

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de la Energía

Análisis de Centralidad en Redes: Un enfoque desde  
la Teoría de Juegos

Autor: Manuel Rodríguez León

Tutora: Dra. Encarnación Algaba Durán

Dpto. de Matemática Aplicada II  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería de la Energía

# **Análisis de Centralidad en Redes: Un enfoque desde la Teoría de Juegos**

Autor:

Manuel Rodríguez León

Tutora:

Dra. Encarnación Algaba Durán

Dpto. de Matemática Aplicada II  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: Análisis de Centralidad en Redes: Un enfoque desde la Teoría de Juegos

Autor: Manuel Rodríguez León

Tutora: Dra. Encarnación Algaba Durán

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal



El presente Trabajo Fin de Grado “Análisis de Centralidad en Redes: Un enfoque desde la Teoría de Juegos” se ha realizado bajo la tutela de Encarnación Algaba Durán, en el Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla.

En el presente trabajo se exponen los fundamentos y algunos modelos para el análisis de redes desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos.

Los principales contenidos de cada capítulo se exponen a continuación.

- Capítulo 1: Teoría de juegos cooperativos.

En este capítulo, se introducen algunos conceptos de la teoría de juegos cooperativos y un concepto de solución, el valor de Shapley. A su vez, se incluye una aplicación para ilustrar la utilidad del valor de Shapley.

- Capítulo 2: Análisis de redes. Juegos cooperativos con comunicación restringida.

En este capítulo, se presentan algunos conceptos básicos de redes y juegos con comunicación restringida. En particular, se introduce el valor de Myerson que es un importante concepto de solución en este contexto. Asimismo, se describen algunas medidas de centralidad estándar, redes sociales y redes ponderadas.

- Capítulo 3: Aplicación al análisis de redes terroristas.

Se presenta y describe un modelo matemático, en el que se aplican los métodos y conceptos anteriores, a la lucha antiterrorista para identificar los miembros más relevantes de estas redes. Adicionalmente, se presentan algunos algoritmos que permiten la implementación de estos conceptos en las aplicaciones.

- Capítulo 4: Otras aplicaciones.

En este capítulo se ilustran varias aplicaciones del análisis de redes para mostrar el amplio campo de utilidad de la metodología presentada. La introducción de algunos conceptos será necesaria para ampliar los conceptos previamente desarrollados.

# Abstract

---

In this work are exposed the basics of centrality analysis from the view of cooperative game theory.

The main contents of each chapter are shown below.

- Chapter 1: Cooperative game theory

In this chapter some basic concepts of cooperative game theory are introduced focusing on one of the most important solution concept called the Shapley value.

- Chapter 2: Network analysis. Cooperative games with restricted communication.

In this chapter basic concepts of networks and restricted communication games and two types of value, Myerson value and position value. Also, standard centrality measures, social networks and weighted networks are explained.

- Chapter 3: Application to terrorist networks.

In this chapter are applied the models and concepts introduced focusing on counter terrorism to identify key players in these networks. Moreover, some algorithms to work with networks are presented.

- Chapter 4: Other applications.

In this chapter are presented some other applications related to network analysis to show how adaptative this discipline is. Also, some new concepts related to each application will be showed.

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Resumen</b>  | <b>vii</b>  |
| <b>Abstract</b>   | <b>viii</b> |
| <b>Índice</b>   | <b>ix</b>   |
| <b>1. Teoría de juegos cooperativos</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1. Introducción   | 1           |
| 1.2. Juegos cooperativos  | 1           |
| 1.3. El valor de Shapley. Aplicación  | 6           |
| <b>2. Análisis de redes. Juegos cooperativos con comunicación restringida</b>                       | <b>13</b>   |
| 2.1. Introducción   | 13          |
| 2.2. Conceptos básicos  | 13          |
| 2.3. Análisis de centralidad en redes   | 16          |
| 2.4. Centralidad estándar   | 17          |
| 2.5. Juegos cooperativos con comunicación restringida   | 20          |
| 2.6. Conceptos de solución de juegos cooperativos con comunicación restringida: El valor de Myerson | 25          |
| 2.6.1. Axiomatizaciones clásicas del valor de Myerson   | 27          |
| 2.6.2. Otras axiomatizaciones del valor de Myerson  | 28          |
| 2.7. Redes sociales   | 31          |
| 2.8. Redes ponderadas   | 34          |
| <b>3. Aplicación al análisis de redes terroristas</b>   | <b>36</b>   |
| 3.1. Introducción   | 36          |
| 3.2. Metodología  | 38          |
| 3.3. Aplicación del modelo: Atentados del 11-S  | 42          |
| 3.4. Algoritmos de cálculo  | 45          |
| 3.4.1. Enumeración DFS subgrafos inducidos conectados   | 45          |
| 3.4.2. Algoritmo para el cálculo del valor de Myerson   | 47          |
| <b>4. Otras aplicaciones</b>  | <b>49</b>   |
| 4.1. Introducción   | 49          |
| 4.2. Diseño de vías de evacuación   | 50          |
| 4.2.1. <i>Evacuation betweenness centrality</i>   | 51          |
| 4.3. Análisis de inestabilidad de tensión en redes de potencia                                      | 54          |
| 4.3.1. Centralidad eléctrica  | 54          |
| 4.3.1.1. Centralidad de grado   | 54          |
| 4.3.1.2. Centralidad de eigenvector   | 54          |
| 4.3.1.3. <i>Closeness centrality</i>  | 55          |
| 4.3.1.4. <i>Vertex and Edge Betweenness centrality</i>  | 55          |
| 4.3.2. Medidas de centralidad basadas en la matriz de distancia de tensiones                        | 56          |
| 4.3.2.1. <i>Fiedler centrality</i>  | 56          |
| 4.3.3. <i>Closeness Voltage Centrality</i>  | 57          |
| 4.3.4. <i>Vertex and Edge attenuation centrality</i>  | 57          |
| 4.4. Redes de sensores inalámbricos   | 58          |
| 4.4.1. Centralidad de grado   | 58          |

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| 4.4.2. <i>Betweenness centrality</i> | 59        |
| 4.4.3. <i>Closeness centrality</i>   | 59        |
| 4.4.4. <i>Bridging centrality</i>    | 59        |
| 4.4.5. <i>Cluster centrality</i>     | 60        |
| <b>5. Conclusiones</b>               | <b>61</b> |
| <b>Referencias</b>                   | <b>63</b> |



# 1 TEORÍA DE JUEGOS COOPERATIVOS

---

## 1.1. Introducción

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas que estudia situaciones de conflicto y cooperación denominadas juegos. Esta disciplina nace en 1944 con el tratado *Game Theory and Economic Behaviour* de von Neumann y Morgensten. Estos dos autores son los que sientan las bases de la teoría de juegos clásica.

En las décadas posteriores gracias a las aportaciones de Nash, Shapley y Harsanyi se desarrollan más conceptos, llevando la teoría de juegos a poder ser aplicada a campos tan diversos como la economía, la ingeniería o las ciencias políticas, entre otros.

En Teoría de Juegos se distingue entre dos modelos de juegos, cooperativos y no cooperativos. En el enfoque cooperativo, los participantes establecen relaciones entre ellos en las que se comprometen a colaborar y en las que prima el beneficio común. En el enfoque no cooperativo prima el interés individual y se analizan las decisiones que tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo.

En el presente capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la teoría de juegos cooperativos y un concepto de solución para este tipo de juegos, el valor de Shapley.

## 1.2. Juegos cooperativos

Mientras que, en los juegos no cooperativos, cualquier acuerdo vinculante buscando estrategias comunes entre dos o más jugadores, y cualquier redistribución de pagos entre cualquier grupo de jugadores, está prohibido, los juegos cooperativos no están restringidos en estos aspectos, y se caracterizan porque la cooperación entre los jugadores está permitida. Cualquier grupo de jugadores, llamado coalición de jugadores, puede libremente hacer acuerdos para unificar estrategias. El pago total a la coalición puede ser dividido de diferentes formas entre esos jugadores. Así, se tienen que considerar las siguientes cuestiones. Primero, desde el momento en que varios jugadores deseen cooperar en algunos aspectos, una coalición deberá ser formada entre esos jugadores. Esta es una cuestión importante en juegos cooperativos. En un juego no cooperativo cada jugador busca maximizar su beneficio individual. Segundo, después de que una coalición sea formada por algunos jugadores, esta coalición como conjunto se esforzará por conseguir unos pagos tan grandes como sea posible. Este pago es función de la coalición. Finalmente, el pago total conseguido por cada coalición

será repartido entre los miembros que la forman. La porción recibida por cada jugador será representada por un número.

De esta forma se muestra como pueden actuar grupos de jugadores, centrándonos en los colectivos que se forman y sin necesidad de estudiar individualmente a cada jugador. A continuación, se exponen una serie de propiedades de los juegos cooperativos.

**Definición 1.1** Un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles consiste en:

- Un conjunto finito de jugadores  $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- Una función característica que asocia a cada subconjunto  $S$  de  $N$  (o coalición) un número real  $v(S)$  (valor de la coalición), siendo  $v(\emptyset) = 0$ .

Por tanto,  $(N, v)$  es un juego en forma coalicional o en forma de función característica con utilidades transferibles si  $N$  y  $v$  están especificados. Cabe señalar, que al conjunto de todas las coaliciones que pueden formarse con  $n$  jugadores se le denota por  $2^N$ .

Si al crecer el número de jugadores que forman la coalición se cumple que el beneficio que obtiene la coalición no disminuye se está ante un juego cooperativo monótono.

**Definición 1.2** Se dice que un juego  $(N, v)$  es **monótono** si  $\forall S, T \subseteq N$ , con  $S \subseteq T$ , se verifica que

$$v(S) \leq v(T). \quad (1.1)$$

Si dos coaliciones con intersección vacía se unen y el beneficio de la nueva coalición es, al menos, igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen, se tiene un juego superaditivo.

**Definición 1.3** Se dice que un juego  $(N, v)$  es **superaditivo** si  $\forall S, T \subseteq N$ , con  $S \cap T = \emptyset$ , se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T). \quad (1.2)$$

Si esta desigualdad se cumple en sentido opuesto se dice que el juego es subaditivo.

La siguiente propiedad es más fuerte que la anterior. Si dos coaliciones, con intersección no necesariamente vacía, se unen y la suma de los beneficios de la unión y la intersección es al menos igual a la suma de beneficios de las coaliciones que se unen, se está ante un juego convexo.

**Definición 1.4.** Se dice que un juego  $(N, v)$  es convexo si  $\forall S, T \subseteq N$ , se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \quad (1.3)$$

Si la desigualdad se da en sentido contrario estamos ante un juego cóncavo.

**Definición 1.5.** Se dice que un juego  $(N, v)$  es 0-normalizado si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in N. \quad (1.4)$$

**Definición 1.6.** Se dice que un juego  $(N, v)$  es (0,1)-normalizado si se verifica que

$$v(\{i\}) = 0, \forall i \in N \quad \text{y} \quad v(N) = 1. \quad (1.5)$$

En ambos casos, el beneficio de un jugador es cero si decide no cooperar con los otros. En el segundo, además, se normaliza a la unidad el beneficio que obtendría una coalición integrada por todos los jugadores.

A continuación, se definen algunas operaciones básicas sobre juegos cooperativos.

**Definición 1.7.** Sean  $(N, v)$  y  $(N, w)$  dos juegos cooperativos, con  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se definen las siguientes operaciones entre juegos:

$$\begin{aligned} (v + w)(S) &= v(S) + w(S), \quad \forall S \subseteq N, \\ (\lambda v)(S) &= \lambda [v(S)], \quad \forall S \subseteq N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Todo jugador de un juego cooperativo debe recibir su porción de pago total  $v(S)$  disponible. La división de  $v(S)$  entre los jugadores de la coalición  $S$  puede ser representada por un vector de pagos o vector de imputaciones  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  donde  $x_i$  es el beneficio obtenido por el jugador  $i$ . Cuando hablamos de beneficio, nos referimos al resultado obtenido por cada miembro de la coalición, dependiendo de la naturaleza del juego esto puede ser desde dinero o relevancia de las subestaciones en una red de transporte de energía eléctrica.

A continuación, se exponen algunos criterios que una solución debería satisfacer

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

$$\sum_{i \in S} x_i = x(S) \geq v(S). \quad (1.8)$$

La relación (1.7) es el **principio de individualidad racional**. Si esta relación no se cumple el

jugador  $i$  no aceptará la distribución de beneficios ya que podría conseguir el pago  $v(i)$ .

La segunda relación, (1.8), es la **condición de racionalidad de grupo**, también llamada, condición de optimalidad de Pareto.

Si todos los jugadores se ponen de acuerdo el beneficio total se representa por  $v(N)$ . Parece evidente exigir a partir de esto, el principio de eficiencia, partiendo de que los jugadores reciben el vector de pagos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$v(N) = \sum_{j \in N} x_j = x(N). \quad (1.9)$$

Con este principio se establece que el valor de una coalición formada por todos los jugadores se reparte en su totalidad entre los miembros que la forman.

**Definición 1.8.** El conjunto de **preimputaciones** de un juego  $(N, v)$  es el siguiente conjunto de vectores de distribución de pagos

$$PI(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\} \quad (1.10)$$

$$\text{con } x(N) = \sum_{i \in N} x_i.$$

La condición que cumplen los vectores de distribución de pagos que pertenecen al conjunto de preimputaciones del juego es el principio de eficiencia.

Cabe pensar que ningún jugador aceptará un pago inferior al que obtendría por sí mismo, sin participar en ninguna coalición. Surge, así, el concepto que se define a continuación.

**Definición 1.9.** El conjunto de **imputaciones** de un juego  $(N, v)$  es el siguiente conjunto de vectores de pagos

$$\begin{aligned} I(N, v) &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in PI(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Es decir, las preimputaciones que cumplen el principio de individualidad racional son llamadas imputaciones.

**Ejemplo 1.1:** Si  $n=3$ , el conjunto de preimputaciones es un plano en el espacio de tres dimensiones que corta a los ejes en los puntos  $(v(N), 0, 0)$ ,  $(0, v(N), 0)$  y  $(0, 0, v(N))$ , tal y como se observa en la

Figura 1.1.

**Ejemplo 1.2:** Si  $n=3$  y se trata de un juego 0-normalizado, el conjunto de imputaciones es la intersección del plano de preimputaciones con el octante no negativo, es decir, con la región del espacio en que las tres coordenadas son mayores o iguales que cero. Se trata por tanto de un triángulo en el espacio de tres dimensiones, cuyos vértices se encuentran en los puntos  $(v(N), 0, 0)$ ,  $(0, v(N), 0)$  y  $(0, 0, v(N))$  y que aparece en la Figura 1.2.

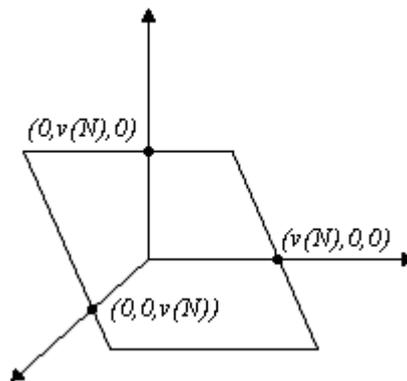


Figura 1.1 Plano al que pertenece el conjunto de preimputaciones del Ejemplo 1.1

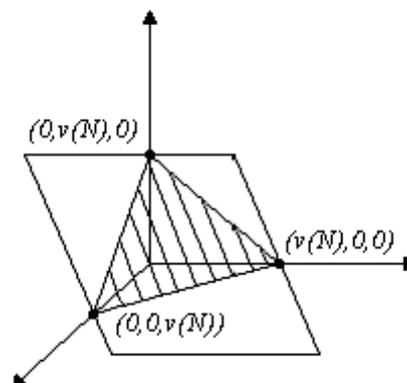


Figura 1.2 Plano al que pertenece el conjunto de imputaciones del Ejemplo 1.2

A partir del conjunto de imputaciones, se introducen los juegos esenciales.

**Definición 1.10.** Se dice que el juego  $(N, v)$  es **esencial** si se verifica que  $I(N, v) = \emptyset$ .

A continuación, se expone el valor de Shapley que se utilizará para hacer el reparto de beneficios entre los jugadores.

### 1.3. El valor de Shapley. Aplicación

El valor de Shapley es un concepto de solución de juegos cooperativos. La idea es buscar una disposición de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, denominados axiomas, previamente establecidos. A partir de los cuatro axiomas definidos por Shapley [23], llegamos a una única asignación para cada jugador, este es el valor de Shapley.

Sea  $(N, v)$  un juego de forma coalicional donde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Se considera la siguiente asignación de pagos para los  $n$  jugadores

$$\gamma(N, v) = (\gamma_1(N, v), \gamma_2(N, v), \dots, \gamma_n(N, v)) \in \mathbb{R}^n$$

La función de pagos debe cumplir los siguientes axiomas:

**Axioma 1. Eficiencia.** La función de asignación  $\gamma(N, v)$  debe distribuir el pago total del juego entre los jugadores. Es decir, se debe verificar

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i(N, v) = v(N). \quad (1.12)$$

**Axioma 2. Simetría.** Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición que no los contenga

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subseteq N, \text{ con } i, j \notin S, \quad (1.13)$$

debe verificarse

$$\gamma_i(N, v) = \gamma_j(N, v). \quad (1.14)$$

**Axioma 3. Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores, no debe recibir ningún pago adicional. Es decir, para cada jugador  $i \in N$ , para el cual se verifica que

$$v(S) = v(S \setminus \{i\}) + v(\{i\}), \forall S \subseteq N \text{ con } i \in S, \quad (1.15)$$

debe satisfacerse

$$\gamma_i(N, v) = v(\{i\}). \quad (1.16)$$

**Axioma 4. Aditividad.** Formalmente, dados dos juegos cualesquiera  $(N, v)$  y  $(N, w)$  se verifica

$$\gamma(N, v + w) = \gamma(N, v) + \gamma(N, w) \quad (1.17)$$

Existe una única regla de asignación que verifica los anteriores axiomas, denominada **valor de Shapley**.

**Teorema 1.1.** *La única regla de asignación que verifica los axiomas de eficiencia, simetría, tratamiento del jugador pasivo y aditividad viene dada por*

$$\phi_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} q(s) [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad (1.18)$$

donde  $q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ , siendo  $s=|S|$  y  $n=|N|$ , el número de jugadores que hay en la coalición

$S$  y  $N$  respectivamente.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal de cada jugador al entrar en una coalición. En efecto, el factor  $v(S) - v(S \setminus \{i\})$  es la contribución marginal efectiva de  $i$  al incorporarse a  $S \setminus \{i\}$ , mientras que el factor  $q(s)$  es la probabilidad de que a  $i$  le toque incorporarse precisamente a  $S \setminus \{i\}$  y no a otra coalición.

**Ejemplo 1.3.** Se va a calcular el valor de Shapley para el siguiente juego, con  $N = \{1, 2\}$ , siendo

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = 5, \quad v(\{2\}) = 7, \quad v(\{1, 2\}) = 20.$$

Las posibles coaliciones que pueden formarse son  $2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . La familia de coaliciones a las que pertenece el jugador 1 es  $S(1) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ . La familia de coaliciones en la que está el jugador 2 es  $S(2) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$ . Los coeficientes  $q(s)$  valdrán

$$q(1) = \frac{0!1!}{2!} = \frac{1}{2},$$

$$q(2) = \frac{1!0!}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Se utiliza ahora la fórmula de Shapley,

$$\begin{aligned}\phi_1(v) &= q(1)[v(\{1\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] \\ &= \frac{1}{2}v(\{1\}) + \frac{1}{2}[v(\{1, 2\}) - v(\{2\})] = \frac{18}{2} = 9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(v) &= q(1)[v(\{2\}) - v(\emptyset)] + q(2)[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] \\ &= \frac{1}{2}v(\{2\}) + \frac{1}{2}[v(\{1, 2\}) - v(\{1\})] = \frac{22}{2} = 11.\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de Shapley del juego dado es  $\phi(v) = (9, 11)$ .

Existen algunas variantes asimétricas del valor de Shapley. El propio Shapley introdujo en 1953, ver [23], una familia de valores de Shapley ponderados para tener en cuenta posibles diferencias de fuerza entre los jugadores. Estas diferencias pueden ser modeladas mediante pesos. Los valores de Shapley ponderados pueden ser descritos usando *coeficientes de unanimidad*.

**Definición 1.11.** Un juego  $(N, u_S)$  es llamado **juego de unanimidad** si es descrito por  $u_S(T) = 1$  si  $S \subseteq T$  y  $u_S(T) = 0$  en otro caso.

**Proposición 1.1.** Todo juego coalicional  $(N, v)$  puede ser escrito como una combinación lineal de juegos de unanimidad de la forma  $v(S) = \sum_{S \subseteq N} \lambda_S(v) u_S$ , siendo  $(N, u_S)$  un juego de unanimidad. Los coeficientes  $\lambda_S(v)$  son llamados **coeficientes de unanimidad**.

Shapley mostró que los coeficientes de unanimidad de un juego de utilidad transferible  $(N, v)$  satisfacen:

$$\lambda_S(v) = \sum_{T \in 2^S} (-1)^{|S|-|T|} v(T), \quad \forall S \subseteq N. \quad (1.19)$$

Utilizando los coeficientes de unanimidad antes descritos se puede calcular el valor de Shapley de un juego cooperativo, tal y como muestra el siguiente teorema, que puede encontrarse en la referencia [23].

**Teorema 1.2.** *El valor de Shapley de un juego  $(N, v)$  esta dado por*

$$\phi_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{\lambda_S(v)}{|S|}, \quad \text{para cada } i \in N. \quad (1.20)$$

Volviendo a los valores ponderados de Shapley, sea  $w = (w_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$  un vector de pesos positivo que expresa la fuerza relativa de cada jugador. Para cada coalición  $S$  se denota la suma de pesos de los jugadores incluidos por  $w_S = \sum_{i \in S} w_i$ . El **valor de Shapley ponderado**  $\phi^w$  de un juego coalicional  $(N, v)$  está entonces definido como

$$\phi_i^w(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{w_i}{w_S} \lambda_S(v), \quad (1.21)$$

para cada  $i \in N$ . Nótese que si todos los jugadores tienen igual peso el valor de Shapley ponderado equivale al valor de Shapley.

A continuación, se presenta una aplicación del valor de Shapley sobre cómo repartir los derechos de emisiones de  $CO_2$  en la ciudad de Shanghai [12]. De hecho, China es uno de los países que más eficazmente está empezando a actuar en este ámbito.

En particular, en la presente aplicación se muestra cómo se utiliza el valor de Shapley para repartir derechos de emisión entre tres plantas de generación de potencia de la ciudad de Shanghai. El valor de Shapley se utiliza en comparación con otros dos criterios usados en la literatura (*grandfathering* y *benchmarking*). El interés del valor de Shapley, como se ha visto previamente, es que tiene una interpretación intuitiva, y proporciona una solución que cumple los axiomas de eficiencia, simetría, jugador *dummy* y aditividad.

Esta situación se puede modelar como un juego coalicional con un conjunto de jugadores que viene dado por  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  con  $2^N$  coaliciones posibles. El valor de una coalición  $S$  se denota por  $v(S)$ , en un juego  $v$  y para cada juego habrá un vector de pagos asociado  $\phi_i(v)$ .

El valor de Shapley lo calculamos usando la expresión dada en el Teorema 1.2,

$$\phi_i(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} q(s) [v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

donde  $q(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ , siendo  $s=|S|$  y  $n=|N|$ , el número de jugadores que hay en la coalición

$S$  y  $N$ , respectivamente.

Esto se aplicará a tres plantas de potencia, denominadas Planta 1, Planta 2 y Planta 3, del área de

Shanghai. Hay especial interés en repartir de forma justa los derechos de emisión en este tipo de casos, ya que la generación de energía es una de las causas que más emisiones de  $CO_2$  produce, y a su vez, una de las que tiene mayor margen de mejora.

Para el objeto de la presente aplicación, no será necesario hablar de qué tipo de planta se trata, basta con saber los valores de energía producida, consumida y las emisiones que se muestran en la siguiente tabla.

|          | Valor de producción |                 | Consumo de energía  |                    |                     | Emisiones de $CO_2$ |                  |                   |
|----------|---------------------|-----------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|------------------|-------------------|
|          | ( $10^6$ yuan)      | ( $10^6$ dolar) | (toe <sup>1</sup> ) | (toe/ $10^4$ yuan) | (toe/ $10^3$ dolar) | (t)                 | (t/ $10^4$ yuan) | (t/ $10^3$ dolar) |
| Planta 1 | 241611              | 388.97          | 170314              | 0.705              | 0.438               | 418972              | 1.734            | 1.077             |
| Planta 2 | 374413              | 602.77          | 179942              | 0.481              | 0.299               | 442657              | 1.182            | 0.734             |
| Planta 3 | 214452              | 345.25          | 131118              | 0.611              | 0.380               | 322550              | 1.504            | 0.934             |

Tabla 1 Energía producida, consumida y emisiones de  $CO_2$  asociadas a cada planta en 2008

En esta tabla se muestra que aunque la Planta 2 siendo la que más energía produce, es a su vez la que más  $CO_2$  emite, pero en términos de eficiencia<sup>2</sup> sin embargo, es la mejor ya que es la que menos emisiones genera de forma proporcional. A la vista de los resultados, la Planta 1 sería la menos eficiente.

El cálculo se hizo siguiendo las tres técnicas que se han mencionado previamente. Con la técnica *benchmark* se reparte multiplicando el índice de actividad económica por el índice de emisiones del sector (que se fija previamente). En este caso, como ninguna de las tres plantas llegaban a la media de emisiones del sector, se fija una media para las plantas bajo estudio para el cálculo de sus cuotas según este criterio (*benchmark*). Mientras que el *benchmark* está basado en el estado actual de las plantas, el segundo criterio, *grandfathering*, lo está en el histórico de emisiones de cada planta. Este histórico, decidido por los investigadores, se multiplica por un coeficiente de control de emisiones que imponen las autoridades y eso fija la cuota.

<sup>1</sup> Toe significa, *tone of oil equivalent*, tonelada equivalente de petróleo en español.

<sup>2</sup> Eficiente, en este caso, se refiere a electricidad producida por emisiones de  $CO_2$ .

Una vez calculados los valores de las distintas coaliciones, se observa que la Planta 2 es la que tiene más ratio de contribución seguida por la Planta 1. En las dos siguientes tablas se muestran los valores individuales, de las coaliciones y el valor de Shapley con el ratio de contribución.

| Coaliciones | Valor de la función característica |
|-------------|------------------------------------|
| {1}         | 241611                             |
| {2}         | 374413                             |
| {3}         | 214452                             |
| {1,2}       | 656024                             |
| {1,3}       | 476063                             |
| {2,3}       | 618865                             |
| {1,2,3}     | 880476                             |

Tabla 2 Función característica

| Planta   | Valor de Shapley | Ratio de contribución |
|----------|------------------|-----------------------|
| Planta 1 | 258277.67        | 29.33%                |
| Planta 2 | 396079.67        | 44.99%                |
| Planta 3 | 226118.67        | 25.68%                |

Tabla 3 Valor de Shapley y ratio de contribución de las tres plantas

En la siguiente tabla, se muestra como se reparten los derechos de emisión entre las plantas, según cada una de las metodologías seguidas.

| Método                |                 | Planta 1 | Planta 2 | Planta 3 |
|-----------------------|-----------------|----------|----------|----------|
| <i>Benchmark</i>      | Emisiones (ton) | 241853   | 374787   | 214666   |
|                       | Porcentaje      | 29.09%   | 45.08%   | 25.82%   |
| <i>Grandfathering</i> | Emisiones (ton) | 294116   | 310742   | 226483   |
|                       | Porcentaje      | 35.38%   | 37.38%   | 27.24%   |
| Valor de Shapley      | Emisiones (ton) | 243822   | 374005   | 213479   |
|                       | Porcentaje      | 29.33%   | 44.99%   | 25.68%   |

Tabla 4 Comparación de los distintos métodos de reparto de emisiones

El método de *grandfathering* es muy injusto, ya que, siendo la Planta 1 la menos eficiente de todas tiene una cuota muy similar a la Planta 2, que es la más eficiente y, además, quedando muy por encima de la Planta 3. Si se aplica el método *benchmark*, al tener como referencia un estado más actual, se premia más la mejora tecnológica, esto lleva a los resultados que se muestran. La Planta 2 es la que tiene mayor cuota al ser la más eficiente, quedando la Planta 1 y la Planta 3 con menos cuota de emisiones. Los resultados obtenidos con el método *benchmark*, son bastante similares a los de Shapley que se considera una forma equitativa de reparto.

El valor de Shapley permite definir un marco inicial para comenzar a desarrollar medidas comparativas y avanzar en el desarrollo de un modelo justo de reparto de emisiones de  $CO_2$ .

# 2 ANÁLISIS DE REDES. JUEGOS COOPERATIVOS CON COMUNICACIÓN RESTRINGIDA

---

## 2.1. Introducción

Muchos sistemas del mundo real pueden ser representados como redes, o grafos, de hecho, un grafo puede ser descrito a través de un conjunto de nodos que se unen entre ellos formando aristas. Estas aristas muestran la capacidad o incapacidad de comunicarse entre el conjunto de nodos. Algunos ejemplos que pueden ser descritos a través de grafos son internet, la red eléctrica o incluso un conjunto de personas.

A continuación, se presentan los conceptos básicos para el desarrollo del capítulo. En concreto, en el presente capítulo se exponen los conceptos de matriz de adyacencia, ponderada y sin ponderar, y las medidas de centralidad estándar. Además, se introducen las situaciones de comunicación que permiten modelar juegos donde la comunicación es restringida. Finalmente, se aplica el valor de Myerson, definido como el valor de Shapley del juego restringido y, se muestra una aplicación de este concepto de solución.

## 2.2. Conceptos básicos

### Definición 2.1. Grafo o red

Un grafo, o red,  $G = (N, E)$  está formado por dos conjuntos  $N$  y  $E$ . Los elementos del conjunto  $N$  se denominan vértices o nodos. Los elementos del conjunto  $E$  se denominan aristas.

### Definición 2.2. Adyacencia de los vértices

Cada arista tiene una pareja de vértices asociados a ella y que conecta entre sí. Este conjunto de aristas puede definirse como  $E \subseteq E^n = \{\{i, j\}: \{i, j\} \subseteq N, i \neq j\}$ .

Dos vértices  $x, y$  son adyacentes si ambos comparten una arista.

Dos nodos no tienen que ser adyacentes para poder estar conectados.

### Definición 2.3. Nodos indirectamente adyacentes

Dos jugadores  $i, j$  están directamente conectados en la red  $(N, E)$  si hay un camino en la red que los

une, o lo que es lo mismo, si existe una secuencia de jugadores  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  tal que  $i_1 = i$ ,  $i_n = j$ , y  $\{i_k, i_{k+1}\} \in E$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . En este caso, se dice que los nodos están indirectamente conectados.

#### Definición 2.4. Grado de un vértice

Se denomina grado de un vértice  $i$  al número de aristas a los que está conectado.

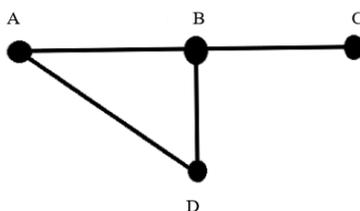


Figura 2.1 Grado de centralidad

En la red de la Figura 2.1, se muestra una red cuyos nodos están conectados y el grado es 2 para los nodos A y D, 1 para el nodo C y 3 para el nodo B.

Si un nodo no tuviera ningún enlace, es decir, grado 0, se dice que es un nodo aislado.

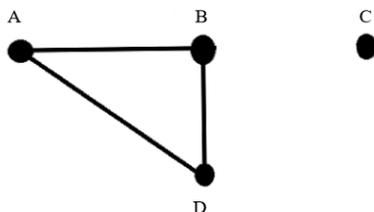


Figura 2.2 Red no conectada

En la Figura 2.2, la red está compuesta de cuatro nodos, pero al no haber camino que conecte el nodo C con los demás, la red se denomina no conectada. Y el nodo C es un nodo aislado.

Existen redes que tienen características especiales. Si todos los jugadores están aislados, es decir, el grado de cada uno de sus vértices es 0, se dice que la red es vacía. Una red es completa si todos los pares de puntos están directamente conectados entre sí. Una red  $(N, E)$  en la que todos los nodos estén conectados se dice que es conexa. En este tipo de red la conexión entre los jugadores puede ser directa o indirecta.

Otra característica especial son los ciclos. Un ciclo es un camino circular en la red que no incluye a un jugador más de una vez, excepto a uno (ver Figura 2.3). Una red libre de ciclos, es aquella en la

que si dos jugadores están conectados, entonces sólo existe un camino que los une, por lo que no tiene ningún ciclo.

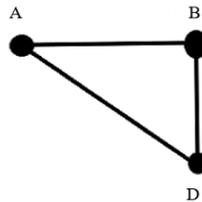


Figura 2.3 Red cíclica

Otro tipo de red importante son las de ciclo completo. En estas redes, todos los jugadores que pertenezcan a un ciclo están directamente conectados entre ellos. Las redes libres de ciclos son de ciclo completo, ya que no contienen ningún ciclo. Otro ejemplo lo constituyen las redes completas.

**Teorema 2.1.** *Sea una red de ciclo completo  $(N, E)$  y dos jugadores  $i, j \in N$ , conectados en esta red, entonces existe un único camino más corto que conecta  $i$  con  $j$ . Además, todo camino que conecte a los jugadores  $i$  y  $j$  incluye a los jugadores del camino más corto.*

Este teorema implica que para que haya comunicación entre dos jugadores  $i$  y  $j$  cualesquiera, en una red de ciclo completo, se puede identificar un conjunto de jugadores cuya cooperación es necesaria y suficiente para permitir la comunicación entre  $i$  y  $j$ .

Como se ha mencionado anteriormente, los nodos pueden estar conectados directa o indirectamente. Un camino entre los nodos  $i$  y  $j$  es una secuencia de nodos adyacentes que comienza en  $i$  y termina en  $j$ . En [5] se pueden encontrar más definiciones de esta idea, en función de si se repiten o no nodos y aristas.

Asociada a la idea de camino se define también el concepto de distancia. La distancia es igual al número de aristas en cada camino. Los caminos más cortos entre dos puntos se denominan geodésicos.

Se ha establecido que, para pares de jugadores conectados se pueden identificar un conjunto de jugadores cuya cooperación es necesaria y suficiente para permitir a los dos jugadores iniciales coordinar sus acciones, siempre que se tenga una red de ciclo completo. Este resultado puede extenderse a coaliciones de jugadores de más de dos jugadores. De hecho, las redes de ciclo completo pueden caracterizarse usando este rasgo.

**Teorema 2.2.** *Una red  $(N, E)$  es de ciclo completo si y solo si para toda coalición conexa no vacía  $S \subseteq N$ , existe un conjunto internamente conexo que contiene a  $S$  y que está contenido en cualquier*

conjunto internamente conexo que contenga a  $S$ .

A este grupo de jugadores que son necesarios y, a la vez, suficientes para coordinar las acciones de los jugadores de una coalición, en una red de ciclo completo, se le llama envolvente conexa.

**Definición 2.5** Sea  $(N, E)$  una red y sea  $S \subseteq N, S \neq \emptyset$  una coalición de jugadores. Si  $S$  es conexa, se define la envolvente conexa  $H(S)$  de  $S$  como

$$H(S) = \cap \{T \subseteq N : S \subseteq T, T \text{ es internamente conexa}\}. \quad (2.1)$$

Si  $S$  no es conexa, se define  $H(S) = \emptyset$ .

Se puede pensar en el caso de una red eléctrica con cuatro nodos, A, B, C y D siendo el nodo B el punto de generación y los nodos A, C y D puntos de consumo. De esta forma, la Figura 2.1 representa una red que funciona bien, e incluso hay redundancia en la conexión en los A y D, ya que se puede llegar al punto B por dos caminos distintos. Mientras que en la Figura 2.2 puede suponerse un fallo en la red, de forma que el nodo C está desabastecido.

### 2.3. Análisis de centralidad en redes

La centralidad es un concepto fundamental en el análisis de redes. Este concepto se utiliza para explicar como los nodos interactúan unos con otros. Se asume que todas las redes en las que se pueda calcular sus medidas de centralidad son grafos  $G = (N, E)$ , donde  $N$  es un conjunto de nodos y  $E$  es un conjunto de aristas (o líneas) que los conectan. Es útil representar el grafo en términos de su matriz de adyacencia  $A$ , en la que

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ y } j \text{ están conectadas,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.2)$$

La matriz de adyacencia de la Figura 2.1 sería de la siguiente forma. En las filas se considera A-B-C-D y para las columnas sigue el mismo orden, A-B-C-D.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz de adyacencia, se puede determinar como los nodos de la red están conectados y estudiar así, el funcionamiento de la red.

Estos estudios se organizan fundamentalmente en torno a cuatro conceptos básicos comunes a las medidas de centralidad: *type of nodal involvement assessed* (si radial o medial), tipo de camino

evaluado (distancias geodésicas o mayores), *property of walk assessed* (volumen de caminos o longitud) y *choice of summary measure* (si se trabaja con sumas o medias). A partir de estos conceptos, se muestra que este tipo de análisis se simplifica en *medial vs radial* y volumen frente a distancia. Importante tener en cuenta que lo que aquí se explica es fundamentalmente como un nodo participa de la cohesión de la red. Para tener una visión más extensa de esta clasificación, ver [5].

Todos estos conceptos y sus posibles combinaciones se terminan clasificando en tres medidas de centralidad “básicas”: grado, *closeness* y *betweenness* (Freeman, 1978), ver [6], y a su vez, es importante insistir que, todas estas medidas parten únicamente de las relaciones binarias de la red, de si hay o no adyacencia entre unos nodos y otros.

## 2.4. Centralidad estándar

A continuación, se exponen las tres medidas básicas de centralidad. Estas medidas se denominan de centralidad estándar por referirse únicamente a la topología de la red, a pesar de que cada una de ellas lo hace de forma distinta.

**-Medidas de grado:** Estas medidas tienen en cuenta el número de conexiones de cada nodo. Parte de la idea de que a mayor cantidad de nodos con los que el nodo inicial esté en contacto, más importante será dicho nodo.

El grado de centralidad es la medida más sencilla y conocida de este conjunto. Es el número de aristas que pasan por un nodo concreto. Si se tiene en cuenta que cada arista es un camino de longitud 1, se puede plantear como el número de caminos de longitud 1 que salen de un nodo.

El grado de centralidad normalizado se expresa como la fracción de la red con la que el nodo  $i$  está directamente relacionado.

$$C_{degree}(i) = \frac{d(i)}{|N|-1}. \quad (2.3)$$

Donde  $d(i)$  es el número de aristas adyacentes al nodo  $i$  y  $N$  el número total de nodos en la red.

A partir de esta medida se puede definir una cantidad muy variada de medidas, en función de cómo se definan estos caminos. Por ejemplo, la de  $k$ -camino, donde  $k$  es la longitud del camino a evaluar. Si  $k=1$  se obtiene el grado de centralidad.

En este tipo de medidas, al tener en cuenta la cantidad de caminos que pasan por un nodo se pueden

denominar medidas de volumen.

**-Medidas de *Betweenness*:** La idea detrás de este conjunto de medidas es que un nodo será más importante conforme más información pase a través de él. La medida más conocida de este tipo es la *betweenness centrality*, cuya idea es que será mayor cuanto más veces el nodo en cuestión sea necesario para conectar otra pareja de nodos. Esto se mide mediante el número de caminos más cortos que pasan por el nodo estudiado. Si sólo hubiera un camino más corto en cada caso, la medida sería igual a la suma de caminos geodésicos a través del nodo estudiado.

$$C_{between}(i) = \frac{2}{(|N|-1)(|N|-2)} \sum_{\substack{k,j \in N \setminus \{i\} \\ k < j}} \frac{s_{kij}}{s_{kj}}. \quad (2.4)$$

Donde  $N$  es el número de nodos,  $s_{kij}$  es el número de caminos más cortos que pasan por el nodo  $i$  entre  $k$  y  $j$  y  $s_{kj}$  el número total de caminos más cortos posibles entre  $k$  y  $j$ .

Un ejemplo para entender esta idea es el siguiente. Sea un conjunto de pueblos en los que el comercio es la principal actividad económica para su desarrollo. Aquellos pueblos que tengan más actividad comercial son los que tendrán posibilidad de desarrollarse más. Esta actividad comercial es el equivalente a la información en la medida de *betweenness*.

De igual forma estas medidas se pueden plantear de otras maneras, evitando el uso de caminos geodésicos o fijando una longitud  $k$ .

Una característica fundamental de estas medidas es la posibilidad de contar múltiples veces un mismo conjunto de aristas, ya que muchos caminos pueden ser un mismo subconjunto de aristas. Si se tiene esto en cuenta, hay que contar los caminos con aristas disjuntas. Este concepto, desarrollado por Freeman (1991), ver [7], se denomina *flow betweenness*. Se denomina así, porque tienen en cuenta el número de caminos con aristas independientes entre dos nodos, y la cantidad de información que puede circular entre ambos a través de todas las aristas. Esto es el concepto base de cualquier medida de *betweenness*, el potencial de un nodo de retener el flujo, el qué pasaría si un nodo dejase de actuar como transmisor de información.

**-Medidas de *closeness*:** En este tipo de medidas, se analiza la distancia de los caminos en los que un nodo está involucrado.

La medida de este tipo más conocida es la *closeness centrality*, que se define como la distancia

geodésica total desde un nodo determinado, a todos los demás nodos.

$$C_{close}(i) = \frac{|N|-1}{\sum_{j \in N} l_{ij}}. \quad (2.5)$$

Donde  $N$  es el número de nodos de la red y  $l_{ij}$  es la distancia más corta entre los nodos  $i$  y  $j$ .

Esta medida es una medida inversa de la relevancia del nodo en la red ya que un valor más alto denota una distancia geodésica mayor. Por tanto, refiere a la distancia del nodo respecto al resto de la red más que a lo cerca que está.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se aplican las medidas de centralidad estándar aquí explicadas. Como aclaración, salen medidas menores de uno porque están ponderadas respecto al tamaño de la red.

**Ejemplo 2.1.** Sea la red de la Figura 2.4. Los nodos representan conexiones ferroviarias, definidos con letras de la A a la G. Aplicando las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) se calculan todas las medidas de centralidad de la red.

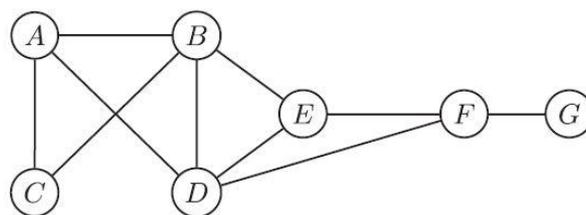


Figura 2.4

| Person | Degree | Betweenness | Closeness |
|--------|--------|-------------|-----------|
| A      | 0.5000 | 0.0778      | 0.6000    |
| B      | 0.6667 | 0.2222      | 0.6667    |
| C      | 0.3333 | 0           | 0.4615    |
| D      | 0.6667 | 0.3222      | 0.7500    |
| E      | 0.5000 | 0.1111      | 0.6667    |
| F      | 0.5000 | 0.3333      | 0.6000    |
| G      | 0.1667 | 0           | 0.4000    |

Tabla 5 Resultados para distintas medidas

Vamos a ver cada medida individualmente:

- **Grado:** La medida de grado, refiere a la cantidad de aristas que tenga el nodo, a simple vista, se observa que el que tendrá mayor valor serán los nodos B y D por ser los que tienen más aristas, 4. Mientras que el nodo G será el que menos al tener solo 1.
- **Betweenness:** Esta medida se refiere a la importancia para conectar dos nodos cualesquiera a

través de un tercer nodo, que es el que se evalúa, se podrían suponer resultados similares a los de grado. Pero hay ciertas diferencias notables. El nodo F es el que consigue el valor más alto, en este caso, por ser la única forma de acceder al nodo G. Los nodos C y G repiten en los puestos más bajos, por estar en los bordes exteriores, y no ser necesarios para llegar a otros nodos. El nodo E carece de especial relevancia porque, el nodo D le solapa todas las aristas, y tiene más aristas, 3 del nodo E contra 4 del nodo D. El nodo A tiene el segundo valor más bajo y se debe a la misma razón por la que el nodo E tiene baja puntuación, se solapa por completo con el nodo B y este a su vez tiene más aristas lo cual explica su mayor valor.

- *Closeness*: En esta medida, que se refiere a los nodos que forman parte de los caminos más cortos, se puede deducir que los nodos centrales tendrán las medidas más altas. Y así es, los nodos B, D y E son los que tienen los valores más altos. Por otra parte, se tiene las medidas más bajas de los nodos más exteriores, C y G. Y los nodos intermedios, A y F son los que tienen los valores intermedios.

## 2.5. Juegos cooperativos con comunicación restringida

Sea un grupo de jugadores  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  para los cuales los beneficios de cooperar en cada coalición vienen dados por una función característica  $v$  y, además, se tienen restricciones sobre la comunicación. Las comunicaciones bilaterales entre esos jugadores están modeladas por una red  $(N, E)$ . La terna  $(N, v, E)$  que expresa la situación es un juego coalicional  $(N, v)$  y una red de comunicaciones  $(N, E)$ , es llamada una situación de comunicación. Al conjunto de todas las posibles situaciones de comunicación se le denota por CS (*Communication Situations*).

Myerson (1977), ver [17], fue el primero en estudiar situaciones de comunicación. Él introdujo un nuevo juego asociado con una situación de comunicación, el juego restringido por una red. Este incorporaba a la vez los posibles beneficios por cooperar, modelados por los juegos coaliciones, y las restricciones a las comunicaciones a las que obliga una red.

**Definición 2.6.** Un juego restringido por una red  $(N, v^L)$  asociado a una situación de comunicación  $(N, v, E)$  tiene una función característica  $v^L$  definida por

$$v^L(S) = \sum_{C \in C_L(S)} v(C), \text{ para cada } S \subseteq N. \quad (2.6)$$

Con  $C_L(S)$  el conjunto de componentes de la coalición  $S$ .

Se puede entender la definición de la siguiente manera. Sea una coalición de jugadores  $S \subseteq N$ . Si la coalición  $S$  es internamente conexa, esto es, si todos los jugadores de  $S$  pueden comunicarse con cualquier otro (sea directa o indirectamente) sin la ayuda de los jugadores que no pertenecen a  $S$ , entonces ellos pueden coordinar sus acciones completamente y obtener el beneficio  $v(S)$ . Si no fuera internamente conexa, no todos los jugadores podrían coordinarse. La coalición  $S$  podrá dividirse en componentes de comunicación de acuerdo con la partición  $C_L(S)$ . En esta situación lo mejor que podrían hacer los jugadores es coordinar sus acciones dentro de las diferentes componentes. Por tanto, el beneficio alcanzable por los jugadores de  $S$  será  $\sum_{C \in C_L(S)} v(C)$ . Nótese que si la red de comunicación es la red completa  $(N, E^V)$ , entonces todos los jugadores están internamente conectados y el juego restringido será igual al juego original.

La relación entre el juego restringido por una red  $(N, v^L)$  y el subyacente juego coalicional  $(V, E)$  en una situación de comunicación  $(N, v, E)$  se puede explicar más claramente en términos de los coeficientes de unanimidad de ambos juegos. Expresando los coeficientes de unanimidad  $\lambda_S(v^L)$  del juego restringido por una red en función de los coeficientes  $\lambda_S(v)$  del juego original se observará como las restricciones en la comunicación cambian las posibilidades de obtener beneficios para las coaliciones de jugadores.

Para el caso en que la red de comunicación estuviese libre de ciclos, la relación entre los coeficientes de unanimidad fue estudiada por Owen [21]. Estos resultados se extendieron a redes de ciclo completo por van den Nouweland [20].

**Teorema 2.3.** *Sea  $(N, v, E)$  una situación de comunicación en una red de ciclo completo  $(V, E)$ . Entonces, para cada coalición  $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$  se cumple*

$$\lambda_S(v^L) = \sum_{\{T \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : H(T) = S\}} \lambda_T(v), \quad (2.7)$$

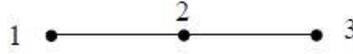
Donde  $H(T)$  es la envolvente conexa de una coalición  $T$ .

Según el Teorema 2.2, el ámbito de esta afirmación no se puede extender hacia situaciones que no tengan una red de ciclo completo.

**Ejemplo 2.2.** Sea una situación de comunicación  $(N, v, L)$  cuyo conjunto de jugadores  $N = \{1, 2, 3\}$  y el conjunto de enlaces dado por  $L = \{12, 23\}$  y una función característica dada por

$$v = 60u_{12} + 60u_{13} + 60u_{23} - 108u_N,$$

donde  $u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{si } T \subseteq S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$



Red  $(N, L)$

La red  $(N, L)$  es libre de ciclos y de ciclo completo. La coalición 13 no es internamente conexa. Pero sí es conexa. Su envolvente conexa viene dada por  $H(13) = \{1, 2, 3\}$ . Todas las demás coaliciones no vacías son internamente conexas, por lo tanto,  $H(T) = T$ , para todo  $T \in 2^N \setminus \{\{1,3\}, \emptyset\}$ . Como  $N$  es la envolvente conexa de las coaliciones  $\{1, 3\}$  y  $N$ , se llega a,

$$\lambda_N(v^L) = \lambda_{13}(v) + \lambda_N(v) = 60 - 108 = -48.$$

La coalición  $\{1,3\}$  no es internamente conexa y por lo tanto no es la envolvente conexa de ninguna coalición, ya que la red es de ciclo completo. Por tanto,  $\lambda_{13}(v^L) = 0$ . Para las demás coaliciones se tiene que  $\lambda_T(v^L) = \lambda_T(v)$ . Se llega a que la función característica del juego restringido es

$$v^L = 60u_{12} + 60u_{23} - 48u_N.$$

A partir de este ejemplo, se muestra que para toda coalición  $S$  que no es internamente conexa  $\lambda_S(v^L) = 0$ .

Los juegos restringidos por una red evalúan los posibles beneficios de los jugadores por cooperar en una situación de comunicación. Proporcionan una valoración de las ganancias que son alcanzables por una coalición de jugadores. Otro planteamiento consiste en estudiar los enlaces. Ya que, sin la existencia de estos, la cooperación es imposible. Esto conduce a la definición de los juegos de enlaces, que tiene al conjunto de enlaces  $L$  como su conjunto de jugadores y en el cual, el valor de un conjunto de enlaces  $A \subseteq L$  es el valor alcanzado por la gran coalición  $N$  si los canales de comunicación de  $A$  estuviesen disponibles para los jugadores de  $N$ .

**Definición 2.7.** El juego de enlaces  $(L, r^v)$  asociado con la situación de comunicación  $(N, v, L)$  tiene una función característica dada por

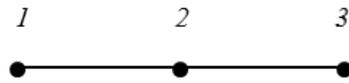
$$r^v(A) = \sum_{C \in C_A(N)} v(C), \text{ para todo } A \subseteq L. \quad (2.8)$$

Esta definición expresa el hecho de que, si sólo existen los enlaces de comunicación de  $A$ , entonces la gran coalición  $N$  puede ser partida en varias componentes de comunicación. Por tanto, el valor alcanzado por la gran coalición  $N$  es la suma de los valores alcanzados por sus componentes.

En estos juegos puede ocurrir que  $r^v(\emptyset) = \sum_{i \in N} v(i) \neq 0$ , si para algún jugador  $i \in N$  se verifica que  $v(i) \neq 0$ . Este hecho no tiene consecuencias importantes, aunque si dificulta la notación. En juegos 0-normalizados, es decir, en los que  $v(i) = 0$  para todo  $i \in N$ , esto no ocurre.

**Ejemplo 2.3.** Se considera la situación de comunicación  $(N, v, L)$  del Ejemplo 2.2.

$$v = 60u_{1,2} + 60u_{1,3} + 60u_{2,3} - 108u_N.$$



Red  $(N, L)$

El juego  $(N, v)$  es 0-normalizado. Para facilitar la notación se denota a los enlaces  $a = 12$  y  $b = 23$ , así que  $L = \{a, b\}$ . La función característica  $r^v$  del juego de enlaces  $(L, r^v)$  satisface  $r^v(a) = v(1,2) + v(3) = 60$ ,  $r^v(b) = v(1) + v(2,3) = 60$ , y  $r^v(a, b) = v(N) = 72$ . Expresando estos resultados como una combinación lineal de los juegos de unanimidad  $(L, u_a)$ ,  $(L, u_b)$  y  $(L, u_L)$  se obtiene

$$r^v = 60u_a + 60u_b - 48u_L.$$

La relación entre los coeficientes de unanimidad  $\lambda_A(r^v)$  del juego de enlaces  $(L, r^v)$  y los coeficientes de unanimidad  $\lambda_S(v)$  del juego  $(N, v)$  ha sido establecida para situaciones de comunicación  $(N, v, L)$  con una red libre de ciclos  $(N, L)$  por Owen, Borm y Tijs (1992), ver [22].

**Teorema 2.4.** Sea  $(N, v, L)$  una situación de comunicación con un juego 0-normalizado  $(N, v)$  y una red libre de ciclos  $(N, L)$ . Entonces para cada  $A \in 2^L \setminus \{\emptyset\}$

$$\lambda_A(r^v) = \sum_{\{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : A = L(H(S))\}} \lambda_S(v). \quad (2.9)$$

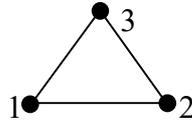
Donde  $L(H(S))$  denota los enlaces entre los jugadores de la envolvente conexa de  $S$ .

La clave del problema es que, para toda coalición conexa  $S \subseteq N$ , existe un conjunto de enlaces que es necesario y suficiente para establecer comunicación entre todos los jugadores de  $S$ . Esto se cumple para las redes libres de ciclos, en las que hay un único camino entre dos jugadores conectados.

**Ejemplo 2.4.** En este ejemplo se va a comprobar que los resultados del teorema previo no pueden ser aplicados a situaciones de comunicación con redes de ciclo completo. Se tiene una situación de comunicación  $(N, v, L)$  con jugadores  $N = \{1, 2, 3\}$ , enlaces  $L = \{12, 13, 23\}$  y función característica  $v$  definida por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } |S| \leq 1, \\ 60, & \text{si } |S| = 2, \\ 72, & \text{si } |S| = N. \end{cases}$$

Se denota  $a = \{1,2\}$ ,  $b = \{2,3\}$  y  $c = \{1,3\}$ .



La red  $(N, L)$  es de ciclo completo, pero no es libre de ciclos. La envolvente conexa de la coalición  $\{1,2\}$  es  $\{1,2\}$ , que es internamente conexa. Notar que  $\{a\} = L(H(\{1,2\}))$ .

Sin embargo, los jugadores 1 y 2 pueden también establecer comunicación a través del jugador 3, usando los enlaces  $b$  y  $c$ , si el enlace  $a$  no estuviese disponible. Por tanto, no hay un conjunto de enlaces cuya presencia sea necesaria y suficiente para establecer una comunicación entre los jugadores 1 y 2.

Ahora va a calcularse  $\lambda_{a,b}(r^v)$ . Como  $r^v(a) = r^v(b) = 60$  y  $r^v(a,b) = 72$ , se llega a  $\lambda_{a,b}(r^v) = -48$ . Se puede ver que no existe una coalición  $S \subseteq N$  tal que  $L(H(S)) = \{a,b\}$ , por lo que se llega a lo siguiente. Por un lado,

$$\sum_{\{S \subseteq 2^N \setminus \{\emptyset\} : \{a,b\} = L(H(S))\}} \lambda_S(v) = 0,$$

y por otro,

$$\lambda_{a,b}(r^v) = -48.$$

## 2.6. Conceptos de solución de juegos cooperativos con comunicación restringida: El valor de Myerson

Llegados a este punto se cambia el enfoque hacia las reglas de reparto, o conceptos de solución, que dan una valoración de los beneficios que cada jugador consigue por participar en una situación de comunicación. Una regla de reparto en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación es una función  $\gamma$  que asigna un vector de pago  $\gamma(N, v, L) \in \mathbb{R}^n$  a todas las situaciones de comunicación  $(N, v, L)$  en esa clase.<sup>3</sup>

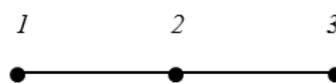
En concreto, en este apartado se estudia un concepto de solución presentado por Myerson [17] que está basado en los juegos restringidos por una red y en el valor de Shapley, [23].

**Definición 2.8.** El valor de Myerson  $\mu$  es la regla de reparto que asigna a toda situación de comunicación  $(N, v, L)$  el valor de Shapley del juego restringido por una red  $(N, v^L)$

$$\mu(N, v, L) = \phi(N, v^L). \quad (2.10)$$

**Ejemplo 2.5.** Se considera la situación de comunicación  $(N, v, L)$  con  $N = \{1, 2, 3\}$ ,

$L = \{1, 2, 3\}$  y  $v = 60u_{1,2} + 60u_{1,3} + 60u_{2,3} - 108u_N$  que se ha estudiado con anterioridad.



Red  $(N, L)$

Como los jugadores 1 y 3 no están directamente conectados se cumple que  $v^L = 60u_{1,2} + 60u_{2,3} - 48u_N$ . Por tanto, se puede encontrar rápidamente el valor de Myerson aplicando la que ya conocemos para el cálculo del valor de Shapley.

$$\mu_1(N, v, L) = \phi_1(N, v^L) = 60/2 + 0 - 48/3 = 14;$$

<sup>3</sup> Se va a usar  $CS$  para denotar un subconjunto del conjunto  $CS$  consistente en todas las situaciones de comunicación.

$$\mu_2(N, v, L) = \phi_2(N, v^L) = 60/2 + 60/2 - 48/3 = 44;$$

$$\mu_3(N, v, L) = \phi_3(N, v^L) = 0 + 60/2 - 48/3 = 14.$$

Nótese que aunque los jugadores son simétricos en el juego original, el valor de Myerson del jugador 2 es mayor que el de los jugadores 1 y 3. La razón es que los jugadores 1 y 3 requieren del jugador 2 para coordinar sus acciones y no pueden conseguir los beneficios de su unión sin la intervención del jugador 2. Este caso puede representar a tres empresas. Una de ellas fabrica un tipo de piezas que utiliza la tercera. La segunda es la empresa intermediaria sin la cual es imposible que las piezas que vende la primera sean compradas por la tercera.

Si dos jugadores están en diferentes componentes de una situación de comunicación  $(N, v, L)$ , entonces, no podrán interactuar entre ellos. Por lo tanto, parece razonable esperar que los valores de las coaliciones que incluyan jugadores que no están conectados al jugador  $i$ , es decir, que los enlaces que los unan no estén disponibles, no influyan en el pago al jugador  $i$ . Una regla de reparto con esta propiedad se le llama *descomponible en componentes*.

**Definición 2.9.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación es **descomponible en componentes** si para toda situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y todo jugador  $i \in N$ , la subsituación *de comunicación*  $(C_i, v_{C_i}, L(C_i))$  está también dentro de  $CS$  y cumple

$$\gamma_i(N, v, L) = \gamma_i(C_i, v_{C_i}, L(C_i)). \quad (2.11)$$

Esta propiedad implica que el pago a un jugador  $i \in N$  está completamente determinado dentro de la componente  $C_i(L)$  a la que pertenece.

**Teorema 2.5.** *El valor de Myerson en la clase  $CS$  de todas las situaciones de comunicación es descomponible en componentes.*

El Teorema 2.5 es muy útil ya que permite dividir una situación de comunicación con muchos jugadores y, una red que no es conexa en varias situaciones de comunicación más pequeñas con el propósito de determinar el valor de Myerson de los jugadores. Es a menudo bastante más sencillo, desde el punto de vista computacional, ocuparse de situaciones de comunicación con pocos jugadores.

### 2.6.1. Axiomatizaciones clásicas del valor de Myerson

En éste y el próximo apartado, van a estudiarse axiomatizaciones del valor de Myerson. Una axiomatización o caracterización no es más que un conjunto de propiedades o características que verifica una regla de reparto y permite distinguirla de otra. En concreto, Myerson (1977), ver [17], encontró el valor de Myerson cuando buscaba una regla de reparto que cumpliera a la vez las propiedades de *eficiencia por componentes* y *justicia*, que se introducen a continuación.

**Definición 2.10.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación presenta la propiedad de **eficiencia por componentes** si para toda situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y para toda componente  $C \in C_L(N)$

$$\sum_{i \in C} \gamma_i(N, v, L) = v(C). \quad (2.12)$$

Una regla de reparto es eficiente por componentes, si los pagos de los jugadores en una componente suman el valor de esa componente. Los jugadores de una componente se distribuyen el pago entre ellos y, por tanto, no hay pagos exteriores entre las diferentes componentes.

**Definición 2.11.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación es **justa** si para toda situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y para cualquier enlace  $ij \in L$  se tiene que

$$\gamma_i(N, v, L) - \gamma_i(N, v, L \setminus ij) = \gamma_j(N, v, L) - \gamma_j(N, v, L \setminus ij). \quad (2.13)$$

Una regla de reparto es justa si los pagos de dos jugadores directamente conectados aumentan o disminuyen en la misma cantidad si el enlace entre ellos es eliminado.

Myerson demostró, no sólo que existiera una regla de reparto que satisficiera las propiedades de eficiencia por componentes y justicia, sino que además era única. Un punto interesante y a tener en cuenta, es el dominio en el que puede hacerse esta caracterización axiomática del valor de Myerson. Mientras que el valor de Myerson cumple la eficiencia por componentes y justicia en el dominio de todas las situaciones de comunicación, para establecer la unicidad hay que restringirse a un dominio consistente en todas las situaciones de comunicación con un número fijo de jugadores y un juego coalicional fijo. Para cada conjunto de jugadores  $N$  y cada juego coalicional  $(N, v)$ , se denota al conjunto de todas las situaciones de comunicación posibles con el conjunto de jugadores  $N$  y el juego

subyacente  $(N, v)$  por  $CS_v^N$ . Nótese que para una situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS_v^N$ , la aparición o desaparición de un enlace no cambia el conjunto de jugadores o el juego subyacente, así que la justicia puede ser usada en el dominio  $CS_v^N$ .

**Teorema 2.6.** *El valor de Myerson es la única regla de reparto en  $CS_v^N$  que satisface la eficiencia por componentes y la propiedad de justicia.*

La condición de justicia del Teorema 2.6 puede ser sustituida por un requerimiento más fuerte. Esta nueva condición es llamada *contribuciones equilibradas* y fue introducida por Myerson. Para explicar este axioma se necesita una nueva notación para el conjunto de enlaces adyacentes al jugador  $i$ . Se define, así,  $L_i = \{l \in L : i \in l\}$ .

**Definición 2.12.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación presenta **contribuciones equilibradas**, si para toda situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y para cualquier par de jugadores  $i, j \in N$  se verifica

$$\gamma_i(N, v, L) - \gamma_i(N, v, L \setminus L_j) = \gamma_j(N, v, L) - \gamma_j(N, v, L \setminus L_i). \quad (2.14)$$

Una regla de reparto tiene contribuciones equilibradas si para dos jugadores  $i$  y  $j$  se tiene que la pérdida o ganancia que el jugador  $i$  puede ocasionar al jugador  $j$  rompiendo todos sus enlaces  $L_i$  es la misma que la pérdida o ganancia que ocasionaría el jugador  $j$  al  $i$  llevando a cabo una acción equivalente con sus enlaces  $L_j$ . En este sentido, los jugadores  $i$  y  $j$  tienen igual trato.

**Teorema 2.7.** *El valor de Myerson es la única regla de reparto en  $CS_v^N$  que satisface la eficiencia por componentes y tiene contribuciones equilibradas.*

## 2.6.2. Otras axiomatizaciones del valor de Myerson

Además de las axiomatizaciones dadas por Myerson [17], existen dos caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson que fueron introducidas por van den Nouweland [20]. Dos propiedades nuevas que son usadas para dar nuevas caracterizaciones del valor de Myerson son la *aditividad* y la *propiedad de capacidad de comunicación*.

**Definición 2.13.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación es **aditiva** si para cualquier par de situaciones de comunicación  $(N, v, L), (N, w, L) \in CS$  se cumple

$$\gamma(N, v + w, L) = \gamma(N, v, L) + \gamma(N, w, L). \quad (2.15)$$

La aditividad concierne a situaciones en las cuales el conjunto de jugadores  $N$  con enlaces de comunicación en  $L$  cooperan en dos áreas diferentes. Los posibles beneficios por cooperar en una de las áreas viene dada por el juego coalicional  $(N, v)$  y de forma equivalente en la otra área con el juego coalicional  $(N, w)$ . Si una regla de reparto aditiva es usada para determinar el pago a los jugadores de un determinado juego, es equivalente evaluar las situaciones separadas o unidas.

La propiedad de capacidad de comunicación requiere, para su definición, de los llamados *jugadores anónimos*. Se necesita, además, una notación para el conjunto de jugadores en una red que mantienen al menos un enlace con otros jugadores. Para una red  $(N, L)$ , se define

$$N(L) = \{i \in N : \exists j \in N \text{ con } ij \in L\}.$$

Una situación de comunicación  $(N, v, L)$  es de **jugadores anónimos** si el valor de una coalición de jugadores en el juego restringido por una red sólo depende del número de jugadores que en esa coalición tienen enlaces con otros jugadores. Es decir, si se verifica  $v^L(S) = v^L(T)$  para todo  $S, T, \subseteq N$  con  $|S \cap N(L)| = |T \cap N(L)|$ .

**Definición 2.14.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación satisface la **propiedad de capacidad de comunicación** si para cualquier situación de comunicación de jugadores anónimos  $(N, v, L) \in CS$  existe una constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\gamma(N, v, L) = \alpha e^{N(L)}, \quad (2.16)$$

donde,

$$e_i^{N(L)} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in N(L), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si una situación de comunicación es de jugadores anónimos, entonces todos los jugadores que tienen enlaces con otros jugadores son simétricos en el juego restringido por una red, y los jugadores que están aislados no contribuyen en nada cuando cooperan con otros jugadores. De acuerdo con una regla de reparto que satisfaga la propiedad de capacidad de comunicación, los jugadores que tienen enlaces con otros jugadores obtienen todos el mismo pago y aquellos que no tienen ningún enlace no obtienen nada. Nótese que esto es razonable, ya que para un jugador aislado  $i$  en una situación de comunicación de jugadores anónimos se tiene que  $v(i) = v^L(i) = v^L(\emptyset) = 0$ , así que ese jugador no puede obtener un valor positivo por sí mismo cuando trabaja solo.

La siguiente proposición muestra que para una regla de reparto que satisfaga la eficiencia por componentes, aditividad y la propiedad de capacidad de comunicación, el valor de aquellas coaliciones de jugadores que no son conexas no es relevante para determinar el pago a los jugadores.

**Proposición 2.1.** Sea  $\gamma$  una regla de reparto en  $CS^N$  que satisface la eficiencia por componentes, la aditividad y la propiedad de capacidad de comunicación. Entonces, para toda situación de comunicación  $(N, v, L)$  se cumple

$$\gamma(N, v, L) = \gamma(N, v^L, L). \quad (2.17)$$

Se requieren dos propiedades más para poder formular las nuevas caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson. La primera implica a *jugadores superfluos* y la segunda implica a *enlaces fuertemente superfluos*. Un jugador  $i \in N$  es **superfluo** en una situación de comunicación  $(N, v, L)$  si la presencia de ese jugador no influye en el valor del juego restringido por una red, es decir,  $v^L(S) = v^L(S \cup i)$ , para toda  $S \subseteq N$ . Un enlace  $l \in L$  es **fuertemente superfluo** en una situación de comunicación  $(N, v, L)$  si la eliminación de ese enlace no tiene influencias en el juego restringido por una red, es decir,  $v^L(S) = v^{L \setminus l}(S)$ , para toda  $S \subseteq N$ .

Estas dos características llevan a definir las siguientes propiedades para reglas de reparto.

**Definición 2.15.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación satisface la propiedad del **jugador superfluo** si para cualquier situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y todo jugador superfluo  $i \in N$  en esta situación de comunicación, se verifica que

$$\gamma(N, v, L) = \gamma(N, v, L \setminus Li). \quad (2.18)$$

Una regla de reparto satisface la propiedad de jugadores superfluos si el pago a los jugadores no cambia si un jugador superfluo rompe todos los enlaces en los que participaba.

**Definición 2.16.** Una regla de reparto  $\gamma$  en una clase  $CS$  de situaciones de comunicación satisface la propiedad de **enlaces fuertemente superfluos** si para cualquier situación de comunicación  $(N, v, L) \in CS$  y todo enlace fuertemente superfluo  $l \in L$  en esta situación de comunicación, se tiene que

$$\gamma(N, v, L) = \gamma(N, v, L \setminus l). \quad (2.19)$$

Una regla de reparto satisface la propiedad de enlaces fuertemente superfluos si la eliminación de un enlace fuertemente superfluo no cambia el pago a los jugadores.

Las dos caracterizaciones que se presentan a continuación se deben a van den Nouweland [20]. Sin embargo, estas caracterizaciones no se restringen a situaciones de comunicación en las que el juego  $(N, v)$  subyacente es 0-normalizado, sino que pueden utilizarse en cualquier situación de comunicación.

**Teorema 2.8.** *Sea  $N$  un conjunto de jugadores.*

(i) *El valor de Myerson es la única regla de reparto en  $CS^N$  que satisface la propiedad de eficiencia por componentes, aditividad, la propiedad de jugadores superfluos y la propiedad de capacidad de comunicación.*

(ii) *El valor de Myerson es la única regla de reparto en  $CS^N$  que satisface la propiedad de eficiencia por componentes, aditividad, la propiedad de enlaces fuertemente superfluos y la propiedad de capacidad de comunicación.*

## 2.7. Redes sociales

Una red social viene definida por un grafo  $(N, \Gamma)$  donde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  es un conjunto finito de individuos (nodos) y  $\Gamma$  es una colección de parejas (desordenadas),  $\{i, j\}$ , de elementos de  $E$  (aristas), que muestra si la comunicación es posible, es decir,  $i$  y  $j$  se consideran conectados si pueden comunicarse directamente, es decir, si y sólo si  $\{i, j\}$  pertenece a  $\Gamma$ .

Por lo tanto, el tratamiento de redes sociales es lo mismo que el de una red normal, es decir, redes cuyas relaciones son evaluadas de forma binaria, existe relación o no. Y de igual forma si  $i$  no está conectado directamente con  $j$  todavía se pueden comunicar de forma indirecta mediante una secuencia de individuos, o nodos,  $k$ .

Como a una red normal se le puede aplicar el concepto de centralidad. Se dice que un nodo  $i$  tiene centralidad cuando

- Se puede comunicar con muchos otros nodos
- Es cercano a otros nodos
- Es necesario para la comunicación entre otras parejas de nodos

Y como se observa, esto es el mismo concepto que las medidas de centralidad estándar que se han

definido previamente: medidas de grado, *betweenness* y *closeness*.

Como ya se ha definido previamente, todas estas medidas, en sus formas más conocidas, parten del concepto de caminos geodésicos. En los casos de las redes sociales se puede intentar definir a partir de otros conceptos, no necesariamente de centralidad.

Esto es uno de los puntos críticos en el estudio de las redes sociales, esta controversia queda perfectamente reflejada en las siguientes frases:

*“Todos los sociólogos están de acuerdo en que el poder es una propiedad fundamental de las estructuras sociales, pero, hay más desacuerdos en lo que es el poder.” (Hanneman, 1999)*

*“A pesar de la amplia aceptación de la conexión entre centralidad y poder, el nivel al cual ambos conceptos están relacionados es ahora controvertido.” (Mizruchi and Potts, 1998)*

Una forma de entender la centralidad, que se puede ver en más profundidad en [8], es como la variación de poder de la estructura social, aplicando conceptos de teoría de juegos a la definición de poder. Para esta definición se usará el valor de Shapley, ya que proporciona la contribución marginal de cada jugador en cada una de las posibles coaliciones de las que pueda formar parte. De esta manera se muestra la importancia y las posibilidades de bloquear, o mantener conexiones a un nivel individual.

Como se ha expuesto previamente se puede definir un conjunto de coaliciones generadas mediante grafos de forma que tengamos un juego restringido por una red  $(N, v^L)$  donde el valor de la coalición  $S$  es igual a la suma de los valores de miembros conectados de la red. Usando el valor de Shapley se puede evaluar el poder de un nodo en la red  $v$  y su valor en la red restringida donde tenemos en cuenta la estructura de comunicación.

Entonces, para definir esta medida basada en la variación de poder aplicada a estas restricciones de comunicación, se puede aplicar para cada nodo  $i$  la diferencia entre el valor de Shapley del juego restringido (o valor de Myerson)  $(\phi_i(v^L))$  y el valor de Shapley en el juego original  $(\phi_i(v))$ .

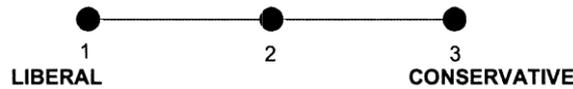
En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación.

**Ejemplo 2.6.** Sea un parlamento donde hay 3 partidos distintos denotados por, 1, 2 y 3. Estos partidos se reparten los escaños de la siguiente forma, 40%, 20% y 40%, respectivamente. Supongamos que para aprobar una ley se necesitan 2/3 de la cámara a favor, y que ningún miembro de los diferentes partidos votará distinto a sus compañeros. Aquí se muestra, como una coalición entre los partidos 1 y 3 aprobaría cualquier ley sin pasar por el consentimiento del partido 2. En esta

situación, el partido 2 es totalmente innecesario. El valor de Shapley de este caso sería el mismo para los partidos 1 y 3. Siendo el valor del partido 2 nulo en este caso. Suponiendo que la suma total sea 1 queda de la siguiente forma:

$$\phi_1(v) = \phi_3(v) = \frac{1}{2}, \phi_2(v) = 0.$$

Este planteamiento es razonable si todas las coaliciones son posibles, pero a menudo esto no es así. Por esto, vamos a ver el eje de la siguiente figura. En él podemos ver que la probabilidad de que exista una coalición entre los partidos 1 y 3 es bastante poco probable, mientras que una coalición entre los partidos 1, 2 y 3 es más factible.



Con este cambio, el juego ya ha pasado a ser un juego restringido donde la coalición ganadora es la  $\{1, 2, 3\}$  y los tres son igualmente indispensables, por lo que su poder queda repartido de igual forma  $\phi_1(v^l) = \phi_2(v^l) = \phi_3(v^l) = 1/3$ .

Con este cambio se muestra como el poder de los partidos 1 y 3 han disminuido y el del partido 2 ha aumentado. Como hemos propuesto anteriormente, se observa la diferencia entre estos dos valores, para establecer una medida de centralidad basada en la importancia que un jugador tenga en la red para establecer conexiones.

En este caso quedaría

$$\gamma_1 = \phi_1(v^l) - \phi_1(v) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$\gamma_3 = \phi_3(v^l) - \phi_3(v) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$\gamma_2 = \phi_2(v^l) - \phi_2(v) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

## 2.8. Redes ponderadas

Hasta ahora todos los planteamientos definidos han partido de la topología de la red y su naturaleza binaria. Las aristas existen o no. Pero en ciertos casos, las relaciones entre dos nodos pueden ser más fuertes o débiles.

Algunos ejemplos que sirven para ilustrar esto pueden ser la unión o distancia entre dos personas que se conocen o la importancia de que la red eléctrica entre dos puntos sea más estable.

Una red donde se tenga en cuenta los pesos se puede representar como una matriz de adyacencia donde los números representan el peso de las aristas, de forma que si existe esa conexión se le asigne un valor y si no ese valor sea 0,  $A_{ij} = (\text{peso de la arista } i \text{ a } j)$ . Incluso podemos plantear números negativos para indicar el grado de incompatibilidad entre ciertos nodos.

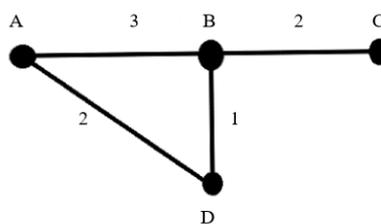


Figura 2.5 Red ponderada

En este caso, la matriz quedará de la siguiente forma (los valores al lado de cada arista son los pesos de cada una).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para mostrar la intuición de este planteamiento, se analizará la centralidad de grado, para la red de la Figura 2.5.

La centralidad de grado, sin tener en cuenta la ponderación, es el número de aristas adyacentes a un nodo y, por lo tanto, a mayor número de aristas adyacentes a un nodo, más importante será. Aunque no todas las aristas tendrían que ser iguales y, por lo tanto, puede haber aristas más importantes que otras, de forma que una arista puede ser mucho más relevante que las demás. Por tanto, surge la necesidad de modificar la centralidad de grado.

Hay varias formas de entender la razón de esto, una de ellas sería representando  $n$  aristas entre los nodos que se estudien, de forma que sea ilustrado gráficamente. Se pueden pensar ejemplos reales,

uno de ellos, podría ser las redes de transporte de alta tensión. Es evidente que todas estas conexiones son relevantes, pero dependiendo de qué ciudades se conecten, la importancia de sus servicios o industrias tendrá prioridad de cara a posibles contingencias o sistemas de seguridad.

**Ejemplo 2.7.** Sean dos redes representadas en las Figuras 2.6 y 2.7, en las que sólo varía que la red de la Figura 2.6 no está ponderada y la red de la Figura 2.7 sí lo está. La matriz de adyacencia y el grado de centralidad en cada una de ellas, vienen dadas por

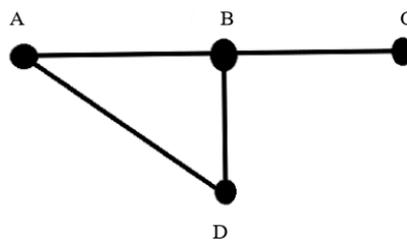


Figura 2.6 Red

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, se obtiene que los grados de centralidad son:

$$A=2, B=3, C=1, D=2.$$

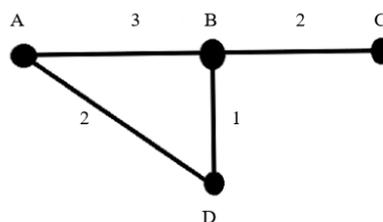


Figura 2.7 Red ponderada

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, se obtiene que los grados de centralidad vienen dados por,

$$A=5, B=6, C=2, D=3.$$

De aquí, se muestra claramente como el nodo A en la red de la Figura 2.7, es más importante que el D, aunque en el caso de la red representada en la Figura 2.6 tuviesen el mismo grado de centralidad. De igual forma, se observa que el nodo B sigue siendo el más importante en ambas redes.

## 3 APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE REDES TERRORISTAS

---

### 3.1. Introducción

En este capítulo, se introduce una aplicación que ilustra la importancia de la teoría de juegos y el análisis de redes, en la práctica.

La identificación de jugadores clave en una organización terrorista ayuda a prevenir ataques, distribuir eficientemente las medidas de vigilancia y actuar contra los miembros de la red. En este capítulo, se presenta como analizar estas redes mediante la teoría de juegos. En concreto, se utilizará el valor de Shapley como medida de la importancia de cada jugador en el juego cooperativo que se define a continuación [13]. A su vez, en el presente capítulo se muestran algoritmos de cálculo para el análisis de la red [16].

La forma en que estas organizaciones operan, en células cuyos componentes no conocen a la totalidad de la red les da una flexibilidad muy elevada, pero a su vez produce un problema que los equipos de contraterrorismo pueden explotar. El hecho de no estar todos conectados permite aplicar, entre otras herramientas, las correspondientes al análisis de redes.

Para el análisis de estas redes se utilizan las medidas de centralidad ya definidas. Pero es necesario determinar el significado de cada medida en este contexto. Por ejemplo, la medida de grado mide el número de contactos que tenga un terrorista concreto. La medida de *betweenness* determina la búsqueda de los terroristas más relevantes de cara a la transmisión de información entre individuos. La medida de *closeness* evalúa qué mensajes se transmitirán más rápido a lo largo de la red.

Este planteamiento, sin embargo, no es suficiente ya que no tiene en cuenta las características individuales de los terroristas o sus conexiones. De igual manera se ha de tener en cuenta posibles agrupaciones entre jugadores. Es decir, puede darse el caso de que haya jugadores que desempeñen el mismo papel o similares. Para tener esto en cuenta Everett y Borgatti [4] introdujeron el concepto

de centralidad de grupo. Este concepto es aplicar la centralidad a grupos y no a nodos individuales. El principal problema es su computación ya que el número de combinaciones a tener en cuenta en una red de tamaño  $n$  es de  $2^n$ . Entre las propiedades que interesa que tengan en cuenta las medidas de centralidad están,

- Los miembros individuales de la red y sus habilidades.
- Las sinergias que se den entre los grupos.
- Ordenen esta información y proporcionen un ranking individual.

Teniendo un número exponencial de grupos de nodos, cada uno de ellos con un valor asignado reflejando su centralidad, se obtiene un juego similar al coalicional. Por esto se podrán considerar los nodos como jugadores y la centralidad de grupo como la suma de todos los valores individuales de los miembros. De esta forma se aplican conceptos de solución de la teoría de juegos tales como el valor de Shapley o el de Myerson.

En el siguiente modelo, desarrollado por Lindelauf et al. [13] se muestra como añadir al análisis de centralidad estándar información adicional, para hacer una análisis más extenso y preciso desde el punto de vista del análisis de redes.

La fortaleza del análisis de redes es que tiene en cuenta las interrelaciones, cuando hay un grupo de personas. Como se ha expuesto previamente, el análisis de centralidad se puede aplicar para conocer quiénes son los jugadores clave en las redes estudiadas. Los jugadores clave, se interpretarán con los resultados obtenidos, en función del caso al que se quiera aplicar.

Las medidas de centralidad estándar utilizadas actualmente, no tienen en cuenta la gran cantidad de información que ahora mismo se puede obtener de los miembros de estas redes, porque a priori no se pueden incorporar.

Es por esto por lo que en el siguiente modelo se van a desarrollar estos rankings de individuos a partir de la estructura de la red y, a la vez, de la información disponible de las relaciones entre los terroristas.

Para entender el funcionamiento de las redes terroristas, hay que tener en cuenta que no son modelables como una red social al uso, si es cierto que parten de la misma idea de jugadores trabajando juntos para conseguir un fin, pero dependen mucho más de la comunicación entre las diferentes áreas, ya que no se relacionan entre todos. Cada grupo de terroristas tiene asociada una tarea que llevar a cabo, de forma que son los nexos entre grupos los miembros que resultan más

críticos. Usando modelos teóricos de juegos se puede manejar la información necesaria para identificar eficazmente a los jugadores clave.

El modelo teórico planteado utiliza el concepto de las redes ponderadas, donde la ponderación dependerá, por un lado, de la estructura de la red y, por otro, de la información conseguida de los terroristas. Esto permite analizar la red de la forma más eficaz posible, para desestabilizarla, eliminando a los jugadores, o terroristas, más peligrosos.

### **3.2. Metodología**

El modelo plantea una metodología en tres pasos:

- Construcción de la red.
- Definición del modelo del juego teórico.
- Análisis del ranking de jugadores.

#### ***Construcción de la red***

Se modela la red terrorista como una red ponderada. Los nodos de este grafo representan a las personas involucradas en la red y las conexiones entre ellos representarán la relación entre esas personas. Además, se le podrán asignar importancias individuales a las personas y a las relaciones entre esas personas.

Esta información puede provenir de cualquier fuente de información o de los servicios de inteligencia. Los expertos en contraterrorismo y seguridad son los que darán la ponderación a cada elemento de la red. De esta forma, al final de esta primera fase se obtiene una red ponderada que describe la red terrorista.

#### ***Definición del modelo teórico***

Cuando se aplica este modelo el grafo ponderado será la entrada. El comportamiento de las personas, como interactúan, como cooperan, tiene que ser modelado en un juego de conectividad ponderada. Hay que tener en cuenta que este juego debe ser adaptado a cada red terrorista, esto es un marco de trabajo, no un modelo rígido que aplicar.

De hecho, en la práctica se aconseja diseñar varios juegos distintos para una misma red de forma que se pueda contemplar la mayor cantidad de escenarios posibles. En los juegos cooperativos ponderados que se modelen el valor de cada coalición debería ser expresado en términos de los pesos de cada una de las personas y las relaciones que existan dentro de cada coalición. En este punto, es donde se puede adaptar el modelo a las especificaciones de la red.

### *Análisis del ranking de jugadores*

Usando medidas de centralidad el valor de cada jugador puede ser calculado para los juegos previamente definidos. De esta forma, se obtiene el ranking de jugadores y así, se ubican los jugadores clave. También se aconseja calcular la centralidad estándar de la red para, así, tener más criterios para evaluar la situación.

**Ejemplo 3.1.** Sea el siguiente ejemplo en el que se expone el funcionamiento de este sistema.

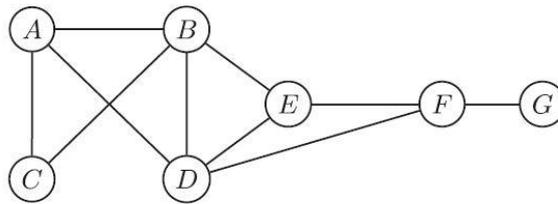


Figura 3.1 Red del ejemplo

Partiendo de la Figura 3.1, el subgrafo correspondiente a la coalición  $\{D, E, F, G\}$  está conectado, mientras que el de la coalición  $\{D, E, G\}$  no lo está. Por lo tanto, el valor de cada una de las coaliciones será,  $v^{conn}(\{D, E, F, G\}) = 1$  y  $v^{conn}(\{D, E, G\}) = 0$ .

Estos valores son adjudicados, siendo  $S$  la coalición y  $S_g$  el subgrafo que se crea entre los jugadores de la coalición y las líneas de comunicación entre ellos, según el criterio definido en:

$$v^{conn}(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S_g \text{ está conectada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Aparte de este planteamiento, basado en la topología de la red, se puede añadir más información adicional. Por ejemplo, alguno de los jugadores puede tener acceso a los fondos del grupo o tener algún tipo de habilidad especial.

Esta información se añade de forma que modifique el valor de las coaliciones en las que forma parte. Un juego ponderado denotado por  $v^{wconn}$  permite el modelado de la estructura de la red, a la vez

que añade información adicional.

Lo siguiente será distribuir el poder de la coalición entre todos los jugadores de la red. El valor de Shapley,  $\phi_i(v)$ , como se ha expuesto previamente, se basa en la contribución marginal de los jugadores a cada una de las distintas coaliciones en las que pueden formar parte, es la regla más utilizada para adjudicar estos valores a cada jugador.

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{|S|!(|N| - 1 - |S|)!}{|N|!} \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)]. \quad (3.2)$$

Siendo  $S$  una de las posibles coaliciones,  $N$  el número de jugadores de la red,  $v(S \cup \{i\})$ , el valor de la coalición  $S$  cuando se incluye al jugador  $i$  y,  $v(S)$ , el valor de la coalición  $S$ .

Jugadores con un mayor valor de Shapley representarán terroristas más peligrosos o relevantes en la red.

A continuación, se describen los distintos análisis, donde se aplicará la ponderación de distintas maneras.

### ***Usando información sobre las relaciones***

Considerando de nuevo la Figura 3.1, se asume que, se ha obtenido información extra sobre la relación AC. Por ejemplo, A y C se comunican más a menudo que cualquier otra pareja de la red. A partir de esta información, se decide asignar a esta relación un valor de 4 mientras que a todas las demás se les asigna un valor de 1.

Ahora se define el juego ponderado  $v^{wconn1}$  de forma que el valor de la coalición  $S$  sea igual al máximo peso de las relaciones que hay presentes en dicha coalición  $S$  si el subgrafo está conectado y 0, en cualquier otro caso.

$$v^{wconn1}(S) = \begin{cases} \max_{\substack{i,j \in S \\ i \neq j}} f_{ij}, & \text{si } S_g \text{ está conectada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Donde  $f_{ij}$  es el peso asignado a la relación  $ij$ , con  $f_{ij} = 0$ , si  $ij \notin E$ .

Este tipo de juego puede funcionar, si la cantidad de comunicación que haya en la red sea muy intensiva de forma que se deba distinguir las relaciones más importantes de las menos relevantes.

De hecho, debido a esto C ocupa una posición más importante porque aplicando las medidas de centralidad estándar sin ponderar la red se deduciría que es poco relevante. Por esto, a la vez de

aplicar este juego se siguen usando las medidas de centralidad estándar, porque proporcionan más puntos de vista para analizar la red.

### ***Usando información sobre los individuos***

En este caso, se supone que se sabe por ciertas fuentes que E tiene experiencia previa y a su vez C y E tienen suficientes medios financieros para llevar a cabo un ataque. Para modelar esta información adicional a E se le asigna un valor de 11 y a C un valor de 4, a todos los demás se les asigna un valor de 1.

El siguiente juego ponderado  $v^{wconn2}$  se define de la siguiente manera. El valor de la coalición  $S$  es igual a la suma de los valores de los jugadores que son parte de la coalición si el subgrafo que forman está conectado y 0 en otro caso,

$$v^{wconn2}(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S} w_i, & \text{si } S_g \text{ está conectada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Donde  $w_i$  es el valor asignado a la persona  $i$  de la red. Este juego tiene sentido en casos en los que elementos individuales de la red pueden provocar una gran diferencia respecto al resto, ya sea por experiencia o por otros medios que tengan a su disposición.

### ***Usando información sobre las relaciones y los individuos***

Para ilustrar esto se mantienen los valores definidos anteriormente para los jugadores. C tendrá un valor de 4 y E de 11. Todos los demás jugadores tendrán un valor de 1. A su vez le damos a la relación AC un valor de 4 mientras que a todas las demás se les da un valor de 1.

El valor de la coalición  $S$ , en el nuevo juego ponderado, será igual al producto de la suma de los valores de los jugadores y al valor de la máxima relación que sea parte de la coalición  $S$ , si el subgrafo está conectado y 0, en otro caso.

$$v^{wconn3}(S) = \begin{cases} \left( \sum_{i \in S} w_i \right) \cdot \left( \max_{i \neq j} f_{ij} \right), & \text{si } S_g \text{ está conectada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Este juego tiene sentido cuando hay que tener en cuenta a individuos especialmente peligrosos y a la forma en que se interrelacionan con el resto de la red.

En la siguiente tabla se muestran los resultados de los cálculos.

| Person | Degree | Betweenness | Closeness | Wconn1  | Wconn2  | Wconn3  |
|--------|--------|-------------|-----------|---------|---------|---------|
| A      | 0.5000 | 0.0778      | 0.6000    | 1.1833  | 1.3190  | 18.3333 |
| B      | 0.6667 | 0.2222      | 0.6667    | 0.3667  | 3.3190  | 6.2333  |
| C      | 0.3333 | 0           | 0.4615    | 1.0500  | 1.3357  | 18.3500 |
| D      | 0.6667 | 0.3222      | 0.7500    | 0.5500  | 2.6190  | 6.6833  |
| E      | 0.5000 | 0.1111      | 0.6667    | 0.2167  | 6.6190  | 15.7333 |
| F      | 0.5000 | 0.3333      | 0.6000    | 1.0333  | 6.4024  | 18.4667 |
| G      | 0.1667 | 0           | 0.4000    | -0.4000 | -1.6143 | -3.8000 |

Tabla 6 Medidas de centralidad del modelo del Ejemplo 3.1

### 3.3. Aplicación del modelo: Atentados del 11-S

Los datos usados para este caso vienen de dos fuentes: un análisis de la red social de los secuestrados de Krebs [11] y el informe de la comisión del 11/9 de Kean et al. [10].

A continuación, se aplican los pasos planteados en la metodología, previamente expuesta en este mismo capítulo:

**1. Construcción de la red:** Para llevar a cabo el análisis, se usaron los datos recogidos por Krebs (2002), que recogió de fuentes abiertas, como periódicos. La red que corresponde con los datos es la Figura 3.2. Los colores se refieren a cada uno de los vuelos de American Airlines (AA) y United Airlines (UA): AA-77 (blanco), AA-11 (gris claro), UA-93 (gris) y UA-175 (gris oscuro).

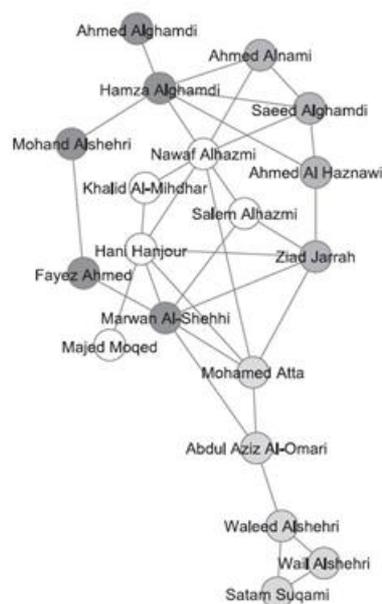


Figura 3.2 Relaciones entre los terroristas del 11-S

Lo más interesante de analizar la centralidad desde la perspectiva de la teoría de juegos es la

capacidad de incorporar la información adicional extraída del análisis de los elementos de la red.

Al principio, los datos disponibles sobre el ataque del 11/9 solo contenían información binaria, es decir, las conexiones entre los participantes en el ataque. Informes posteriores revelaron más información sobre cada uno de los individuos que perpetraron el ataque. A partir de la información del informe de la comisión del 11/9 de Kean et al. [10], se pudo obtener información adicional sobre los secuestradores que se caracterizan en función de la afiliación y los signos de radicalización. En la Tabla 7 se exponen los datos adicionales extraídos del informe de la comisión del 11/9 y como afecta a cada jugador el peso que se le adjudique.

| Indicador del descriptor  | Ejemplo   | Peso adicional |
|---|---|----------------|
| Asistencia a reuniones sobre planificación de ataques terroristas | Reunión en Kuala Lumpur en enero del 2000                                   | +1             |
| Signos de radicalización  | Discursos antisemitas y antiamericanos, hablar sobre la jihad y el martirio | +1             |
| Afiliación  | <i>Al-Quds</i> de la mezquita de Hamburgo                                   | +1             |
| Cómplice en ataques previos                                       | Ataque al USS Cole  | +1             |
| Asistencia a campos de entrenamiento para terroristas             | Viajar a campo de entrenamiento en Pakistán y Afganistán                    | +1             |

Tabla 7 Ejemplo de algunos indicadores y ponderaciones

El peso  $w_i$  de cada persona  $i$  se determinó de la siguiente manera:

1. A todos los agentes involucrados se le asignaron un peso de 1.
2. Se analizó que indicadores eran relevantes para cada persona y, su peso se modificó de acuerdo a la información.

En la Tabla 8 se muestran los valores asignados a cada uno de los terroristas pertenecientes a la red del 11-S.

| Person           | Total weight | Person              | Total weight |
|------------------|--------------|---------------------|--------------|
| Ahmed Alghamdi   | 1            | Nawaf Alhazmi       | 2            |
| Hamza Alghamdi   | 1            | Khalid Al-Mihdhar   | 3            |
| Mohand Alshehri  | 1            | Hani Hanjour        | 1            |
| Fayez Ahmed      | 1            | Majed Moqed         | 1            |
| Marwan Al-Shehhi | 3            | Mohamed Atta        | 4            |
| Ahmed Alnami     | 1            | Abdul Aziz Al-Omari | 1            |
| Saeed Alghamdi   | 1            | Waleed Alshehri     | 1            |
| Ahmed Al-Haznawi | 1            | Satam Suqami        | 1            |
| Ziad Jarrah      | 4            | Wail Alshehri       | 1            |
| Salem Alhazmi    | 1            |                     |              |

Tabla 8 Valores asignados a cada terrorista

**2. Definición del modelo:** Dada la red de los secuestradores y sus pesos asignados, se pretende detectar a los jugadores clave. Por lo tanto, se considera el juego de conectividad ponderado.

Los individuos que tengan alta puntuación en los indicadores definidos en la Tabla 7 juegan un papel importante en la operación. Cuando estos individuos se unan, la operación tendrá más posibilidades de ser exitosa. Por lo tanto, se define a continuación el valor de la coalición como la suma de los pesos de los miembros de la misma, si el subgrafo está conectado y 0, si no lo está. Usando la siguiente expresión, ya definida previamente,

$$v^{wconn2}(S) = \begin{cases} \sum_{i \in S} w_i, & \text{si } S_g \text{ está conectada,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**3. Analizar el ranking de los jugadores:** El valor del juego para cada secuestrador, se calcula a partir del juego definido en  $v^{wconn2}$ . Los rankings resultantes aplicando las medidas de centralidad estándar se presentan en la Tabla 9. En esta tabla aparecen ordenados en orden descendente todos los jugadores. Aquellos que tienen la misma jerarquía dentro de la organización aparecen marcados con los mismos símbolos en la tabla.

Se puede observar el top 5 de cada uno de los rankings en las distintas medidas en la Tabla 9. De aquí, se puede observar lo siguiente: Primero, se concluye que, solo considerando la centralidad, sin tener en cuenta la información extra, se obtiene un jugador clave distinto, Nawaf Alhazmi, respecto del que se obtiene aplicando la información adicional, Abdul Aziz Al-Omari. A simple vista, notar que en caso de suprimir a Nawaf Alhazmi, sigue habiendo conexión entre los demás equipos, aunque pueda verse afectada. Sin embargo, en el caso de suprimir a Abdul Aziz Al-Omari, todo su grupo queda totalmente desconectado del resto de la red. Segundo, se observa como las primeras posiciones están ocupadas por aquellos secuestradores que sirven de puente entre distintas zonas de la red, como

Hamza Alghamdi. De hecho es por esto, o por ser los únicos enlaces de grupos completos, como Abdul Aziz Al-Omari, que estos puntúan tan alto en los rankings. Y, por último, solo usando la información adicional e incluyéndola en el modelo se obtiene la relevancia individual de cada terrorista. Sin embargo, con las medidas de centralidad estándar se obtiene una clasificación ambigua.

| Degree                        | Betweenness         | Closeness                | Wconn2              |
|-------------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|
| N. Alhazmi                    | N. Alhazmi          | N. Alhazmi*              | A. Aziz Al-Omari    |
| M. Al-Shehhi*                 | A. Aziz Al-Omari    | M. Atta*                 | H. Alghamdi         |
| H. Alghamdi*                  | M. Atta             | M. Al-Shehhi*            | Wd. Alshehri        |
| H. Hanjour*                   | M. Al-Shehhi        | H. Hanjour*              | H. Hanjour          |
| M. Atta*                      | <u>Wd. Alshehri</u> | Z. Jarrah                | <u>M. Al-Shehhi</u> |
| Z. Jarrah*                    | H. Alghamdi         | H. Alghamdi <sup>◊</sup> | M. Atta             |
| S. Alghamdi                   | H. Hanjour          | S. Alhazmi <sup>◊</sup>  | N. Alhazmi          |
| A. Aziz Al-Omari <sup>◊</sup> | Z. Jarrah           | <u>A. Aziz Al-Omari</u>  | Z. Jarrah           |
| Wd. Alshehri <sup>◊</sup>     | F. Ahmed            | S. Alghamdi              | M. Alshehri         |
| A. Al-Haznawi <sup>◊</sup>    | M. Alshehri         | A. Al-Haznawi            | K. Al-Midhar        |
| S. Alhazmi <sup>◊</sup>       | A. Al-Haznawi       | F. Ahmed*                | A. Al-Haznawi       |
| <u>A. Alnami</u> <sup>◊</sup> | S. Alhazmi          | A. Alnami*               | F. Ahmed            |
| F. Ahmed*                     | S. Alghamdi*        | K. Al-Midhar             | S. Alhazmi          |
| M. Alshehri*                  | A. Alnami*          | M. Alshehri              | S. Alghamdi         |
| K. Al-Midhar*                 | K. Al-Midhar*       | M. Moqed                 | A. Alnami           |
| S. Suqami*                    | S. Suqami*          | Wd. Alshehri             | S. Suqami*          |
| W. Alshehri*                  | W. Alshehri*        | A. Alghamdi              | W. Alshehri*        |
| A. Alghamdi <sup>◊</sup>      | A. Alghamdi*        | W. Alshehri <sup>◊</sup> | A. Alghamdi         |
| M. Moqed <sup>◊</sup>         | M. Moqed*           | S. Suqami <sup>◊</sup>   | M. Moqed            |

Tabla 9 Rankings según las medidas estándar y las del modelo.

### 3.4. Algoritmos de cálculo

El problema que tiene el modelo aquí expuesto es que la conectividad suele quedar representada en exceso, dejando la información adicional que pondera la red en segundo lugar. Es por esto que para reflejar de la forma más adecuada la información, se puede utilizar el valor de Myerson. El hecho de que su utilización sea más adecuada se puede ver en [16].

En el presente apartado se van a exponer algoritmos de cálculo, tanto para la enumeración de todos los subgrafos inducidos conectados de un grafo, siendo esta una de las operaciones básicas de la teoría de grafos como para el cálculo del valor de Myerson.

Debido al alcance del presente proyecto, el algoritmo para el cálculo del valor de Shapley no se va a mostrar, pero esto no influye especialmente, ya que, en esta sección del capítulo, el objetivo es mostrar el algoritmo de cálculo más eficiente, y la base necesaria para su comprensión.

#### 3.4.1. Enumeración DFS subgrafos inducidos conectados

Este algoritmo, utiliza una técnica estilo *divide y vencerás*. Se empieza con un solo nodo y expandiéndose hacia un subgrafo mayor. Cuando un nuevo nodo es analizado se exploran todas las aristas una a una y cuando se descubre un nuevo nodo, que aún no haya sido descubierto, se dividen los cálculos en dos partes: en la primera se añade un nuevo nodo al subgrafo, y en la segunda, se marca como prohibido y nunca se vuelve a utilizar. Por lo tanto, se tiene una primera parte, en la que se enumera todo el subgrafo, y una segunda, sin el nuevo grafo. El pseudocódigo lo se puede ver en el Algoritmo 1.

---

**Algorithm 1: DFS Enumeration of Induced Connected Subgraphs**

---

**Input:** Graph  $G=(V, E)$   
**Output:** List of all induced connected subgraphs of  $G$

```

1 DFSEnumerate begin
2   sort nodes and list of neighbours by degree desc.;
3   for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
4     DFSEnumerateRec( $G, (v_i), \{v_i\}, \{v_1, \dots, v_{i-1}\}, 1$ );
5 DFSEnumerateRec( $G, path, S, X, startIt$ ) begin
6    $v \leftarrow path.last()$ ;
7   for  $it \leftarrow startIt$  to  $|\mathcal{N}(v)|$  do
8      $u \leftarrow \mathcal{N}(v).get(it)$ ; //  $it$ 's neighbour of  $v$ 
9     if  $u \notin S \wedge u \notin X$  then
10      DFSEnumerateRec( $G, (path, u), \{u\}, X, 1$ );
11       $X \leftarrow X \cup \{u\}$ ;
12    $path.removeLast()$ ;
13   if  $path.length() > 0$  then
14      $startIt \leftarrow \mathcal{N}(path.last()).find(v) + 1$ ;
15     DFSEnumerateRec( $G, path, S, X, startIt$ );
16   else print  $S$ ;

```

---

La función recursiva *DFSEnumerateRec* sirve para que, cada vez que sea llamada, los nodos del grafo se puedan dividir en tres grupos:  $S$ , los elementos del subgrafo,  $X$ , los nodos prohibidos de los que hemos hablado previamente, y otros, los que aún no han sido descubiertos. A su vez los nodos que pertenecen a  $S$  pueden estar parcial o completamente procesados. Un nodo está completamente procesado cuando todos sus vértices han sido explorados. Lo crítico aquí es que no se procesa otro nodo hasta que un nodo ha sido totalmente procesado. El último parámetro de la función *DFSEnumerateRec* es *startIt* que indica cuantos vértices han sido ya procesados para evitar redundancias. Este parámetro se fija en 1 cuando entramos en un nuevo nodo, y se puede determinar a partir de la lista vecina cuando retrocedemos desde otro nodo.

El objetivo de la función es encontrar todos los subgrafos que contienen al subgrafo  $S$  y no contienen a los nodos prohibidos  $X$ . Para esto, empezamos trabajando desde el último nodo en un camino,

denotado por  $v$ , y explorando secuencialmente todos los vértices del camino. Cuando encontramos un nuevo nodo  $u$  enumeramos primero todos los subgrafos de los que forma parte. Aquí, llamamos a *DFSEnumerateRec* con  $u$  añadida al final del camino de nodos parcialmente procesados. Posteriormente, para enumerar los subgrafos sin  $u$  lo añadimos al conjunto de nodos prohibidos y continuamos con un nuevo vértice. Finalmente, cuando todos los nodos han sido explorados se quita  $v$  y se vuelve al nodo anterior. Cuando acabamos de procesar el último nodo del camino, el conjunto  $S$  constituirá un subgrafo final conectado.

En la función principal *DFSEnumerateRec* los pasos  $i$ -ésimos del bucle enumeran todos los subgrafos en los que el nodo con el índice más bajo es  $v_i$ . Para esto, podemos marcar los nodos anteriores como prohibidos y llamar a la función *DFSEnumerateRec* con el nodo  $v_i$  como el subgrafo inicial.

### 3.4.2. Algoritmo para el cálculo del valor de Myerson

En este caso, partimos de la idea de las contribuciones marginales del valor de Shapley. Solo que en este caso más exhaustivamente. Definimos  $\pi$  como una permutación y suponemos que los jugadores que preceden a  $v_i$  forman las componentes  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , la primera  $j$  de las cuales está conectado a  $v_i$ . Ahora, sabiendo que en la función característica de Myerson para el valor de la coalición es igual a la suma de todos los miembros de la coalición, se pueden simplificar las contribuciones marginales a  $v(K_1 \cup \dots \cup K_j \cup \{v_i\}) - v(K_1) - \dots - v(K_j)$ : todos los componentes conectados a  $v_i$  contribuyen con su valor al de la coalición con y sin  $v_i$ . Ahora, en vez de considerar las contribuciones marginales como un conjunto, las descomponemos en dos partes: una positiva y una negativa. Por lo tanto, se calculará por separado cuantas veces (por ejemplo, para qué permutaciones), el valor de la coalición  $v(K_1 \cup \dots \cup K_j \cup \{v_i\})$  con  $v_i$  es añadido, y cuantas veces el valor de una coalición dada  $K_i$  sin  $v_i$  es sustraída de su valor.

Considerando una coalición conectada  $S$  y el valor de Myerson de  $v_i$  :

- Si  $v_i$  está en  $S$ , el valor de  $S$  se tiene en cuenta con signo positivo cuando se cumplan las siguiente dos condiciones: todos los nodos de  $S$  aparecen en la permutación antes que  $v_i$ , y todos los vecinos de  $S$  aparecen en la permutación después de  $v_i$ . Esto pasa con una probabilidad de  $\frac{(|S|-1)! \cdot |N(S)|!}{(|S|+|N(S)|)!}$  donde  $N(S)$  es el conjunto de vecinos de  $S$ .
- Si  $v_i$  no está en  $S$ , el valor de  $S$  se tiene en cuenta con signo negativo, pero solo si todos los

nodos de  $S$  aparecen en la permutación antes que  $v$ , y todos los vecinos de  $S$  aparecen después de  $v_i$ , y  $v_i$  es un vecino de  $S$  (de no ser así,  $v_i$  contribuye a otra coalición). Esto pasa con una probabilidad de  $\frac{|S| \cdot (|N(S)| - 1)!}{(|S| + |N(S)|)!}$ .

Teniendo todo esto en cuenta tenemos el Algoritmo 2 para el cálculo del valor de Myerson. Sería importante aclarar, que todo el análisis de las contribuciones marginales que aquí se ha expuesto está en las líneas 19-22.

---

**Algorithm 2: DFS-based algorithm for calculating Myerson value for graph-restricted games**

---

**Input:** Graph  $G=(V, E)$ , function  $\nu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$   
**Output:** Myerson value for game  $\nu_G$

```

1 DFSMyersonV begin
2   sort nodes and list of neighbours by degree desc.;
3   for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do  $MV_i(\nu_f) = 0$ ;
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $|V|$  do
5      $\lfloor$   $DFSMyersonVRec(G, (v_i), \{v_i\}, \{v_1, \dots, v_{i-1}\}, \emptyset, 1)$ ;
6 DFSMyersonVRec( $G, path, S, X, XN, startIt$ ) begin
7    $v \leftarrow path.last()$ ;
8   for  $it \leftarrow startIt$  to  $|N(v)|$  do
9      $u \leftarrow N(v).get(it)$ ; //  $it$ 's neighbour of  $v$ 
10    if  $u \notin S \wedge u \notin X$  then
11       $DFSMyersonVRec(G, (path, u), S \cup$ 
12         $\{u\}, X, XN, 1)$ ;
13       $X \leftarrow X \cup \{u\}$ ;  $XN \leftarrow XN \cup \{u\}$ ;
14    else if  $u \in X$  then  $XN \leftarrow XN \cup \{u\}$ ;
15   $path.removeLast()$ ;
16  if  $path.length() > 0$  then
17     $startIt \leftarrow N(path.last()).find(v) + 1$ ;
18     $DFSMyersonVRec(G, path, S, X, XN, startIt)$ ;
19  else
20    foreach  $v_i \in S$  do
21       $MV_i(\nu_G) \leftarrow MV_i(\nu_G) + \frac{(|S|-1)! \cdot (|XN|)!}{(|S|+|XN|)!} \nu(S)$ ;
22    foreach  $v_i \in XN$  do
23       $MV_i(\nu_G) \leftarrow MV_i(\nu_G) - \frac{(|S|)! \cdot (|XN|-1)!}{(|S|+|XN|)!} \nu(S)$ ;

```

---

# 4 OTRAS APLICACIONES

---

## 4.1. Introducción

En este capítulo, se muestra como el análisis de redes puede aplicarse a campos muy diversos. Se ha de tener en cuenta que este método sirve para diseñar, analizar, evaluar y tomar decisiones. Es por esto que el campo de aplicación de estas técnicas es tan amplio.

Esta flexibilidad viene dada fundamentalmente desde tres puntos de vista.

- La forma del juego. Se asume que el juego vendrá dado en forma de función característica de forma que el valor de la coalición depende de las identidades de los miembros de la coalición. Una cosa que se puede variar es desarrollar funciones en las que aquellos que no son miembros de una coalición influyan en el valor de esa coalición, otra posibilidad podría ser tener en cuenta el orden de los miembros de la coalición.
- La función del valor de la coalición. Esto define por completo el juego. En función de cómo se defina el criterio para estos valores los resultados variarán.
- El concepto de solución. Esto dependerá enteramente de la aplicación que se esté llevando a cabo ya que dará criterios para determinar las coaliciones y los pagos. Un ejemplo es la diferencia entre el valor de Shapley y Myerson, que hablan de equidad, y el *core* y el *nucleolus*, que se refieren a la estabilidad. Los fundamentos del *core* y del *nucleolus* se pueden encontrar en [18].

En las siguientes aplicaciones se muestra como se pueden definir nuevas medidas en función de la aplicación que se persiga, como interpretar resultados de las medidas tradicionales o posibles alternativas a planteamientos previamente definidos.

## 4.2. Diseño de vías de evacuación

Tradicionalmente, las vías de evacuación se han hecho siguiendo un plan de evacuación muy estático tal que los evacuados deben salir de la zona siguiendo las señales de evacuación conforme al plan. Si la ruta primaria estuviera bloqueada se diseña una secundaria para evitar posibles errores.

El principal problema de este planteamiento es que no responde a posibles imprevistos que surjan ya que las rutas están fijadas, y los planos de evacuación en lugares fijos que no tienen por qué estar accesibles a todo el mundo, por esto podría llegar a haber incluso más heridos.

Para diseñar vías de evacuación que respondan a las posibles necesidades cambiantes de este tipo de problemas es para lo que se puede utilizar el análisis de redes. Para poder desarrollar este planteamiento de vías de evacuación dinámicas se plantea la utilización de sistemas de seguimiento de las personas involucradas en la evacuación, ver [14].

El espacio a evacuar se modela como un grafo  $G = (N, L)$ . Donde  $N$  es el conjunto  $n$  de nodos que representan pequeños espacios dentro de un espacio mayor, como por ejemplo habitaciones, y  $L$  es el conjunto de arcos  $l = (i, j)$ ,  $i, j \in L$  con  $i \neq j$ .

A cada arco, se le asocia una capacidad  $u$  y un tiempo de viaje  $t$ . Este tiempo de viaje dependerá del flujo del arco y de su capacidad. Aquí hemos de tener en cuenta que la relación entre flujo y capacidad del arco provoca variaciones en el tiempo de viaje.

Las medidas de centralidad estándar en esta aplicación se plantean en función de las necesidades del caso:

- **Centralidad de grado:** Esta medida no se tiene especialmente en cuenta porque el hecho de que un nodo tenga mayor centralidad que otros no tiene por qué implicar que esté más cerca de la salida.
- **Centralidad de eigenvectores:** Esta medida de centralidad tiene en cuenta la cantidad y la importancia de los nodos adyacentes. Esta medida tiene una diferencia fundamental respecto a la de grado. Mientras que la de grado tiene en cuenta caminos unitarios (el número de nodos a los que está directamente conectados), la centralidad de eigenvectores tiene en cuenta caminos de longitud infinita. Este valor es la frecuencia esperada de visitas a un nodo  $i \in N$  dentro de un camino aleatorio infinito dentro del grafo  $G = (N, L)$ . Formalmente lo podemos definir como  $A = (a_{ij})$  por la matriz de adyacencia del grafo  $G = (N, L)$  el valor de la centralidad de eigenvector  $C_e(i)$  de un nodo  $i \in N$  viene dada por:

$$C_e(i) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij} C_e(j), \quad \forall (i, j) \in L. \quad (4.1)$$

donde  $\lambda \neq 0$  y constante.

Los nodos con valores más altos de eigenvectores serán atravesados por más caminos. Es más, estos nodos serán puntos de paso críticos que deben estar operativos el mayor tiempo posible en caso de evacuación. El problema es que a lo mejor estos nodos no son los que provean las rutas más óptimas de escape, por lo tanto, no se debe usar como parámetro principal.

- **Betweenness centrality:** Como se ha definido previamente esta medida se refiere al número de caminos geodésicos que pasan a través de este nodo. Una de las formas de representar esto es la que hemos visto previamente en el Capítulo 2.

$$C_{between}(i) = \frac{2}{(|N| - 1)(|N| - 2)} \sum_{\substack{k, j \in N \setminus \{i\} \\ k < j}} \frac{s_{kij}}{s_{kj}}. \quad (4.2)$$

Donde  $N$  es el número de nodos,  $s_{kij}$  es el número de caminos más cortos que pasan por el nodo  $i$  entre  $k$  y  $j$ , y  $s_{kj}$  el número total de caminos más cortos posibles entre  $k$  y  $j$ .

Esta medida se aplica para indicar la frecuencia en la que un nodo sirve como conexión entre los caminos geodésicos más cortos entre otros dos nodos. A partir de este problema se puede desarrollar esta medida de forma que se aplique a grupos para así entender mejor el conjunto de la red.

El problema que se presenta con esta medida es que solo tiene en cuenta la topología de la red. Esto se soluciona desarrollando formas de ponderar la medida.

Estas son algunas de las medidas de centralidad tradicionales, como ya hemos visto, que se pueden plantear en este caso concreto.

Para observar la flexibilidad que tiene el análisis de redes se expone a continuación nuevos conceptos desarrollados a partir de los expuestos anteriormente.

#### 4.2.1. Evacuation betweenness centrality

Sea  $P_0$  el conjunto disponible de vías de evacuación aceptables en términos de seguridad y duración, estas vías se denominarán vías eficientes de evacuación.

Si se sustituye la distancia geodésica por el tiempo de viaje  $t_p \geq 0$  habrá un camino más corto entre cada par de nodos, y teniendo en cuenta que se considerará las distintas vías de evacuación,

$k_{od} = |P_{od}|$ , para cada pareja  $(o-d)$ , origen-destino, donde  $o \in O$  y  $d \in D$ . Partiendo de esta idea se define la siguiente medida.

**Definición:** *Evacuation betweenness centrality*,  $C_{EB}(i)$ , de un nodo  $i$  es el parámetro que representa la fracción  $k_{od}$  de vías eficientes de evacuación entre todas las parejas  $(o-d)$ , origen-destino (O-D), donde  $o \in O$  y  $d \in D$ , siendo ambas diferentes de  $i \in N$ , de la que  $i$  forma parte.

Para el cálculo se usa,

$$C_{EB}(i) = \sum_{o \in O \setminus \{i\}} \sum_{d \in D \setminus \{i\}} \frac{\sigma'_{od}(i)}{\sigma'_{od}}, \quad \forall i \in N. \quad (4.3)$$

Donde  $\sigma'_{od} = k_{od}$  y  $\sigma'_{od}(i) \leq k_{od}$  es el cardinal del subconjunto  $k_{od}$  de vías de evacuación eficientes que pasan a través del nodo  $i$ .

Si el nodo  $i$  tuviese un valor  $C_{EB}(i)$  elevado, significaría que ese nodo sirve como conexión para muchas posibles vías optimas de escape y, por lo tanto, es prioritario.

Se define  $d_G(s, t)$  como el camino más corto entre  $s \in O$ , los nodos de origen, y  $t \in D$ , los nodos de destino. Aplicando el criterio de Bellman se sabe que un nodo  $n \in N$ , forma parte del camino más corto entre  $s$  y  $t$  si y sólo si  $d_G(s, t) = d_G(s, n) + d_G(n, t)$ . Se consideran unos factores de tolerancia para las vías de evacuación, como medida preventiva de seguridad,  $\alpha$  y  $\beta$ , donde  $\alpha > 0$  y  $\beta = \alpha d_G(s, t)$ , esto lleva al siguiente teorema

**Teorema 4.1.** *Un nodo  $n$  perteneciente a  $N$  está en un camino entre los nodos  $s$  y  $t$  de duración menor a  $(1 + \alpha)d_G(s, t)$ , si y solo si la siguiente inecuación es satisfecha,*

$$(1 + \alpha)d_G(s, t) \geq d_G(s, n) + d_G(n, t). \quad (4.4)$$

Sea  $\psi_{st}^\alpha(n)$  el número de vías de evacuación tal que sus longitudes máximas sean  $(1 + \alpha)d_G(s, t)$ , o,  $\beta + d_G(s, t)$  que pasan a través del nodo  $v$ . Se asume que  $\beta$  y el tiempo de viaje por las aristas, o arcos, son números enteros, se tiene que,

$$\psi_{st}^\alpha(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta + d_G(s, t) < d_G(s, n) + d_G(n, t), \\ \sum_{h=0}^{\beta} \sigma_{sv}^h \sum_{l=0}^{\beta-h} \sigma_{vt}^l, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Donde  $\sigma_{sn}^h$  es el número de vías de evacuación eficientes, con tiempo de viaje exactamente a  $d_G(s, n) + h$ .

Dado el número  $\psi_{st}^\alpha(n)$  de vías de evacuación eficientes para cada pareja  $(s, t)$ , la dependencia de  $\delta_{st}^\alpha(n)$  de cada pareja  $(s, t)$  pertenecientes a  $N$  en un nodo intermediario  $n \in N$  es la fracción del número  $\psi_{st}^\alpha$  de vías  $\alpha$  – *eficientes* de evacuación entre  $s$  y  $t$  a través de  $n$ :  $\delta_{st}^\alpha(n) = \psi_{st}^\alpha(n)/\psi_{st}^\alpha$ .

Por vías  $\alpha$  – *eficientes* de evacuación se entienden aquellas vías cuyo tiempo de viaje es como máximo igual a  $\alpha d_G(s, t)$ .

Para obtener la medida de *evacuation betweenness centrality* para un nodo  $n$  se suman las dependencias de pareja de todas las parejas en ese nodo,

$$C_{EB}(i) = \sum_{s,n,t \in N} \delta_{st}^\alpha(n). \quad (4.6)$$

Nodos con valores altos de esta medida pueden ser difíciles para coordinar multitudes ya que estos son intersecciones donde la multitud puede ir en muchas direcciones distintas. Por ello, hay que tener especial cuidado en estos nodos para evitar embotellamientos.

Esta medida totalmente nueva y definida para la situación que se está estudiando, sirve para ejemplificar la versatilidad de las medidas. En este caso, se propone el concepto de vías de evacuación ágiles en relación a las impredecibles condiciones de seguridad a lo largo de estas rutas. Por ágil, se entiende la habilidad para cambiar las vías de forma eficiente y segura en casos de cambio en las condiciones de seguridad.

Por supuesto, la aplicación de estas medidas para el diseño debe ir acompañadas de otras medidas adicionales para evitar pánicos y coordinar a las personas para evitar congestiones. Para ampliar sobre esta aplicación se recomienda [14].

### 4.3. Análisis de inestabilidad de tensión en redes de potencia

En la siguiente aplicación, [2], se muestra como se puede modelar la red eléctrica como un grafo y, por tanto, las medidas de centralidad genéricas y otras más concretas se pueden aplicar al estudio de las redes eléctricas.

La red de potencia se modela como un grafo no dirigido, conectado y ponderado  $G(N, L, W)$  donde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de nodos y  $L$  es el conjunto de aristas. El peso de una arista  $\{i, j\}$  es la *voltage distance*, que representa la distancia eléctrica y la conectividad, entre cada pareja de nodos, bajo unos criterios de operación dados,  $h_{ij} = h_{ji} \in \mathbb{R}$ .

Para cada nodo  $i \in N$  existe un fasor de intensidad  $I_i \in \mathbb{C}$ , un fasor de tensión  $U_i = E_i e^{j\theta_i} \in \mathbb{C}$ , y una potencia inyectada  $S_i = P_i + jQ_i \in \mathbb{C}$ , cuya parte real  $P_i \in \mathbb{R}$  es la potencia activa y  $Q_i \in \mathbb{R}$  es la potencia reactiva.

#### 4.3.1. Centralidad eléctrica

La matriz de admitancias  $Y$  se puede ver como un laplaciano pesado complejo. Así, se pueden adaptar los parámetros eléctricos al análisis de redes. A continuación, se muestran medidas de centralidad genéricas aplicadas a redes eléctricas.

**4.3.1.1. Centralidad de grado:** Esta medida aplicada a redes eléctricas permite comprobar lo conectado que está un nodo al resto de la red y, a su vez, la capacidad que tiene ese nodo de influir de forma directa en el resto de la red. Usando la matriz de admitancia  $Y(v, j)$ , matriz dada por las inversas de las resistencias eléctricas, para ponderar la medida el grado de centralidad eléctrica denotada por  $C_d^Y(v)$ , y dada por la expresión

$$C_d^Y(v) = \frac{\|Y(v, j)\|}{n-1}. \quad (4.7)$$

**4.3.1.2. Centralidad de eigenvector:** Esta medida se refiere a la estructura global y tiene menos en cuenta patrones locales. Usa los pesos del primer eigenvector para asignar un valor de centralidad a cada vértice. Esta medida se relaciona con el matriz de adyacencia  $A$ . Para esta aplicación la matriz de adyacencia se obtiene a partir del laplaciano como  $Ay = -Y + D(y)$  donde  $D(\cdot)$  es la matriz diagonal de  $Y$

$$C_d^Y(v) = \|x_v\| = \left\| \frac{1}{\lambda_{\max}} \sum_{j=1}^n Ay(v, j) x_j \right\|, \quad (4.8)$$

y, donde  $\lambda_{max}$  es el mayor autovalor.

**4.3.1.3. Closeness centrality:** En esta medida, se mide la distancia de un vértice a los demás de la red. Esta medida, aplicada a las redes eléctricas, se apoya en la distancia eléctrica entre dos nodos  $d_Z(v, c)$ .

$$d_Z(v, c) = \left\| \sum_{(i,j) \in E \cap \text{path}(v-c)} z(i, j) \right\|. \quad (4.9)$$

Donde  $z = r + jx$  es la impedancia del enlace  $(i, j)$ . Normalmente la reactancia  $x$  es la componente dominante y  $r$  es omitido. Por lo tanto, esta medida queda definida como

$$C_c^Z(v) = \frac{n-1}{\sum_{c \in V \setminus v} d_Z(v, c)}.$$

**4.3.1.4. Vertex and Edge Betweenness Centrality:** *Betweenness centrality* mide la habilidad de un nodo para ser parte clave en el intercambio de información entre dos nodos. Como se ha visto previamente, se define como el número de caminos más cortos entre parejas de nodos que pasan a través del nodo  $v$

$$C_b^Z(n) = \frac{\sum_{\substack{s,v,c \in N \\ s \neq v \neq c}} \sigma_{sc}(v) / \sigma_{sc}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}. \quad (4.10)$$

Donde  $\sigma_{sc}$  es el número de caminos eléctricos más cortos entre  $s$  y  $c$  y  $\sigma_{sc}(v)$  el número de caminos más cortos que pasan a través de  $v$ . A esto, también, podemos añadirle la *Edge betweenness* definida como

$$C_b^Z(e) = \frac{\sum_{\substack{s,c \in N \\ s \neq c}} \sigma_{sc}(e) / \sigma_{sc}}{\frac{(n-1)n}{2}}. \quad (4.11)$$

Es muy importante remarcar que, en el caso de las redes eléctricas, es muy relevante tener asegurados los nodos que tengan valores altos en estas medidas, ya que si no, se podrían tener problemas de desconexión en áreas de la red.

### 4.3.2. Medidas de centralidad basadas en la matriz de distancia de tensiones

A partir de la matriz de distancias de tensión y la de sensibilidad V-Q, siendo V tensión y Q potencia reactiva, se definen nuevas medidas de centralidad análogas a las definidas anteriormente. Para un grafo  $G = (N, L)$  con  $n$  vértices, donde  $N$  es el conjunto de nodos, y  $L$  el de aristas de la red de potencia, donde se tiene una matriz de distancias de tensión dadas por  $J_R$ , siendo  $J_R = \left[ \frac{dQ}{dV} \right]$ , que representa la distancia eléctrica y la conectividad entre todos los pares de nodos bajo condiciones específicas de operación. Como el jacobiano y la matriz de atenuación de tensión muestra relaciones entre los nodos en las que se pueden ver las variaciones de tensión y de potencia reactiva, las medidas de centralidad y la estructura de estos grafos proporcionan información relacionada con la estabilidad de tensiones, desde una perspectiva global del sistema e identifica áreas y componentes que pueden representar un riesgo para la red.

**4.3.2.1. Fiedler centrality:** Sea  $J_R$ , el Laplaciano de la red de potencia en un punto de operación concreto, existe un conjunto de autovalores  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ , que representan el espectro del grafo. Para este espectro del grafo, existe un parámetro definido como conectividad algebraica que es el segundo autovalor más pequeño  $\lambda_1$ , no nulo, del laplaciano. Para este autovalor existe un autovector asociado llamado vector de Fiedler. Usando este vector, se define una medida de centralidad, autovalor de voltaje, que relaciona la centralidad de un nodo en términos de variaciones de tensión con el  $i$ -ésimo nodo inestable del perfil de tensiones de la red.

$$C_F(v) = ||x_F|| = \left\| \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^n J_R(v, j) x_j \right\|. \quad (4.12)$$

El *fiedler centrality* propuesto, se compara con el factor de participación del estacionario V-Q de la técnica de análisis modal, que se usa para identificar la distancia hasta la tensión inestable en redes. Las características de la estabilidad de tensión pueden ser calculadas encontrando los autovalores y autovectores de la matriz jacobiana  $J_R$ ,

$$J_R = \xi \Lambda \eta, \quad (4.13)$$

Donde  $J_R$  es la matriz jacobiana,  $\begin{bmatrix} M & L \\ H & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta Q \\ 0 \end{bmatrix}$ , siendo

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}, N_{ij} = V_j \frac{\partial P_i}{\partial V_j}, M_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \text{ y } L_{ij} = V_j \frac{\partial Q_i}{\partial V_j},$$

$\xi$  y  $\eta$  son las matrices de autovectores derecha e izquierda, y  $\Lambda$  es la matriz diagonal de autovalores

de  $J_R$ . Los autovalores en  $\Lambda$ ,  $\lambda_i$  y los autovectores derecho e izquierdo para cada uno definen el  $i$ -ésimo modo de la respuesta V-Q.

Si  $\lambda_i > 0$ , las variaciones de la tensión modal y la potencia reactiva modal irán en el mismo sentido, indicando que el perfil de tensiones es estable. Si  $\lambda_i < 0$ , las variaciones irán en sentido contrario, indicando que el perfil es inestable. De esta manera  $\lambda_i$  representa el grado de estabilidad de la tensión modal. También el segundo autovalor de la matriz laplaciana definida como  $J_R$  representará el modo crítico del sistema. Así, el autovector de *Fiedler* proporciona una medida de la participación de cada nodo en el modo crítico de tensiones.

### 4.3.3. Closeness Voltage Centrality

Esta medida muestra la influencia de las variaciones de potencia reactiva desde un nodo  $a$  hacia todos los demás de la red, centrándose en la distancia de atenuación de la tensión. Esto viene definido por flujos de potencia activa-reactiva y la matriz desacoplada de atenuación de voltaje,  $D_{ij}$ .

Por lo tanto esta medida viene definida por

$$C_c^N(v) = \frac{n-1}{\sum_{c \in N/v} D_{ij}(v, c)}. \quad (4.14)$$

### 4.3.4. Vertex and Edge Attenuation Centrality

Esta medida se puede redefinir considerando  $\delta_{sc}$  como el número de distancias de tensión, refiriéndose a las distancias métricas y  $\delta_{sc}(v)$  como el número total de caminos de tensión que cruzan  $v$ .

$$C_b^Z(v) = \frac{\sum_{\substack{s,v,c \in V \\ s \neq v \neq c}} \delta_{sc}(v) / \delta_{sc}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}. \quad (4.15)$$

También, se puede considerar

$$C_b^Z(e) = \frac{\sum_{\substack{s,c \in V \\ s \neq c}} \delta_{sc}(e) / \delta_{sc}}{(n-1)n/2}. \quad (4.16)$$

Siendo la ecuación (4.14) referida a un nodo  $v$  y, la ecuación (4.15) a las aristas entre dos nodos cualesquiera.

Las medidas que aquí se presentan, sirven para hallar parejas de tensión que no estén explícitamente en el modelo estructural o eléctrico, afectando al perfil de tensiones del sistema. El vector de Fiedler puede ser útil para identificar, desde una perspectiva de grafos, el tipo de estabilidad de tensiones que gobierna el sistema. Las medidas de centralidad aquí definidas, usando este vector proporcionan información directa sobre los nodos que pueden ser útiles para gobernar el perfil de tensiones del sistema. *Betweenness centrality* aplicada a la atenuación de las distancias métricas entre tensiones, proporciona información sobre los segmentos vulnerables de la red que podrían provocar inestabilidades y colapsos en el sistema.

## 4.4 Redes de sensores inalámbricos

En la siguiente aplicación, [9], se exponen algunas medidas de centralidad aplicadas a las redes de sensores inalámbricas, WSN (*Wireless sensor networks*) en adelante. En estos, casos el interés de aplicar estas medidas es el de adaptar la arquitectura de la red a las necesidades.

### 4.4.1. Centralidad de grado

En esta aplicación, una mayor centralidad de grado no tiene por qué indicar que el nodo sea más central, ya que en este tipo de redes un factor importante es a donde llevan las conexiones y su eficacia, conectando nodos que de otra forma estarían desconectados. Esta medida puede servir para elegir dónde poner el nodo que sirva tanto como sumidero o como *cluster head selection*.

A continuación, se muestra su expresión normalizada,

$$C_D(v_i) = \frac{\sum_{\substack{j \in N \\ i \neq j}} e(v_i, v_j)}{n - 1}. \quad (4.17)$$

Donde  $i, j$  son nodos en el grafo y  $e(v_i, v_j)$  es 1, si existe conexión entre los nodos  $i$  y  $j$ , y 0, si no existe conexión.

#### 4.4.2. *Betweenness centrality*

Esta medida, se aplica para determinar aquellos nodos que forman parte de los caminos más cortos entre dos nodos. Sensores con una alta medida de este tipo, son fundamentales ya que son los que distribuirán mayor cantidad de información de forma segura.

Su expresión normalizada viene dada por,

$$C_B(v_i) = \frac{\sum_j^n \sum_{\substack{k \\ i \neq j \neq k}}^n \frac{\alpha_{v_j, v_k}(v_i)}{\alpha_{v_j, v_k}}}{(n-1)(n-2)}. \quad (4.18)$$

Donde  $\alpha_{v_j, v_k}$  es el número de caminos más cortos de  $j$  a  $k$  y  $\alpha_{v_j, v_k}(v_i)$  el número de caminos más cortos entre  $j$  y  $k$  que pasan por  $v$ .

#### 4.4.3. *Closeness centrality*

En esta medida, lo importante es la cercanía de un nodo a todos los demás. Aplicado a estas redes se puede usar para escoger nodos que funcionen como *cluster heads* o para ver nodos que estén más concentrados, permitiendo así dinámicas de encendido-apagado entre ellos.

A continuación, se muestra su forma normalizada,

$$C_c(v_i) = \left[ \frac{\sum_{j=1}^n d(v_i, v_j)}{n-1} \right]^{-1}. \quad (4.19)$$

Donde el numerador es la suma de la inversa de las distancias más cortas entre  $i$  y  $j$  y todos los otros nodos.

#### 4.4.4. *Bridging centrality*

Esta medida identifica nodos que sirvan para unir zonas muy conectadas. Se define como la caída relativa de la eficiencia de la red si se suprime un nodo de la red. O lo que es lo mismo, mide cómo funciona la red en caso de que un nodo se desactive.

En la Figura 4.1 se observa como el nodo e es fundamental para conectar los otros dos subgrafos en los que se dividiría la red en caso de ser suprimido.

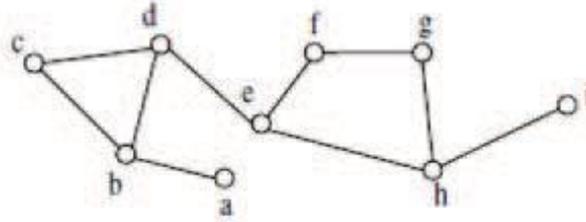


Figura 4.1

#### 4.4.5 Cluster centrality

Esta medida está basada en una variante del grado de centralidad. Supongamos que  $(N, L)$  es una WSN ponderada, donde  $E$  es el peso de la arista que conecta dos nodos. La centralidad de grado del nodo  $i$  sería simplemente la suma de todas las aristas que llegan a ese nodo. Incluso podríamos tener en cuenta las aristas incluidas en  $k$  nodos de distancia.

$$C_D^k(v_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E^k(v_i, v_j). \quad (4.20)$$

Donde  $C_D^k(v_i)$  es la medida de centralidad del nodo  $v_i$ .

Un problema que surge, es que muchas conexiones débiles o poco relevantes, pueden parecer como una conexión importante y provocar conclusiones erróneas. Por esto, se define una medida alternativa para obtener la medida sin este tipo de error.

$$C_\alpha^k(v_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_\alpha^k(v_i, v_j). \quad (4.21)$$

Aquí  $C_\alpha^k(v_i)$  representa el número de nodos,  $E$ , conectados a  $v_i$  con al menos un peso  $\alpha$ , definido arbitrariamente, usando un número  $k$  de nodos de distancia.

De esta forma esta medida ayuda a elegir *clusters* que tengan buenas conexiones con su cabeza.

## 5 CONCLUSIONES

---

El presente trabajo de fin de grado se ha realizado con el objetivo de presentar una introducción al análisis de redes y relacionarlo con la teoría de juegos.

Ambos campos son de gran interés para los ingenieros. El análisis de redes se puede aplicar a multitud de campos de la ingeniería, desde el análisis de redes eléctricas o de comunicación hasta al tráfico por cualquier medio.

La teoría de juegos, por otra parte, es una disciplina con interesantes aplicaciones. Esta disciplina permite modelar gran cantidad de situaciones en las que los ingenieros deben tomar decisiones.

A continuación, se expone un resumen de cada capítulo con algunos apuntes donde se destaca aquello más relevante.

En el primer capítulo se han introducido los conceptos de la teoría de juegos que se utilizan en los posteriores capítulos. Así como el valor de Shapley, que es uno de los conceptos fundamentales del trabajo, y un ejemplo de su aplicación a los derechos de emisiones. Esta aplicación carece de estructura de red para ilustrar como funciona en otros casos.

El segundo capítulo introduce el concepto formal de red y como evaluarla, de juegos con comunicación restringida y el valor de Myerson. Aquí se presentan axiomatizaciones del valor de Myerson y diversos conceptos de medidas básicas de centralidad para posteriormente, adaptarlas a distintas situaciones. A su vez, el valor de Myerson une las redes con la teoría de juegos.

En el tercero, se analiza el estudio de una red terrorista con información externa, usando la teoría de juegos. De esta forma, se muestra la diferencia entre la red ponderada o sin ponderar y como esto afecta a los resultados obtenidos en la aplicación del modelo. Se exponen también dos algoritmos básicos en el análisis de redes. Estos algoritmos permiten adaptar esta metodología para ser aplicada en otras situaciones, para profundizar más en ellas ver [16].

En el cuarto capítulo se muestran distintas aplicaciones a la ingeniería. Han sido escogidas de forma que se vean distintas perspectivas y aplicaciones de las medidas de centralidad. De igual manera se muestran algunas medidas definidas para las aplicaciones concretas, lo que permite ilustrar la flexibilidad de estos conceptos.

Las principales conclusiones que se extraen de este trabajo se exponen a continuación,

- Esta rama de las matemáticas tiene un gran interés en Ingeniería, para la toma de decisiones y son un sistema de evaluación eficaz y fiable.
- Sus aplicaciones son muy variadas y cada caso al que se aplique tendrá matices distintos.
- El análisis de redes ponderadas permite realizar cálculos más exactos con la posibilidad de incorporar información adicional de los agentes en la red, ya que siempre habrá matices que el análisis de forma topológica no pueda integrar.

Otras posibles aplicaciones que se encuentran en la bibliografía que pueden resultar de interés son la [1] y la [3]. En las cuales, se muestran formas distintas de entender la centralidad. En concreto, en [1], se puede estudiar un análisis sobre como influenciar redes sociales para así propagar una idea. En [3] se estudia como España jugó la fase eliminatoria del Mundial de 2010. En ambos se desarrollan conceptos aquí expuestos y se muestran algunos nuevos. Gracias a la variedad de sus medidas, si se quiere ver más, ver [5], y a la capacidad de las redes de adaptarse a cualquier aplicación el análisis de redes tiene esta versatilidad.

---

## REFERENCIAS

---

- [1] Bauru, E. K. & Barnes, M. L. (2017). Key players in conservation diffusion: Using social network analysis to identify critical injection points. *Biological Conservation* (210), 222-232.
- [2] Caro-Ruiz, C. & Mojica-Nava, E. (2015). Centrality Measures for Voltage Instability in Power Networks. *IEEE Second Colombian Conference on Automatic Control*, 1-6.
- [3] Cotta, C., Mora, A. M., Merelo, J. J., & Merelo-Molina, C. (2013). A network analysis of the 2010 FIFA World Cup champion team play. *Journal of Systems Science and Complexity*, 26(1), 21-42.
- [4] Everett, M. G. & Borgatti, S. P. (1999). The Centrality of Groups and Classes. *Journal of Mathematical Sociology*, 23(3), 181-201.
- [5] Everett, M. G. & Borgatti, S. P. (2006). A graph-theoretic framework for classifying centrality measures. *Social networks*, (28), 466-484.
- [6] Freeman, L. (1978). Centrality in Social Networks Conceptual Clarification. *Social Networks*, 1, 215-239.
- [7] Freeman, L., Borgatti, S. & White, D. Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow. *Social Networks*, 13, 141-154.
- [8] Gómez, D., González-Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. & Tejada, J. (2003). Centrality and power in social networks: a game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*, (24), 27-54.
- [9] Jain, A. & Reddy, B. (2012). Node Centrality in Wireless Sensor Networks: Importance, Applications and Advances. *3rd IEEE International Advance Computing Conference*, 127-131.
- [10] Kean, T., Hamilton, L. & Ben-Veniste, R. (2002). *The 9/11 Commission Report, Final Report of the National Commission on Terrorist Attacks upon the United States*. New York: W.W. Norton and Company, Inc.
- [11] Krebs, V. E. (2002). Uncloaking terrorist networks. *First Monday*, (7), 1-10.
- [12] Liao, Z., Zhu, X. & Shi, J. (2015). Case study on initial allocation of Shanghai carbon emission trading based on Shapley value. *Journal of Cleaner Production*, (103), 338-344.
- [13] Lindelauf, R., Hamers, H. & Husslage, B. (2013). Cooperative Game Theoretic Centrality Analysis of Terrorist Networks: The Cases of Jemaah Islamiyah and Al Qaeda. *European Journal of Operational Research*, 229(1), 230-238.
- [14] Lujak, M. & Giordani, S. (2017). Centrality measures for evacuation: Finding agile evacuation routes. *Future Generation Systems*, 83, 401-412.
- [15] Michalak, T. P., Rahwan, T., Skibski, O. & Woolridge, M. (2013). Defeating Terrorist Networks with Game Theory. *IEEE Intelligent Systems*, 30(1), 54-61.
- [16] Michalak, T. P., Rahwan, T., Skibski, O. & Woolridge, M. (2014). Algorithms for the Shapley and Myerson Values in Graph-restricted Games. *International Conference on Autonomous agents and multi-agent systems*, 197-204.
- [17] Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, (2), 225-229.
- [18] Navarro, J. P., Pastor, J. L. & Tena, E. C. (2010). *Teoría de juegos*. Pearson Educación.
- [19] Newman, M. E. (2004). Analysis of weighted networks. *Physical Review*, (70), 56-131.

- [20] Nouweland, A. van den. (1993). Games and Graphs in Economic Situations. Tilburg University.
- [21] Owen, G. (1986). Values of graph-restricted games. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* (7), 210-220.
- [22] Owen, G., Tijs, S. & Borm, P. (1992). On the Position Value for Communication Situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics.*, 5(3), 305–320.
- [23] Shapley, L. (1953). A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games II*, 307-317. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.