeficientes para metano y propano 14
4 Tabla de las variables de salida para el compresor de ejemplo 32

1 Introducción

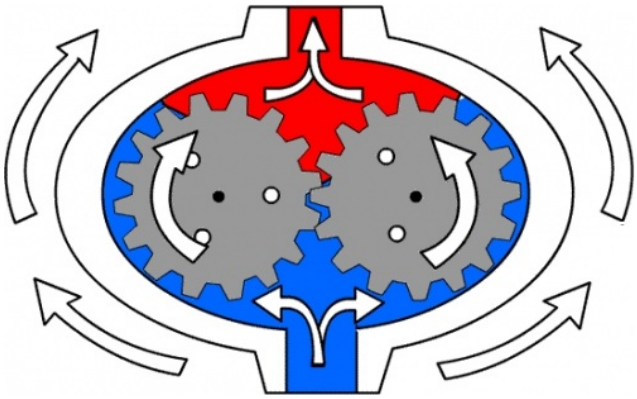
Los compresores o expansores volumétricos son un tipo de máquina que comprimen o expanden gas mediante un proceso de reducción o aumento del volumen de control.

En la industria se usan ampliamente los compresores volumétricos rotativos ya que tienen un rendimiento alto y cubren un amplio rango de gastos y relaciones de compresión.

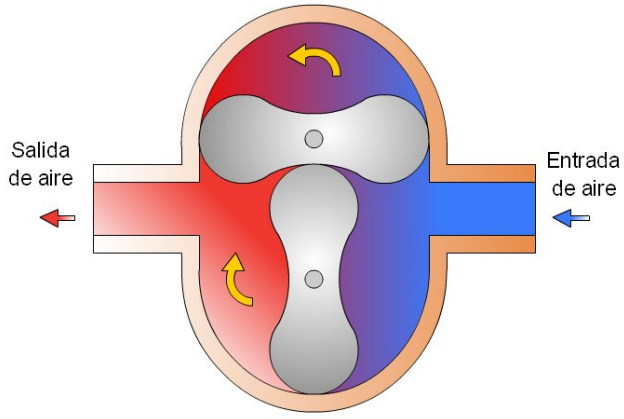
La manera en la que una máquina de este tipo comprime el gas es variando la geometría del volumen de control a lo largo de un ciclo, esto hace que la casuística sea muy amplia puesto que las formas de variar el volumen en un ciclo son interminables. De ahí, que existan una gran variedad de tipos de compresores volumétricos: de pistón, de engranajes, de husillo, de tornillo, de paletas, etc.



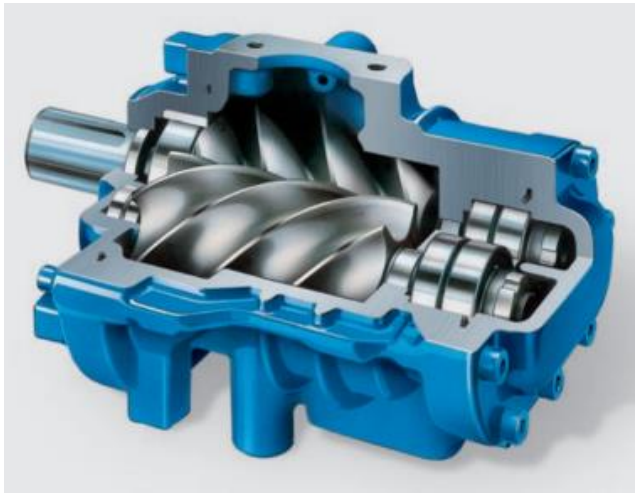
(a) Compresor de pistón



(b) Compresor de engranajes



(c) Compresor de husillo



(d) Compresor de tornillo

Figure 1: Tipos de compresores volumétricos

Como puede verse en la *figura 1* la geometría de este tipo de máquina es muy variada y, en muchos casos, notablemente compleja.

El principio de funcionamiento de todos ellos es similar, el fluido entra en una cámara, a través de una toma de entrada, donde queda confinado durante el proceso de compresión. Dentro de la cámara se encuentran el elemento móvil que hace variar el volumen en cada ciclo y que está impulsado por un elemento de potencia externo (motor, turbina, etc) comprimiendo

al fluido durante el ciclo. Finalmente el gas a alta presión sale para servir de suministro al sistema que esté conectado a la salida de la máquina.

Para el caso de un expansor la mecánica es la misma, entra un fluido a alta presión, se expande a lo largo de un ciclo dentro de la máquina debido a un aumento del volumen, y sale finalmente a baja presión. Durante este proceso el gas proporciona potencia al eje del rótor en lugar de consumirla.

1.1 Máquinas de paletas

Los compresores o expansores de paletas son un caso particular de máquinas volumétricas que consiguen variar la geometría del volumen de control a lo largo de un ciclo gracias a la excentricidad que existe entre el rótor y estátor (véase la *figura 4*). La función de las paletas es la de confinar el gas en un espacio concreto, delimitando de esta manera el volumen de control. En este caso el volumen queda definido por el rótor, el estátor, y dos paletas consecutivas.

Como puede verse en la *figura 2*, debido a la excentricidad entre rótor y estátor, la longitud de las paletas es distinta en cada ángulo, para lograr esto las paletas se pueden mover linealmente en dirección radial con respecto del rótor, pudiendo retraerse o desplegarse.

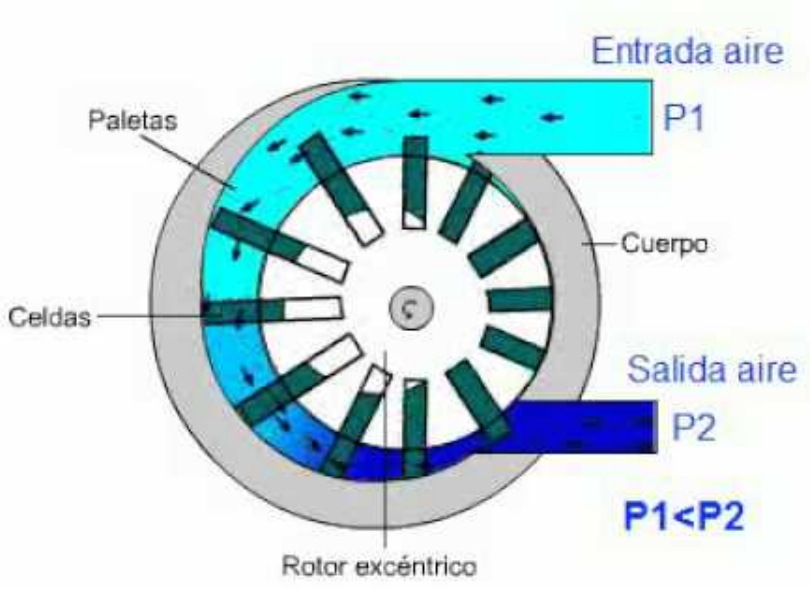


Figure 2: Esquema de un compresor de paletas

Este proyecto ha consistido en modelar en implementar en Matlab un compresor o expansor de paletas, así como, en desarrollar una herramienta que permita al usuario definir sus características y analizar los datos de salida.

La finalidad de este trabajo es fundamentalmente práctica, puesto que, debido al amplio abanico de variables de entrada que admite, permite estudiar y optimizar una aplicación concreta, es decir, un compresor con una geometría y condiciones de funcionamiento particulares.

2 Definición de la geometría

En esta primera sección se engloba la descripción geométrica de la máquina que constituye el primer paso antes de resolver el problema termodinámico (sección 4).

La geometría se define a partir de los parámetros y ecuaciones que se presentan en los apartados siguientes.

Nota: Todas las magnitudes de este documento se encuentran en el Sistema Internacional de Unidades.

2.1 Variables geométricas de entrada

Las variables que definen la geometría del compresor/expansor son datos conocidos que el usuario debe introducir en el programa.

- Diámetro del estátor (D_e).
- Diámetro del rótor (D_r).
- Excentricidad (e).
- Número de paletas (N).
- Holgura de la punta de las paletas.
- Espesor de las paletas (d_{tip}).
- Longitud de la máquina (L).
- Área de entrada a la máquina ($A1$)
- Área de salida a la máquina ($A2$)
- Volúmen del depósito de entrada ($Vant$)
- Volúmen del depósito de salida ($Vsig$)

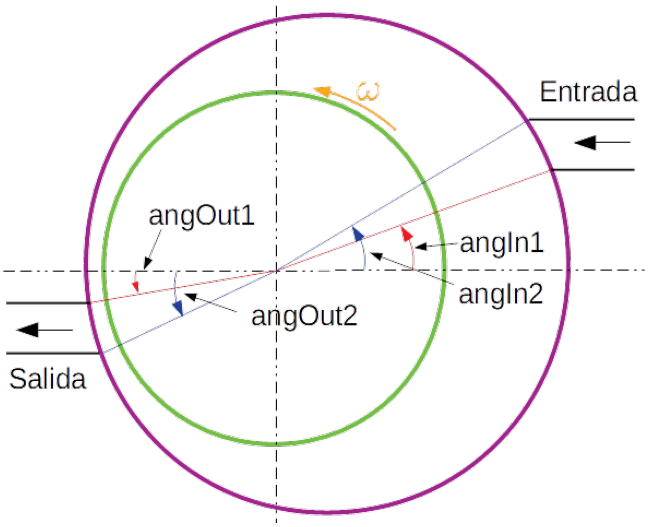


Figure 3: Tomas de entrada y salida

Además, el usuario también debe introducir la posición de la **entrada y salida de gases** a partir de los siguientes 4 ángulos:

- Ángulo de entrada de gases inicial (1) ($angIn1$).
- Ángulo de entrada de gases final (2) ($angIn2$).
- Ángulo de salida de gases inicial (1) ($angOut1$).
- Ángulo de salida de gases final (2) ($angOut2$).

Todos estos parámetros geométricos pueden verse representados en la *figura 4*. Por otra parte en la *figura 3* puede entenderse mejor el significado de estos ángulos de entrada y salida.

2.2 Ecuación del rótor y estátor en coordenadas polares

En la representación gráfica en coordenadas polares del rótor y estátor, el rótor se sitúa centrado en el origen y la excentricidad es aplicada al estátor como se ve en la *figura 5a*.

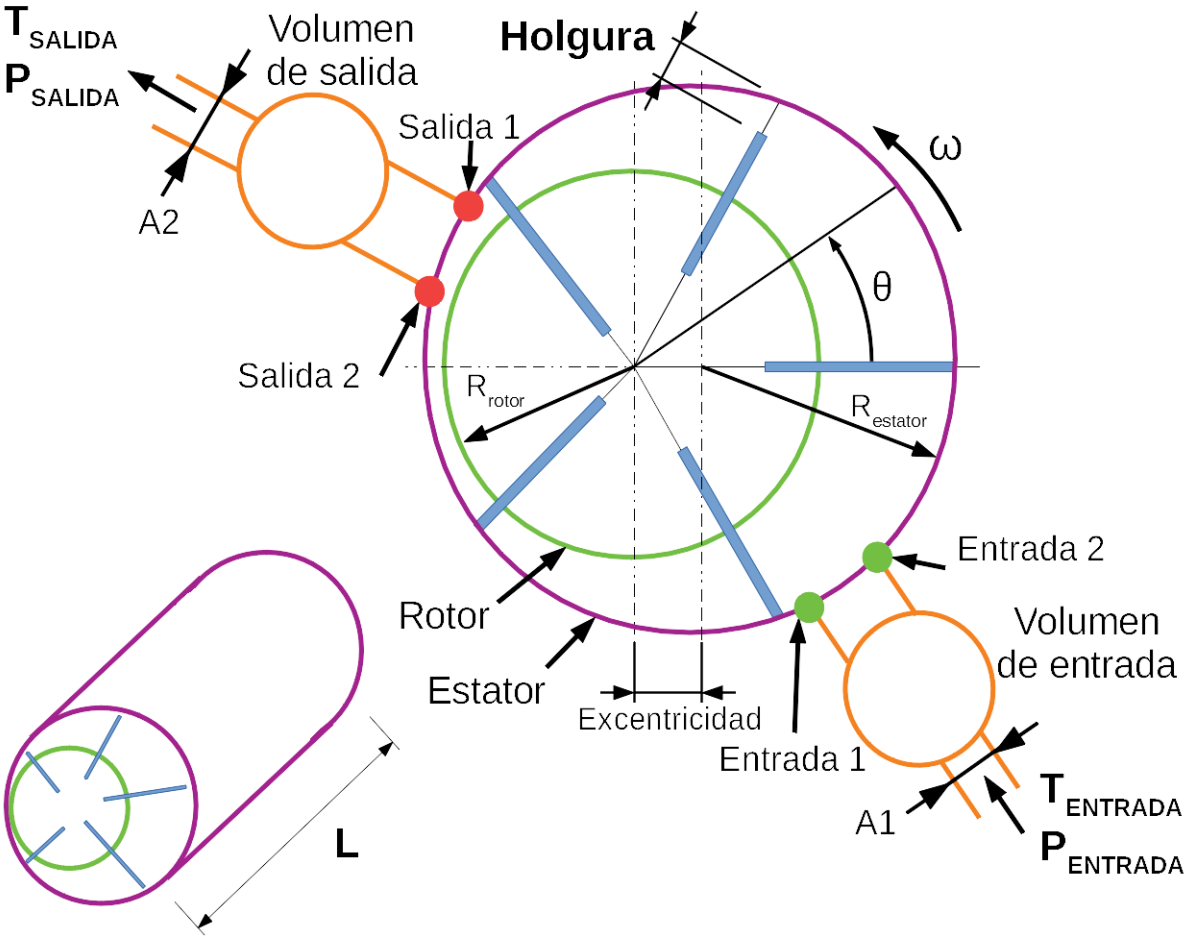


Figure 4: Parámetros geométricos

Ecuación para el rótor:

$$r(\theta) = \frac{D_r}{2} = cte \tag{1}$$

Ecuación para el estátor:

$$r(\theta) = e \cdot cos(\theta) + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sin(\theta)^2} \tag{2}$$

2.3 Ángulo entre paletas

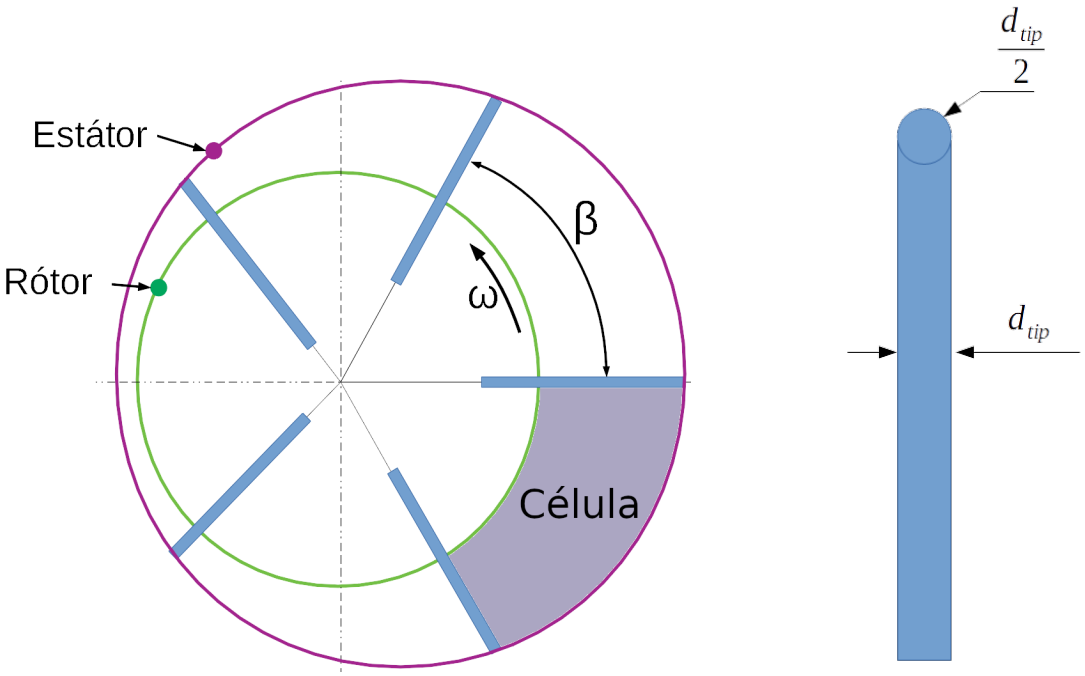
Este ángulo viene dado por el número de paletas (N) introducida por el usuario y está representado en la *Figura 5a*.

$$\beta = \frac{2\pi}{N} \tag{3}$$

De esta manera, el número de volúmenes de control en los que se divide la máquina es igual al número de paletas (N).

2.4 Geometría de las paletas en detalle

Las paletas son prismas que se extienden a lo largo de la longitud de la máquina cuya base (o sección) se muestra en la *Figura 5b*.



(a) Rótor, estátor y Ángulo β (b) Geometría de las paletas

Figure 5: Geometría de la máguina

Como se ve, el extremo de las paletas más cercano a la pared interior del estátor está redondeado para minimizar la fricción con éste.

Por otra parte, las paletas tienen un cierto espesor que el usuario especifica y que ocupa un cierto volumen de la máquina.

2.5 Verificación de la geometría

Los datos geométricos son introducidos por el usuario, por lo que para asegurar que éstos son correctos y no llevan a incompatibilidades en la geometría de la máquina se han implementado las siguientes comprobaciones:

- Comprobación de que el rótor no colisiona con el estátor debido a un diámetro excesivo del rótor, a un diámetro demasiado pequeño del estátor o demasiada excentricidad. Esto se ha verificado con la siguiente desigualdad:

$$\frac{D_e}{2} > \frac{D_r}{2} + e \tag{4}$$

- Comprobación de que el número de paletas no excede el máximo permitido impuesto por restricciones geométricas dadas por el perímetro del rotor y espesor de las paletas. Esto se contempla con la siguiente desigualdad:

$$\pi D_r > N\, d_{tip} \tag{5}$$

En cuanto a los ángulos de las tomas de entrada y salida de aire se realizan las siguientes comprobaciones:

- Los ángulos finales deben ser mayores que los iniciales (puesto que el área de la entrada y salida de gases no puede ser negativa o cero):

$$angIn2 > angIn1 \quad y \quad angOut2 > angOut1 \tag{6}$$

- La salida debe estar antes que la entrada para el caso de **compresor**:

$$angOut2 < angIn1 \tag{7}$$

- La entrada debe estar antes que la salida para el caso de **expansor**:

$$angIn1 < angOut2 \tag{8}$$

- La salida y la entrada deben estar espaciadas un ángulo mayor que β para que una célula no pueda cargar y descargar simultáneamente

  compresor:

$$angIn1 - angOut2 > beta \tag{9}$$

  expansor:

$$angOut1 - angIn2 > beta \tag{10}$$

- La holgura de la punta de las paletas no puede ser mayor que la longitud mínima de las paletas en un ciclo.

$$\frac{De}{2} - \frac{Dr}{2} - e > holgura \tag{11}$$

De manera que si no se cumplen estas condiciones se le pide al usuario que introduzca datos que no provoquen error.

Además de los mensajes de error, también se especifican posibles soluciones para resolver la incompatibilidad geométrica en cada caso.

2.6 Volúmenes adyacentes

El sistema que se está modelando consta, además de la máquina en sí misma, de dos volúmenes adyacentes a esta, uno a la entrada y otro a la salida que tienen una capacidad fija. cuyo valor debe introducir el usuario.

La función de los volúmenes es la de amortiguar oscilaciones de presión. El volumen a la entrada se encarga de amortiguar oscilaciones en la presión de entrada (impuesta por el sistema al que se conectaría el conjunto compresor/expansor y volúmenes adyacentes) para que no lleguen a la máquina y evitar así causar daños estructurales. El volumen de salida amortigua las oscilaciones de la presión que produce la propia máquina debido a la descarga de fluido cuando las células entran en contacto con la salida.

Aunque la máquina funcione en régimen estacionario, las descargas de gas se hacen de forma discreta (sólo cuando las células están abiertas a la salida). Esto hace que existan pulsos de presión que originan oscilaciones en la salida que también hay que amortiguar para evitar daños al sistema que se conecte a la salida.

En cuanto a las variables geométricas asociadas a los volúmenes, el usuario puede elegir la capacidad en $[m^3]$ de cada uno de ellos, el área de entrada al volumen de entrada ($A1\,[m^2]$) y el área de salida del volumen de salida ($A2\,[m^2]$). Las áreas de salida del volumen de entrada y el área de entrada del volumen de salida vienen impuestas por los ángulos $angIn1$, $angIn2$, $angOut1$, $angOut2$ y la longitud (L). Todos estos parámetros pueden verse en la *figura 4*.

3 Cálculo de las variables geométricas del problema

Para resolver el problema se calculan en un ciclo las siguientes variables geométricas: volumen de cada célula (V), derivada con respecto al tiempo del volumen ($\frac{dV}{dt}$)

Todas estas variables se calculan una vez en cada sección de la malla.

3.1 Mallado

El problema se ha resuelto numéricamente con el software MATLAB R2015a. Para ello se ha definido un mallado radial como se ve en la *figura 6* ; de esta forma, las variables no se calculan de manera continua sino discreta en cada sección de la malla.

Nota: El número de divisiones del mallado no coincide con las representadas en la *figura 6* qué es sólo orientativo.

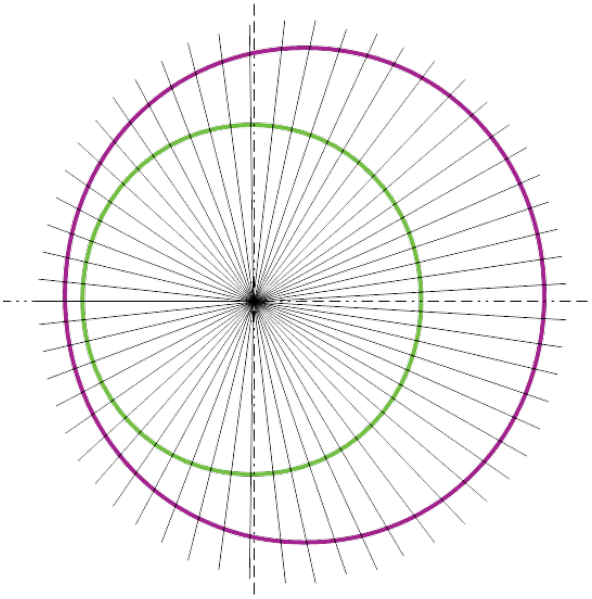


Figure 6: Representación del mallado

3.2 Cálculo del volumen de cada célula

Para calcular el volumen de una célula se ha hallado el área encerrada entre las dos paletas que delimitan esa célula, la pared externa del rótor y la pared interna del estátor. El volumen es el producto de este área (variable con el tiempo) por la longitud de la máquina (L) que es constante.

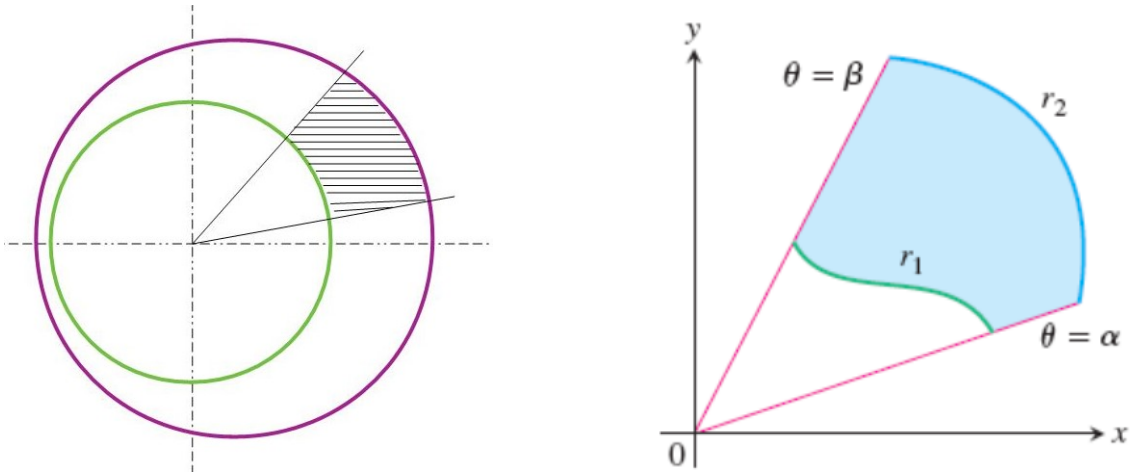
Dicho área se ha calculado en dos partes, por un lado se ha hallado el área considerando un caso ideal de paletas sin espesor (A_i) como se muestra en la *figura 7a* y al área en el caso ideal se le ha restado el área que ocupan las paletas en la célula por tener un cierto espesor (A_p) representada en la *figura 8*

3.2.1 Cálculo del área ideal

El área ideal entre paletas es el área comprendida entre dos paletas en el caso de que las paletas tuvieran espesor nulo (véase la *figura 7a*). Para calcular este área se ha empleado la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2(\theta)^2 - r_1(\theta)^2)d\theta \tag{12}$$

Donde r_1 es el radio del rótor (r_r), r_2 es el radio del estátor (r_e) y α y β son los ángulos en los que se encuentran las paletas. (Compárese la *figura 7b* con la *figura 7a*).



(a) Área con paletas sin espesor (A_i)

(b) Forma de la región para el cálculo del área ideal

Figure 7: Área ideal

Se han empleado coordenadas polares con el origen en el centro del rótor de manera que $r_1 = r_r = cte$ y el radio del estátor depende del ángulo θ según la siguiente relación:

$$r_2 = r_e = e \cdot cos(\theta) + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sen^2(\theta)} \tag{13}$$

De las ecuaciones 12 y 13 se deriva la siguiente expresión para el área ideal:

$$A_i(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_i}^{\theta_i+\beta} \left[\left(e \cdot cos(\theta) + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sen^2(\theta)} \right)^2 - \frac{D_r^2}{4} \right] d\theta \tag{14}$$

La integral se extiende desde el ángulo que corresponde a la primera paleta (θ_i) hasta el ángulo de la paleta siguiente ($\theta_i + \beta$) donde β es el ángulo entre paletas.

3.2.2 Cálculo del área de las paletas

En esta sección se especifica cómo se ha calculado el área de las paletas que hay que restar al ideal (área en rojo y amarillo en la *figura 8*).

El área de las paletas tiene dos partes, una parte constante que es la punta redondeada como un semicírculo y por otro lado dos rectángulos de base $d_{tip}/2$ y altura la longitud de la paleta (sin contar la punta) que sí cambia para cada ángulo.

$$A_p(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\pi \, d_{tip}^2}{4} + \frac{1}{2} \, d_{tip} \, [l_p(\theta) + l_p(\theta + \beta)] \tag{15}$$

Donde la longitud de las paletas (l_p) viene dada por la siguiente ecuación para cada valor de θ.

$$l_p(\theta) = e \cdot cos(\theta) + \sqrt{\frac{De^2}{4} - e^2 sin(\theta)^2} - \frac{Dr}{2} - \frac{d_{tip}}{2} - holgura \tag{16}$$

Donde *holgura* se refiere a la distancia entre la punta de la paleta y la pared interna del estátor como se muestra en la *figura 9*. La existencia de esta holgura es necesaria para modelar las fugas como se aborda en el capítulo 4.3.2. El valor de la holgura se considera constante.

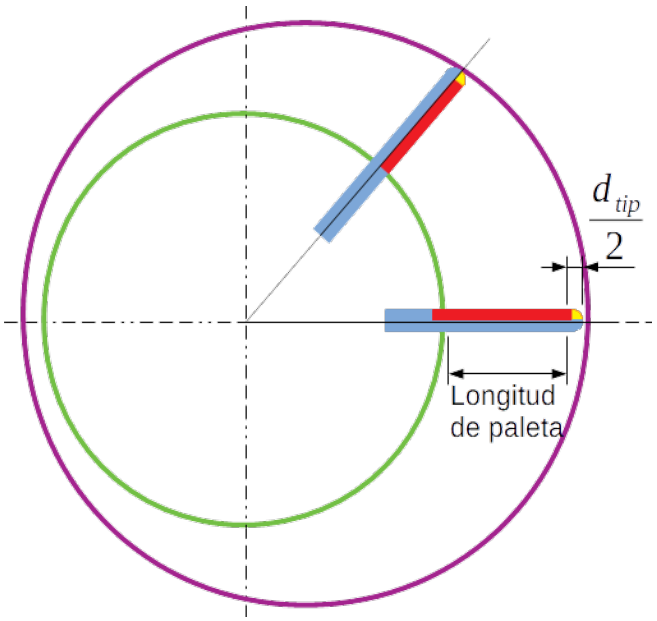


Figure 8: Área de las paletas a sustraer (A_p)

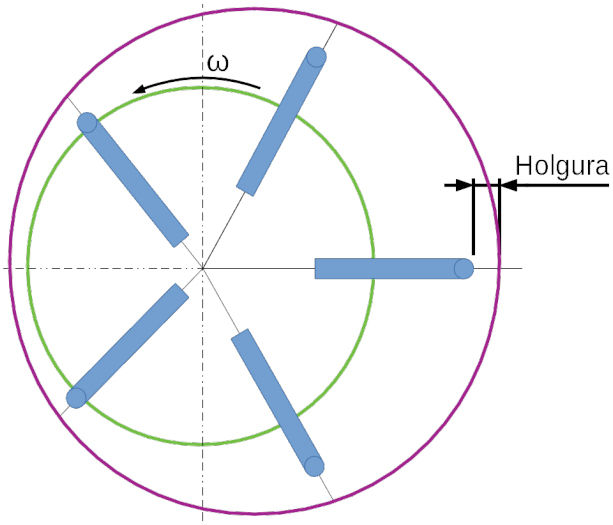


Figure 9: Holgura

3.2.3 Volumen

De esta manera, el volumen disponible para albergar fluido de una célula en función del ángulo es:

$$V(\theta) = (A_i(\theta) - A_p(\theta)) \cdot L \tag{17}$$

3.2.4 Comprobación del cálculo del volumen

Para verificar que el volumen de las células se está calculando correctamente se hará la comprobación de que, en un ciclo, la suma de los volúmenes de las células coincide con el volumen total de la máquina. Se hará para el caso de paleta sin espesor ($d_{tip} = A_p = 0$) por simplicidad.

El volumen total de la máquina con la que se compara es:

$$V_{real} = \left(\frac{\pi}{4} \cdot (D_e^2 - D_r^2) - Ap\right) \cdot L \tag{18}$$

Se contrasta el V_{real} con el calculado con el programa y se obtiene un error del orden de $\mathbf{8 \cdot 10^{-19}}$ que es el orden de precisión de Matlab y por tanto lo consideramos como $\mathbf{0}$.

3.3 Cálculo de la derivada del volumen

En esta sección, de nuevo, el cálculo de dividirá en una parte ideal y otra correspondiente a las paletas.

3.3.1 Derivada del área ideal

La parte ideal requiere emplear el *teorema fundamental del cálculo* expresado en la ecuación 19.

$$\frac{d}{d\theta}\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(t)dt = f(b(\theta)) \cdot b'(\theta) - f(a(\theta)) \cdot a'(\theta) \tag{19}$$

Donde, en nuestro caso,

$$a(\theta) = \theta \quad y \quad b(\theta) = \theta + \beta \quad con \quad a'(\theta) = b'(\theta) = 1 \tag{20}$$

y, por otro lado,

$$f(t) = r_e(t)^2 - r_r(t)^2 \tag{21}$$

Así, la derivada del área se puede fácilmente expresar como la diferencia de los integrandos de la ecuación 14 evaluados en $\theta + \beta$ y θ respectivamente. Como queda reflejado en la ecuación 22.

$$\frac{dA_i(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[\left(e \cdot cos(\theta+\beta) + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sen^2(\theta+\beta)}\right)^2 - \left(e \cdot cos(\theta) + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sen^2(\theta)}\right)^2\right] \tag{22}$$

3.3.2 Derivada del área de las paletas

La ecuación 15 proporciona directamente la derivada de este área:

$$\frac{dA_p(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2}\, d_{tip}\, \left[\left.\frac{d\, l_p}{d\theta}\right|_{\theta} + \left.\frac{d\, l_p}{d\theta}\right|_{\theta+\beta}\right] \tag{23}$$

Donde la derivada de la longitud de la paleta se ha calculado analíticamente en función de θ y es:

$$\frac{d\, l_p(\theta)}{d\theta} = -e \cdot sen(\theta) - \frac{e^2 \cdot sen(\theta) cos(\theta)}{\sqrt{\frac{D_e^2}{4} - e^2 sen(\theta)^2}} \tag{24}$$

3.3.3 Derivada del volumen

Finalmente, la derivada del volumen puede obtenerse a partir de las ecuaciones 22 y 23:

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = L \cdot \left(\frac{dA_i(\theta)}{d\theta} - \frac{dA_p(\theta)}{d\theta}\right) \tag{25}$$

3.3.4 Comprobación del cálculo de la derivada del volumen

Para llevar a cabo esta comprobación se calcula la derivada del volumen derivando numéricamente el volumen obtenido previamente de acuerdo a la ecuación

$$\frac{dV_{num}(\theta_j)}{d\theta} = \frac{V(\theta_{j+1}) - V(\theta_j)}{h_\theta} \tag{26}$$

Con

$$h_\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$$

siendo N_θ el número de intervalos en los que se divide la malla.

En este caso, el máximo error que se obtiene es del orden de $\mathbf{3 \cdot 10^{-4}}$. Considerando que la derivación numérica tiene baja precisión, el cálculo de la derivada del volumen es correcto.

4 Cálculo de las variables termodinámicas del problema

Una vez definida la geometría se calculan en un ciclo las siguientes variables termodinámicas: presión, (P), temperatura (T) y número de moles. A partir de estas magnitudes pueden obtenerse el resto de variables como se expone en el *apartado* 5.

Todas estas variables se calculan una vez en cada sección de la malla al igual que en la sección 3.

4.1 Hipótesis

Para poder resolver el problema se han asumido una serie de hipótesis que permiten simplificar los cálculos.

En primer lugar, las variables termodinámicas del fluido de trabajo (presión, temperatura, densidad,entropía, etc) se consideran constantes en cada célula y en cada instante, es decir, no se contemplan variaciones espaciales de las variables dentro de una célula.

Por otro lado, se considera un gas ideal para poder usar la ecuación de los gases ideales 29.

También se desprecia la dependencia de la entalpía y energía interna con el volumen 30 y 31.

Las dos hipótesis anteriores permiten construir un modelo de gases como se explica en el apartado 4.2.1.

Por último, como se muestra en el libro [7, Capítulo 5, p. 168], la energía que puede acumular un sistema puede ser energía interna, energía cinética o potencial:

$$E = U + \frac{1}{2}mV^2 + mgz \tag{27}$$

Para este desarrollo se despreciarán las contribuciones debidas a la energía cinética y potencial de manera que se cumple:

$$E = U \tag{28}$$

4.2 Fluido de trabajo

En este estudio se está considerando un una máquina térmica de paletas que puede funcionar como compresor o expansor.

El fluido de trabajo se trata de una mezcla de gases, por tanto, para poder abordar el problema termodinámico, es fundamental definir la composición de dicha mezcla así como definir un modelo de gases

4.2.1 Modelo de gases

Se considera el **modelo gas ideal**, de manera que, como puede verse en [8, Capítulo 6, p. 204] su ecuación de estado viene dada por la siguiente expresión:

$$PV = nRT \tag{29}$$

Donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles, R es la constante de los gases ideales ($R = 8.31445\, J/(K.mol)$) y T es la temperatura.

Por otra parte se considera que la energía interna y la entalpía del gas son únicamente funciones de la temperatura.

$$h = h(T, V) = h(T) \tag{30}$$

$$u = u(T, V) = u(T) \tag{31}$$

Estas 3 ecuaciones constituyen el modelo de gas.

Nota: Se ha descartado el uso de modelos de gases más fieles a la realidad, como el basado en el factor de compresibilidad Z junto con la presión reducida, modelo de Van der Waals o el de Redlich–Kwong, puesto que los resultados que se obtienen son muy parecidos y, sin embargo, aumentan significativamente la complejidad del problema.

4.2.2 Composición del gas

La mezcla está compuesta por los siguientes gases:

- CO_2
- H_2O
- CO
- $H2$
- O_2
- N_2
- Metano (CH_4)
- Propano (C_3H_8)

De manera que el usuario de la aplicación deberá especificar el tanto por ciento en masa en la mezcla de cada uno de los gases anteriores.

Para modelar el aire se utilizaría la mezcla siguiente: **78**% de $\mathbf{N_2}$, **21**% de $\mathbf{O_2}$ y **1**% de $\mathbf{CO_2}$ que tiene una composición muy parecida a la del aire real.

4.2.3 Propiedades del fluido de trabajo

Una vez definida la mezcla de gases a partir de las fracciones de masa de cada gas y conociendo además las masas molares de cada uno de los gases de la composición, se puede calcular la masa molar promedio de la mezcla como se explica en [10].

$$\overline{M} = (\sum_i \frac{w_i}{M_i})^{-1} \tag{32}$$

Donde w_i y M_i son la fracción de masa y masa molar de cada gas respectivamente. En lo sucesivo se empleará M en lugar de $\overline{M}$ por simplicidad.

Por otra parte, también es necesario, una vez conocida la mezcla, hallar el calor específico a presión constante (C_p) y a volumen constante (C_v) y la entalpía específica (h).

Cálculo de C_p

En el libro [4, Capítulo 4, p. 130] se puede encontrar un modelo de C_p para una mezcla de cualquiera de los gases mencionados anteriormente. El modelo se basa en un polinomio que proporciona el valor de C_p en función de la temperatura, y cuyos coeficientes están dados en las tablas [4, Capítulo 4, p. 130,133].

El polinomio que modela el C_p para el CO_2, H_2O, CO, H_2, O_2 y N_2 es el siguiente:

$$C_{P_i}(T)\ \left[\frac{KJ}{mol.K}\right] = R \cdot (a_1 + a_2T + a_3T^2 + a_4T^3 + a_5T^4) \tag{33}$$

Mientras que para el metano y el propano se usa este otro polinomio:

$$C_{P_i}(T)\ \left[\frac{cal}{mol.K}\right] = A_{f1} + A_{f2}\frac{T}{1000} + A_{f3}\frac{T}{1000}^2 + A_{f4}\frac{T}{1000}^3 + A_{f5}\frac{1000}{T}^2 \tag{34}$$

Donde $R = 8.314472\frac{J}{mol.K}$ es la constante de los gases ideales y los coeficientes de los polinomios son distintos para cada gas y están tabulados en las tablas antes mencionadas, que también se muestran a continuación en las *Tablas 1, 2 y 3*.

Gas	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
CO_2	4.4608	0.30982e-2	-0.12393e-5	0.22741e-9	-0.15526e-13
H_2O	2.7168	0.29451e-2	-0.80224e-6	0.10227e-9	-0.48472e-14
CO	2.9841	0.14891e-2	-0.57900e-6	0.10365e-9	-0.69354e-14
H_2	3.1002	0.51119e-3	0.52644e-7	-0.34910e-10	0.36945e-14
O_2	3.6220	0.73618e-3	-0.19652e-6	0.36202e-10	-0.28946e-14
N_2	2.8963	0.15155e-2	-0.57235e-6	0.99807e-10	-0.65224e-14

Table 1: Tabla de coeficientes para $1000 < T < 5000$

Gas	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
CO_2	2.4008	0.87351e-2	-0.66071e-5	0.20022e-8	0.63274e-15
H_2O	4.0701	-0.11084e-2	0.41521e-5	-0.29637e-8	0.80702e-12
CO	3.7101	-0.16191e-2	0.36924e-5	-0.20320e-8	0.23953e-12
H_2	3.0574	0.26765e-2	-0.58099e-5	0.55210e-8	-0.18123e-11
O_2	3.6256	-0.18782e-2	0.70555e-5	-0.67635e-8	0.21556e-11
N_2	3.6748	-0.12082e-2	0.23240e-5	-0.63218e-9	0.22577e-12

Table 2: Tabla de coeficientes para $T < 1000$

Gas	A_{f1}	A_{f2}	A_{f3}	A_{f4}	A_{f5}
Metano	-0.29149	26.327	-10.610	1.5656	0.16573
Propano	-1.4867	74.339	-39.065	8.0543	0.01219

Table 3: Tabla de coeficientes para metano y propano

Una vez hallado el calor específico a presión constante de cada uno de los componentes de la mezcla se puede obtener el calor específico de la mezcla a partir de la siguiente regla [1]:

$$C_p|_{mezcla} = \sum_i C_{p_i} \cdot w_i \tag{35}$$

Donde el C_{p_i} tiene unidades de $\frac{KJ}{Kg.K}$; las unidades se cambian de la siguiente forma:

Para CO_2, H_2O, CO, H_2, O_2 y N_2:

$$C_{P_i}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] = \frac{C_{P_i}\left[\frac{KJ}{mol.K}\right]}{M_i\,[Kg/mol]} \tag{36}$$

Y para el metano y el propano sería:

$$C_{P_i}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] = \frac{C_{P_i}\left[\frac{cal}{mol.K}\right] \cdot 4.184 J/cal}{M_i\,[g/mol]} \tag{37}$$

Finalmente pasamos el $C_p|_{mezcla}$ a $\frac{J}{mol.K}$:

$$C_p|_{mezcla}\left[\frac{J}{mol.K}\right] = C_p|_{mezcla}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] \cdot \overline{M}\,[g/mol] \tag{38}$$

Cálculo de C_v

El C_v se calcula a partir del C_p y de la constante de los gases ideales de la mezcla $\overline{R}$.

$$\overline{R}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] = \frac{R\,[KJ/(mol.K)]}{M\,[Kg/mol]} \tag{39}$$

Y entonces C_v es:

$$C_v\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] = C_p|_{mezcla}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] - \overline{R} \tag{40}$$

Y pasando el $C_v|_{mezcla}$ a $\frac{J}{mol.K}$:

$$C_v|_{mezcla}\left[\frac{J}{mol.K}\right] = C_v|_{mezcla}\left[\frac{KJ}{Kg.K}\right] \cdot \overline{M}\,[g/mol] \tag{41}$$

Cálculo de h

La entalpía específica y el calor específico están relacionados mediante la siguiente ecuación que puede encontrarse por ejemplo en el libro [6, Capítulo 3, p. 86]:

$$C_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \rightarrow h = \int_{T_{ref}}^{T} C_{P_i}\,dT \tag{42}$$

Donde los C_{P_i} vienen dados por las ecuaciones 33 y 34 y Siguiendo un procedimiento similar al anterior: hallando las entalpías de cada uno de los gases, dividiendo por las masas molares para luego sumar todas las entalpías ponderadas por la fracción de masa se puede hallar la entalpía de la mezcla de gases.

$$h_i|_{mezcla} = \sum_i h_i \cdot w_i \tag{43}$$

Y pasando el $h|_{mezcla}$ a $\frac{J}{mol}$:

$$h|_{mezcla} \left[\frac{J}{mol}\right] = h|_{mezcla} \left[\frac{KJ}{Kg7}\right] \cdot \overline{M}\,[g/mol] \tag{44}$$

Nota: La temperatura de referencia (T_{ref}) es necesario definirla para poder hallar la entalpía puesto que ésta es una función de estado que tiene que hallarse de forma incremental con respecto a un valor de referencia. Sin embargo, *el valor de las variables termodinámicas son independientes del valor de* T_{ref}.

4.3 Modelo de gastos

El cálculo de las variables termodinámicas requiere de la definición de un volumen de control.

Los volúmenes de control, como se observa en la *figura 10*, son cada una de las células de la máquina y están delimitadas por la pared interna del estátor, la pared del rótor, las paletas y las paredes laterales de la máquina.

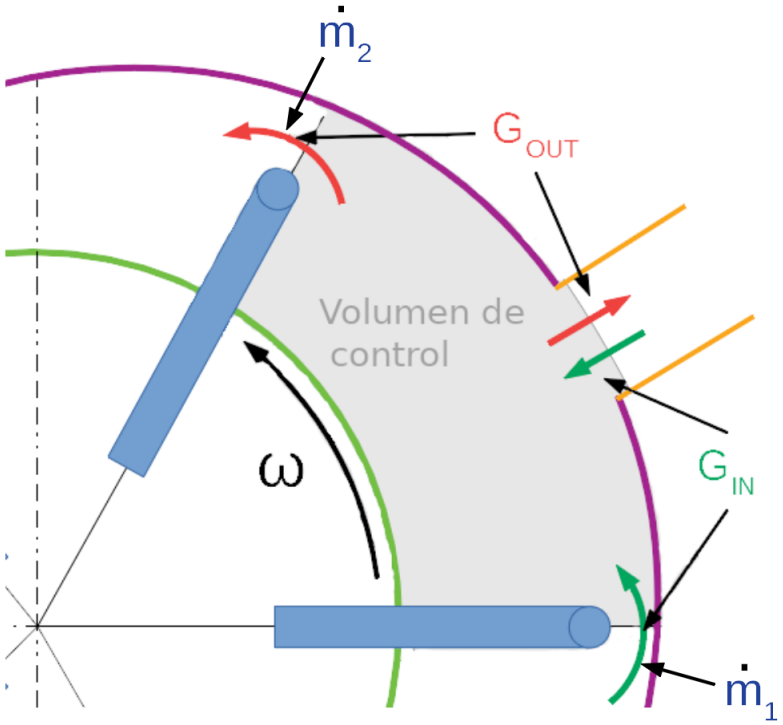


Figure 10: Una sección del volumen de control es el área sombreada. Gastos de entrada y salida y gastos de fugas

De manera que cada volumen de control constituye un sistema abierto con cuatro posibles entradas o salidas. Por una parte el volumen puede estar en contacto con la entrada de gases o bien con la salida y, además, cada volumen de control puede intercambiar masa con los

volúmenes adyacentes debido a las fugas.

Para tener en cuenta todos estos intercambios de masa hay que modelar los flujos de gas que se producen cuando un célula entra en contacto con la salida o con la entrada y los flujos debido a las fugas de gas entre células adyacentes.

Para calcular todos los gastos de flujo que ocurren en la máquina se ha tomado un modelo de tobera convergente isentrópica que puede encontrarse en el libro [9, Capítulo 11, p. 222,223]

4.3.1 Gastos de entrada y salida

El fluido que se encuentre en una célula en contacto con la entrada o salida puede estar a mayor o menor presión que la entrada o salida. Generalmente estará a menor o igual presión que el fluido de entrada y a mayor o igual que el de salida, sin embaro, también se han considerado los casos en los que pueda salir fluido a la entrada y entrar gas desde la salida. Esto ocurre típicamente cuando la máquina no está funcionando en régimen óptimo.

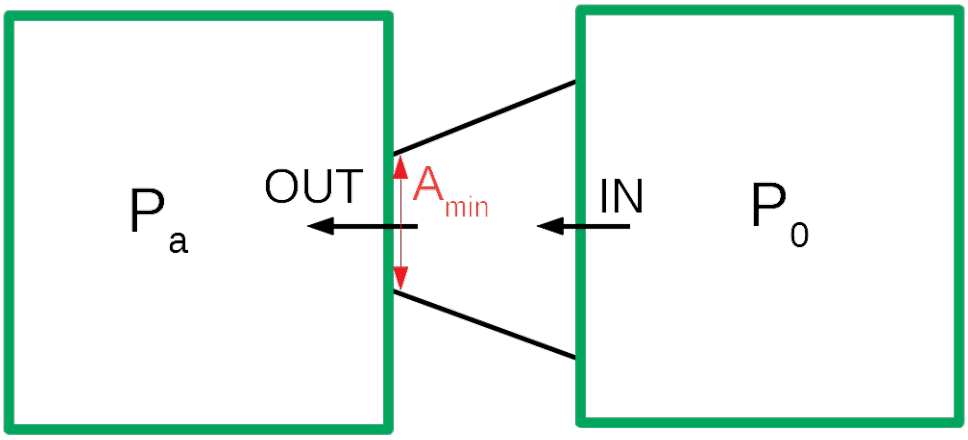


Figure 11: Representación esquemática del modelo de tobera convergente

De esta manera existen 2 casos: que la presión en la célula sea mayor que la de la entrada/salida o viceversa. La presión mayor se toma como P_0, que sería la presión en el depósito desde el que parte el fluido y la presión menor se toma como P_a, que sería la presión en el depósito "ambiente" al que llega el fluido.

Una vez establecido el sentido de movimiento del fluido se calcula la velocidad del sonido (a) y la densidad del fluido (ρ) de mayor presión como sigue:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}} \tag{45}$$

Siendo γ y T las correspondientes al fluido de mayor presión.

La densidad del fluido en caso de que el fluido salga de la máquina se calcula como

$$\rho_0 = \frac{Masa}{Volumen} \tag{46}$$

Con la masa y el volumen del fluido confinado en la célula de la que parte el gas.

En el caso de que el fluido entra a la máquina desde el exterior, la densidad se obtiene como:

$$\rho_0 = \frac{P_{ext} \cdot M}{R \cdot T_{ext}} \tag{47}$$

Con la masa molar M en Kg/mol para las ecuaciones 45 y 47.

Por último, se calcula la presión crítica por debajo de la que se alcanzaría Mach = 1 en la garganta (A_{min}) y Gasto máximo.

$$P_{crit} = P_0 \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{48}$$

Si $\mathbf{P_a <= P_{crit}}$ el **gasto es crítico** (máximo para ese valor de A_{min}) y se calcula como:

$$G_{crit} = A_{min} \cdot \rho_0 \cdot a_0 \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{49}$$

En caso contrario el gasto se calcula a partir del número de Mach de salida como sigue:

$$G = A_{min} \cdot \rho_0 \cdot a_0 \cdot M_s \cdot \left(1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2M_s^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right)^{-1} \tag{50}$$

Donde el Mach a la salida se obtiene de la siguiente ecuación:

$$M_s = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \left[\left(\frac{P_0}{P_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} \tag{51}$$

Por último, el gasto se multiplica por un coeficiente de descarga C_d para tener en cuenta pérdidas de carga durante el movimiento de fluido.

$$G = G \cdot C_d \tag{52}$$

Este coeficiente puede tomar valores entre 0 y 1, siendo $C_d = 1$ el caso ideal y el gasto disminuirá a medida que lo haga el valor de C_d.

Área de paso $\mathbf{A_{min}}$

En esta sección se especifica cuál es el área de paso de fluido que se necesita para calcular el gasto en cada instante para la entrada o salida.

El área de paso es parte de la toma de entrada o salida que se encuentra en contacto con una célula de la máquina. Puesto que las paletas se están moviendo y las tomas de entrada y salida permanecen fijas unidas al estátor, las áreas de paso de entrada o salida sólo son distintas de cero en un cierto rango de ángulos como se observa en la *figura 12*.

Cuando la célula que se está calculando no está en contacto con la toma de entrada o salida el área es nulo, y en el momento en que la primera paleta entra en contacto con la toma comienza a aumentar el área mientras la paleta se encuentra en mitad de la toma hasta que la toma se encuentra enteramente en contacto con la célula manteniéndose en este caso el área constante.

Cuando la paleta trasera comienza a cerrar la toma de entrada o salida el área disminuye hasta llegar de nuevo a cero.

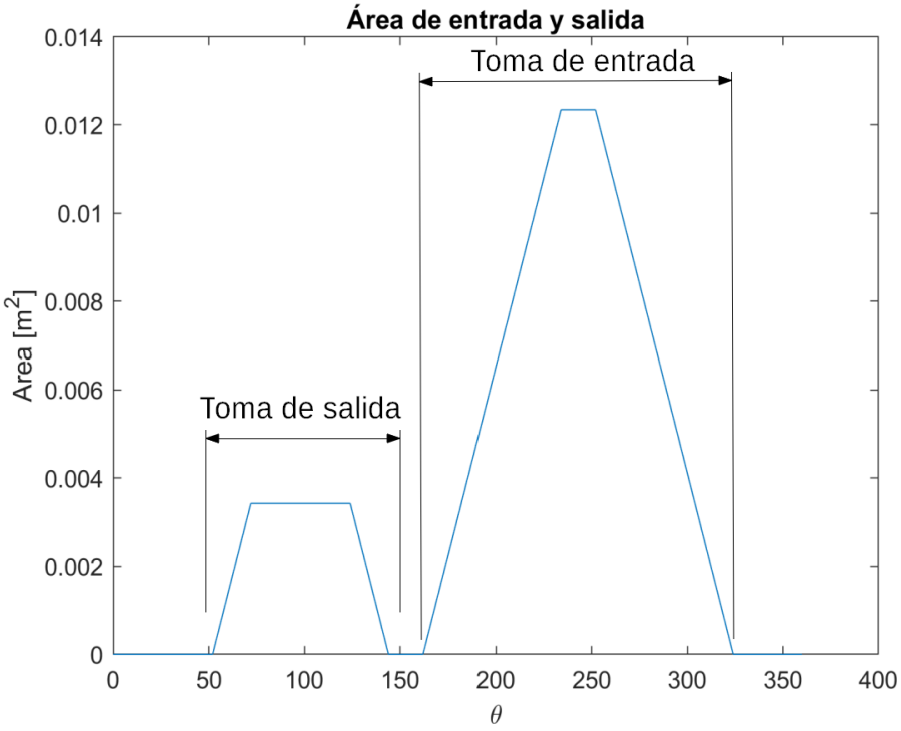


Figure 12: Area de entrada y salida

En la fase de crecimiento del área se cumple que el ángulo de la primera paleta (θ_1) es tal que $angIn1 < \theta_1 < angIn2$ en el caso de la toma de entrada o bien $angOut1 < \theta_1 < angOut2$ para la de salida

En la fase de área constante se cumple que $\theta_2 < angIn1, angIn2 < \theta_1$ para la entrada o bien $\theta_2 < angOut1, angOut2 < \theta_1$ para la salida, siendo (θ_2) el ángulo de la segunda paleta.

Nótese que en este estudio, las tomas de entrada y salida se extienden 1/4 de la longitud de la máquina como se ve en la *figura 13*.

4.3.2 Gastos de fugas

Existe una cierta holgura entre las puntas de las paletas y la pared interna del estátor como puede verse en las *figuras 4 y 9*. Esto hace que pueda darse un flujo de gas entre una célula y las dos adyacentes a ésta conocido como fugas (*véase la figura 10*).

Es necesario modelar este fenómeno de intercambio de materia entre células adyacentes puesto que la punta de la paleta nunca deberá entrar en contacto con el estátor para evitar aumentos excesivos de potencia disipada debido a fricción.

En muchas aplicaciones se usa un aceite que, debido a la fuerza centrífuga se situaría en contacto con la pared interna del estátor. Este aceite cumple varias funciones, entre ellas la de refrigerar la máquina y también la de evitar que las paletas rocen con el estátor. De manera que una capa de aceite separaría la punta de la paleta de la pared del estátor, sin embaro, puede que si la diferencia de presiones es suficientemente grande, ocurran fugas entre volúmenes adyacentes a pesar del aceite.

Por otra parte, aunque se consiga implementar algún mecanismo para mantener la punta de la paleta muy próxima a la pared interna del estátor, como un sistema de resortes, levas o bien otro tipo de tecnología, siempre existirá una cierta holgura (aunque sea muy pequeña) que dará lugar a fugas.

Así, incluir este proceso en el este modelo de la máquina es crucial para que éste sea más próximo a la realidad.

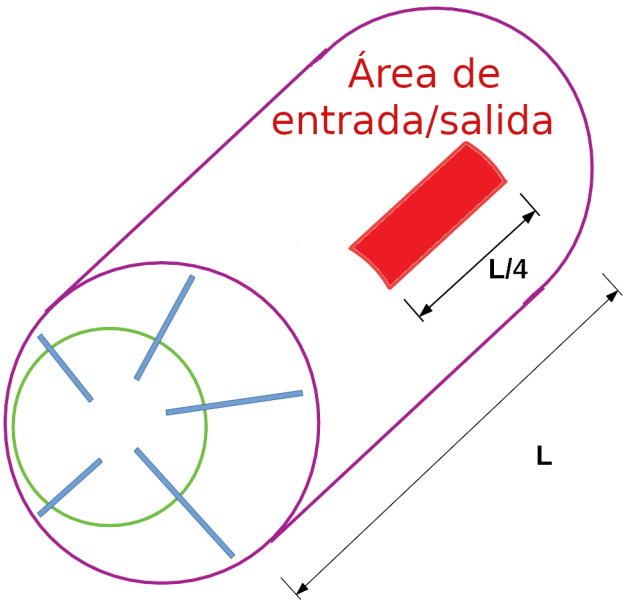


Figure 13: Representación esquemática de las tomas de entrada o salida

Al igual que para los gastos de entrada y salida, existen 2 posibilidades: la presión de la célula que se está calculando (célula "i") es mayor que la célula "i+1" o que la célula "i-1" o bien es menor. En el primer caso se obtendría un gasto negativo porque la masa sale de la célula "i" y en el segundo caso es positivo porque la masa entra.

Igualmente, para las fugas se usa un modelo de tobera convergente donde la presión de la célula con mayor presión se toma como P_0 y la de la célula con menor presión como P_a, y los gastos se calculan de manera idéntica al caso anterior de entrada y salida. El coeficiente de descarga C_d también se aplica para los gastos de fugas.

Acoplamiento

Cada célula tendrá dos gastos de fugas, uno con la célula anterior ($\dot{m}_1$) y otro con la célula siguiente ($\dot{m}_2$) como se ve en la *figura 10*. Puesto que el gasto de fugas $\dot{m}_2$ de la célula "i" es el gasto de fugas $\dot{m}_1$ de la célula "i+1" debido a la conservación de la materia, es necesario calcular únicamente $\dot{m}_2$ para cada célula e imponer la condición de anterior.

4.4 Modelo de refrigeración

La fricción entre las paletas y el estátor, así como la que se produce en las paredes laterales hace necesario la implementación de algún sistema de refrigeración en este tipo de máquinas.

Como ya se mencionó en el apartado anterior 4.3.2, una posibilidad es usar el aceite además de como lubricante entre rótor y estátor, como líquido refrigerante. Sin embargo, en este modelo se ha empleado otro sistema prescindiendo así del aceite.

Se ha considerado la máquina inmersa en un fluido a una temperatura menor que la temperatura mínima de la mezcla de gases que mueve el compresor o expansor, y se ha modelado la transferencia de calor mediante el cálculo de la potencia térmica de la célula "i" en cada instante dado por la ley de enfriamiento de Newton:

$$P_{Qi}(\theta) = -\overline{h} \cdot A \cdot (T_i(\theta) - T_{ext}) \tag{53}$$

Esta expresión puede encontrarse en el libro [5, Capítulo 1, p. 28].

Donde $\overline{h}$ que tiene unidades de $W/(m^2.K)$ es el coeficiente de transferencia de calor por convección, cuyo valor debe ser especificado por el usuario.

$A\,[m^2]$ es el área de transferencia de calor, en este caso sería el área de la pared del estátor que queda comprendida entre dos paletas consecutivas, más el área de las paredes laterales entre paletas consecutivas. A este área habría que restarle el área de entrada o salida en el caso de que la célula estuviese en contacto con la toma de entrada o salida.

Por otra parte, $T_i(\theta)$ es la temperatura del gas que contiene la célula "i" en cada instante y T_{ext} es la temperatura que hay en el exterior que debe ser también impuesta por el usuario.

En cuanto al signo negativo de la ecuación 53, implica que si la temperatura de la célula es mayor que la del exterior ($T_i(\theta) > T_{ext}$) se está disipando potencia térmica y la máquina estaría perdiendo temperatura.

4.5 Ecuación del Primer Principio

En esta sección se explica una de las ecuaciones diferenciales que se han empleado para resolver el problema y poder hallar las variables termodinámicas que intervienen en el sistema.

Se trata de la ecuación del *primer principio de la termodinámica* que, teniendo e cuenta las hipótesis expuestas en el apartado 4.1, adopta la siguiente forma:

$$\frac{d(U - U_{ref})}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_{\forall e} \frac{dn_e}{dt}(h_e - h_{ref}) - \sum_{\forall s} \frac{dn_s}{dt}(h_s - h_{ref}) + p^{ref} \cdot V_m^{ref} \cdot \frac{dn}{dt} \tag{54}$$

Esta ecuación puede encontrarse en el siguiente formulario de termodinámica [2].

Donde U es la energía interna en $[J]$, $\dot{Q}$ y $\dot{W}$ son las potencias térmicas y mecánica respectivamente (derivadas con el tiempo del calor y el trabajo intercambiado).

Por otra parte, n es el número de moles, y las letras "e" y "s" indican entrada y salida, de manera que $\frac{dn_e}{dt}$ es el gasto de entrada en $[mol/s]$ y $\frac{dn_s}{dt}$ es el de salida.

$h_e - h_{ref}$ es la entalpía de los gases de entrada respecto de la referencia y $h_s - h_{ref}$ para los gases de salida.

En cuanto al último término, puede escribirse en función de la temperatura de referencia de la siguiente manera:

$$p^{ref} \cdot V_m^{ref} \cdot \frac{dn}{dt} = R \cdot T^{ref} \cdot \frac{dn}{dt} \tag{55}$$

Donde $fracdndt$ es la variación en el volumen de control (cada una de las células) del número de moles.

Además, la energía interna ($U\,[J]$) que se encuentra en el primer miembro de la ecuación puede descomponerse en función de la energía interna específica ($u\,[J/mol]$) y el número de moles.

$$U = u \cdot n \tag{56}$$

Sabiendo, además, que el calor específico a volumen constante (C_v) viene dado ,como puede verse en el libro [6, Capítulo 3, p. 86], por la siguiente expresión:

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \tag{57}$$

El primer miembro de la ecuación puede descomponerse como se muestra a continuación.

$$\frac{d(U-U_{ref})}{dt} = \frac{d(n\cdot u - n\cdot u_{ref})}{dt} = \frac{dn}{dt}u + n\frac{du}{dt} - \frac{dn}{dt}u_{ref} = \\ = \frac{dn}{dt}(u-u_{ref}) + n\frac{du}{dT}\frac{dT}{dt} = \mathbf{\frac{dn}{dt}(u-u_{ref}) + nC_v\frac{dT}{dt}} \tag{58}$$

Por otro lado la potencia mecánica viene dada por la ecuación:

$$\dot{W} = p\cdot\frac{dV}{dt} \tag{59}$$

Donde la presión p está relacionada con la temperatura y número de moles de acuerdo a la ecuación de los gases ideales 29.

La potencia térmica ($\dot{Q} = P_Q$) está dada por la ecuación 53 del modelo de refrigeración.

Esta ecuación hay que calcularla para cada una de las células de la máquina en cada instante.

4.6 Ecuación de conservación de la materia

Además de la ecuación del primer principio, también hay que usar la ecuación de la *conservación de la materia* que proporciona, en función de los gastos de entrada y salida, el valor dela variación de la materia en cada volumen de control.

$$\frac{dn}{dt} = \sum_{\forall e}\frac{dn_e}{dt} - \sum_{\forall s}\frac{dn_s}{dt} \tag{60}$$

De la misma manera que para la ecuación 54, hay que asegurarse de que se cumple la conservación de la materia en cada volumen de control.

4.7 Cálculo numérico

La máquina de paletas que se está estudiando funciona en régimen estacionario, es decir, sólo es necesario calcular las variables en un ciclo puesto que todos los ciclos son iguales. De manera la variable de integración de las ecuaciones 54 y 60 no es el tiempo sino el ángulo que forma cada paleta con la horizontal como puede verse en la *figura 4*. El paso de integración viene definido por el mallado (véase la *figura 6*). Así, las ecuaciones han sido resueltas en θ considerando la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\cdot\omega \tag{61}$$

Donde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad de giro del rótor en $[rad/s]$.

Por tanto, en cada célula "i" de la máquina será necesario evaluar dos ecuaciones diferenciales: *Primer principio de la termodinámica* y *conservación de la materia*. Además, hay que resolver estas dos ecuaciones también para los dos volúmenes adyacentes mencionados en la sección 2.6.

Así para hallar las variables termodinámicas en un ciclo hay que resolver un sistema de 2*N+4 ecuaciones diferenciales en cada instante, 2*N ecuaciones para la máquina y 4 adicionales para los volúmenes de entrada y salida, donde N es el número de volúmenes de control (células).

4.8 Cálculo de la temperatura y número de moles

El sistema formado por las ecuaciones 54 y 60 se trata de un sistema de 2 ecuaciones diferenciales con 2 incógnitas donde las incógnitas son la temperatura (T) y el número de moles (n). De manera que la resolución de estas ecuaciones en cada célula (y en ambos volúmenes adyacentes) y en cada instante proporciona la evolución de la temperatura y el número de moles en un ciclo de cada célula "i" y de los volúmenes adyacentes:

$$T_i(\theta) \quad y \quad n_i(\theta) \tag{62}$$

4.9 Cálculo de la presión

Según el modelo de gas seleccionado, la presión está relacionada con la temperatura y el número de moles a partir de la ecuación de los gases ideales (29). Así que conociendo la temperatura y el número de moles en un ciclo previamente calculados (62), la presión de cada célula y de los volúmenes adyacentes se obtiene con la siguiente relación:

$$p_i(\theta) = \frac{n_i(\theta) \cdot R \cdot T_i(\theta)}{V_i(\theta)} \tag{63}$$

5 Cálculo de las variables de salida

Una de las principales utilidades de implementar un modelo numérico de un compresor/expansor de paletas es estudiar las variables de salida de la máquina en base a los parámetros geométricos y termodinámicos de entrada que puede variar el usuario. Así, es posible analizar distintas configuraciones y, por ejemplo, juzgar si unas determinadas dimensiones son o no viables para el uso en alguna aplicación concreta, o si el compresor/expansor funcionaría bien para una cierta relación de compresión, temperatura, régimen de giro, gasto, etc.

En los siguientes apartados se especifican todas las variables de salida, que son variables por ciclo, es decir, tiene un único valor numérico por ciclo, y se explica cómo se han calculado.

5.1 Trabajo indicado

El trabajo indicado es la suma de las áreas de los diagramas P-V de cada célula "i". Se ha calculado hallando la integral de PdV.

$$W_{ind} = \sum_i \int_{i,ciclo} p_i(\theta) \cdot dV_i(\theta) \tag{64}$$

En la configuración de compresor representa el trabajo que se necesita aportar para que la máquina comprima el gas y en la configuración de expansor es trabajo que se extrae del proceso de expansión del gas. Este trabajo no tiene en cuenta ningún tipo de fricción.

5.2 Potencia indicada

La potencia indicada es la potencia que consume el compresor para comprimir el fluido o la que se extrae de la expansión del gas en modo expansor. Se calcula a partir del trabajo indicado y de la velocidad de giro de la máquina ($\omega\,[rad/s]$).

$$P_{ind} = W_{ind} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \tag{65}$$

5.3 Potencia de fricción

La potencia de fricción es debida a la fricción entre las partes móviles de la máquina, rótor y paletas, con la parte fija, estátor. La punta de las paletas rozan con la pared interna del estátor, el cilindro del rótor lo hace con las paredes laterales, etc.

Esta fricción disipa energía y hace que el compresor consuma más potencia y el expansor proporcione menos que en el caso sin fricción.

Así que es necesario modelar esta potencia para aproximarse a la realidad.

Compresor

Puesto que es difícil modelar analíticamente esta potencia de fricción se ha recurrido a un estudio realizado en el artículo [3] que permite obtener un valor aproximado de la potencia de fricción en el caso del compresor.

Este modelo está basado en una función que depende de la velocidad de giro al cuadrado y corregida con un parámetro que depende de la geometría del compresor.

En el estudio del artículo [3] se obtiene una relación entre la potencia de fricción por unidad de caudal (Q) y la velocidad de giro en rpm que se muestra en la *figura 14*.

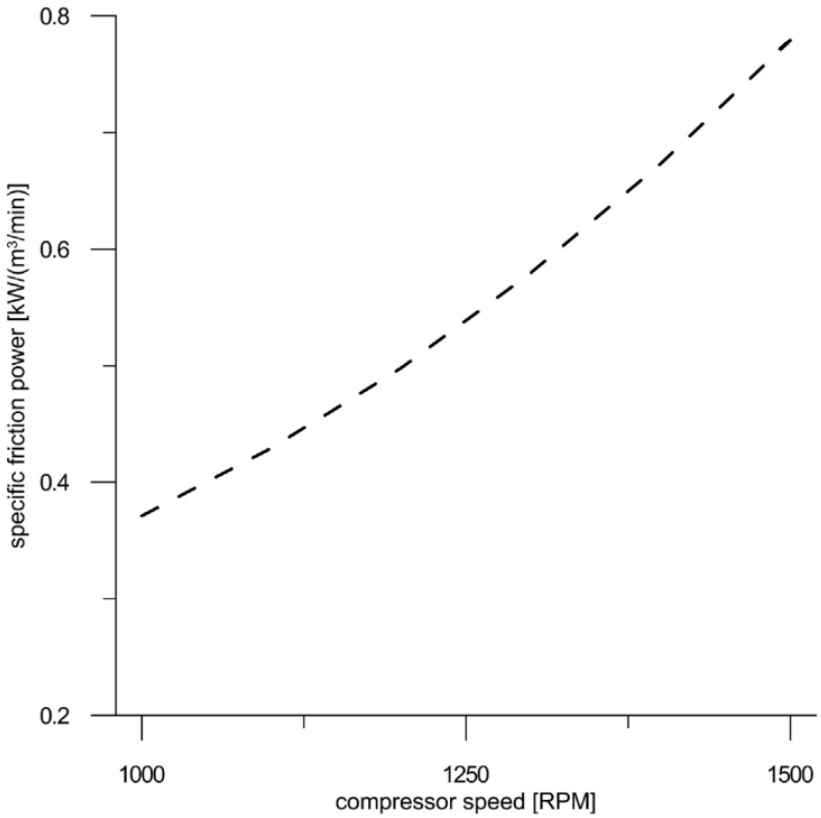


Figure 14: Potencia específica $[KW/(m^3/min)]$

Para usar la gráfica de la *figura 14* se ha hecho un ajuste polinómico que proporcionan y una extrapolación para tener una función en el rango 1000 a 2000 rpm puesto que la los ensayos de dicho artículo sólo llegan hasta 1500 rpm. Así, se obtiene una función de la potencia específica en que tiene la siguiente forma:

$$P_{fr,sp} = a \cdot rpm^2 + b \cdot rpm + c \tag{66}$$

Donde los coeficientes a, b y c vienen dados por el ajuste.

Por otra parte, esta función está calculada para el compresor del artículo previamente mencionado, por lo que, la potencia específica se ha ponderado por un factor corrector que tiene en cuenta el área de fricción del compresor que se está calculando frente al del artículo. Este factor se ha calculado de tal manera que proporcione una potencia de fricción de en torno un 15% de la potencia total (apartado 5.4) independientemente de la geometría del compresor.

$$GF = \frac{2 - D_e}{2 - D_{e,art}}^{3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D_e \cdot L \cdot N + 2\pi \frac{D_r^2}{4}}{\pi \cdot D_{e,art} \cdot L_{art} \cdot N_{art} + 2\pi \frac{D_{r,art}^2}{4}} \right)^{1/2} \tag{67}$$

Donde el subíndice "art" se refiere a los parámetros geométricos del compresor del artículo cuyos valores son los siguientes:

$$D_{e,art} = 13.6\,cm, \quad D_{r,art} = 11.1\,cm, \quad L = 27.5\,cm \quad y \quad N = 7 \tag{68}$$

Finalmente, la potencia de fricción del compresor en $[W]$ se calcula según la ecuación 69.

$$P_{fr} = P_{fr,sp} \cdot Q \cdot GF \tag{69}$$

Donde Q es el caudal que mueve el compresor en $[m^3/min]$.

Expansor

Puesto que no se dispone de un modelo de fricción para el caso de expansor como el propuesto en el artículo [3] para un compresor, se impone que la potencia de fricción para expansor sea un 15% de la suma de las potencias indicada y de fricción. Así, la potencia de fricción se calcula en este caso como sigue:

$$P_{fr} = \frac{0.15}{0.85} \cdot P_{ind} \tag{70}$$

5.4 Potencia total

La potencia total es distinta según se esté simulando un compresor o un expansor.

Para el compresor es:

$$P_{total} = P_{ind} + P_{fr} \tag{71}$$

Mientras que para el expansor es:

$$P_{total} = P_{ind} - P_{fr} \tag{72}$$

De manera que debido a la fricción, el compresor consume más potencia que en el caso ideal y el expansor proporciona menos potencia que en el caso ideal.

5.5 Masa de salida

La masa de salida es la masa de gas que suministra la máquina en un ciclo. Se calcula integrando en el ciclo el gasto que mueve el compresor o expansor, que es el gasto a la salida del volumen adyacente ($G_{out}\,[Kg/rad]$).

$$m_{out} = \int_{ciclo} G_{out}(\theta)\, d\theta \tag{73}$$

5.6 Gasto de salida

El gasto de salida en $[Kg/s]$ viene determinado por la masa de salida previamente calculada en la ecuación 73 y el régimen de giro. Puede hallarse de la siguiente forma:

$$G_{out} = m_{out} \cdot \omega \tag{74}$$

Donde ω tiene dimensiones de $[ciclos/s]$.

5.7 Masa de fugas

La masa de fugas es la masa total de gas que se mueve en un ciclo entre dos células adyacentes sin importar el sentido en que lo haga.

$$m_{fugas} = \int_{ciclo} \sum_i \dot{m}_{2i}(\theta) d\theta \tag{75}$$

Se han sumado los gastos de fugas $\dot{m}_{2i}$ de cada célula "i" y luego se ha integrado en un ciclo para hallar la masa de fugas.

5.8 Rendimiento volumétrico

El rendimiento volumétrico es la relación entre la masa que expulsa la máquina en un ciclo y la masa que cabría en un volumen igual a la cilindrada. La masa de fluido que se introduce de forma efectiva en el compresor o expansor es inferior a la teórica por eso este parámetro es menor que la unidad con valores típicos de entre $\sim 0.7 \quad y \quad \sim 0.95$.

Entre otros factores, las fugas de gas (mencionadas en el apartado 4.3.2) hacen disminuir este factor porque, debido a intercambios de masa con otras células, el llenado y el vaciado de las mismas no se lleva a cabo de forma completa. El régimen de giro también afecta a este factor: a mayor velocidad menos tiempo hay disponible para el llenado y el vaciado, lo que penaliza el rendimiento volumétrico.

Por ende, calcular este parámetro es importante para saber si la máquina está funcionando razonablemente bien o si se está desaprovechando una parte importante de su capacidad.

La expresión para calcular el rendimiento volumétrico es la siguiente:

$$\eta_{vol} = \frac{m_{out}}{\rho_{in} V_{cil}} \tag{76}$$

Donde m_{out} es la masa que expulsa la máquina cuyo valor se calcula según la ecuación 73.

Por otro lado ρ_{in} es la densidad del fluido que entra al volumen de entrada y se puede calcular a partir de la presión y temperatura de entrada que están fijadas por el usuario y son constantes en un ciclo.

$$\rho_{in} = \frac{P_{in} \cdot M}{R \cdot T_{in}} \tag{77}$$

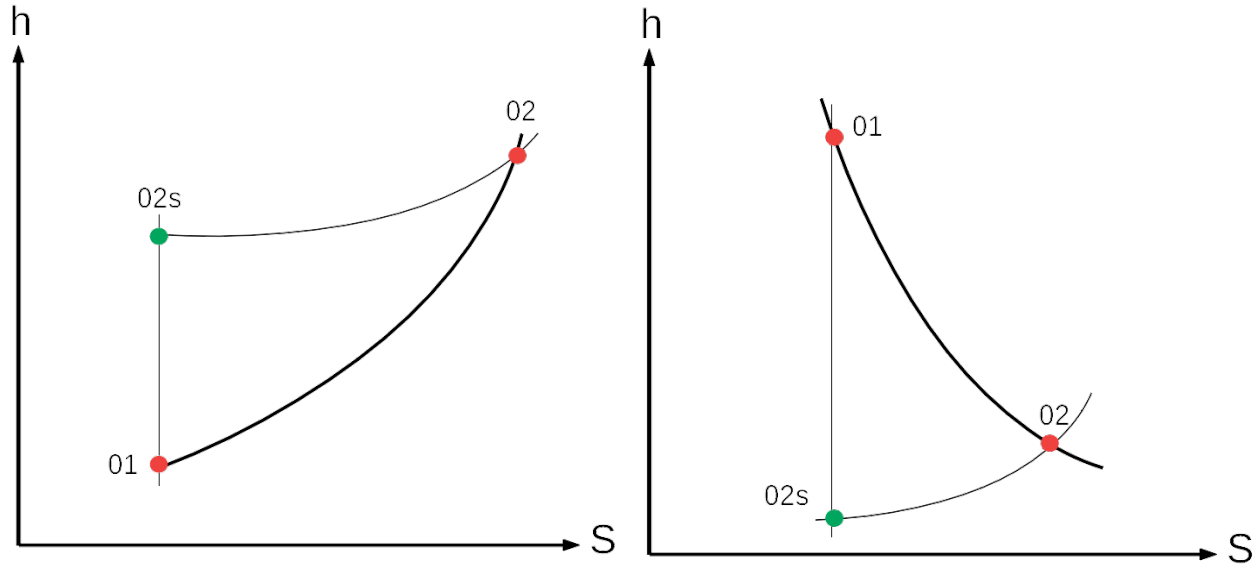
Donde M tiene unidades de $[Kg/mol]$.

Por último V_{cil} es el volumen de la cilindrada del compresor o expansor. Se trata del volumen útil de la máquina y se puede calcular como la diferencia entre el volumen máximo y el mínimo de una célula en un ciclo considerando las "N" células que intervienen en el proceso:

$$V_{cil} = (V_{max} - V_{min}) \cdot N \tag{78}$$

5.9 Rendimiento termodinámico

El rendimiento termodinámico es otro parámetro adimensional que permite conocer cómo de próximo al caso ideal es el funcionamiento de la máquina. En concreto este rendimiento es la relación entre la compresión en el caso isentrópico, que es mayor, frente a la compresión real que está realizando la máquina. O, en el caso de un expansor sería la expansión ideal que se está consiguiendo frente a la que se obtendría en el caso isentrópico.



(a) Compresión real vs isentrópica (b) Expansión real vs isentrópica

Figure 15: Comparativa entre compresión/expansión real e isentrópica

En la *figura 25a* se aprecia que la entalpía de los gases al final de la compresión en el caso ideal es menor y, por tanto, se necesita menos energía para comprimir que en el caso no isentrópico. Mientras en en la *figura 25b* se ve que el proceso isentrópico es capaz de extraer más energía de los gases que en el caso no isentrópico. Así, el rendimiento termodinámico será siempre menor que 1.

Para evaluar este rendimiento se ha calculado la potencia ideal como la obtenida a partir del diagrama P-V en el caso ideal sin picos ni oscilaciones en la entrada o salida, es decir, presiones de entrada y salida constante en todo el ciclo; y la potencia real a partir del diagrama P-V real teniendo en cuenta, además, la potencia de fricción.

La potencia ideal se calcula como:

$$P_{ideal} = \frac{G_{out}}{M} \int_{T_{in}}^{T_{02s}} C_p \, dT \tag{79}$$

Donde M está en $[Kg/mol]$, G_{out} es el gasto a la salida en $[Kg/s]$ y T_{02s} se puede calcular usando el método de Newton a partir de la ecuación:

$$\int_{Tin}^{T02s} \frac{C_p(T)}{T} \, dT = R \cdot \ln \frac{P_{out}}{P_{in}} \tag{80}$$

Una vez, halladas las potencias ideal y total, el rendimiento termodinámico para el compresor es:

$$\eta = \frac{P_{ideal}}{P_{total}} \tag{81}$$

Y para el expansor es a la inversa:

$$\eta = \frac{P_{total}}{P_{ideal}} \tag{82}$$

5.10 Temperatura de los gases de salida

La temperatura de los gases a la salida (del volumen adyacente de salida), también es un parámetro importante puesto que esa será la temperatura del gas que empleará el sistema al suministre la máquina. Esta temperatura depende del proceso interno de compresión o expansión y su valor cambia a lo largo de un ciclo, por lo que se ha tomado el valor medio de temperaturas del volumen de salida.

$$T_{out} = \overline{T_{V_{out}}}(\theta) \tag{83}$$

5.11 Volumen muerto

El volumen muerto es un volumen realmente no utilizable que queda después de la descarga de gases y que coincide con el volumen mínimo de cada célula en un ciclo. Viene dado por la expresión:

$$V_{muerto} = V_{min} \cdot N \tag{84}$$

5.12 Par en el eje

El momento en el eje de giro del rotor se puede conocer sabiendo la potencia que consume el compresor o la que proporciona el expansor (P_{total}), a partir de la velocidad de giro con la siguiente relación:

$$M_{eje} = \frac{P_{total}}{\omega} \tag{85}$$

Donde ω es la velocidad de giro en rad/s.

6 Herramienta para el análisis de la máquina

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo ha sido desarrollar una aplicación que permita un uso práctico del modelo implementado en Matlab de la máquina de paletas orientada al usuario.

En esta sección se explica la interfaz de la herramienta y cómo puede usarse.

La herramienta permite al usuario seleccionar entre analizar un compresor o bien un expansor como se ven en la *figura 18*, e introducir los parámetros geométricos del mismo (parte de la derecha de la *figura 16*).

Además, incluye dos botones "AUTO" que permiten seleccionar los parámetros geométricos, así como, los ángulos de entrada y salida de forma automática para un estudio preliminar.

El ajuste automático selecciona los ángulos $angOut2$ y $angIn2$ de manera que justo cuando se cierra la salida, el volumen es mínimo y comienza la expansión hacia la entrada, y cuando se cierra la entrada el volumen es máximo y comienza la compresión hacia la salida. Esto es así para evitar que entre fluido desde la salida o que salga fluido por la entrada.

Por otra parte, el usuario también deberá introducir las presiones y temperaturas a la entrada del sistema y a la salida, que son las representadas en la *figura 4*. Así como la velocidad de giro de la máquina en rpm, un coeficiente de descarga (véase la sección 4.3.1) y la temperatura exterior y el coeficiente para el modelo de refrigeración explicados en la sección 4.4.

Para especificar la composición de la mezcla del fluido de trabajo hay que pulsar el botón "Gases" que abrirá una nueva ventana como la que se ven en la *figura 17*

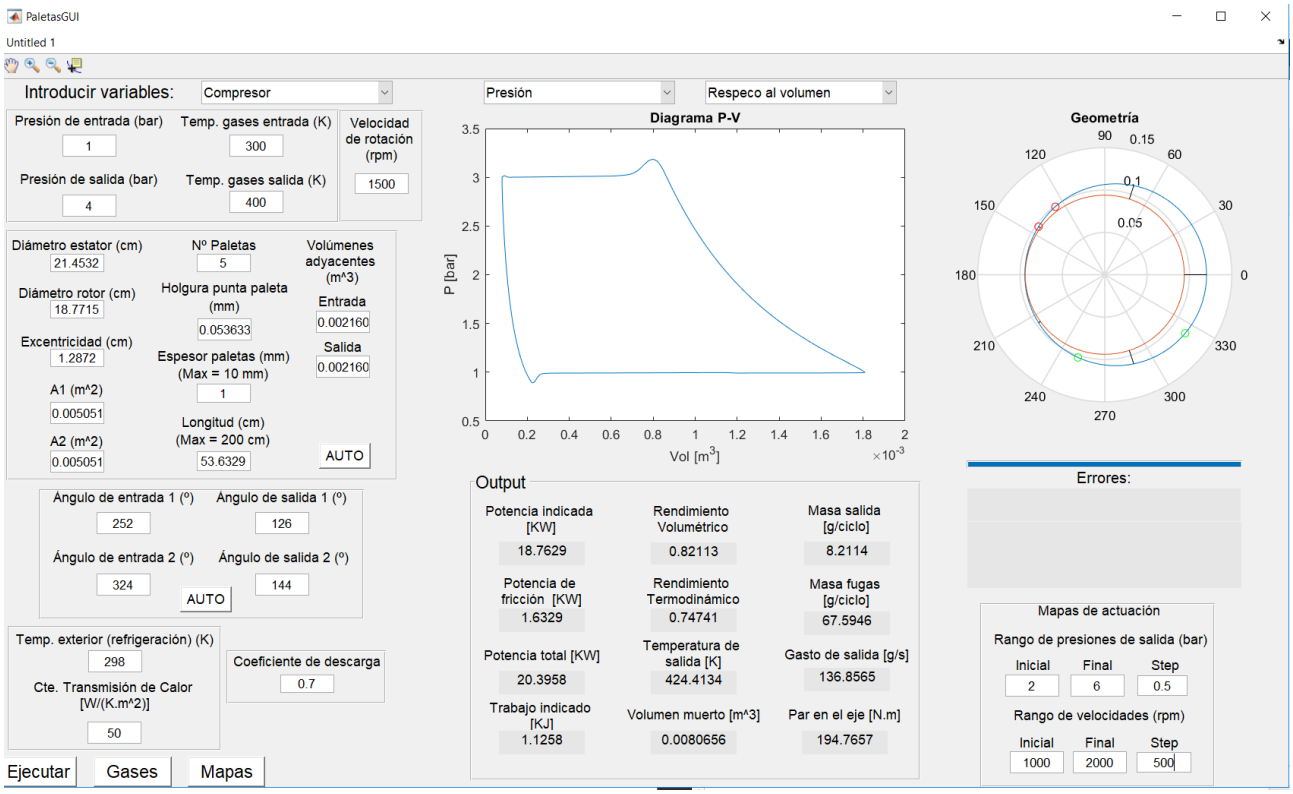


Figure 16: Aplicación desarrollada con un ejemplo

En esta ventana se puede seleccionar qué gases están involucrados en la mezcla que moverá el compresor o expansor, así como sus correspondientes fracciones de masa en tanto por ciento. Adicionalmente, se incluye un botón que selecciona automáticamente la mezcla que corresponde al aire puesto que es un gas muy recurrente y resulta cómodo esta función.

Información de salida de la aplicación

Una vez introducidos todos parámetros de entrada el usuario deberá hacer click en el botón "Ejecutar" y el programa comenzará a calcular. Cuando haya finalizado se actualizará el cuadro de variables de salida "Output" con los datos recién calculados y aparecerá un esquema de una sección del compresor o expansor en la esquina superior derecha.

Además, la aplicación permite dibujar una de las gráficas disponibles en el menú desplegable central que se ve en la *figura 18*. Algunas de las variables pueden graficarse con respecto al ángulo o al volumen, de manera que es posible ver el diagrama $P - V$ o el $P - \theta$.

Por último, uno de las utilidades más importantes que brinda esta herramienta es la obtención de los mapas de relación de compresión (π) y potencia frente al gasto. Estos dos mapas pueden obtenerse para compresor o expansor definiendo los rangos de presión de salida y velocidad de giro en el cuadro de la esquina inferior derecha y pulsando posteriormente el botón "Mapas".

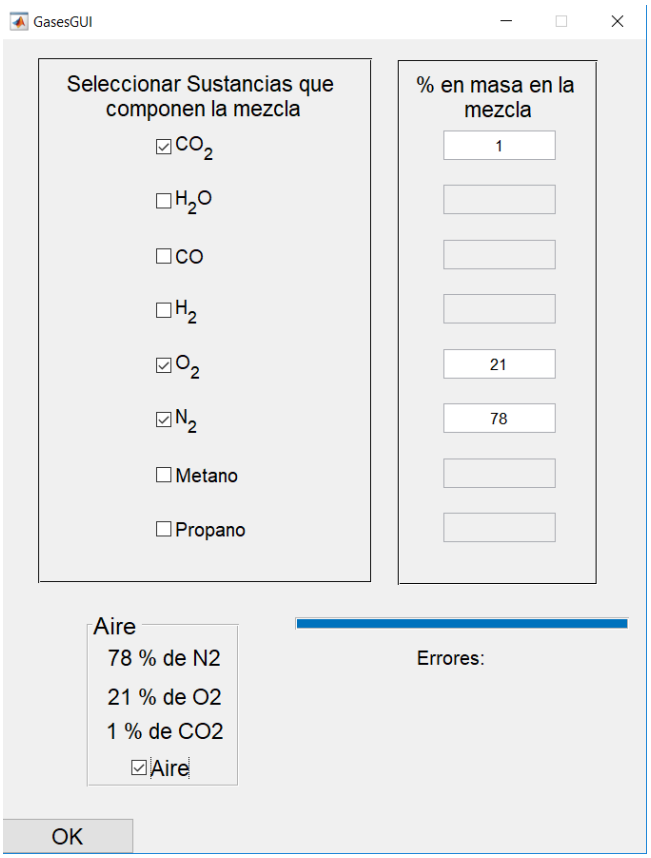


Figure 17: Ventana de selección de la composición del gas

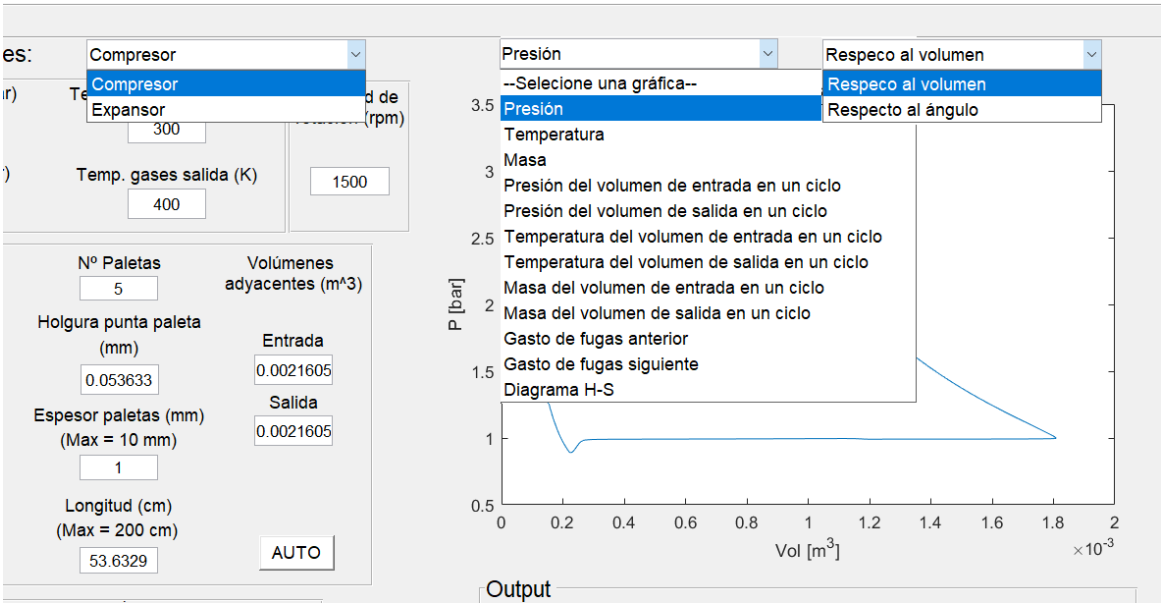
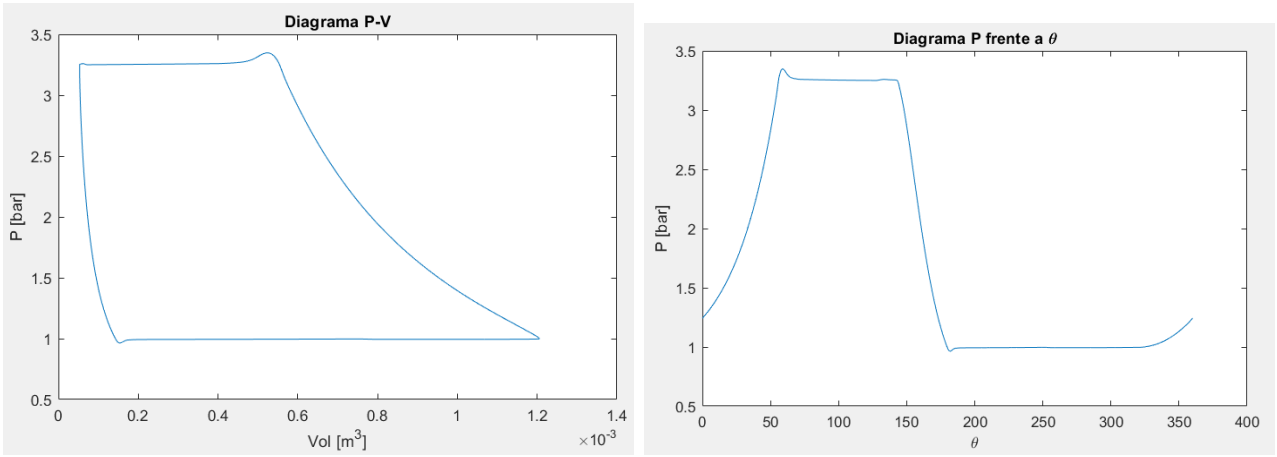


Figure 18: Menús desplegables

6.1 Ejemplo parámetros y gráficas de salida

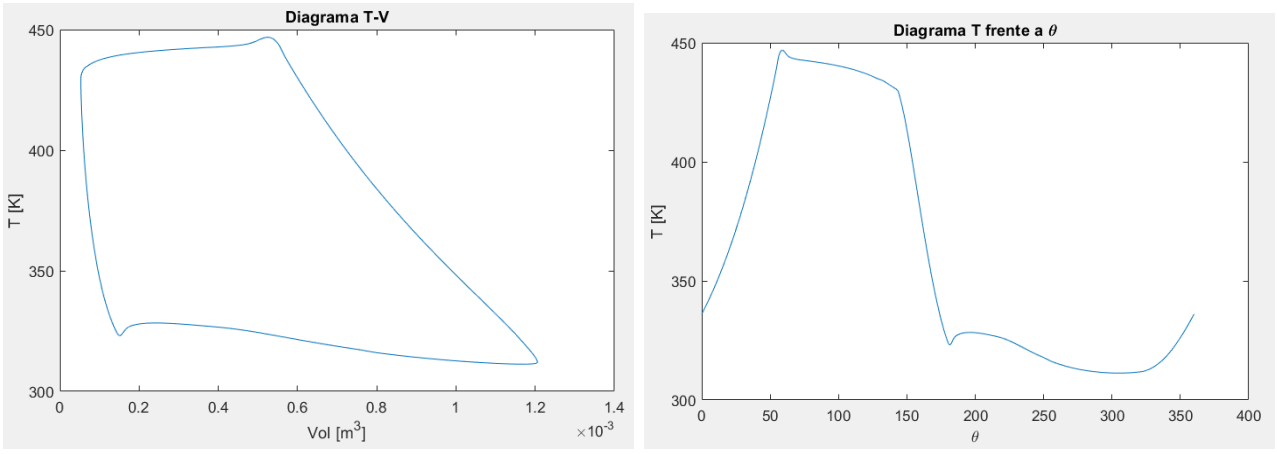
En este apartado se muestran ejemplos de las gráficas y variables que devuelve la aplicación tras ejecutarse en el modo compresor. Se ha utilizado la misma geometría que para obtener los mapas (sección 7), una relación de compresión $\pi = 3.5$ y 1000 rpm.

En las gráficas 19, 20 y 21 se representa la evolución la presión, temperatura y masa en un ciclo de una célula del compresor. En las gráficas 22, 23 y 24, se representa la evolución de las presiones, temperaturas y masas de los volúmenes adyacentes. En la figura 25 se representa el gasto de fugas de una célula en un ciclo. Por último, el diagrama H-S se encuentra en la gráfica 26a y el dibjo del compresor en la figura 26b. Nótese que el diagrama H-S es prácticamente una línea vertical, lo que implica que el proceso de compresión es casi isentrópico.



(a) Diagrama P-V (b) Presión frente al ángulo θ

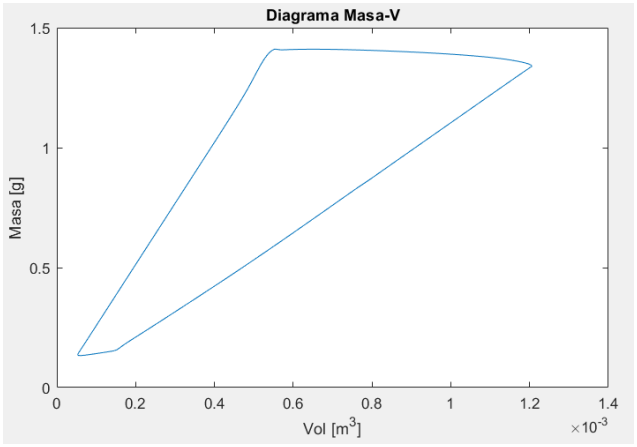
Figure 19: Presión



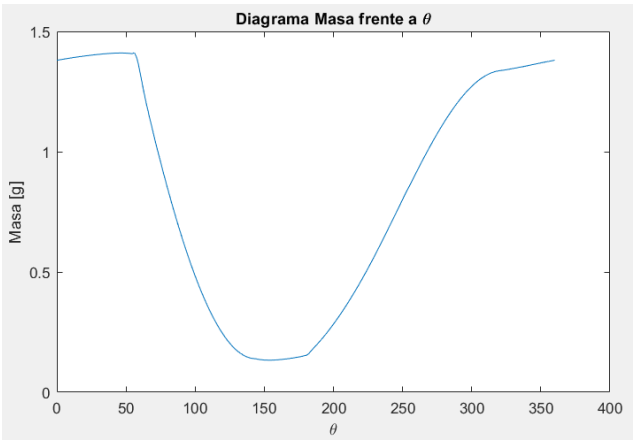
(a) Diagrama T-V (b) Temperatura frente al ángulo θ

Figure 20: Temperatura

Además de las gráficas, la aplicación también proporciona una serie de variables de salida por ciclo que, en este ejemplo, son las siguientes:

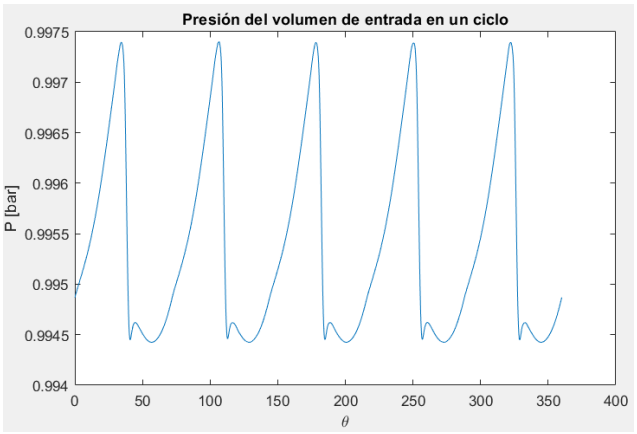


(a) Diagrama M-V

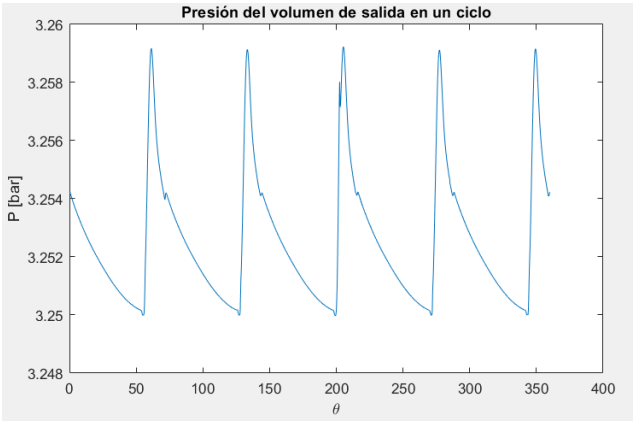


(b) Masa frente al ángulo θ

Figure 21: Masa

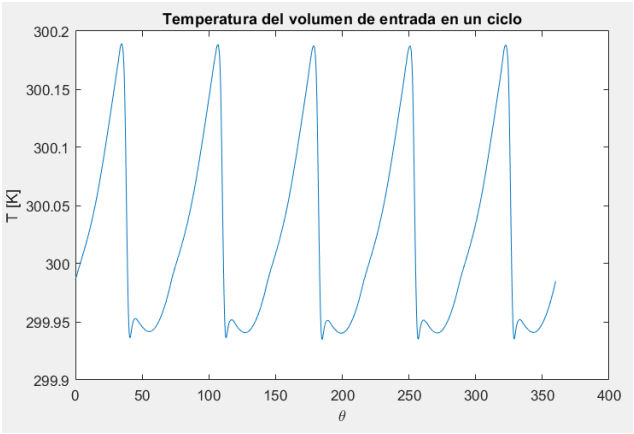


(a) Volumen de entrada

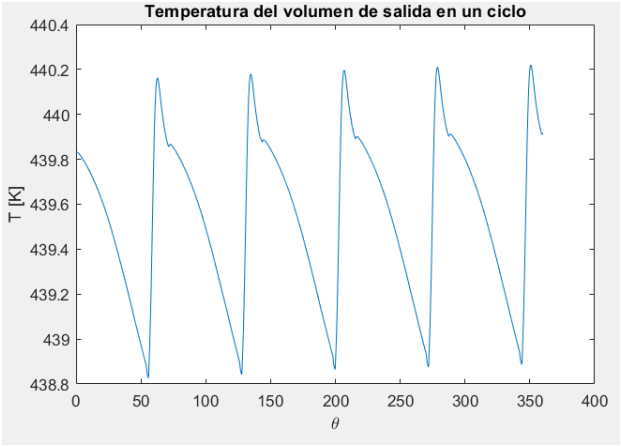


(b) Volumen de salida

Figure 22: Evolución de la presión en los volúmenes adyacentes

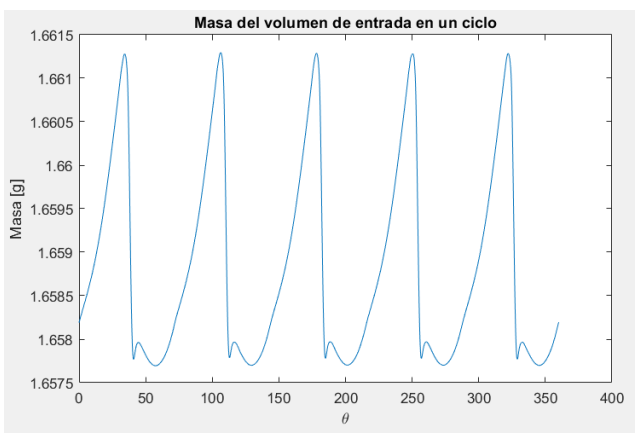


(a) Volumen de entrada

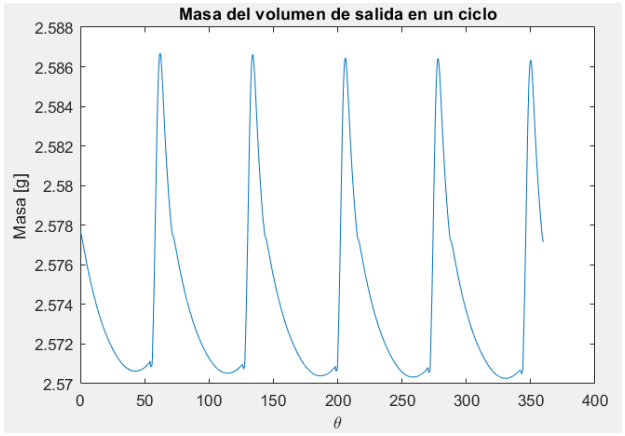


(b) Volumen de salida

Figure 23: Evolución de la temperatura en los volúmenes adyacentes

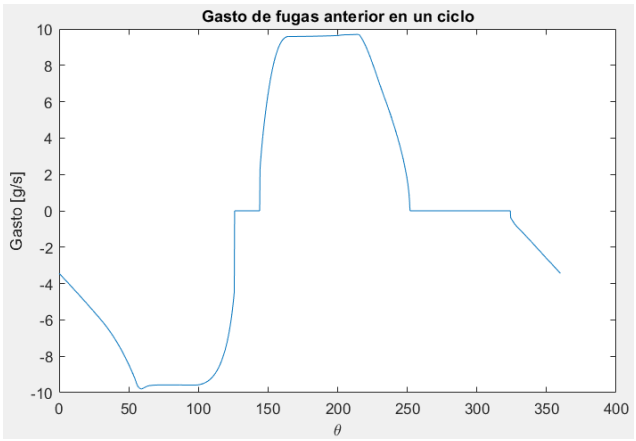


(a) Volumen de entrada

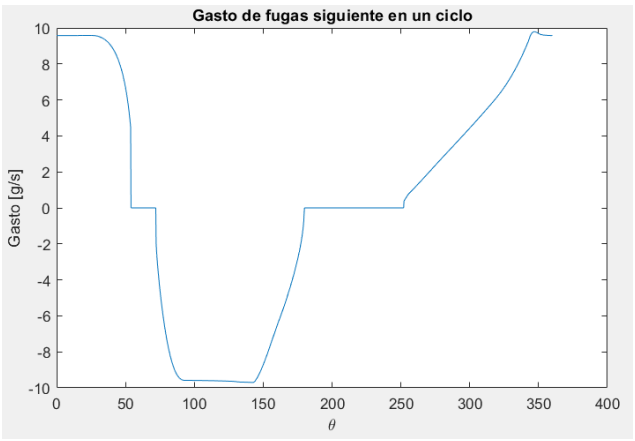


(b) Volumen de salida

Figure 24: Evolución de la masa en los volúmenes adyacentes

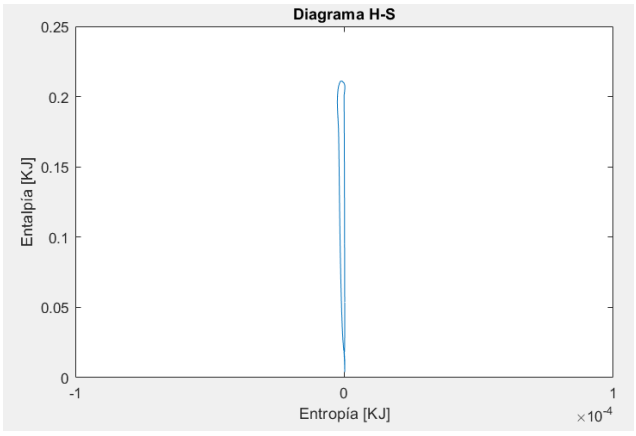


(a) Célula siguiente ($\dot{m}_2$)

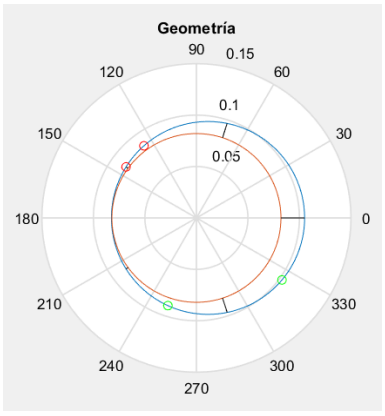


(b) Célula anterior ($\dot{m}_1$)

Figure 25: Gastos de fugas con las células anterior y siguiente



(a) Diagrama HS



(b) Dibujo de una sección de la máquina

Figure 26: Diagrama HS y Dibujo de la máquina

$P_{ind}\,[KW]$	13.5524	η_{vol}	0.78975	$m_{out}\,[g/ciclo]$	5.2652	$W_{ind}\,[KJ]$	0.81314
$P_{fr}\,[KW]$	0.91234	η	0.73367	$m_{fugas}\,[g/ciclo]$	55.022	$V_{muerto}\,[m^3]$	n 0.0053768
$P_{total}\,[KW]$	14.4647	$T_{out}\,[K]$	438.22	$G_{out}\,[g/s]$	87.7541	$M_{eje}\,[N.m]$	138.13

Table 4: Tabla de las variables de salida para el compresor de ejemplo

7 Mapas de actuación

Los mapas de actuación son de gran utilidad ya que permiten ver el comportamiento general de la máquina en un amplio rango de regímenes de funcionamiento.

El funcionamiento de las máquinas volumétricas depende de muchos factores: parámetros geométricos, relación de compresión, gasto, velociad de giro, composición del fluido de trabajo, etc. Sin embargo, si se lleva a cabo un análisis dimensional y, haciendo uso del Teorema Pi de Vaschy-Buckingham, todos estos factores pueden condensarse en un reducido número de variables independientes que son las que se muestran en las ecuaciones siguientes.

$$\pi = \pi(\dot{m}, N) \tag{86}$$

$$\eta = \eta(\dot{m}, N) \tag{87}$$

$$\dot{W} = \dot{W}(\dot{m}, N) \tag{88}$$

Donde π es la relación de compresión, η es el rendimiento, $\dot{W}$ es la potencia en $[W]$, $\dot{m}$ es el gasto en $[Kg/s]$ y N la velocidad de giro en $[rpm]$.

De manera que, mediante los mapas, se representan las relaciones entre las variables independientes que gobiernan el problema, en concreto, la relación de compresión y la potencia frente a el resto de variables.

$$\pi = \pi(\dot{m}, N, \eta) \tag{89}$$

$$\dot{W} = \dot{W}(\dot{m}, N, \eta) \tag{90}$$

Puesto que las ecuaciones 89 y 90 constituyen superficies en 4 dimensiones, los mapas son secciones de estas superficies por planos $\eta = cte$ y $N = cte$.

Por otra parte, y por motivos de estandarizar los mapas, se suelen representar también variables corregidas: Potencia corregida y gasto corregido, cuyas expresiones se dan a continuación.

$$\dot{m}_c = \frac{\dot{m}\sqrt{T_{in}}}{P_{in}} \tag{91}$$

$$\dot{W}_c = \frac{\dot{W}}{\dot{m}\, C_p(T_{in})\, T_{in}} \tag{92}$$

Donde T_{in} y P_{in} son la temperatura y presión de admisión de la máquina respectivamente.

7.1 Ejemplos de mapas de actuación

A continuación se muestran los mapas obtenidos para el compresor que se analizó en el apartado 6.1 empleando la herramienta como se explicó en la sección 6.

Según se observa en la *figura 27*, el gasto a medida que aumenta la velocidad de giro, para una relación de compresión constante. Ocurre porque la masa que mueve la máquina por unidad de tiempo es mayor si el número de ciclos por unidad de tiempo también es mayor. También se ve que el gasto disminuye si la relación de compresión aumenta para una velocidad de giro dada.

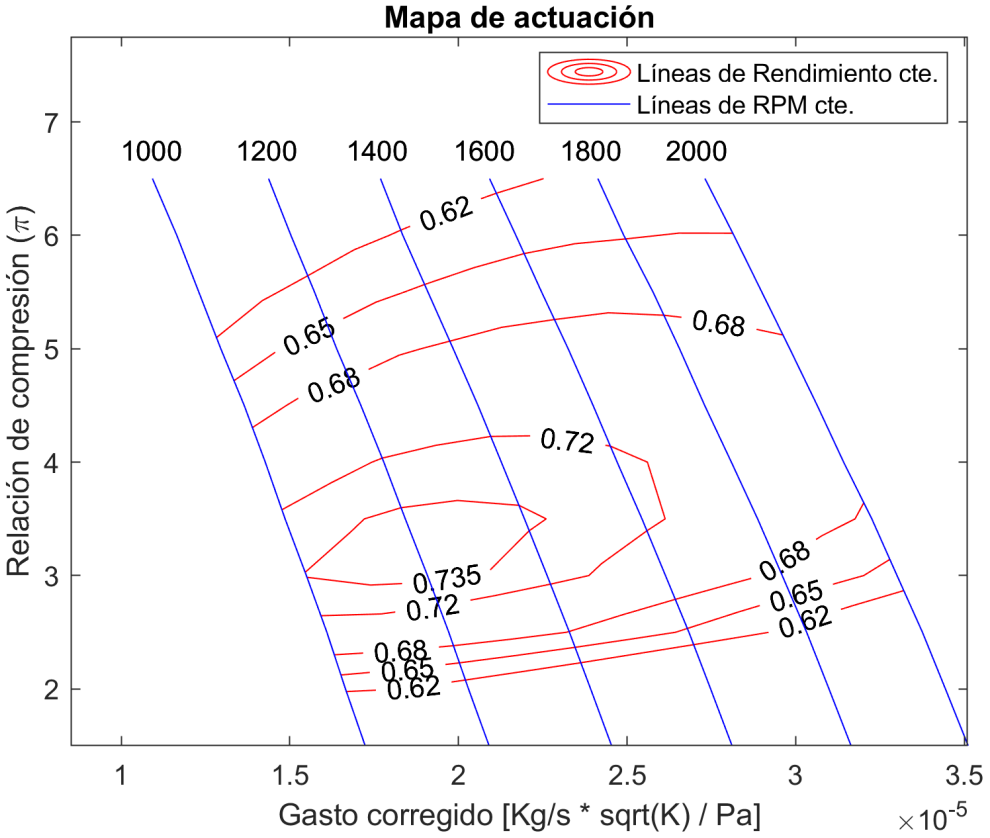


Figure 27: Mapa de relación de compresión frente a gasto corregido

Por otra parte, en el mapa de potencia frente a gasto corregido, se nota que para mover un gasto mayor se requiere más la potencia, lo que resulta intuitivo. Sin embargo, en el mapa de potencia corregida esto no ocurre para todas las líneas de π constante porque la potencia corregida está dividida por el gasto y distorsiona el diagrama.

Además, en cualquiera de los mapas de potencia se observa que la potencia crece con la velocidad de giro. Uno de los factores más relevantes es la potencia de fricción que depende cuadráticamente de la velocidad de giro (véase la sección 5.3).

Por último, nótese también, como las líneas de rendimiento constante tienden a cerrarse hacia el interior en torno al punto óptimo de funcionamiento, que es el que tiene mayor rendimiento.

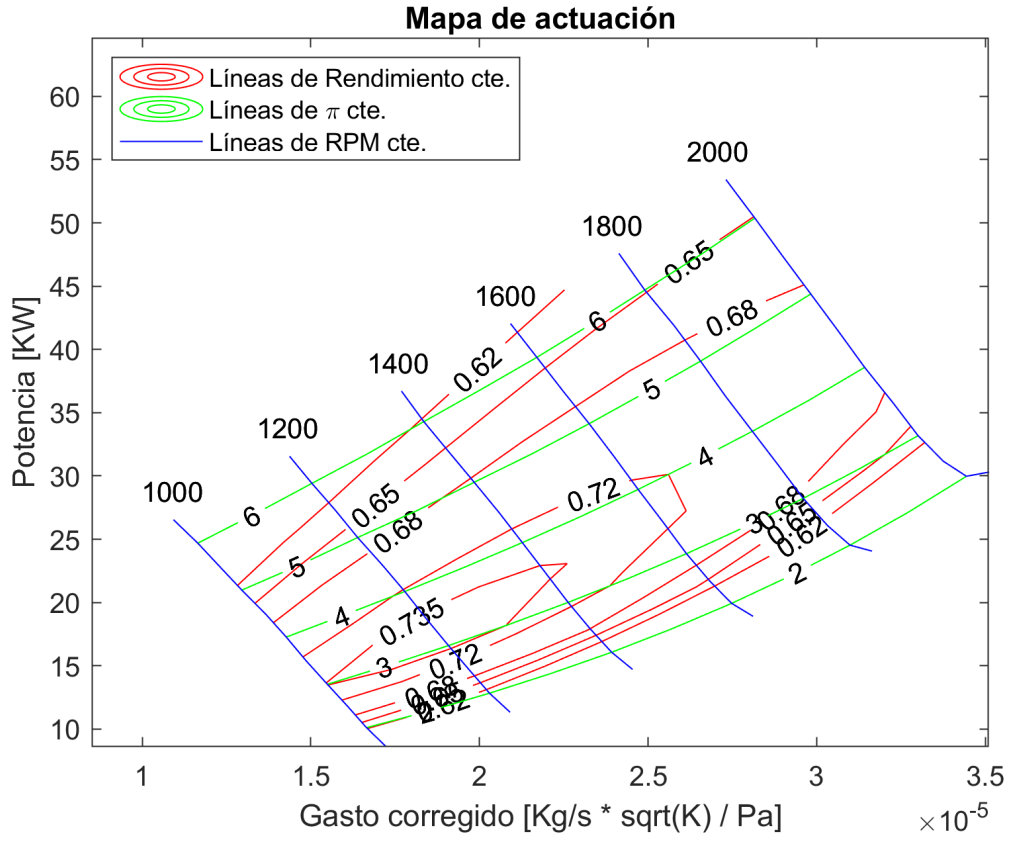


Figure 28: Mapa de potencia frente a gasto corregido

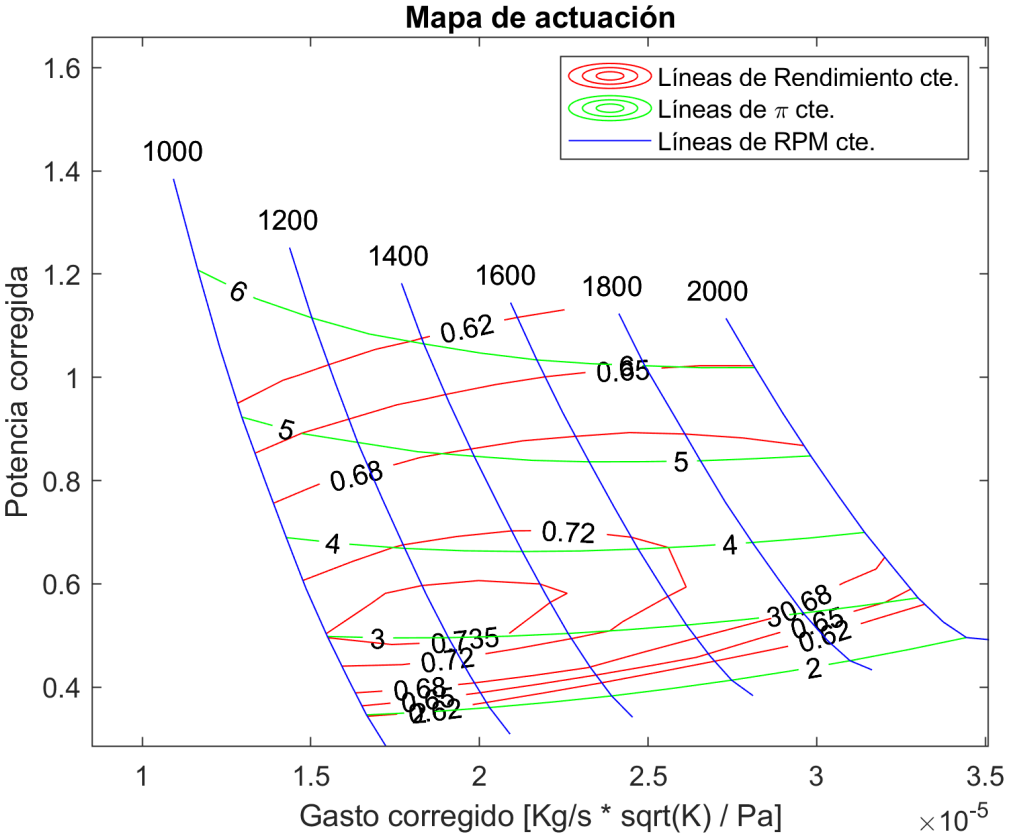


Figure 29: Mapa de potencia corregida frente a gasto corregido

8 Estudio de sensibilidad

En esta sección se profundiza acerca de la influencia de cambiar los parámetros de entrada sobre las variables y gráficas de salida.

Nota: la influencia de los ángulos y presiones de entrada y salida está recogida en el apartado de optimización (9).

8.1 Holgura

Se ha simulado el compresor con distintos valores de holgura y se observa una alta sensibilidad al valor de este parámetro puesto que las fugas afectan notablemente a las prestaciones del compresor.

Al aumentar la holgura, aumenta la temperatura debido a la mezcla de gases fríos con gases calientes de células adyacentes y hace disminuir la relación de compresión, el rendimiento termodinámico y el rendimiento volumétrico. También aumenta la potencia que consume el compresor o disminuye la que cede en modo expansor.

8.2 Excentricidad

Un aumento de la excentricidad conlleva un aumento de la relación de compresión porque se hace mayor la diferencia entre el volumen máximo y mínimo.

8.3 Longitud, Diámetro del estátor, Diámetro del rótor

Un aumento de cualquiera de estos parámetros conlleva un compresor o expansor de mayor tamaño, por lo que el volumen de cada célula será mayor y, por ende, la potencia que consume (compresor) o cede (expansor) también aumentará.

8.4 Espesor de las paletas

El espesor de las paletas tiene una repercusión pequeña en las prestaciones globales de la máquina siempre que se mantenga en un rango aceptable.

El espesor debe ser el mínimo posible para no penalizar mucho la cilindrada y suficiente para soportar los esfuerzos estructurales.

8.5 Número de paletas

El número de paletas afecta, por un lado, a la fricción: a mayor número de paletas mayor será la fricción de estas con la pared interna del estátor, y, por otro lado, influye en la variación del volumen a lo largo de un ciclo y, por tanto, en la forma en la que se comprime o expande el gas.

8.6 Tamaño de los volúmenes adyacentes

Como ya se explicó en la sección 2.6 la función de los volúmenes adyacentes es disminuir las oscilaciones de presión a la entrada y salida, así que al aumentar la capacidad de estos las oscilaciones disminuyen y viceversa.

8.7 Constante y temperatura de refrigeración

La refrigeración se emplea para extraer energía del sistema y, de esa manera, disminuir la potencia consumida y la temperatura de salida. Como se comentó en el apartado 4.4, esto se modela meidante una temperatura exterior y una constante de transmisión de calor (h). Así, aumentando la constante de transmisión de calor o disminuyendo la temperatura externa puede extraerse más energía del sistema y viceversa.

8.8 Coeficiente de descarga

El coeficiente de descarga no afecta sustancialmente a las prestaciones de la máquina mientras se mantenga en torno a ~ 0.7.

8.9 Velocidad de giro

La velociad de giro afecta fundamentalmente a la potencia disipada por fricción (véase la sección 5.3) y a las masas de entrada, salida, y fugas, porque el gas tiene menos tiempo disponible para desplazarse.

Por otra parte, la velocidad de giro también afecta directamente a la configuración óptima del compresor, ángulos de entrada y salida, relación de compresión, etc.

9 Optimización

En este apartado se explica cómo usar la herramienta para optimizar el compresor que se ha usado como ejemplo en la sección 6.

Los parámetros de entrada que mayormente afectan a la forma del diagrama P-V y, por ende, al rendimiento, es la relación de compresión y la posición de los ángulos de entrada y salida.

Puesto que el trabajo que consume el compresor en un ciclo es el área del diagrama P-V, la optimización consiste en minimizar este área. Para ello hay que modificar la relación de compresión y los ángulos de entrada y salida para eliminar los picos de presión que se ven, por ejemplo en la *figura 30*

El diagrama de la *figura 30* se ha calculado con las siguientes presiones de entrada y salida:

$$P_{in} = 1.8\,bar \quad y \quad P_{out} = 4.5\,bar \tag{93}$$

Y con los siguientes ángulos:

$$angIn1 = 252°, \quad angIn2 = 324°, \quad angOut1 = 126°, \quad angOut2 = 144° \tag{94}$$

Las líneas horizontales corresponden a dichas presiones.

Existen dos maneras de eliminar los picos. O bien imponiendo la presión de entrada igual a la mínima que se alcanza en el diagrama P-V (pico inferior) y la presión de salida igual a la máxima (pico superior). O bien abriendo la salida y la entrada antes para que el gas llegue con menos y más presión respectivamente. También es válido una combinación de las anteriores.

En concreto, para ajustar los ángulos partiendo de un diagrama como el de la *figura 30* habría que imponer el ángulo de salida 1 en la posición cuyo volumen que corresponda a la intersección entre la curva de compresión y la recta horizontal de presión constante a la salida igual a 4.5 la bar. De forma equivalente se haría con la curva de expansión y la recta horizontal de presión constante a la entrada igual a 1.8 bar.

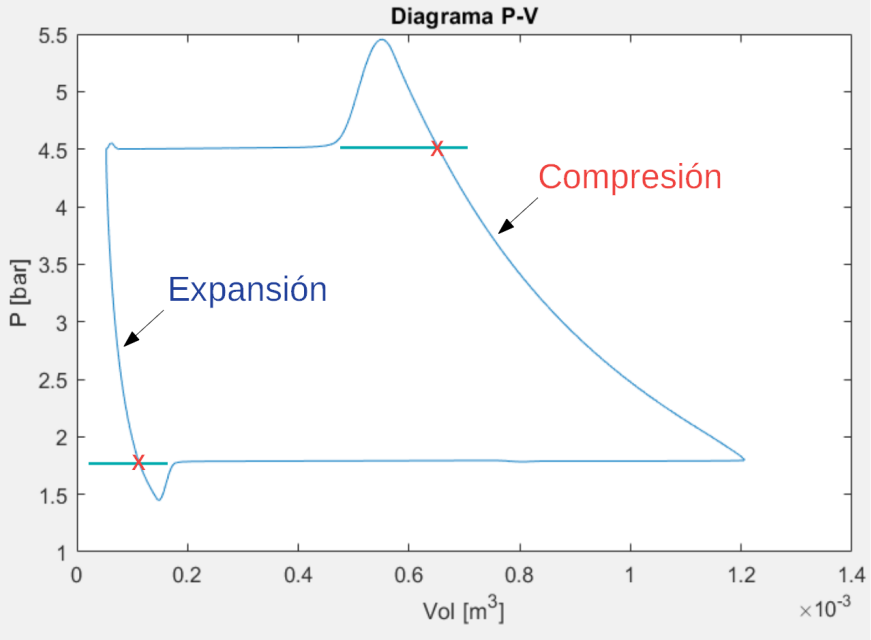


Figure 30: Diagrama P-V sin optimizar

Tras imponer $P_{out} = 5.5\,bar$ el diagrama P-V que se obtiene en la siguiente iteración es el mostrado en la *figura 31*. Como se, con sólo cambiar P_{out} no sólo se ha atenuado el pico de compresión sino también el de expansión.

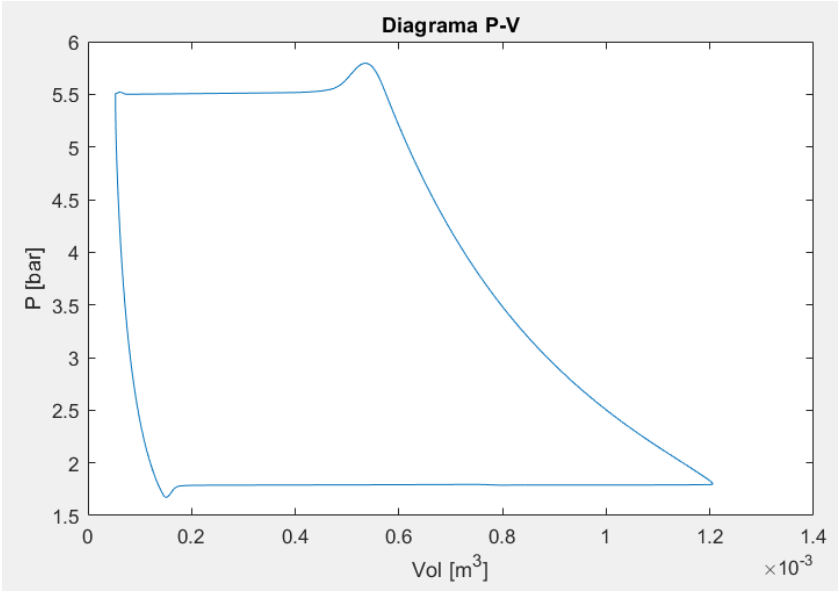


Figure 31: Diagrama P-V tras la 1^a iteración

Finalmente, retrasando el ángulo de salida 1 para eliminar el pico a la salida al valor $angOut1 = 120°$, se consigue un diagrama con un área más reducida como se ve en *figura 32*.

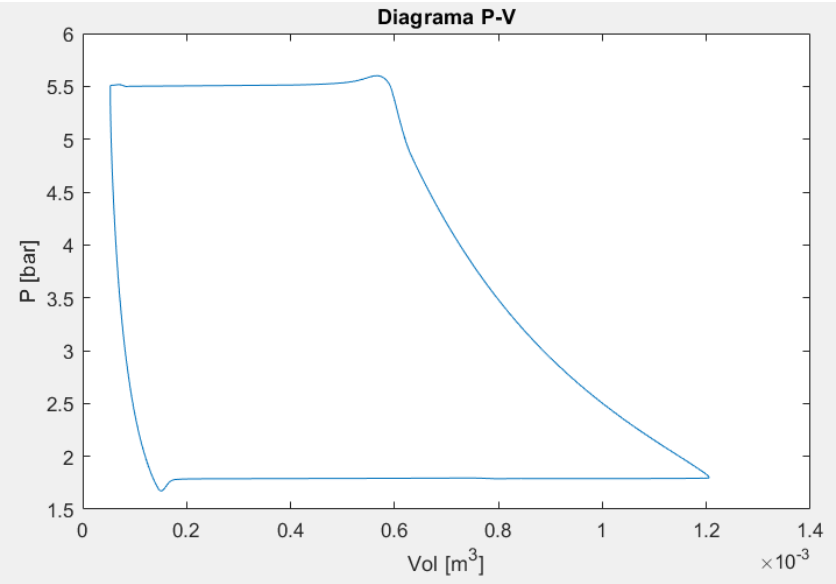


Figure 32: Diagrama P-V tras la 2^a iteración

References

[1] Rule of mixtures calculator - find specific heat capacity of a mixture, Dec 2017.

[2] C. G. Camacho. Formulario de termodinamica. Escuela Tecnica Superior de Ingenieria. Universiad de Sevilla. `https://goo.gl/EgZDXr`, 2017.

[3] R. C. Giuseppe Bianchi. Friction power modeling and measurements in sliding vane rotary compressors. *Elsevier*, 4 2015.

[4] J. Heywood. *Internal combustion engine fundamentals*. McGraw-Hill, New York, 1988.

[5] J. P. Holman. *Transferencia de calor*. CECSA, Mexico, 1998.

[6] J. Howell. *Principios de termodinaamica para ingenieria*. McGraw-Hill, Mexico, 1990.

[7] E. ller. *Termodinamica basica*. Kemiteknik, Caracas (Venezuela, 2002.

[8] R. Petrucci. *Quimica general : principios y apllicaciones modernas*. Prentice Hall Person educacion, Madrid etc, 2011.

[9] A. Ripoll. *Fundamentos y aplicaciones de la mecanica de fluidos*. McGraw-Hill, Madrid, 2005.

[10] Wikipedia. Masa molar — Wikipedia, the free encyclopedia. `http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Masa%20molar&oldid=108860751`, 2018.