

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Análisis comparativo de diferentes tipos de
suspensiones traseras de motocicletas

Autor: Ana Ramírez Toro

Tutor: Daniel García Vallejo

Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Análisis comparativo de diferentes tipos de suspensiones traseras de motocicletas

Autor:

Ana Ramírez Toro

Tutor:

Daniel García Vallejo

Profesor titular

Dep. Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo Fin de Grado: Análisis comparativo de diferentes tipos de suspensiones traseras de motocicletas

Autor: Ana Ramírez Toro

Tutor: Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis compañeros

Agradecimientos

En primer lugar, quiero darle las gracias a mi tutor Dani, no sólo por su infinita paciencia, comprensión y todas las facilidades que me ha proporcionado para poder llevar finalmente a cabo este proyecto; sino también por el apoyo y la confianza que ha depositado en mí durante la superación de la asignatura que él mismo imparte y que tanta dificultad me supuso.

En segundo lugar, a mi familia, que han sufrido y disfrutado esta carrera tanto como yo. A mi padre por transmitirme la ilusión por la ingeniería durante la elección de mi profesión y por enseñarme a discernir lo verdaderamente importante y observar cualquier situación con perspectiva. A mi madre, que sólo me basta una de sus miradas para sentirme reconfortada. A mi hermana, por su continuo apoyo y comprensión durante todos estos años.

Por supuesto, quiero darle las gracias a mis compañeros de estudios que me han acompañado durante esta etapa tan importante de mi vida. No sólo por toda la ayuda que me han ofrecido, sino por estar a mi lado siempre que los he necesitado dándome la fuerza que necesitaba.

Y en último lugar, a riesgo de parecer vanidosa, quiero darme las gracias a mí misma. Gracias a la perseverancia y la obstinación por lograr alcanzar mis metas pese a toda dificultad, hoy puedo sentir al fin una gran satisfacción por haber superado y concluido este período de mi vida, del que tanto he aprendido y me ha permitido crecer como persona.

Gracias a todos.

En este proyecto se plantea un análisis comparativo entre varios sistemas de suspensión trasera de motocicletas con bielas.

Para ello, se comenzará con la propuesta de seis mecanismos diferentes de suspensión, pertenecientes a las principales marcas de fabricantes de motocicletas. Posteriormente, se procederá realizando el modelado de cada uno de ellos, resolviendo detalladamente el problema cinemático y dinámico de los mecanismos, con el fin de obtener resultados numéricos.

Una vez conocido el comportamiento físico de todas las suspensiones, se establecerán unos criterios de diseño que permitan optimizar, en la medida de lo posible, los parámetros de los mecanismos. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos entre las distintas suspensiones, permitiendo concluir cuáles de ellos responden de forma más favorable ante determinadas condiciones.

Abstract

A comparative analysis among several rear suspension systems of motorcycles with connecting rods is proposed in this project.

For this, it will begin with the proposal of six different suspension mechanisms, belonging to the main brands of motorcycles manufactures. Subsequently, it will proceed by modeling each one of them, solving in detail the kinematic and dynamic problem of the mechanisms, in order to obtain numerical results.

Once the physical behaviour of all the suspensions is known, some design criteria will be established to optimize, as far as possible, the parameters of the mechanisms. Finally, the results obtained among the different suspensions will be compared, allowing to conclude which of them respond more favorably to certain conditions.

AGRADECIMIENTOS	ix
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
ÍNDICE	xiii
ÍNDICE DE TABLAS	xv
ÍNDICE DE FIGURAS	xvi
NOTACIÓN	xxi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivo	2
1.2. Estructura del proyecto	3
2 HERRAMIENTAS DE CÁLCULO Y DISEÑO	5
2.1. Modelado cinemático	5
2.2. Modelado dinámico	7
3 ANÁLISIS TOPOLÓGICO	9
3.1. Suspensión Honda	9
3.2. Suspensión Yamaha	11
3.3. Suspensión Kawasaki	11
3.4. Suspensión Suzuki	12
3.5. Suspensión Morbidelli 500GP	14
3.6. Suspensión Elf Honda GP	15
4 ANÁLISIS NUMÉRICO	16
4.1. Modelo paramétrico	16
4.1.1. Suspensión Honda	17
4.1.2. Suspensión Yamaha	18
4.1.3. Suspensión Kawasaki	19
4.1.4. Suspensión Suzuki	20
4.1.5. Suspensión Morbidelli 500GP	21
4.1.6. Suspensión Elf Honda GP	22
4.2. Análisis cinemático	23
4.2.1. Suspensión Honda	25
4.2.2. Suspensión Yamaha	27
4.2.3. Suspensión Kawasaki	29
4.2.4. Suspensión Suzuki	31
4.2.5. Suspensión Morbidelli 500GP	33
4.2.6. Suspensión Elf Honda GP	36
4.3. Análisis dinámico	38
4.3.1. Suspensión Honda	39
4.3.2. Suspensión Yamaha	41
4.3.3. Suspensión Kawasaki	44
4.3.4. Suspensión Suzuki	46

4.3.5.	Suspensión Morbidelli 500GP	48
4.3.6.	Suspensión Elf Honda GP	51
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	55
5.1.	Suspensión Honda	55
5.2.	Suspensión Yamaha	58
5.3.	Suspensión Kawasaki	61
5.4.	Suspensión Suzuki	64
5.5.	Suspensión Morbidelli 500GP	67
5.6.	Suspensión Elf Honda GP	72
6	CRITERIOS DE DISEÑO	77
6.1.	Progresividad	77
6.2.	Punto de equilibrio estático	80
7	OPTIMIZACIÓN DE LOS MECANISMOS	83
7.1.	Suspensión Honda	85
7.2.	Suspensión Yamaha	86
7.3.	Suspensión Kawasaki	87
7.4.	Suspensión Suzuki	88
7.5.	Suspensión Morbidelli 500GP	90
7.6.	Suspensión Elf Honda GP	91
9	ANÁLISIS COMPARATIVO	93
8	CONCLUSIONES	97
	Bibliografía	99

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5–1. Parámetros suspensión Honda	55
Tabla 5–2. Fuerzas y reacciones máximas Honda	58
Tabla 5–3. Parámetros suspensión Yamaha	58
Tabla 5–4. Fuerzas y reacciones máximas Yamaha	61
Tabla 5–5. Parámetros suspensión Kawasaki	61
Tabla 5–6. Fuerzas y reacciones máximas Kawasaki	64
Tabla 5–7. Parámetros suspensión Suzuki	64
Tabla 5–8. Fuerzas y reacciones máximas Suzuki	67
Tabla 5–9. Parámetros suspensión Morbidelli 500GP	68
Tabla 5–10. Fuerzas y reacciones máximas Morbidelli 500GP	71
Tabla 5–11. Parámetros suspensión Elf Honda GP	72
Tabla 5–12. Fuerzas y reacciones máximas Elf Honda GP	75
Tabla 6–1. Posición de equilibrio estático	81
Tabla 7–1. Optimización HONDA	85
Tabla 7–2. Optimización YAMAHA	86
Tabla 7–3. Optimización KAWASAKI	87
Tabla 7–4. Optimización SUZUKI	88
Tabla 7–5. Optimización MORBIDELLI 500GP	90
Tabla 7–6. Optimización ELF HONDA GP	91
Tabla 8–1. Análisis comparativo	94

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Sistema <i>plunger</i>	1
Figura 1-2. Suspensión muelle-amortiguador conectado directamente al chasis. 1° Diseño clásico. 2°: Diseño con amortiguador en ángulo. 3°: Diseño actual mono-shock	1
Figura 1-3. Sistemas de suspensión con bieletas	2
Figura 3-1. Esquema suspensión Honda	9
Figura 3-3. Sistemda de suspensión Honda	10
Figura 3-4. Esquema suspensión Yamaha	10
Figura 3-5. Esquema suspensión Kawasaki	11
Figura 3-6. Sistema de suspensión Kawasaki (1)	11
Figura 3-7. Sistema de suspensión Kawasaki (2)	12
Figura 3-8. Esquema suspensión Suzuki	12
Figura 3-9. Modelo de suspensión Suzuki	13
Figura 3-10. Sistema de suspensión Suzuki	13
Figura 3-11. Esquema suspensión Morbidelli 500GP	14
Figura 3-12. Esquema suspensión Elf Honda GP	15
Figura 3-13. Motocicleta presentada por US-Rancing Engineering en <i>Motostudent</i>	15
Figura 4-1. Modelo paramétrico Honda	17
Figura 4-2. Modelo paramétrico Yamaha	18
Figura 4-3. Modelo paramétrico Kawasaki	19
Figura 4-4. Modelo paramétrico Suzuki	20
Figura 4-5. Modelo paramétrico Morbidelli 500GP	21
Figura 4-6. Modelo paramétrico Elf Honda GP	22
Figura 4-7. Movimiento del eje de la rueda trasera	23
Figura 4-8. Honda: condición de enlace 1	25
Figura 4-9. Honda: condición de enlace 2	25
Figura 4-10. Honda: posición 1	25
Figura 4-11. Honda: posición 2	25
Figura 4-12. Honda: posición 3	26
Figura 4-13. Yamaha: condición de enlace 1	27
Figura 4-14. Yamaha: condición de enlace 2	27
Figura 4-15. Yamaha: posición 1	28
Figura 4-16. Yamaha: posición 2	28
Figura 4-17. Yamaha: posición 3	28

Figura 4-18. Kawasaki: condición de enlace 1	29
Figura 4-19. Kawasaki: condición de enlace 2	29
Figura 4-20. Kawasaki: posición 1	30
Figura 4-21. Kawasaki: posición 2	30
Figura 4-22. Kawasaki: posición 3	30
Figura 4-23. Suzuki: condición de enlace 1	31
Figura 4-24. Suzuki: condición de enlace 2	31
Figura 4-25. Suzuki: posición 1	32
Figura 4-26. Suzuki: posición 2	32
Figura 4-27. Suzuki: posición 3	32
Figura 4-28. Morbidelli: condición de enlace 1	33
Figura 4-29. Morbidelli: condición de enlace 2	33
Figura 4-30. Morbidelli: condición de enlace 3	33
Figura 4-32. Morbidelli: posición 1	34
Figura 4-31. Morbidelli: posición 2	34
Figura 4-33. Morbidelli: posición 3	35
Figura 4-34. Elf Honda GP: condición de enlace 1	36
Figura 4-35. Elf Honda GP: condición de enlace 2	36
Figura 4-36. Elf Honda GP: posición 1	37
Figura 4-37. Elf Honda GP: posición 2	37
Figura 4-38. Elf Honda GP: posición 3	37
Figura 4-39. Honda: barra 2	39
Figura 4-40. Honda: barra 3	39
Figura 4-41. Honda: barra 4	40
Figura 4-42. Honda: barra 5	40
Figura 4-43. Honda: barra 6	41
Figura 4-44. Yamaha: barra 2	41
Figura 4-45. Yamaha: barra 3	42
Figura 4-46. Yamaha: barra 4	42
Figura 4-47. Yamaha: barra 5	43
Figura 4-48. Yamaha: barra 6	43
Figura 4-49. Kawasaki: barra 2	44
Figura 4-50. Kawasaki: barra 3	44
Figura 4-51. Kawasaki: barra 4	44
Figura 4-52. Kawasaki: barra 5	45
Figura 4-53. Kawasaki: barra 6	46
Figura 4-54. Suzuki: barra 2	46
Figura 4-55. Suzuki: barra 3	46
Figura 4-56. Suzuki: barra 4	47

Figura 4-57. Suzuki: barra 5	47
Figura 4-58. Suzuki: barra 6	48
Figura 4-59. Morbidelli: barra 2	48
Figura 4-60. Morbidelli: barra 3	49
Figura 4-61. Morbidelli: barra 4	50
Figura 4-62. Morbidelli: barra 5	50
Figura 4-63. Morbidelli: barra 6	50
Figura 4-64. Morbidelli: barra 7	51
Figura 4-65. Morbidelli: barra 8	51
Figura 4-66. Elf Honda GP: barra 2	52
Figura 4-67. Elf Honda GP: barra 3	52
Figura 4-68. Elf Honda GP: barra 4	52
Figura 4-69. Elf Honda GP: barra 5	53
Figura 4-70. Elf Honda GP: barra 6	53
Figura 5-1. Variables cinemáticas basculante HONDA	56
Figura 5-2. Variables cinemáticas biela superior HONDA	56
Figura 5-3. Variables cinemáticas amortiguador HONDA	56
Figura 5-4. Variables cinemáticas biela inferior HONDA	56
Figura 5-5. Variables cinemáticas elongación HONDA	56
Figura 5-6. Fuerza de reacción pares móviles HONDA	57
Figura 5-7. Fuerza de reacción pares fijos HONDA	57
Figura 5-8. Reacciones par prismático HONDA	57
Figura 5-9. Fuerza amortiguador HONDA	57
Figura 5-10. Fuerza eje trasero HONDA	57
Figura 5-11. Variables cinemáticas basculante YAMAHA	59
Figura 5-12. Variables cinemáticas biela superior YAMAHA	59
Figura 5-13. Variables cinemáticas amortiguador YAMAHA	59
Figura 5-14. Variables cinemáticas biela inferior YAMAHA	59
Figura 5-15. Variables cinemáticas elongación YAMAHA	60
Figura 5-16. Fuerza de reacción pares móviles YAMAHA	60
Figura 5-17. Fuerza de reacción pares fijos YAMAHA	60
Figura 5-18. Reacciones par prismático YAMAHA	60
Figura 5-19. Fuerza amortiguador YAMAHA	60
Figura 5-20. Fuerza eje trasero YAMAHA	61
Figura 5-21. Variables cinemáticas basculante KAWASAKI	62
Figura 5-22. Variables cinemáticas biela superior KAWASAKI	62
Figura 5-23. Variables cinemáticas amortiguador KAWASAKI	62
Figura 5-24. Variables cinemáticas biela inferior KAWASAKI	62
Figura 5-25. Variables cinemáticas elongación KAWASAKI	63

Figura 5-26. Fuerza de reacción pares móviles KAWASAKI	63
Figura 5-27. Fuerza de reacción pares fijos KAWASAKI	63
Figura 5-28. Reacciones par prismático KAWASAKI	63
Figura 5-29. Fuerza amortiguador KAWASAKI	63
Figura 5-30. Fuerza eje trasero KAWASAKI	64
Figura 5-31. Variables cinemáticas biela superior SUZUKI	65
Figura 5-32. Variables cinemáticas biela inferior SUZUKI	65
Figura 5-33. Variables cinemáticas basculante SUZUKI	65
Figura 5-34. Variables cinemáticas amortiguador SUZUKI	65
Figura 5-35. Variables cinemáticas elongación SUZUKI	66
Figura 5-36. Fuerza de reacción pares móviles SUZUKI	66
Figura 5-37. Fuerza de reacción pares fijos SUZUKI	66
Figura 5-38. Reacciones par prismático SUZUKI	66
Figura 5-39. Fuerza amortiguador SUZUKI	66
Figura 5-40. Fuerza eje trasero SUZUKI	67
Figura 5-41. Variables cinemáticas amortiguador MORBIDELLI 500GP	68
Figura 5-42. Variables cinemáticas biela superior I MORBIDELLI 500GP	68
Figura 5-43. Variables cinemáticas biela superior II MORBIDELLI 500GP	69
Figura 5-44. Variables cinemáticas biela media MORBIDELLI 500GP	69
Figura 5-45. Variables cinemáticas biela inferior MORBIDELLI 500GP	69
Figura 5-46. Variables cinemáticas basculante MORBIDELLI 500GP	69
Figura 5-47. Variables cinemáticas elongación MORBIDELLI 500GP	69
Figura 5-48. Fuerza de reacción pares móviles MORBIDELLI 500GP	70
Figura 5-49. Fuerza de reacción pares fijos MORBIDELLI 500GP	70
Figura 5-50. Reacciones par prismático MORBIDELLI 500GP	71
Figura 5-51. Fuerza amortiguador MORBIDELLI 500GP	71
Figura 5-52. Fuerza eje trasero MORBIDELLI 500GP	71
Figura 5-53. Variables cinemáticas biela superior ELF HONDA GP	73
Figura 5-54. Variables cinemáticas basculante ELF HONDA GP	73
Figura 5-55. Variables cinemáticas biela inferior ELF HONDA GP	73
Figura 5-4. Variables cinemáticas amortiguador ELF HONDA GP	73
Figura 5-56. Variables cinemáticas elongación ELF HONDA GP	73
Figura 5-57. Fuerza de reacción pares móviles ELF HONDA GP	74
Figura 5-58. Fuerza de reacción pares fijos ELF HONDA GP	74
Figura 5-59. Reacciones par prismático ELF HONDA GP	74
Figura 5-60. Fuerza amortiguador ELF HONDA GP	74
Figura 5-61. Fuerza eje trasero ELF HONDA GP	74
Figura 6-1. Fuerza vertical de la rueda frente al desplazamiento, de <i>Motorcycles Dynamics</i>	78
Figura 6-2. Progresividad HONDA	79

Figura 6-3. Progresividad YAMAHA	79
Figura 6-4. Progresividad KAWASAKI	79
Figura 6-5. Progresividad SUZUKI	79
Figura 6-6. Progresividad MORBIDELLI 500GP	79
Figura 6-7. Progresividad ELF HONDA GP	79
Figura 7-1. Posiciones del amortiguador para alcanzar distintas características	83
Figura 7-2. Progresividad SUZUKI (obtenida del proceso iterativo)	89
Figura 7-3. Fuerza eje SUZUKI optimizada	89

Notación

gdl	Grado/s de libertad
PPV	Principio de Potencias Virtuales
TCM	Teorema del Momento Cinético
PEE	Punto de Equilibrio Estático
sen	Función seno
cos	Función coseno

1 INTRODUCCIÓN

La función primordial de un sistema de suspensión consiste en aislar al conductor y al resto de la estructura del vehículo de las posibles irregularidades del terreno, proporcionando una mayor comodidad para el piloto y reduciendo las vibraciones sufridas por los componentes mecánicos. Además de aportar una mejoría en la fiabilidad y longevidad del vehículo, la suspensión favorece la adherencia de la rueda con la superficie garantizando una mejoría en el control y la estabilidad durante la conducción.

A pesar de que las suspensiones delanteras se implantaron antes de la Primera Guerra Mundial, las traseras no comenzarían a comercializarse hasta, aproximadamente, los años 40 con el sistema *plunger*. A esta suspensión básica constituida por dos conjuntos muelle-amortiguador a ambos lados de la rueda, se le añadió posteriormente un brazo oscilante (conocido como bastidor). Sin embargo, aunque el uso del bastidor significó una notable mejoría, la simplicidad del diseño no lograba evitar el momento producido por las fuerzas de suspensión ni los problemas de rigidez torsional.



Figura 1-1. Sistema *plunger*

Como solución a estas limitaciones, se optó por triangular el basculante y conectar el amortiguador en su vértice, tal y como había propuesto Vincent en 1928. Esto permitió alejar el amortiguador de la rueda y utilizar un único conjunto muelle-amortiguador, dando lugar a los sistemas de suspensión empleados en el presente.

La sencillez y las múltiples posibilidades de posicionar el amortiguador variando su inclinación o distancia respecto al eje de la rueda, ha hecho de este sistema el más extendido para las motocicletas de ciudad. No obstante, es difícil alcanzar unas constantes de muelle y amortiguamiento progresivas únicamente a través de medios geométricos.

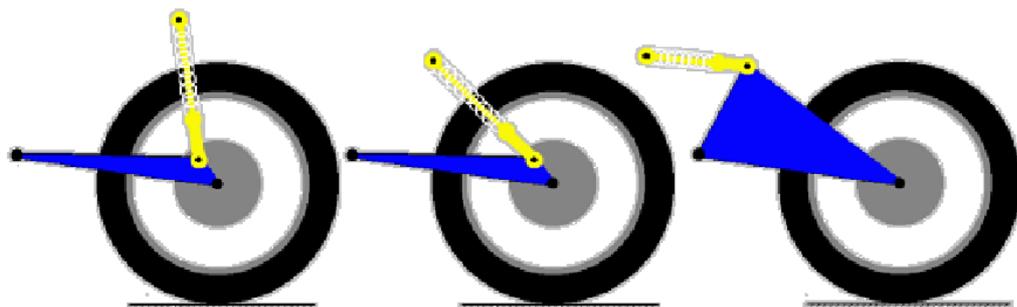


Figura 1-2. Suspensión muelle-amortiguador conectado directamente al chasis.

1º: Diseño clásico. 2º: Diseño con amortiguador en ángulo. 3º: Diseño actual mono-shock.

Fue a mediados de los 70, cuando Kawasaki comenzó a comercializar un sistema constituido por bieletas que solventó esta dificultad gracias a la manivela intermedia situada entre el chasis y el basculante. Este sistema se introdujo en motocross y posteriormente se extendió a las motocicletas de competición y deportivas. Está formado por un mecanismo articulado de cuatro barras, cuyas dimensiones y disposición dan lugar a un gran número de opciones.

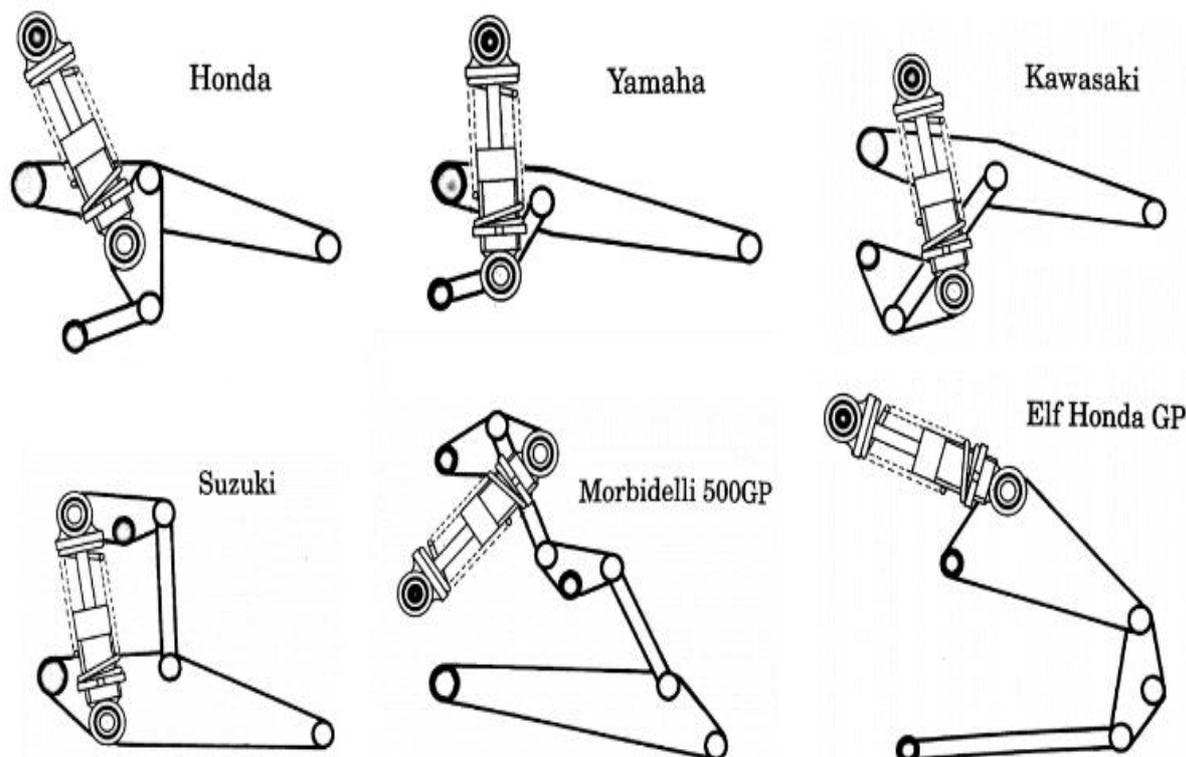


Figura 1-3. Sistemas de suspensión con bieletas

En la Figura 1-3, se muestra un conjunto de seis sistemas de suspensión con bieletas pertenecientes a las principales marcas de motocicletas, los cuales serán objeto de estudio en este proyecto. Para referirse a este tipo de suspensión, cada marca le ha dado un nombre diferente a sus diseños: *Uni-track* (Kawasaki), *Pro-link* (Honda), *Full-floater* (Suzuki) y *Monocross* (Yamaha).

A pesar de la diversidad de configuraciones, todas ellas posibilitan un comportamiento óptimo. Siendo la elección entre los diseños debida principalmente al espacio disponible y las consideraciones estructurales.

1.1. Objetivo

La finalidad de este proyecto es estudiar el comportamiento de los distintos sistemas de suspensión propuestos, de forma que permita aumentar los conocimientos de este componente fundamental.

Con este objetivo en mente, se ha decidido analizar los sistemas de suspensión como mecanismos individuales y aislados, de forma que nos permita focalizar el estudio en el mecanismo de suspensión y no en el conjunto suspensión-motocicleta.

En primer lugar, se realizará una propuesta inicial de diseño que servirá de partida para desarrollar el análisis cinemático y dinámico de cada uno de los sistemas.

Una vez resuelto y conocido su funcionamiento, se procederá a optimizar las dimensiones y disposición de los puntos fijos de estos mecanismos iniciales. Para optimizar el diseño de los diferentes modelos, se considerarán la progresividad y el punto de equilibrio estático como criterios de diseño. De esta forma, se

podrá realizar una comparativa entre las distintas suspensiones y averiguar las prestaciones que podrían proporcionar cada uno de ellos.

1.2. Estructura del proyecto

Este proyecto está constituido por un primer bloque introductorio que se inicia con un breve recorrido sobre la evolución de los sistemas de suspensión trasera a lo largo de la historia hasta llegar a las suspensiones de bieletas analizadas en este documento. Tras fijar los objetivos fundamentales del estudio, se expondrán las herramientas matemáticas, físicas y gráficas necesarias para desarrollar el modelado de las suspensiones.

Una vez presentada la topología de los mecanismos propuestos, dará comienzo el segundo bloque de análisis numérico, que comenzará con el planteamiento del modelo paramétrico inicial. En él, se establecerán las dimensiones y distribución de los componentes, además de definir las variables dependientes e independientes del modelo, necesarias para resolver los problemas de posición, velocidad y aceleración.

Conociendo el movimiento de todos los elementos de los distintos mecanismos gracias a resolución del análisis cinemático, se continuará con el modelado dinámico, con el fin de obtener todas las fuerzas internas y externas que actúan sobre los sistemas.

Obtenidos todos los resultados para cada una de las suspensiones, se alcanzará el tercer bloque del proyecto, donde se llevará a cabo la optimización de los modelos planteados. Como criterios de diseño se considerarán propiedades tales como la progresividad y el punto de equilibrio estático.

Por último, se recogerá, en el bloque final a modo de tabla, todos los resultados obtenidos; de forma que permita comparar los seis sistemas de suspensión y poder extraer las conclusiones finales sobre el funcionamiento de estas suspensiones.

2 HERRAMIENTAS DE CÁLCULO Y DISEÑO

Para llevar a cabo el modelado de los sistemas de suspensión, se ha hecho esencialmente uso del software de cálculo matemático MATLAB.

Se ha desarrollado un programa principal para cada una de las seis suspensiones, donde se definen todos los parámetros y propiedades necesarias para la resolución cinemática y dinámica de los mecanismos, además de las representaciones gráficas que ilustran los resultados obtenidos.

Anexo al código principal, se han definido varias funciones secundarias necesarias para el análisis de los problemas de posición, velocidad y aceleración; y para el cálculo de todas las fuerzas internas y externas que afectan al mecanismo.

Como herramientas auxiliares, se han utilizado los programas de diseño AutoCAD y Solid Edge, respectivamente, para la representación del modelo paramétrico de los mecanismos y para obtener con mayor exactitud los centros de gravedad y los tensores de inercia. Adicionalmente, se ha facilitado el modelado de los parámetros dimensionales y su visualización inicial, gracias al software de simulación de mecanismos planos desarrollado por la Universidad de Málaga, WinMecC.

Por otro lado, anteriormente se mencionó que el estudio de las suspensiones se ha ejecutado como un mecanismo aislado al resto de la motocicleta. Además, es conveniente mencionar que se plantea como un problema de movimiento plano, ya que todos sus componentes realizan movimientos en planos paralelos y sus trayectorias describen curvas planas.

Por último, todos los elementos de los mecanismos serán considerados sólidos rígidos, pues aunque ignorar las deformaciones nos aleja de la realidad, esta simplificación permite plantear un modelo matemático útil y práctico para el objetivo que concierne a este proyecto.

A continuación, se explicará con mayor detalle los planteamientos matemáticos y físicos que se ha seguido para modelar analíticamente los sistemas estudiados.

2.1 Modelado cinemático

El primer paso que conviene seguir para realizar el estudio de un mecanismo, es la esquematización simplificada y visual del sistema que se pretende analizar. Debe recoger las características suficientes para realizar el estudio y, a su vez, obviar el resto de componentes y factores de la máquina completa, como sería la motocicleta en este caso.

Como se pretende elaborar un estudio tanto geométrico como cinemático y dinámico, no basta con representar cada sólido del mecanismo y los pares cinemáticos que los conectan; también se deberán incluir la localización de los mismos respecto a cada miembro (distancia entre puntos fijos, dimensiones, ángulos, etc.), las características inerciales, las reacciones entre elementos y las cargas externas.

Esta representación esquemática será referida en este documento como modelo paramétrico, el cual se mostrará detalladamente en el capítulo 4.

Para determinar el movimiento de los mecanismos independientemente de las fuerzas que actúen sobre ellos, el problema que se necesita resolver es puramente geométrico y basta con conocer la posición del mismo número de elementos del mecanismo, como grados de libertad (gdl) tenga. En este caso, todos los mecanismos poseen un único gdl, por lo que, conociendo la posición de uno de ellos, las demás quedarán definidas.

Para abordar el problema cinemático, es necesario definir un vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} conformado por variables geométricas q_i de posición y orientación empleadas para definir la configuración del sistema mecánico.

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

Donde n es el número de coordenadas generalizadas.

Estas variables están ligadas entre sí por un número de ecuaciones de dependencia impuestas por los enlaces entre los distintos elementos del mecanismo y son conocidas por *ecuaciones de restricción, de enlace o de lazo*.

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0$$

Si se conociera el valor de una coordenada generalizada (nombrada coordenada independiente), se podría averiguar el valor de las demás coordenadas resolviendo este sistema de ecuaciones. Sin embargo, el valor del vector coordenadas generalizadas no es conocido para ninguno de nuestros mecanismos, por lo que ha sido necesario añadir una ecuación de restricción adicional, que se corresponderá con el movimiento vertical del eje de la rueda trasera (coordenada independiente).

Esta restricción, simulará el movimiento vibratorio que debe absorber el mecanismo de suspensión y estará en función del tiempo. A este tipo de ecuaciones en las que el tiempo aparece explícitamente, se les conoce como *ecuaciones de restricción rehónomas o de gobierno* e impondrá la evolución temporal del resto de coordenadas, eliminando forzosamente el gdl que nos impedía resolver el sistema.

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0$$

Este sistema de ecuaciones no es lineal, por lo que, se hace uso de la función *fsolve* de MATLAB para su resolución. Una vez resuelto, el problema de posición quedaría completamente definido para todo su recorrido.

Respecto al análisis de velocidades, dado que los valores de la velocidad generalizada independiente del eje de la rueda trasera y el tiempo son datos, se puede hallar la distribución de velocidades de todos los sólidos del mecanismo.

En primer lugar, se deriva el sistema de ecuaciones de restricción $\Phi(\mathbf{q}, t)$ respecto al tiempo para obtener un sistema de ecuaciones cinemáticas lineales.

$$\frac{d\Phi(\mathbf{q}, t)}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_q \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0$$

Φ_q : matriz jacobiana del sistema de ecuaciones.

Φ_t : vector de derivadas parciales respecto al tiempo.

Para resolver el sistema sólo hay que despejar el vector de velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\Phi_q \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}} = -[\Phi_q]^{-1} \cdot \Phi_t$$

Respecto al análisis de aceleraciones, se realiza el mismo procedimiento seguido para las velocidades. Se deriva la expresión empleada para las velocidades respecto al tiempo y se despeja el vector de aceleraciones generalizadas $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\Phi_q \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Phi_q \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0$$

$$\Phi_q \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -(\dot{\Phi}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}} = -[\Phi_q]^{-1} \cdot (\dot{\Phi}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t)$$

Una vez resuelta el problema de aceleraciones, el análisis cinemático quedaría completamente definido, lo que nos permite obtener la posición, velocidad o aceleración de cualquier punto del mecanismo en cualquier instante.

Además de proporcionar información acerca del comportamiento de los sistemas de suspensión, es estrictamente necesario para obtener una solución numérica en el modelado dinámico. Para ello, se impondrán relaciones cinemáticas que se establecen entre los enlaces de los sólidos rígidos, dando lugar a ecuaciones lineales respecto a las velocidades angulares y las velocidades entre dos puntos.

2.2 Modelado dinámico

Mediante los métodos de resolución de dinámica inversa es posible determinar las fuerzas y momentos que aparecen en los enlaces, además de la carga externa producida por el movimiento vertical impuesto en el eje de la rueda trasera y la generada en el amortiguador.

Este problema se ha abordado empleando el *Principio de D'Alembert*, el cual permite plantear, en cada instante, para cada sólido del sistema, el equilibrio entre las fuerzas aplicadas, las de reacción y las de inercia.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int} + \mathbf{F}_i^{iner} = \mathbf{0}$$

n : número de sólidos.

\mathbf{F}_i^{ext} : vector de fuerzas externas aplicadas sobre el sólido i .

\mathbf{F}_i^{int} : vector de fuerzas internas o de reacción del sólido i producidas por la unión entre dos sólidos.

\mathbf{F}_i^{iner} : vector de fuerza de inercia del sólido i .

Esta expresión da lugar a dos ecuaciones lineales y escalares de equilibrio, una para cada dirección del sistema de referencia global.

Adicionalmente, se incluirá una tercera ecuación lineal procedente del *Teorema del Momento Cinético* (TCM), práctica para el estudio de sistemas multicuerpos:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i^{ext} + \mathbf{M}_i^{int} + \mathbf{M}_i^{iner} = \mathbf{0}$$

\mathbf{M}_i^{ext} : vector de momentos externos aplicados sobre el sólido i .

\mathbf{M}_i^{int} : vector de momentos internos o de reacción del sólido i producidos por la unión entre dos sólidos.

\mathbf{M}_i^{iner} : vector de momentos de inercia del sólido i .

Particularizando estas tres ecuaciones para cada uno de los sólidos se genera un sistema de ecuaciones compatible, que permitirá cerrar el modelado dinámico deseado.

En el cálculo de los datos necesarios para la obtención del punto de equilibrio estático de las suspensiones, se contempla la posibilidad de hacer uso del *Principio de Potencias Virtuales* (PPV).

Este método permite plantear el análisis dinámico de forma selectiva, pues no es necesario plantear un

elevado número de ecuaciones de equilibrio para hallar la información concreta de interés.

El PPV parte del *Principio de D'Alembert* aplicado sobre una partícula material. A esta ecuación vectorial, se le multiplica escalarmente por un vector arbitrario de velocidad \mathbf{v}_i^* , dando como resultado una ecuación escalar.

Si este mismo procedimiento se aplica sobre la ecuación aportada por el TCM, multiplicándolo por un vector arbitrario de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_i^*$ y se combina con la ecuación anexa a la proporcionada por el *Principio de D'Alembert*, se alcanza la siguiente expresión del PPV:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{ext} \cdot \mathbf{v}_i^{P_i^*} + \mathbf{M}_i^{ext} \cdot \boldsymbol{\omega}_i^* + \mathbf{F}_i^{iner} \cdot \mathbf{v}_i^{G_i^*} + \mathbf{M}_i^{iner} \cdot \boldsymbol{\omega}_i^* = 0$$

Conviene notar que en la expresión previa no aparecen las fuerzas ni los momentos internos, esto es debido a que los productos entre dichas fuerzas y momentos y los vectores arbitrarios de velocidad, son nulos.

Para poder comprender la afirmación anterior, es necesario aclarar la definición de este vector arbitrario al que se le designa como *velocidad virtual*. El motivo de su nombre se debe a que dicho vector no tiene por qué corresponderse necesariamente a la velocidad real del sólido material. No obstante, sí debe ser compatible con las restricciones cinemáticas del sistema y evaluarse en el punto de aplicación de dicha fuerza o momento.

Por estos motivos, las velocidades virtuales que multiplican a las fuerzas o momentos de reacción, producen productos (potencias virtuales) nulas; sea porque el producto es ortogonal o porque la velocidad del punto de aplicación es nula. Esta es otra de las ventajas fundamentales de usar este método cuando lo que se pretende es averiguar una fuerza o alguna variable cinemática específica.

3 ANÁLISIS TOPOLÓGICO

El propósito habitual de los sistemas de suspensión por bieletas es lograr unas constantes de rigidez y amortiguamiento progresivas a través de su geometría. Esto implica que la dureza de la suspensión es distinta dependiendo del tramo del recorrido en el que se encuentre. En la etapa inicial se apreciará más blando, de forma que mitigue las irregularidades más pequeñas; y conforme avance el recorrido, se irá terciando más duro asegurando la proporcionalidad hasta el final de la carrera, idóneo para absorber obstáculos de mayores dimensiones.

Otra gran ventaja que ofrece este tipo de suspensión es la posibilidad de ubicar el amortiguador en un gran número de orientaciones y configuraciones. Además de ser, generalmente, muy fáciles de modificar y regular.

Por otro lado, al utilizar los sistemas de bieletas aumenta el número de puntos de rotación, ofreciendo como consecuencia un mayor movimiento del eje de la rueda trasera para la misma carrera del pistón del amortiguador.

Para alcanzar estas prestaciones, las distintas firmas de motocicletas presentan una gran variedad de diseños, de los cuales, se han escogido seis configuraciones distintas ilustradas en la Figura 1-3.

La mayoría de sistemas de bieletas están compuestos por un mecanismo de 4 barras fijados al chasis. El basculante se corresponde con una de las barras de entrada o salida y el amortiguador está situado entre dos barras móviles o una fija y otra móvil.

A continuación, se analizará detalladamente la topología de cada uno de los diseños de forma individual.

3.1 Suspensión Honda

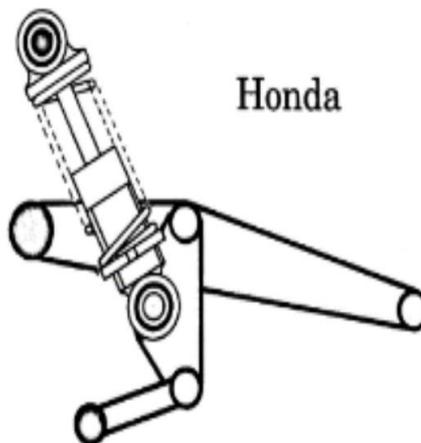


Figura 3-1 . Esquema suspensión Honda

Este sistema de suspensión se caracteriza por tener el elemento terciario actuando como acoplador y conectado al basculante. El mecanismo está anclado al chasis a través del basculante y de una segunda bieleta conectada al acoplador.

El amortiguador se encuentra en posición vertical o ligeramente inclinado, fijado en uno de sus extremos al chasis y, en el otro, al último vértice libre de la bieleta terciaria.

Este tipo de suspensión se puede encontrar en un gran número de motocicletas de media cilindrada, de cross y en motocicletas diseñadas para terrenos irregulares.

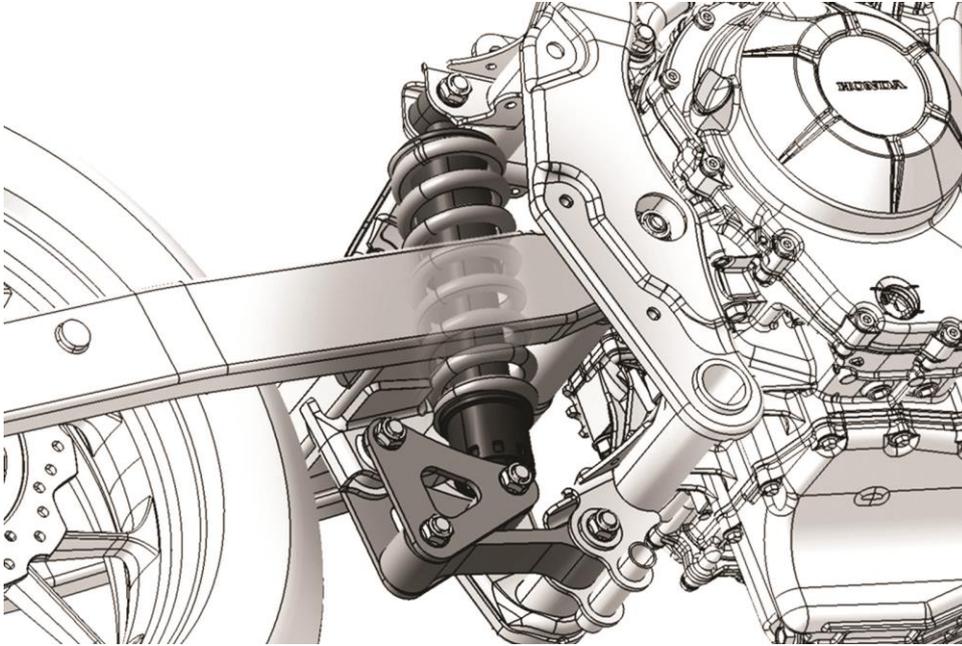


Figura 3-2. Modelo suspensión Honda



Figura 3-3 Sistema suspensión Honda

3.2 Suspensión Yamaha

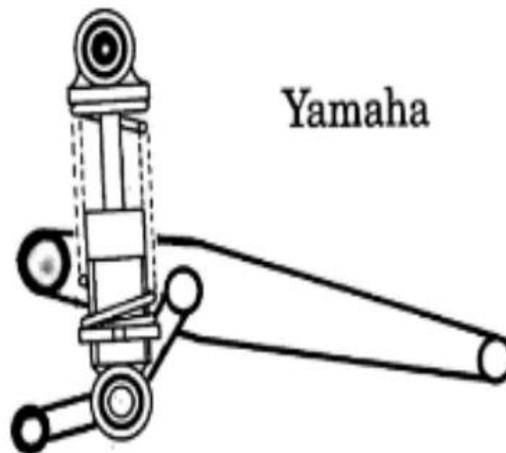


Figura 3-4 Esquema suspensión Yamaha

El diseño que presenta Yamaha es una variante del anterior, difiriendo únicamente en que el acoplador es una barra en vez de un elemento terciario. Uno de sus extremos está conectado al basculante y el otro forma un par ternario con la biela y el amortiguador, ambos fijados al chasis.

El amortiguador está dispuesto también de manera similar, en posición vertical y sutilmente inclinado.

3.3 Suspensión Kawasaki

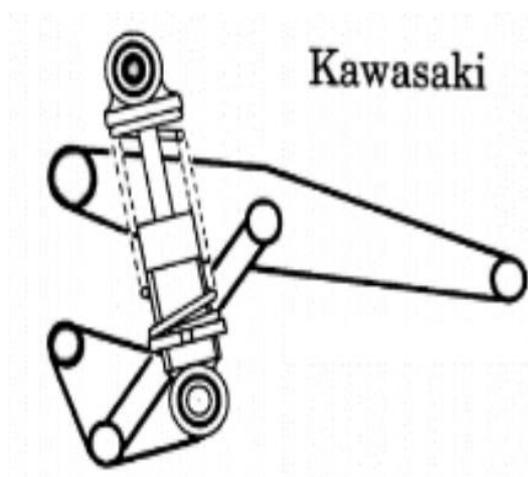


Figura 3-5 Esquema suspensión Kawasaki

En este caso, el balancín es un elemento terciario posicionado debajo del basculante y fijado al chasis. El basculante está anclado al chasis y relacionado con el balancín mediante dos bieletas en paralelo de mayor longitud que las descritas hasta este momento.

El amortiguador está unido al vértice libre del balancín y fijado por encima del basculante al chasis. Está posicionado verticalmente e inclinado como los anteriores.



Figura 3-6. Sistema de suspensión Kawasaki (1)



Figura 3-7. Sistema de suspensión Kawasaki (2)

3.4 Suspensión Suzuki

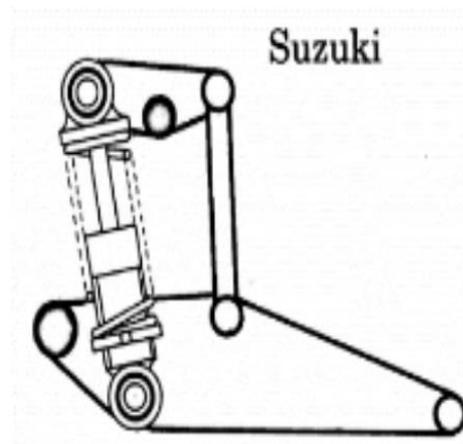


Figura 3-8. Esquema suspensión Suzuki

Suzuki propone un diseño distinto a los anteriores, pues el balancín se encuentra situado por encima del basculante y fijado al chasis por su vértice central. Por un lado, conecta con dos bieletas en paralelo unidas a ambos brazos del basculante. Y por el otro lado, está enlazado con el amortiguador, en posición vertical e inclinado ligeramente de igual forma que los anteriores descritos. Como particularidad, el amortiguador no está sujeto al chasis, sino conectado al basculante.

Con este tipo de balancín, lo que se pretende es distribuir las fuerzas a través de los elementos con la intención de lograr un comportamiento progresivo idóneo para motocicletas específicas para el campo o de cross como la que se ilustra a continuación.

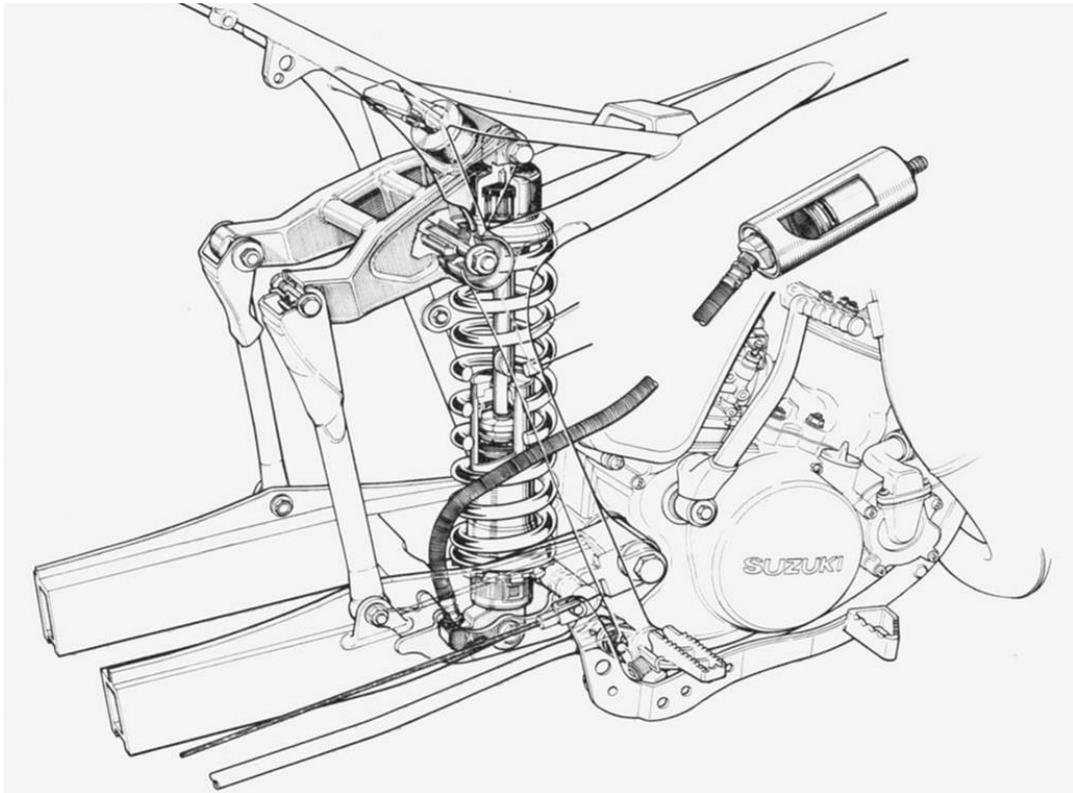


Figura 3-9. Modelo de suspensión Suzuki



Figura 3-10. Sistema de suspensión Suzuki

3.5 Suspensión Morbidelli 500GP

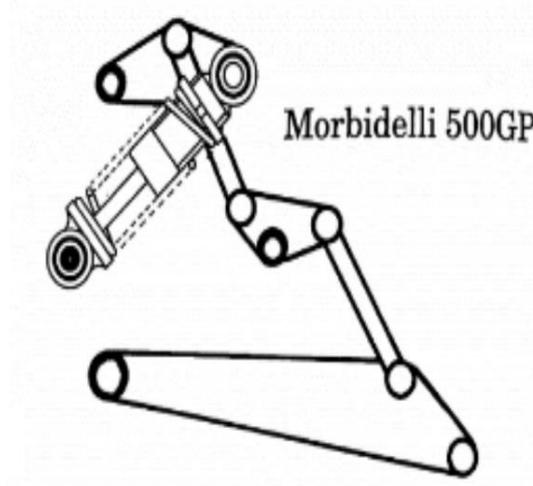


Figura 3-11. Esquema suspensión Morbidelli 500GP

Este es el sistema de suspensión más singular de los seis. No está compuesto por un único 4 barras como todos los demás, sino por dos cuadriláteros articulados.

El 4 barras superior, está formado por un elemento terciario fijado al chasis y unido por una bieleta, en forma de barra, a otro elemento terciario también anclado al chasis.

El amortiguador está enlazado al balancín superior y fijado al eslabón fijo en su otro extremo. Está posicionado verticalmente con orientación contraria a los anteriores y mayor inclinación.

El cuadrilátero inferior está constituido por el basculante, el cual queda situado por debajo de todo el mecanismo y conectado mediante una bieleta acopladora que enlaza con el balancín central. El cual desempeña la función de eslabón de unión entre ambos 4 barras.

La principal desventaja que se puede observar de este mecanismo, es el espacio adicional requerido para su instalación en la motocicleta. Además, un sistema establecido por dos barras más en comparación con los demás, implica cierto incremento de peso, mayor mantenimiento y coste añadido.

Posiblemente, estos inconvenientes sean los motivos por los cuales este tipo de suspensión no se haya extendido entre las motocicletas de media cilindrada más comercializadas, ciñéndose principalmente a las motocicletas de competición en velocidad. La afirmación de esta hipótesis, surge a raíz de hablar con distintos profesionales mecánicos con los que pude comentar el conjunto de suspensiones expuesto a estudio. Todos confirmaron no conocer este tipo de sistema, incluido uno de ellos, que además de su experiencia como mecánico, era competidor de motocross.

Por consiguiente, es lógico pensar que las prestaciones principales de este sistema sean la progresividad proporcionada y otros tipos de ventajas útiles para las motocicletas de competición.

3.6 Suspensión Elf Honda GP

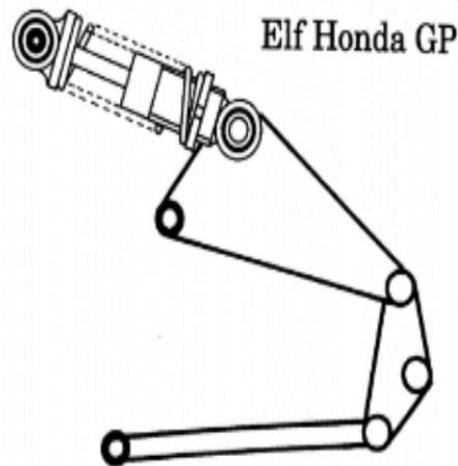


Figura 3-12. Esquema suspensión Elf Honda GP

Por último, se propone un diseño más de Honda, bastante diferente a los anteriores. En primer lugar, todo el mecanismo se encuentra por debajo del amortiguador, el cual está orientado casi horizontal.

En segundo lugar, lo que más caracteriza a este modelo es la posición del basculante. No está fijado al chasis, sino actuando como acoplador entre los dos balancines. Si nos ceñimos al esquema de este diseño, el basculante tendría un tamaño mucho más reducido que los otros sistemas, siendo la longitud de las bieletas las que le den dimensión al mecanismo hasta acercarlo al eje de la rueda trasera.

El basculante está unido a una bieleta en forma de barra, anclada al eslabón fijo; y por la parte superior, a un elemento terciario fijada al chasis y conectado con el amortiguador.

No se ha logrado encontrar ninguna ilustración de este sistema de suspensión, sin embargo, la moto presentada por el equipo US-Rancing Engineering en la competición bienal *Motostudent* incluía una variante de este diseño en concreto.



Figura 3-13. Motocicleta presentada por US-Rancing Engineering en *Motostudent*

4 ANÁLISIS NUMÉRICO

En este bloque se describirá detalladamente el procedimiento seguido para realizar el análisis completo de los mecanismos y se desarrollarán los modelos matemáticos empleados para la obtención de todos los datos de interés de los sistemas de suspensión.

4.1 Modelo paramétrico

Como se mencionó con anterioridad, el primer paso a seguir para estudiar un mecanismo es la esquematización del sistema mecánico. Para ello, se partirá de las representaciones mostradas en la Figura 1-3, en las que ya se encuentran identificados todos los sólidos y pares cinemático.

Puesto que el objetivo final es describir el comportamiento físico de los mecanismos, es necesario ilustrar un modelo global que tenga en consideración todos los parámetros y variables del sistema necesarias a fin de obtener una descripción cuantificable.

Este conjunto de variables se corresponden con las coordenadas generalizadas del sistema, necesarias y suficientes para describir cualquier configuración de la suspensión. Generalmente, se suelen escoger distancias o ángulos característicos y fácilmente identificables. En este estudio, se ha decidido seleccionar los ángulos absolutos de cada uno de los sólidos articulados y la distancia variable entre los puntos extremos del amortiguador, que se representará como un par prismático.

Además de indicar los parámetros que definirán la geometría del mecanismo y las coordenadas generalizadas que proporcionarán su posición, se representarán las propiedades másicas de cada elemento del sistema necesarias para el análisis dinámico posterior (ángulos y distancias para localizar el centro de gravedad).

Se debe mencionar, que el sistema de referencia global y el sentido de giro considerado positivo, también estarán representados en cada modelo paramétrico. A cada uno de los sólidos del sistema se le otorgará un identificativo numérico, considerando el chasis como el eslabón fijo I . Los pares de revolución se designan con una letra en mayúsculas, a diferencia de los pares de rotación fijos que se nombrarán como O_i (siendo i el sólido asociado correspondiente).

A continuación, se muestran en los subapartados siguientes los modelos paramétricos definidos para el análisis de los seis mecanismos, esbozados con AutoCAD.

4.1.1 Suspensión Honda

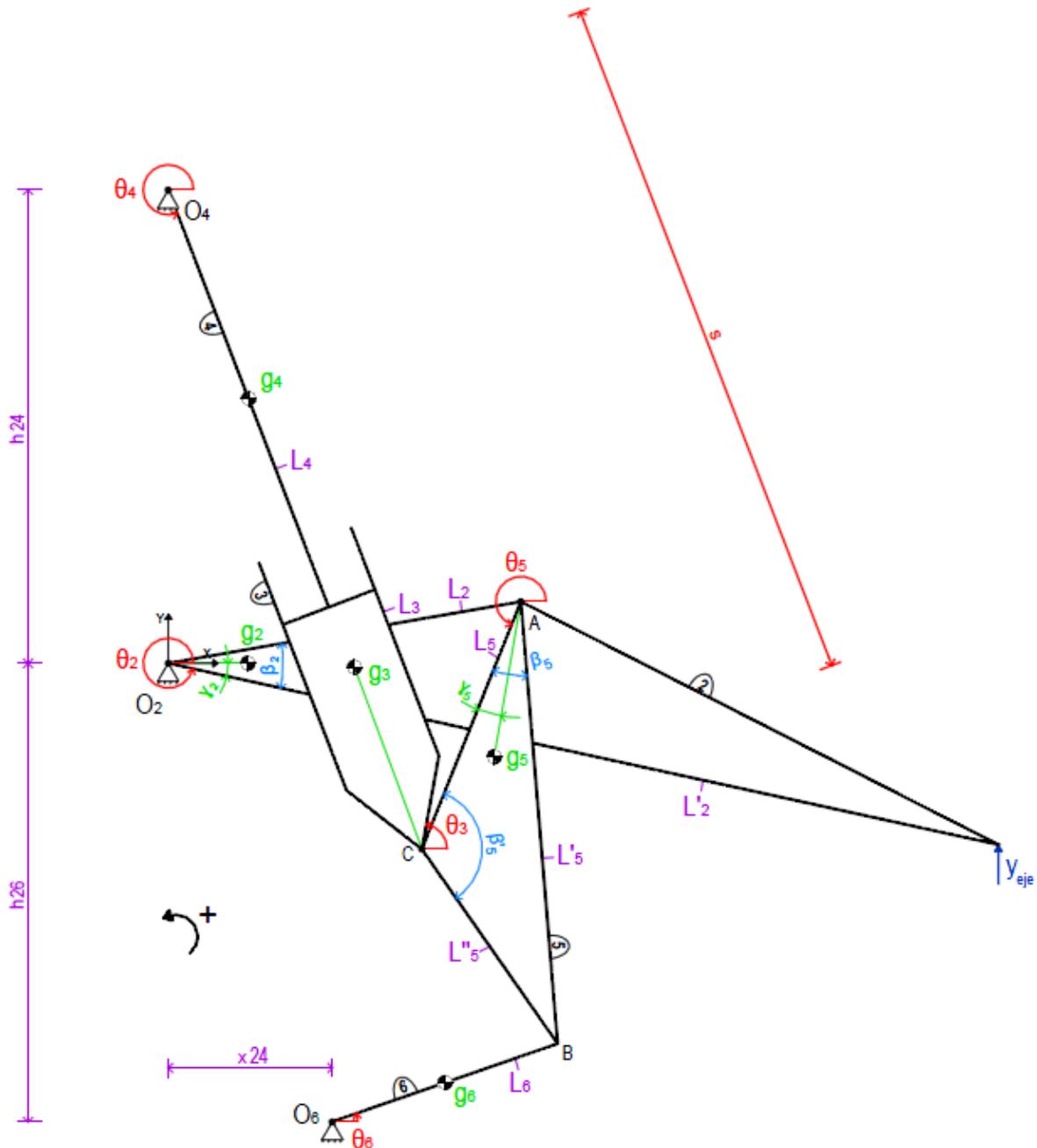


Figura 4-1. Modelo paramétrico Honda

Longitudes de las barras: L_2 L'_2 L_3 L_4 L_5 L'_5 L''_5 L_6

Ángulos de barras: β_2 β_5 β'_5

Localización de los pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia global: x_{24} h_{24} x_{26} h_{26}

Localización de los centros de gravedad: g_2 g_3 g_4 g_5 g_6

Variables cinemáticas: θ_2 θ_3 θ_4 θ_5 θ_6 s

Movimiento aplicado en el eje de la rueda: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $\mathbf{q}_{Honda} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ s \end{bmatrix}$

4.1.2 Suspensión Yamaha

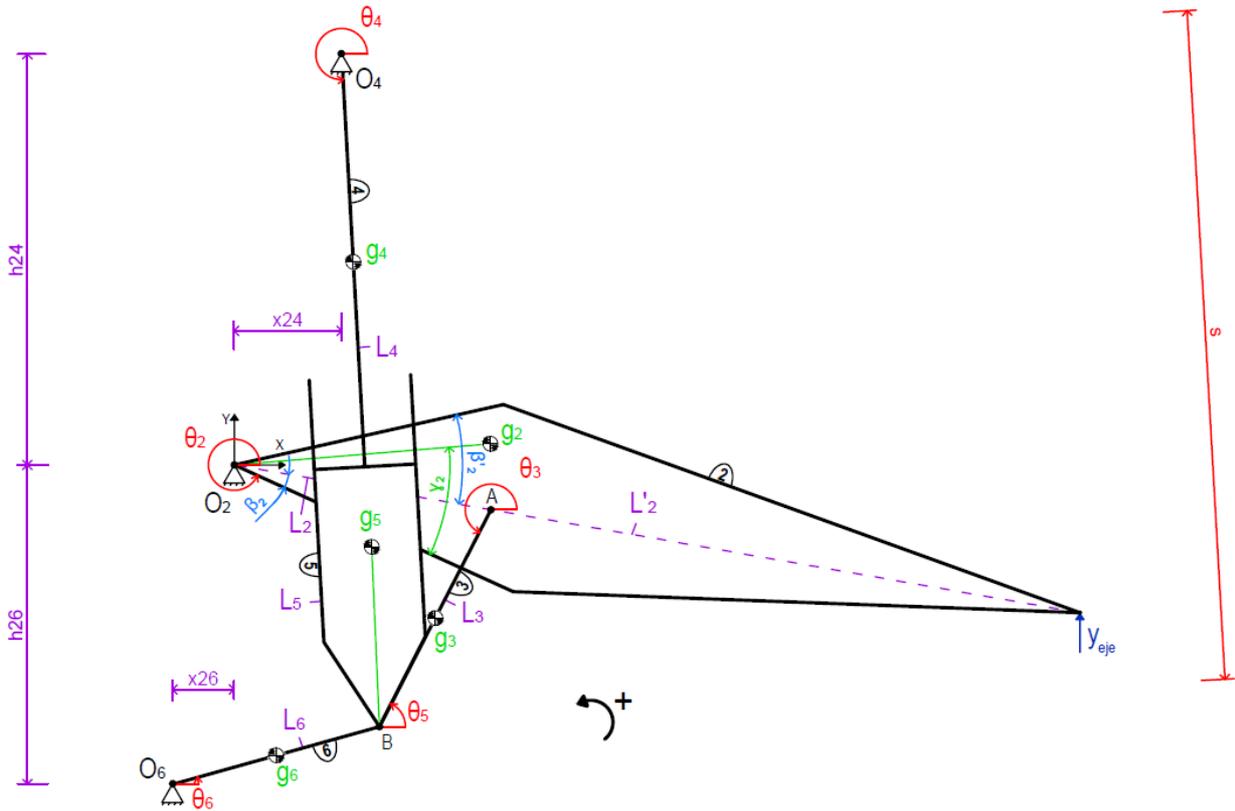


Figura 4-2. Modelo paramétrico Yamaha

Longitudes de las barras: L_2 L'_2 L_3 L_4 L_5 L_6

Ángulos de barras: β_2 β'_2

Localización de los pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia global: x_{24} h_{24} x_{26} h_{26}

Localización de los centros de gravedad: g_2 g_3 g_4 g_5 g_6

Variables cinemáticas: θ_2 θ_3 θ_4 θ_5 θ_6 s

Movimiento aplicado en el eje de la rueda trasera: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $\mathbf{q}_{Yamaha} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ s \end{bmatrix}$

4.1.3 Suspensión Kawasaki

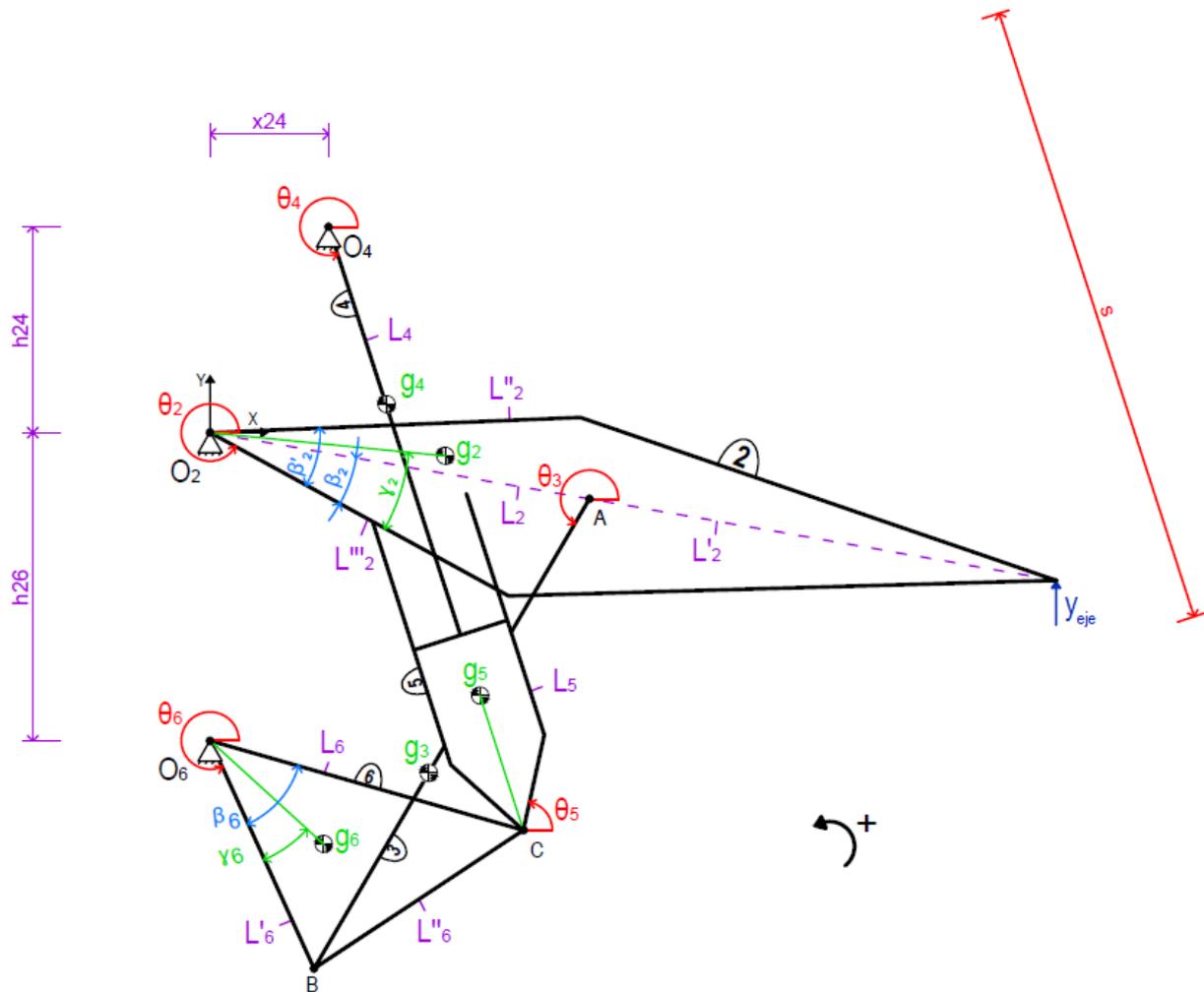


Figura 4-3. Modelo paramétrico Kawasaki

Longitudes de las barras: L_2 L'_2 L''_2 L'''_2 L_3 L_4 L_5 L_6 L'_6 L''_6

Ángulos de barras: β_2 β'_2 β_6

Localización de los pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia global: x_{24} h_{24} x_{26} h_{26}

Localización de los centros de gravedad: g_2 γ_2 g_3 g_4 g_5 g_6 γ_6

Variables cinemáticas: θ_2 θ_3 θ_4 θ_5 θ_6 s

Movimiento aplicado en el eje de la rueda trasera: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $\mathbf{q}_{Kawasaki} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ s \end{bmatrix}$

4.1.4 Suspensión Suzuki

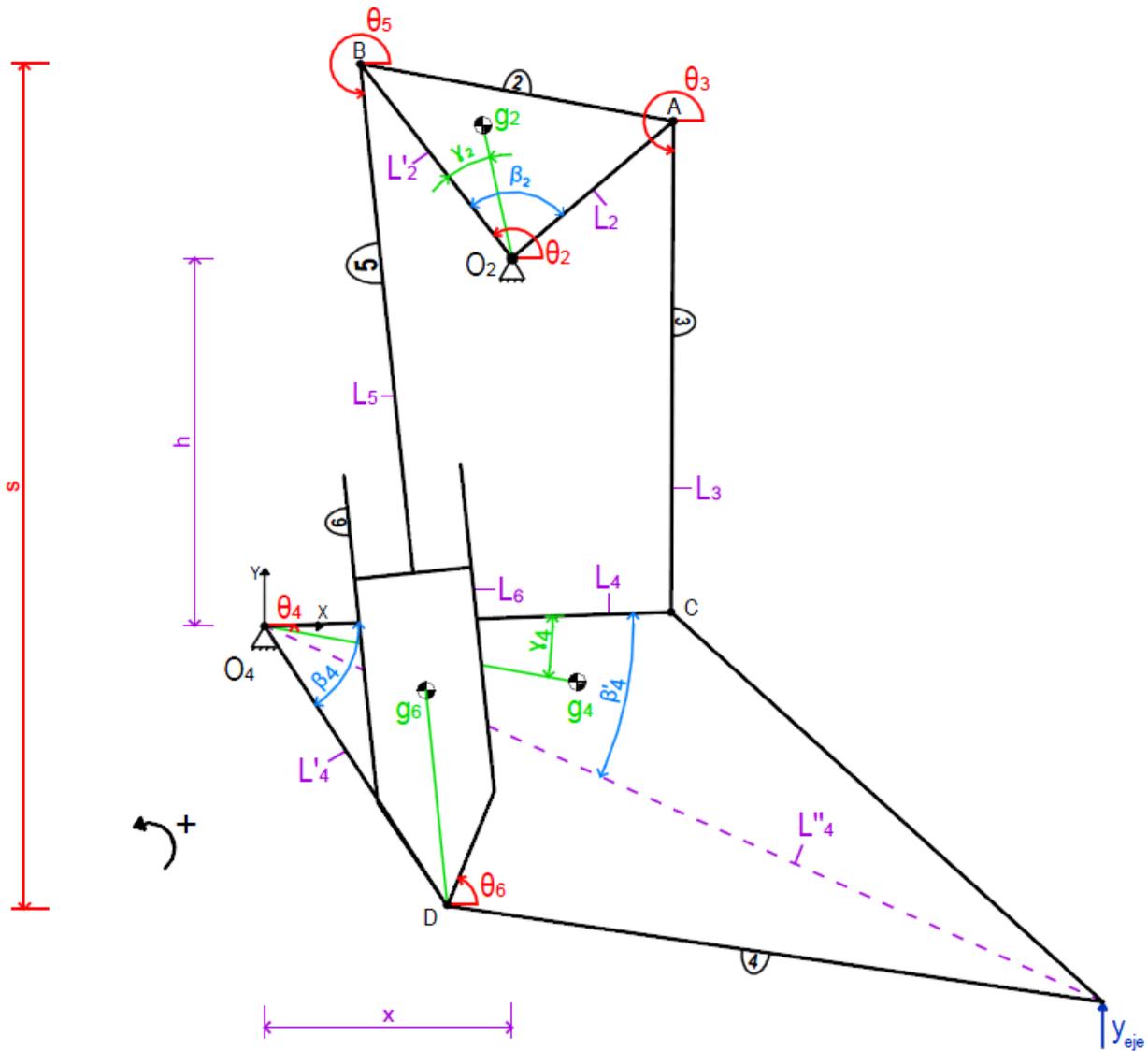


Figura 4-4. Modelo paramétrico Suzuki

Longitudes de las barras: L_2 L'_2 L_3 L_4 L'_4 L''_4 L_5 L_6

Ángulos de barras: β_2 β_4 β'_4

Localización de los pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia: x h

Localización de los centros de gravedad: g_2 γ_2 g_3 g_4 γ_4 g_5 g_6

Variables cinemáticas: θ_2 θ_3 θ_4 θ_5 θ_6 s

Movimiento aplicado en el eje de la rueda trasera: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $\mathbf{q}_{Suzuki} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ s \end{bmatrix}$

4.1.5 Suspensión Morbidelli 500GP

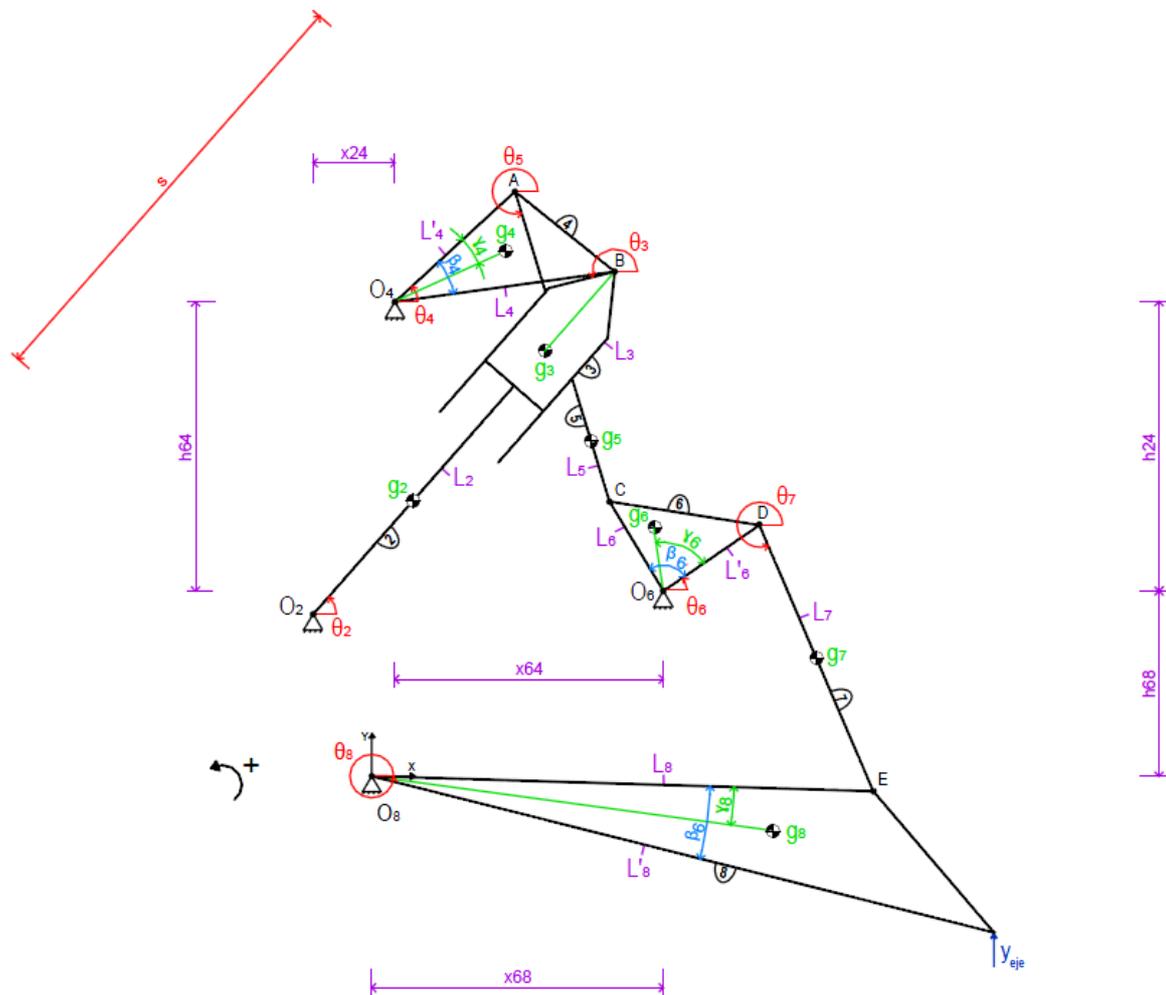


Figura 4-5. Modelo paramétrico Morbidelli 500GP

Longitudes de las barras: L_2 L_3 L_4 L'_4 L_5 L_6 L'_6 L_7 L_8 L'_8

Ángulos de barras: β_4 β_6 β_8

Localización de pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia: x_{24} h_{24} x_{64} h_{64} x_{68} h_{68}

Localización de los centros de gravedad: g_2 g_3 g_4 g_5 g_6 g_7 g_8

Variables cinemáticas: θ_2 θ_3 θ_4 θ_5 θ_6 θ_7 θ_8 s

Movimiento aplicado en el eje de la rueda trasera: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $\mathbf{q}_{Morbidelli} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ s \end{bmatrix}$

4.1.6 Suspensión Elf Honda GP

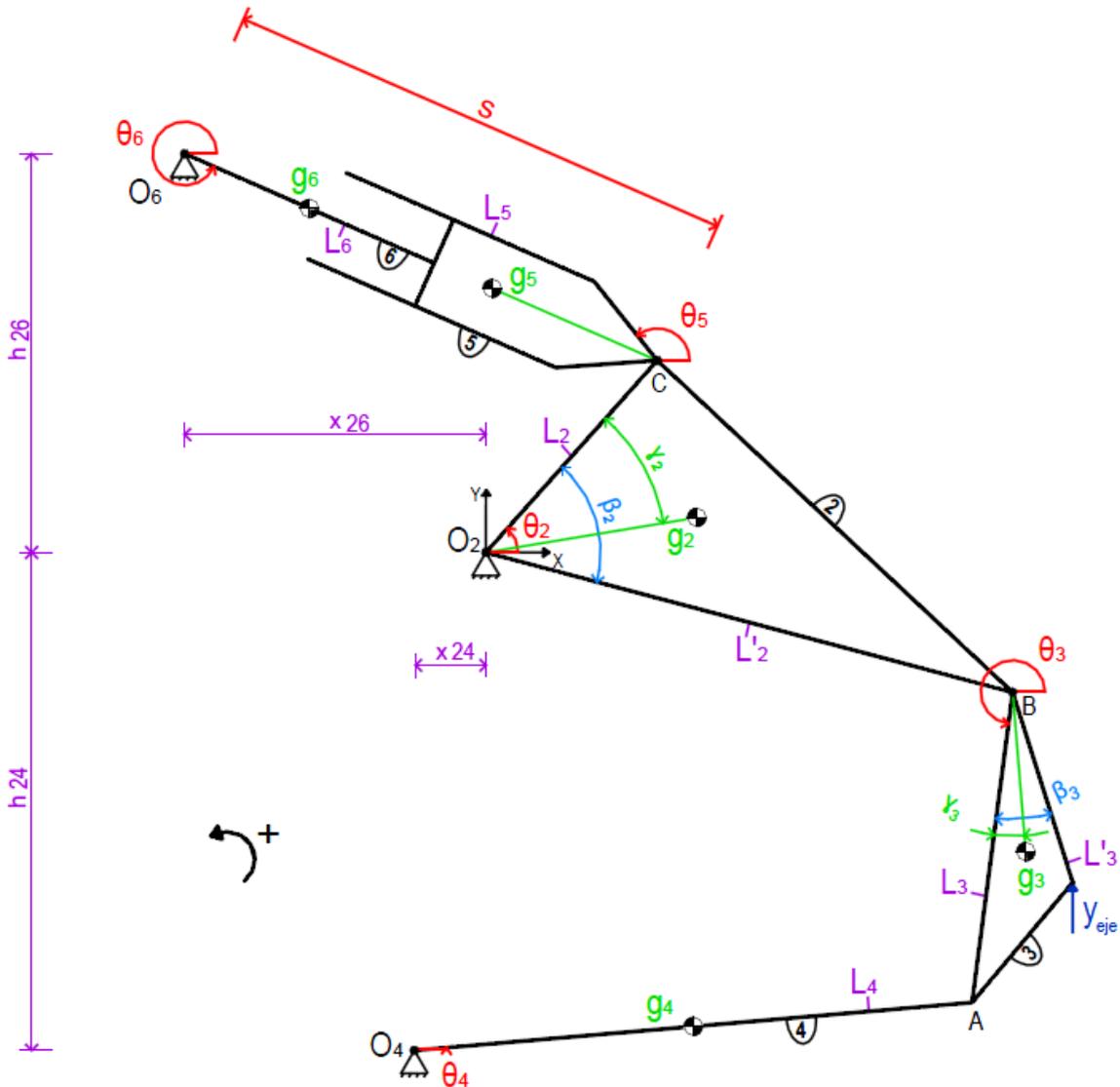


Figura 4-6. Modelo paramétrico Elf Honda GP

Longitudes de las barras: $L_2 L'_2 L_3 L'_3 L_4 L_5 L_6$

Ángulos de barras: $\beta_2 \beta_3$

Localización de los pares fijos de rotación respecto al sistema de referencia global: $x_{24} h_{24} x_{26} h_{26}$

Localización de los centros de gravedad: $g_2 \gamma_2 g_3 \gamma_3 g_4 g_5 g_6$

Variables cinemáticas: $\theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 s$

Movimiento aplicado en el eje de la rueda trasera: y_{eje}

Vector de coordenadas generalizadas: $q_{Honda GP} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ s \end{bmatrix}$

4.2 Análisis cinemático

Definido el esquema paramétrico, se puede comenzar a describir el modelado matemático para resolver el problema de posición que nos permita determinar el recorrido del mecanismo en cada instante.

Como coordenadas generalizadas, se utilizarán para cada caso las indicadas en los apartados anteriores, las cuales se corresponden con los ángulos absolutos de las barras articuladas y la distancia variable entre los extremos del amortiguador.

Los seis sistemas de suspensión tienen un único gdl, por lo que conocido el valor de una de las variables del sistema, sería suficiente para averiguar la posición de todos los elementos del mecanismo. Sin embargo, como no se conoce ninguno de los valores de las coordenadas generalizadas, en vez de suponer uno de ellos, se impondrá un movimiento vertical aplicado en el punto del basculante conectado al eje de la rueda trasera. Este movimiento simulará las irregularidades de la calzada, de forma que se pueda estudiar el comportamiento de la suspensión en su recorrido funcional.

Para hacer esta representación del terreno, se ha escogido un movimiento senoidal con la siguiente expresión:

$$y_{eje} = A_0 + B \text{sen}(wt)$$

A_0 : amplitud inicial [m].

w : velocidad angular [rad/s].

B : amplitud [m].

t : tiempo [s].

Derivando esta expresión respecto al tiempo, se obtienen la velocidad y la aceleración:

$$\dot{y}_{eje} = w \cdot B \cos(wt)$$

$$\ddot{y}_{eje} = -w^2 \cdot B \text{sen}(wt)$$

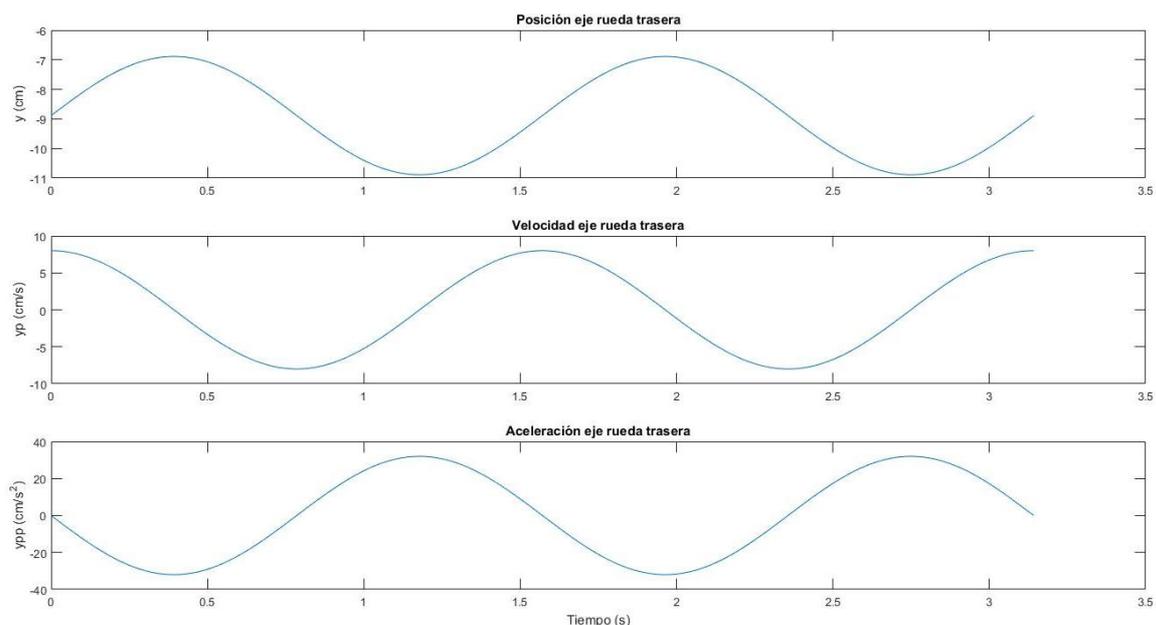


Figura 4-7. Movimiento del eje de la rueda trasera

Para averiguar el valor numérico del vector de coordenadas generalizadas, es necesario plantear un conjunto suficiente de ecuaciones de enlace geométricas mediante la condición de cierre vectorial. Se obtendrán dos ecuaciones vectoriales de restricción por cada uno de los mecanismos, a excepción de la suspensión Morbidelli que proporcionará tres como consecuencia de sus dos barras adicionales. Por último, se añadirá la ecuación de restricción referente al movimiento vertical del eje de la rueda trasera, igualándola con la componente vertical del punto que conecta con el basculante, referido al sistema de referencia global.

La dimensionalización de los parámetros geométrico del mecanismo es imprescindible para la resolución del sistema de ecuaciones y se ha obtenido partiendo de distintas fuentes. En primer lugar, se ha tomado como referencia las dimensiones propuestas en Trabajos de Fin de Grado focalizados en el diseño de sistemas de suspensión con bieletas. Con el fin de poder verificar estos datos, se decidió ir a comercios y talleres mecánicos de motocicletas con la esperanza de encontrar algún vehículo que utilizara suspensiones de este tipo. Inicialmente, parecía una tarea sencilla, sin embargo, esta clase de suspensión resultó no ser tan común como se imaginaba. No obstante, tras la visita de al menos diez establecimientos diferentes, se localizaron dos modelos distintos de motocicletas, que permitieron tomar las mediciones necesarias.

Recopilada toda esta información y aprovechando la configuración de los elementos de los mecanismos de los esquemas de la Figura 1-3, se han definido todos los parámetros geométricos requeridos. Nótese que aunque dicha dimensionalización no haya surgido de un estudio exhaustivo y optimizado de diseño, sí es una propuesta útil para el modelado inicial, la cual se aproxima bastante a la realidad.

Tal y como se ha indicado anteriormente, definidas todas las medidas dimensionales de los mecanismos, se puede resolver el sistema de ecuaciones de restricción deseado, cuya resolución se ejecutará mediante la función *fsolve* de MATLAB debido a su carácter no lineal.

Este comando de MATLAB requiere que se proporcione una estimación inicial de los valores del conjunto de incógnitas a averiguar. Para ello, se ha hecho uso del programa de simulación WinMecC, en el cual se han creado previamente los distintos mecanismos y se han orientado en la posición deseada, suministrando de este modo los valores buscados.

Con el fin de visualizar fácilmente el comportamiento del mecanismo, se ha programado una animación 2D en MATLAB que ilustre su movimiento durante todo el recorrido. Asimismo, esta animación también es práctica para verificar que no se ha cometido ningún error en el código de programación o el modelado matemático.

Resuelto el problema de posición, se deriva respecto al tiempo el sistema de ecuaciones de restricción y se obtiene un nuevo sistema cuya incógnita se corresponde con el vector de velocidades generalizadas y que, en esta ocasión, es lineal, lo que facilita notablemente su resolución.

Derivando este último sistema respecto al tiempo una vez más, se obtienen las ecuaciones necesarias para hallar el vector de aceleraciones generalizadas, nuevamente lineal, y que tras su resolución, la cinemática de los mecanismos quedará completamente definida.

En los subapartados siguientes se detallará el modelo matemático desarrollado para cada una de las suspensiones.

4.2.1 Suspensión Honda

Ecuaciones de enlace:

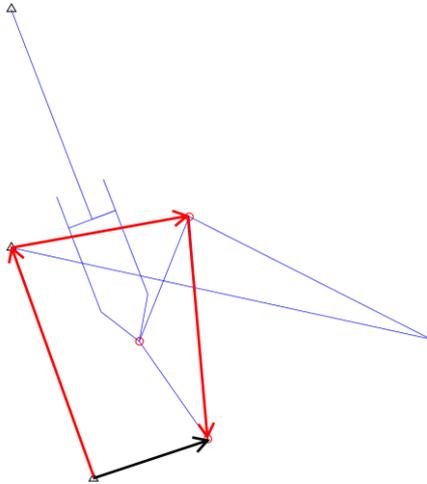


Figura 4-7. Honda: condición de enlace 1

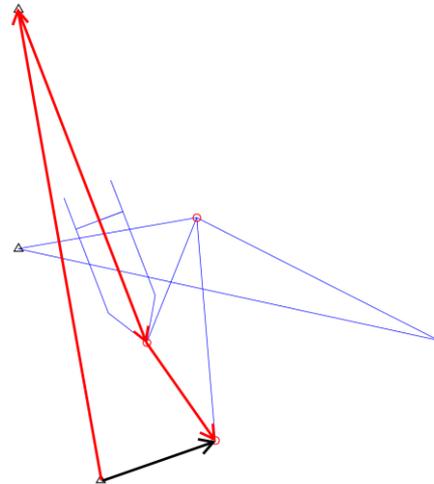


Figura 4-8. Honda: condición de enlace 2

$$\phi_1(q): \begin{cases} L_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) + L'_5 \cdot \cos(\theta_5 + \beta_5) - x_{26} = L_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + L'_5 \cdot \text{sen}(\theta_5 + \beta_5) - h_{26} = L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} -L_5 \cdot \cos(\theta_5) + s \cdot \cos(\theta_4) + x_{24} = L_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) \\ -L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) + s \cdot \text{sen}(\theta_4) + h_{24} = L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_3(q, t): \{ L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) = y_{eje}$$

$$\phi_{Honda}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones ϕ_{Honda} , la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

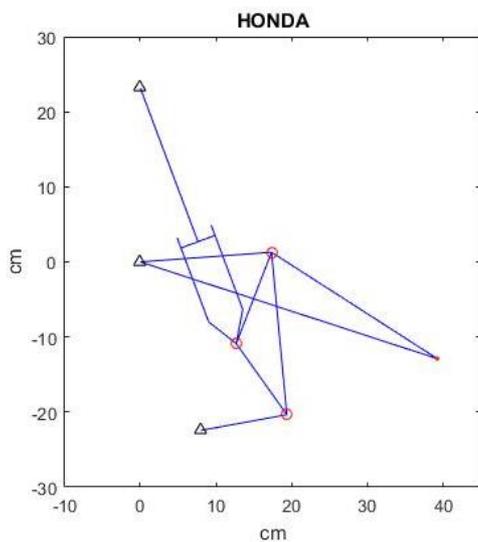


Figura 4-9. Honda: posición 1

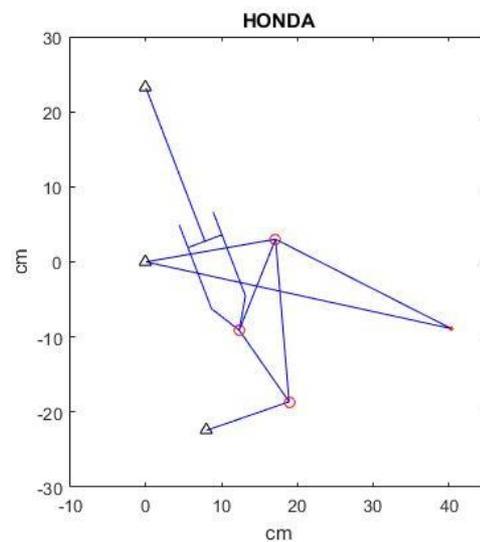


Figura 4-10. Honda: posición 2

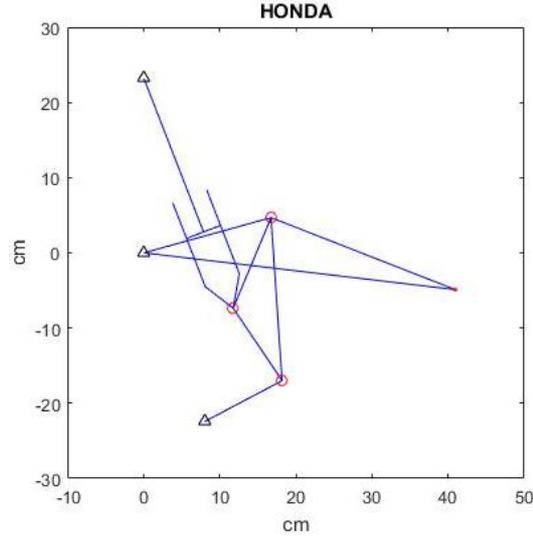


Figura 4-11. Honda: posición 3

Derivando respecto al tiempo ϕ_{Honda} se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & -L'_5 \cdot \text{sen}(\theta_5 + \beta_5) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & L'_5 \cdot \text{cos}(\theta_5 + \beta_5) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) & 0 & \text{cos}(\theta_4) \\ -L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) & 0 & \text{sen}(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & -L'_5 \cdot \text{sen}(\theta_5 + \beta_5) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & L'_5 \cdot \text{cos}(\theta_5 + \beta_5) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) & 0 & \text{cos}(\theta_4) \\ -L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) & 0 & \text{sen}(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) + L'_5 \cdot \omega_5^2 \cdot \text{cos}(\theta_5 + \beta_5) - L_6 \cdot \omega_6^2 \cdot \text{cos}(\theta_6) \\ L_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + L'_5 \cdot \omega_5^2 \cdot \text{sen}(\theta_5 + \beta_5) - L_6 \cdot \omega_6^2 \cdot \text{sen}(\theta_6) \\ -L_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) - L_5 \cdot \omega_5^2 \cdot \text{cos}(\theta_5) + s \cdot \omega_4^2 \cdot \text{cos}(\theta_4) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \\ -L_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) - L_5 \cdot \omega_5^2 \cdot \text{sen}(\theta_5) + s \cdot \omega_4^2 \cdot \text{sen}(\theta_4) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \text{sen}(\theta_2) + \ddot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.2.2 Suspensión Yamaha

Ecuaciones de enlace:

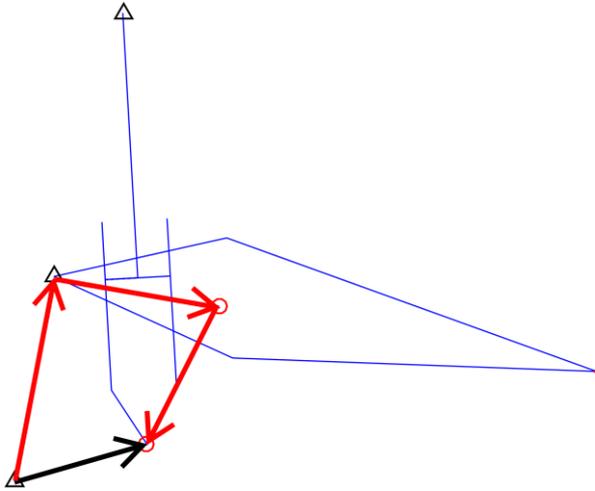


Figura 4-13. Yamaha: condición de enlace 1

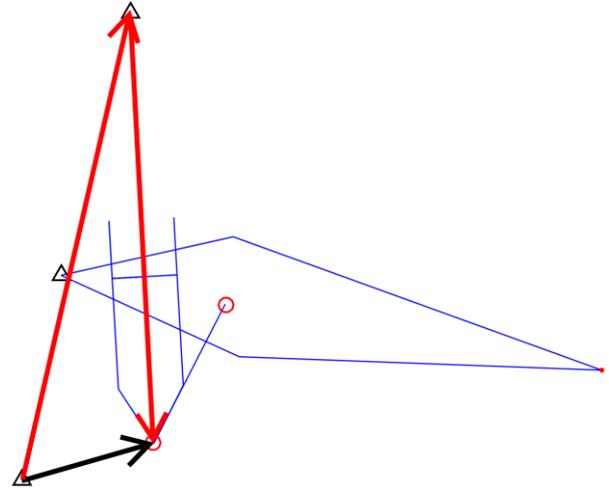


Figura 4-14. Yamaha: condición de enlace 2

$$\phi_1(q): \begin{cases} L_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_3) - x_{26} = L_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ L_2 \cdot \sin(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \sin(\theta_3) - h_{26} = L_6 \cdot \sin(\theta_6) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} s \cdot \cos(\theta_4) + (x_{24} - x_{26}) = L_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ s \cdot \sin(\theta_4) + (h_{24} - h_{26}) = L_6 \cdot \sin(\theta_6) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_3(q, t): \{ (L_2 + L'_2) \cdot \sin(\theta_2 + \beta_2) = y_{eje} \}$$

$$\phi_{Yamaha}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones ϕ_{Yamaha} , la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

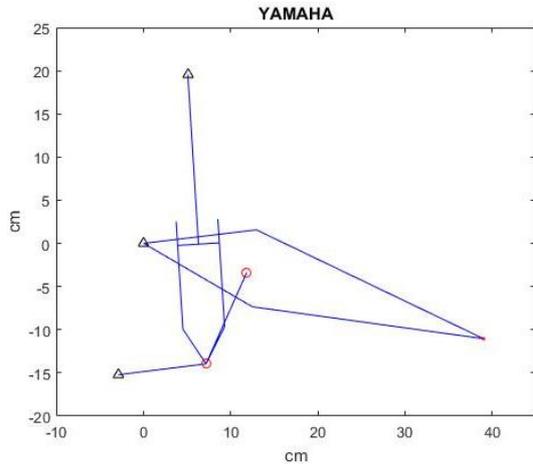


Figura 4-15. Yamaha: posición 1

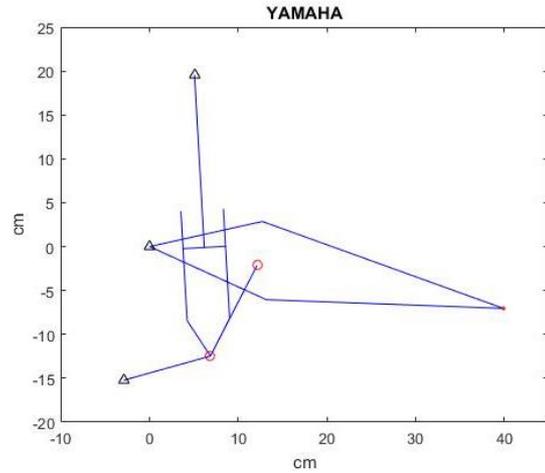


Figura 4-16. Yamaha: posición 2

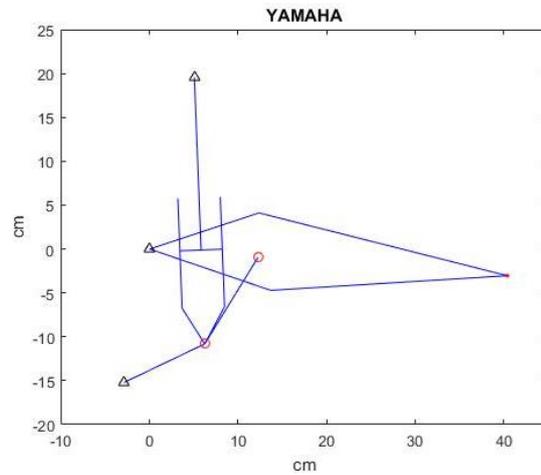


Figura 4-17. Yamaha: posición 3

Derivando respecto al tiempo ϕ_{Yamaha} se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & 0 & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & 0 & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & \text{cos}(\theta_4) \\ 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & \text{sen}(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_6 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & 0 & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & 0 & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & \text{cos}(\theta_4) \\ 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & \text{sen}(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \cos(\theta_3) - L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) \\ -L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \cos(\theta_6) + s \cdot \omega^2_4 \cdot \cos(\theta_4) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \\ -L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) + s \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \cos(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.2.3 Suspensión Kawasaki

Ecuaciones de enlace:

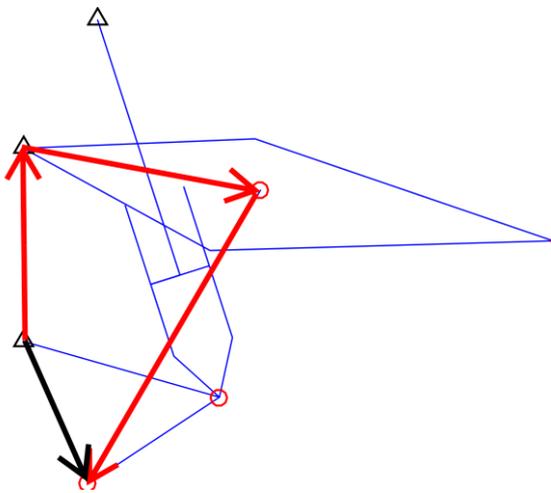


Figura 4-18. Kawasaki: condición de enlace 1

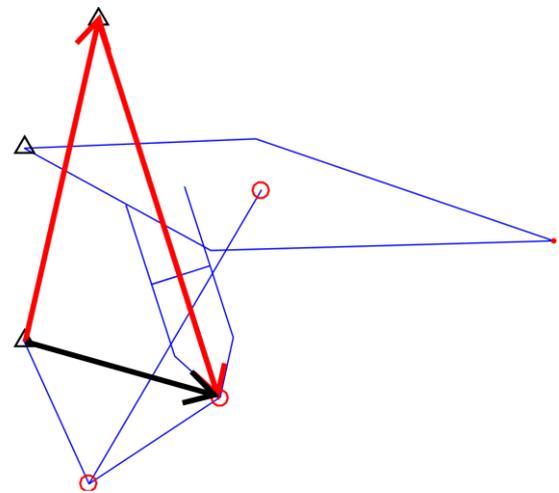


Figura 4-19. Kawasaki: condición de enlace 2

$$\phi_1(q): \begin{cases} L_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_3) - x_{26} = L'_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - h_{26} = L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} s \cdot \cos(\theta_4) + (x_{24} - x_{26}) = L_6 \cdot \cos(\theta_6 + \beta_6) \\ s \cdot \text{sen}(\theta_4) + (h_{24} - h_{26}) = L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_3(q, t): \quad \{ (L_2 + L'_2) \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) = y_{eje} \}$$

$$\phi_{Kawasaki}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones $\phi_{Kawasaki}$, la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

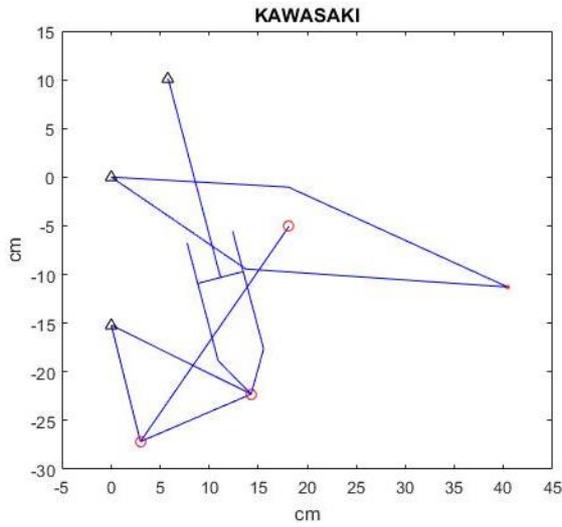


Figura 4-20. Kawasaki: posición 1

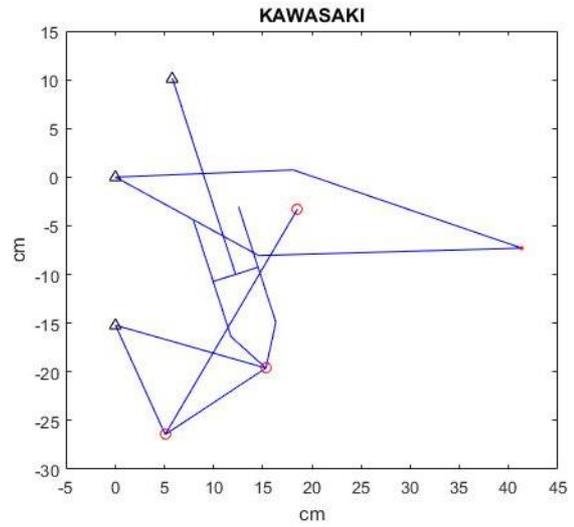


Figura 4-21. Kawasaki: posición 2

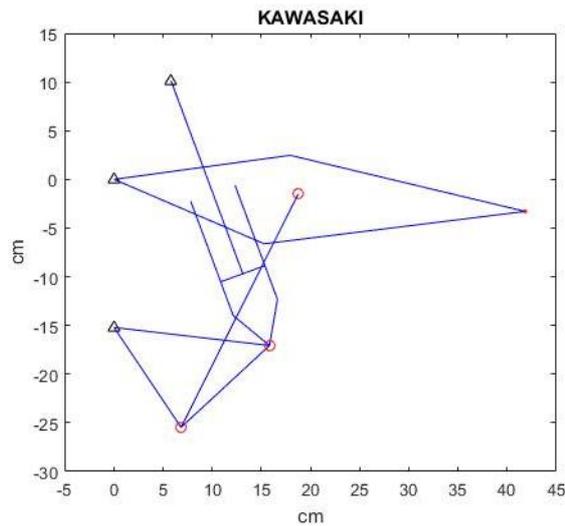


Figura 4-22. Kawasaki: posición 3

Derivando respecto al tiempo $\phi_{Kawasaki}$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & 0 & L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & 0 & -L'_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) & \text{cos}(\theta_4) \\ 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) & \text{sen}(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_6 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & 0 & L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & 0 & -L'_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_4) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) & \text{cos}(\theta_4) \\ 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_4) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) & \text{sen}(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \\ \dot{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) - L'_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) \\ L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - L'_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) \\ -L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) + s \cdot \omega^2_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \\ -L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) + s \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) \\ (L_2 + L'_2) \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + \ddot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.2.4 Suspensión Suzuki

Ecuaciones de enlace:

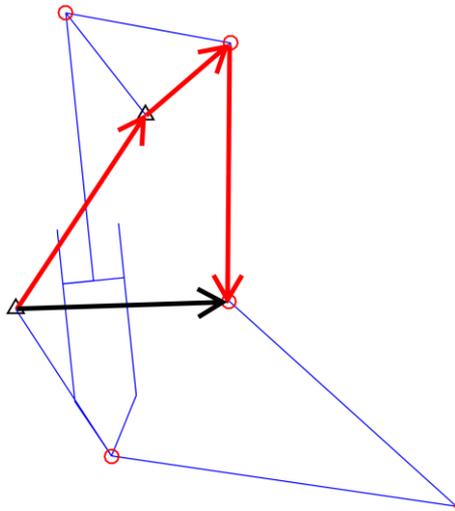


Figura 4-23. Suzuki: condición de enlace 1

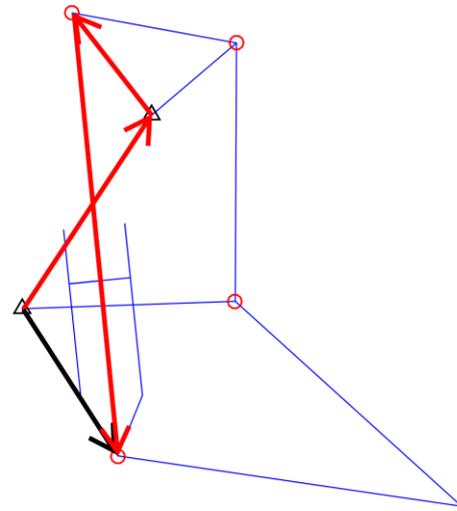


Figura 4-24. Suzuki: condición de enlace 2

$$\phi_1(q): \begin{cases} L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) + x = L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) + h = L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) + s \cdot \text{cos}(\theta_5) + x = L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) \\ L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) + s \cdot \text{sen}(\theta_5) + h = L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_3(q, t): \{ L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta'_4) = y_{eje} \}$$

$$\phi_{Suzuki}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones ϕ_{Suzuki} , la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

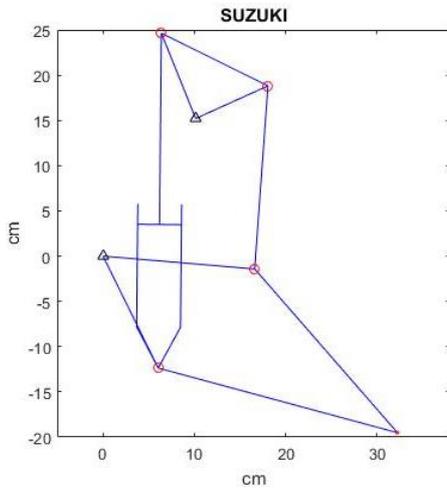


Figura 4-25. Suzuki: posición 1

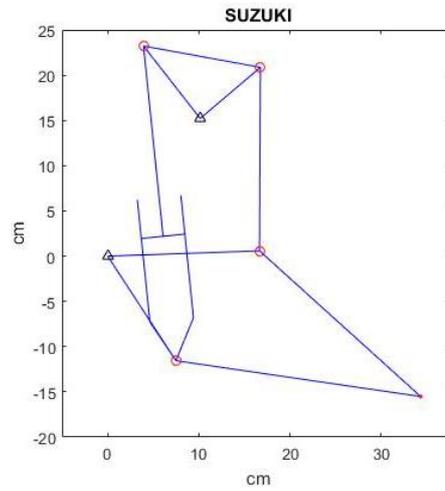


Figura 4-26. Suzuki: posición 2

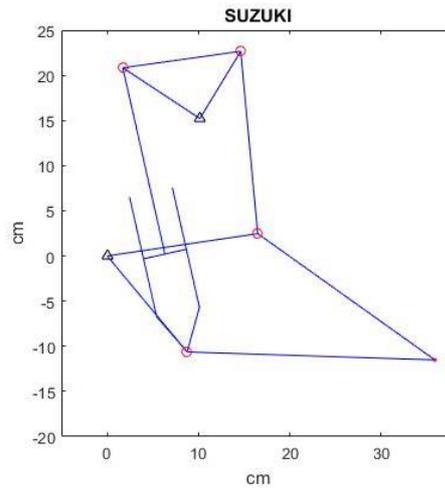


Figura 4-27. Suzuki: posición 3

Derivando respecto al tiempo ϕ_{Suzuki} se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & -L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & 0 & 0 \\ -L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) & 0 & L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) & -s \cdot \text{sen}(\theta_5) & \text{cos}(\theta_5) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & -L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) & s \cdot \text{cos}(\theta_5) & \text{sen}(\theta_5) \\ 0 & 0 & L''_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta'_4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} -L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & -L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & 0 & 0 \\ -L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) & 0 & L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) & -s \cdot \text{sen}(\theta_5) & \text{cos}(\theta_5) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & -L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) & s \cdot \text{cos}(\theta_5) & \text{sen}(\theta_5) \\ 0 & 0 & L''_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta'_4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) - L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) \\ L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) - L'_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) + s \cdot \omega^2_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) \\ L'_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) - L'_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) + s \cdot \omega^2_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) \\ L''_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta'_4) + \ddot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.2.5 Suspensión Morbidelli 500GP

Ecuaciones de enlace:

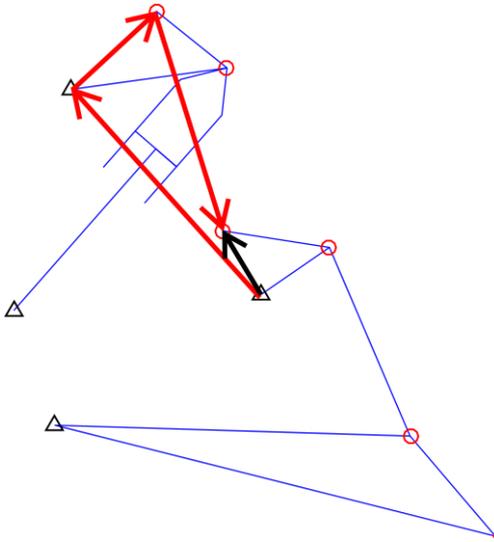


Figura 4-28. Morbidelli: condición de enlace 1

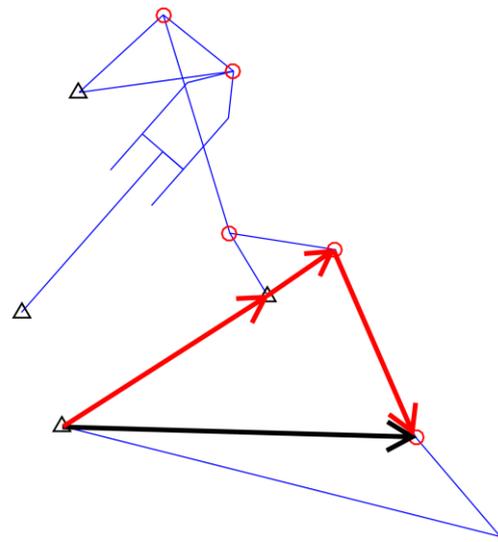


Figura 4-29. Morbidelli: condición de enlace 2

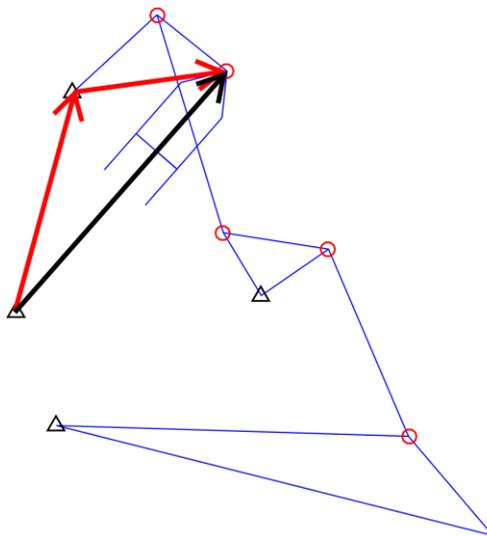


Figura 4-30. Morbidelli: condición de enlace 3

$$\phi_1(q): \begin{cases} L'_4 \cdot \cos(\theta_4) + L_5 \cdot \cos(\theta_5) + x_{64} = L_6 \cdot \cos(\theta_6 + \beta_6) \\ L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) + L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) + h_{64} = L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} L'_6 \cdot \cos(\theta_6) + L_7 \cdot \cos(\theta_7) + x_{86} = L_8 \cdot \cos(\theta_8) \\ L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) + L_7 \cdot \text{sen}(\theta_7) + h_{86} = L_8 \cdot \text{sen}(\theta_8) \end{cases}$$

$$\phi_3(q): \begin{cases} L_4 \cdot \cos(\theta_4 - \beta_4) + x_{24} = s \cdot \cos(\theta_2) \\ L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) + h_{24} = s \cdot \text{sen}(\theta_2) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_4(q, t): \{ L'_8 \cdot \text{sen}(\theta_8 - \beta_8) = y_{eje}$$

$$\phi_{Morbide\ell i}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones $\phi_{Morbide\ell i}$, la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

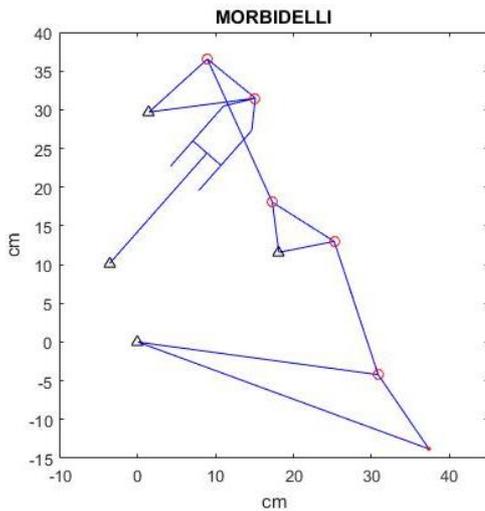


Figura 4-31. Morbidelli: posición 1

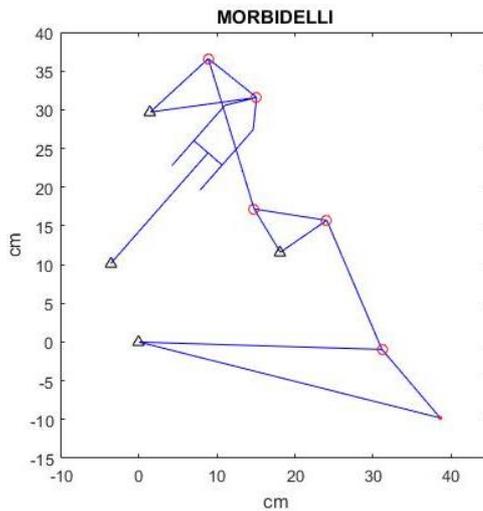


Figura 4-32. Morbidelli: posición 2

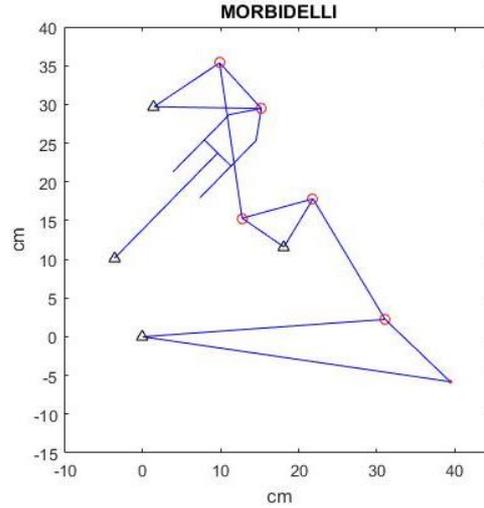


Figura 4-33. Morbidelli: posición 3

Derivando respecto al tiempo $\dot{\phi}_{Morbidelli}$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & -L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & L_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & -L_7 \cdot \text{sen}(\theta_7) & L_8 \cdot \text{sen}(\theta_8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L'_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & L_7 \cdot \text{cos}(\theta_7) & -L_8 \cdot \text{cos}(\theta_8) & 0 \\ s \cdot \text{sen}(\theta_2) & -L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{cos}(\theta_2) \\ -s \cdot \text{cos}(\theta_2) & L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_8 \cdot \text{cos}(\theta_8 - \beta_8) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & -L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & -L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) & L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & L_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) & -L_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) & -L_7 \cdot \text{sen}(\theta_7) & L_8 \cdot \text{sen}(\theta_8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L'_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) & L_7 \cdot \text{cos}(\theta_7) & -L_8 \cdot \text{cos}(\theta_8) & 0 \\ s \cdot \text{sen}(\theta_2) & -L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{cos}(\theta_2) \\ -s \cdot \text{cos}(\theta_2) & L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_8 \cdot \text{cos}(\theta_8 - \beta_8) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L'_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) + L_5 \cdot \omega^2_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) - L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{cos}(\theta_6 + \beta_6) \\ L'_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) + L_5 \cdot \omega^2_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) - L_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) \\ L'_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) + L_7 \cdot \omega^2_7 \cdot \text{cos}(\theta_7) - L_8 \cdot \omega^2_8 \cdot \text{cos}(\theta_8) \\ L'_6 \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) + L_7 \cdot \omega^2_7 \cdot \text{sen}(\theta_7) - L_8 \cdot \omega^2_8 \cdot \text{sen}(\theta_8) \\ L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) - s \cdot \omega^2_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \\ L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) - s \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) \\ L'_8 \cdot \omega^2_8 \cdot \text{sen}(\theta_8 - \beta_8) + \ddot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.2.6 Suspensión Elf Honda GP

Ecuaciones de enlace:

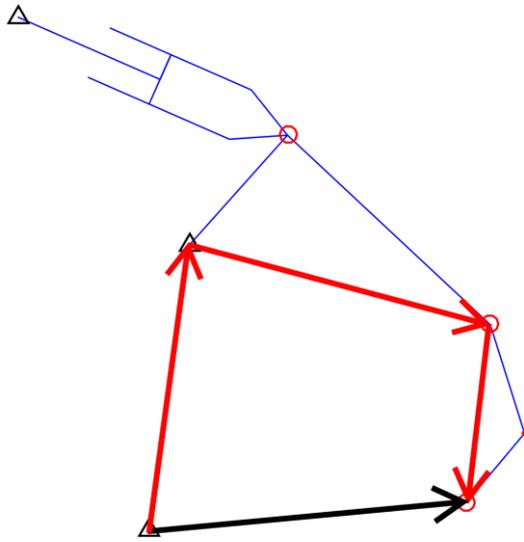


Figura 4-34. Elf Honda GP: condición de enlace 1

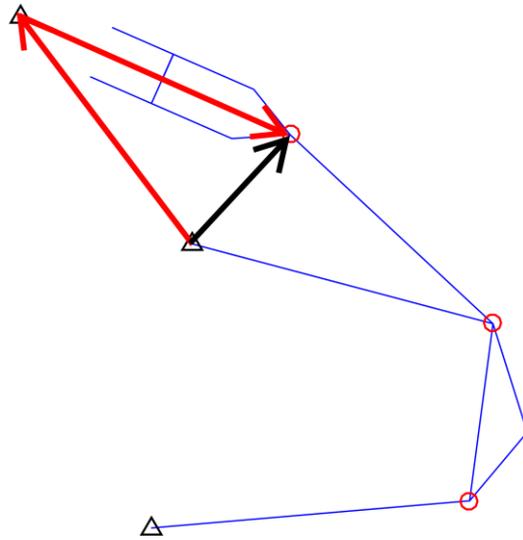


Figura 4-35. Elf Honda GP: condición de enlace 2

$$\phi_1(q): \begin{cases} L'_2 \cdot \cos(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \cos(\theta_3) - x_{24} = L_4 \cdot \cos(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - h_{24} = L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \end{cases}$$

$$\phi_2(q): \begin{cases} s \cdot \cos(\theta_6) + x_{26} = L_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ s \cdot \text{sen}(\theta_6) + h_{26} = L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \end{cases}$$

Ecuación de restricción rehónoma perteneciente al movimiento del eje de la rueda trasera:

$$\phi_3(q, t): \{ L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L'_3 \cdot \text{sen}(\theta_3 + \beta_3) = y_{eje}$$

$$\phi_{Honda GP}(q, t) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones $\phi_{Honda GP}$, la posición del mecanismo en todo su recorrido queda definida. Mediante la animación 2D puede observarse la trayectoria trazada.

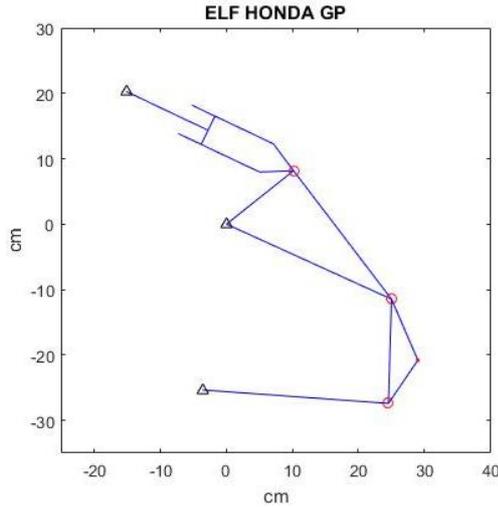


Figura 4-36. Elf Honda GP: posición 1

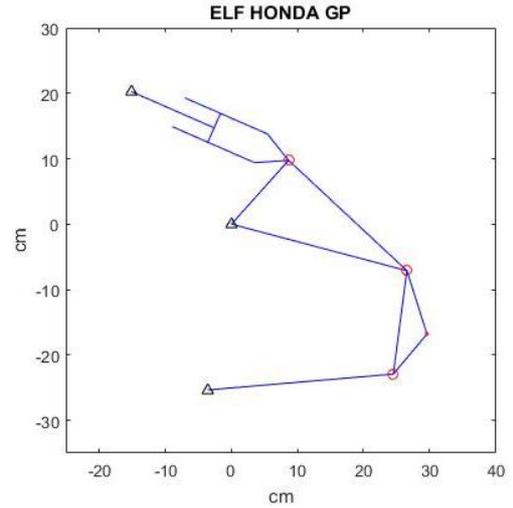


Figura 4-37. Elf Honda GP: posición 2

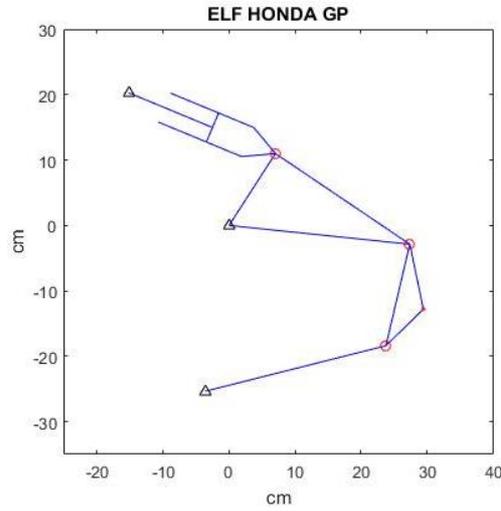


Figura 4-38. Elf Honda GP: posición 3

Derivando respecto al tiempo $\phi_{Honda GP}$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones matricial, a partir del cual se obtendrá la distribución de velocidades del mecanismo:

$$\begin{pmatrix} -L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & -L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) & 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_6) & \text{cos}(\theta_6) \\ -L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_6) & \text{sen}(\theta_6) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L'_3 \cdot \text{cos}(\theta_3 + \beta_3) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_6 \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

Derivando una vez más las ecuaciones anteriores respecto al tiempo, se determina la distribución de aceleraciones:

$$\begin{pmatrix} -L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) & -L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) & L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L_3 \cdot \text{cos}(\theta_3) & -L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) & 0 & 0 \\ L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) & 0 & 0 & -s \cdot \text{sen}(\theta_6) & \text{cos}(\theta_6) \\ -L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) & 0 & 0 & s \cdot \text{cos}(\theta_6) & \text{sen}(\theta_6) \\ L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 - \beta_2) & L'_3 \cdot \text{cos}(\theta_3 + \beta_3) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_6 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L'_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \cos(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \cos(\theta_3) - L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \cos(\theta_4) \\ L'_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - L_4 \cdot \omega^2_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) \\ -L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \cos(\theta_2) + s \cdot \omega^2_6 \cdot \cos(\theta_6) + 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) \\ -L_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) + s \cdot \omega^2_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) - 2 \cdot \dot{s} \cdot \omega_6 \cdot \cos(\theta_6) \\ L'_2 \cdot \omega^2_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + L'_3 \cdot \omega^2_3 \cdot \text{sen}(\theta_3 + \beta_3) + \ddot{y}_{eje} \end{pmatrix}$$

4.3 Análisis dinámico

Para estudiar el comportamiento dinámico de todos los elementos de los mecanismos se procede con un análisis de dinámica inversa, donde todas las variables cinemáticas son conocidas.

Como método seleccionado, se ha decidido plantear el equilibrio dinámico individualmente en cada miembro. De esta forma, podrán obtenerse todas las fuerzas y momentos de reacción, además de las cargas externas aplicadas.

Este método se expresa por medio del *diagrama de cuerpo libre*, en el que se representa el sólido despojado del resto de cuerpos y todas las fuerzas y momentos que intervienen. Para cada barra se plantean tres ecuaciones de equilibrio, alcanzándose un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse fácilmente con MATLAB, del tipo:

$$A \cdot F = b$$

A : matriz de términos dependientes.

F : vector de fuerzas y momentos desconocidos.

b : vector de términos independientes de las fuerzas conocidas y de las variables cinemáticas.

El sistema de ecuaciones estará compuesto por 5 sólidos para la mayoría de las suspensiones y 7 para el caso concreto de la suspensión Morbidelli, dando lugar a 15 y 21 ecuaciones de equilibrio, respectivamente. Se considerarán todas las fuerzas y momentos de reacción procedentes de los pares cinemáticos de rotación y prismático. También influirán las fuerzas externas provocadas por el movimiento impuesto del eje de la rueda trasera y las referentes a la compresión del amortiguador. Por último, se tienen en cuenta todas las fuerzas y momentos de inercia propias del mecanismo.

Nótese, que para el cálculo de las fuerzas de inercia será necesario obtener previamente las velocidades y aceleraciones del centro de gravedad de cada sólido. Esta tarea no supone ninguna dificultad, pues el problema cinemático está completamente resuelto. Planteando las expresiones vectoriales procedentes de los enlaces cinemáticos, se determinan las velocidades y aceleraciones deseadas con sencillez. Estas expresiones serán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^P &= \mathbf{v}_i^O + \boldsymbol{\omega}_i \wedge \mathbf{OP} \\ \mathbf{a}_i^P &= \mathbf{a}_i^O + \boldsymbol{\alpha}_i \wedge \mathbf{OP} - 2 \cdot \boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{OP} \end{aligned}$$

El cálculo de masas, tensores de inercia y la localización de los centros de gravedad, se han obtenido mediante Solid Edge. Se han dibujado las piezas de forma simplificada pero con la mayor fidelidad a la realidad posible. El material seleccionado para obtener las propiedades másicas es el Aluminio 7075 T651, usualmente utilizado en el sector de automovilismo, náutico y de aviación.

Finalmente, conviene indicar que se considerará la misma masa del basculante para todos los sistemas, independientemente de su geometría. Además, la constante de rigidez y amortiguamiento propias del amortiguador, serán las mismas para todas las suspensiones y de valor invariable. Y por último, se supondrá que el amortiguador tiene aplicada una precarga de 3.5cm, asegurando que trabaje siempre a compresión.

En los subapartados siguientes se plantearán detalladamente las ecuaciones de equilibrio asociadas a cada uno de los sistemas de suspensión en estudio.

4.3.1 Suspensión Honda

Ecuaciones de equilibrio de la barra 2:

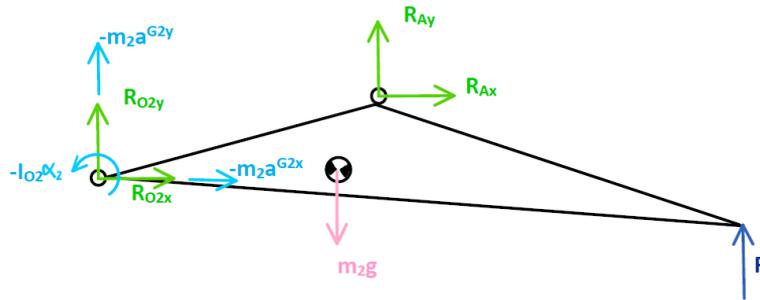


Figura 4-39. Honda: barra 2

$$\sum F_x = R_x^A + R_x^{O_2} - m_2 \cdot a_x^{G_2} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^A + R_y^{O_2} - m_2 \cdot a_y^{G_2} - m_2 \cdot g + F = 0$$

$$\sum M^{O_2} = -R_x^A \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 + \beta_2) + R_y^A \cdot L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) - m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \gamma_2) + F \cdot L'_2 \cdot \text{cos}(\theta_2) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:

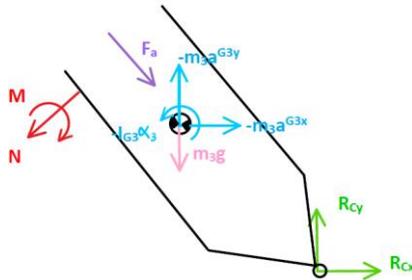


Figura 4-40. Honda: barra 3

$$\sum F_x = R_x^C - m_3 \cdot a_x^{G_3} + F_a^x - N \cdot (-\text{cos}(\theta_3 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^C - m_3 \cdot a_y^{G_3} - m_3 \cdot g - F_a^y - N \cdot (-\text{sen}(\theta_3 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M^C = N \cdot [t_2 \cdot (-\text{cos}(\theta_3 + \frac{\pi}{2})) + t_1 \cdot (-\text{sen}(\theta_3 + \frac{\pi}{2}))] - F_a^x \cdot L_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) + F_a^y \cdot L_3 \cdot \\ (-\text{cos}(\theta_3)) - (-m_3 \cdot a_x^{G_3}) \cdot g_3 \cdot \text{sen}(\theta_3) - (-m_3 \cdot a_y^{G_3}) \cdot g_3 \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) + m_3 \cdot g \cdot g_3 \cdot \\ (-\text{cos}(\theta_3)) - I_{G_3} \cdot \alpha_3 - M = 0 \end{aligned}$$

Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 3 y 4 hasta el punto C se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \text{cos}(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) & \text{cos}(\theta_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_4 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

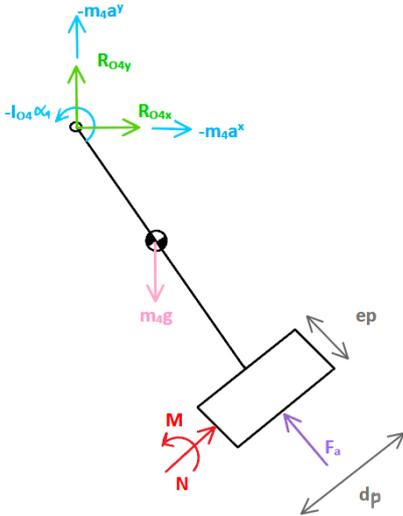
$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$\mathbf{F}_a = (-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) \\ -\text{sen}(\theta_4) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= R_x^{O_4} - m_4 \cdot a_x^{G_4} - F_a^x + N \cdot \left(-\cos\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_4} - m_4 \cdot a_y^{G_4} - m_4 \cdot g + F_a^y + N \cdot \left(-\text{sen}\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-41. Honda: barra 4

$$\begin{aligned} \sum M^{O_4} &= N \cdot \left[r_2 \cdot \left(-\cos\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right)\right) + r_1 \cdot \left(-\text{sen}\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right)\right) \right] - F_a^x \cdot L_4 \cdot \left(-\text{sen}(\theta_4)\right) + F_a^y \cdot L_4 \cdot \\ &\quad \cos(\theta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \cos(\theta_4) - I_{O_4} \cdot \alpha_4 + M = 0 \end{aligned}$$

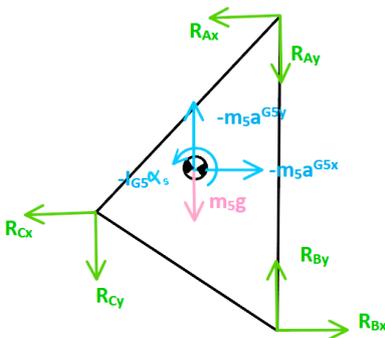
Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 3 y 4 hasta el punto O4 de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) & -\text{sen}(\theta_4) \\ \text{sen}(\theta_4) & \cos(\theta_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_4 - \frac{e_p}{2} \\ \frac{-d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:



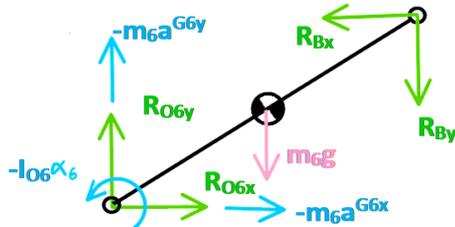
$$\sum F_x = -R_x^A + R_x^B - R_x^C - m_5 \cdot a_x^{G_5} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^A + R_y^B - R_y^C - m_5 \cdot a_y^{G_5} - m_5 \cdot g = 0$$

Figura 4-42. Honda: barra 5

$$\begin{aligned} \sum M^A = & R_x^B \cdot L'_5 \cdot (-\text{sen}(\theta_5 + \beta_5)) + R_y^B \cdot L'_5 \cdot \cos(\theta_5 + \beta_5) - R_x^C \cdot L_5 \cdot (-\text{sen}(\theta_5)) + R_y^C \cdot L_5 \cdot \\ & (-\cos(\theta_5)) + m_5 \cdot g \cdot g_5 \cdot (-\cos(\theta_5 + \gamma_5)) + (-m_5 \cdot a_x^{G_5}) \cdot g_5 \cdot (-\text{sen}(\theta_5 + \gamma_5)) - \\ & (-m_5 \cdot a_y^{G_5}) \cdot g_5 \cdot (-\cos(\theta_5 + \gamma_5)) - I_{G_5} \cdot \alpha_5 = 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:



$$\sum F_x = R_x^{O_6} - R_x^B - m_6 \cdot a_x^{G_6} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O_6} - R_y^B - m_6 \cdot a_y^{G_6} - m_6 \cdot g = 0$$

Figura 4-43. Honda: barra 6

$$\sum M^{O_6} = R_x^B \cdot L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) - R_y^B \cdot L_6 \cdot \cos(\theta_6) - m_6 \cdot g \cdot g_6 \cdot \cos(\theta_6) - I_{O_6} \cdot \alpha_6 = 0$$

4.3.2 Suspensión Yamaha

Ecuaciones de equilibrio de la barra 2:

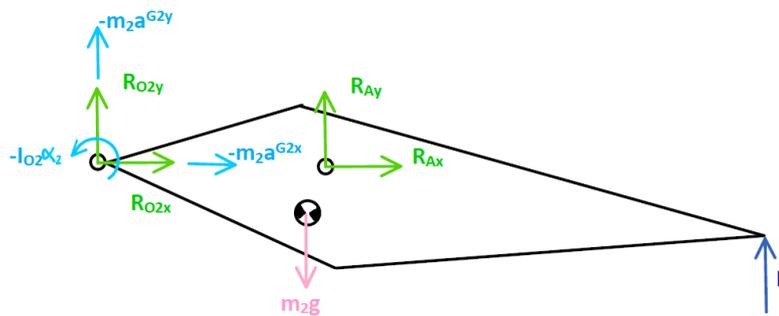


Figura 4-44. Yamaha: barra 2

$$\sum F_x = R_x^A + R_x^{O_2} - m_2 \cdot a_x^{G_2} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^A + R_y^{O_2} - m_2 \cdot a_y^{G_2} - m_2 \cdot g + F = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M^{O_2} = & R_x^A \cdot L_2 \cdot (-\text{sen}(\theta_2 + \beta_2)) + R_y^A \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) - m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot \cos(\theta_2 + \gamma_2) + F \cdot \\ & \cdot (L_2 + L'_2) \cdot \cos(\theta_2 + \beta_2) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:

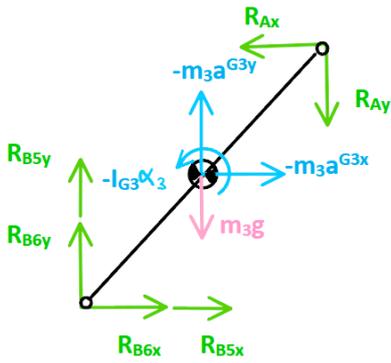


Figura 4-45. Yamaha: barra 3

$$\sum F_x = -R_x^A + R_x^{B5} + R_x^{B6} - m_3 \cdot a_x^{G3} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^A + R_y^{B5} + R_y^{B6} - m_3 \cdot a_y^{G3} - m_3 \cdot g = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M^{G3} = & R_x^A \cdot g_3 \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^A \cdot g_3 \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) + R_x^{B5} \cdot (L_3 - g_3) \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^{B5} \cdot \\ & (L_3 - g_3) \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) + R_x^{B6} \cdot (L_3 - g_3) \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^{B6} \cdot (L_3 - g_3) \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) - \\ & -I_{G3} \cdot \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:

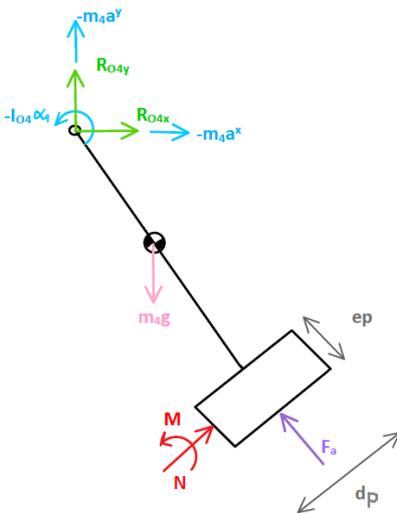


Figura 4-46. Yamaha: barra 4

$$\sum F_x = R_x^{O4} - m_4 \cdot a_x^{G4} - F_a^x + N \cdot (-\cos(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O4} - m_4 \cdot a_y^{G4} - m_4 \cdot g + F_a^y + N \cdot (-\text{sen}(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M^{O4} = & N \cdot \left[r_2 \cdot (-\cos(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) + r_1 \cdot (-\text{sen}(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) \right] - F_a^x \cdot L_4 \cdot (-\text{sen}(\theta_4)) + F_a^y \cdot L_4 \cdot \\ & \cos(\theta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \cos(\theta_4) - I_{O4} \cdot \alpha_4 + M = 0 \end{aligned}$$

Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 4 y 5 hasta el punto O_4 de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) & -\text{sen}(\theta_4) \\ \text{sen}(\theta_4) & \cos(\theta_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_4 - \frac{e_p}{2} \\ -\frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

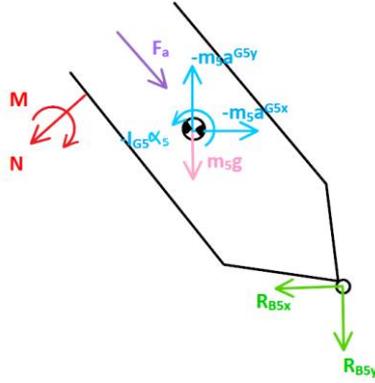
$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$F_a = (-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) \\ -\text{sen}(\theta_4) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:



$$\sum F_x = -R_x^{B5} - m_5 \cdot a_x^{G5} + F_a^x - N \cdot (-\cos(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^{B5} - m_5 \cdot a_y^{G5} - m_5 \cdot g - F_a^y - N \cdot (-\text{sen}(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

Figura 4-47. Yamaha: barra 5

$$\begin{aligned} \sum M^{B5} = N \cdot [t_2 \cdot (-\cos(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) + t_1 \cdot (-\text{sen}(\theta_5 + \frac{\pi}{2}))] - F_a^x \cdot L_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) + F_a^y \cdot L_5 \cdot \\ (-\cos(\theta_5)) - (-m_5 \cdot a_x^{G5}) \cdot g_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) - (-m_5 \cdot a_y^{G5}) \cdot g_5 \cdot (-\cos(\theta_5)) + m_5 \cdot g \cdot g_5 \cdot \\ (-\cos(\theta_5)) - I_{G5} \cdot \alpha_5 - M = 0 \end{aligned}$$

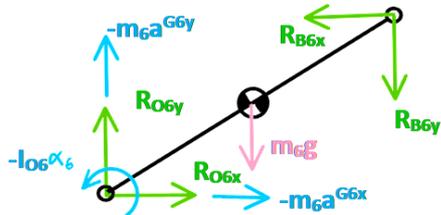
Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 4 y 5 hasta el punto B5 se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_5) & -\text{sen}(\theta_5) \\ \text{sen}(\theta_5) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_4 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:



$$\sum F_x = R_x^{O6} - R_x^{B6} - m_6 \cdot a_x^{G6} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O6} - R_y^{B6} - m_6 \cdot a_y^{G6} - m_6 \cdot g = 0$$

Figura 4-48. Yamaha: barra 6

$$\sum M^{O6} = R_x^{B6} \cdot L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) - R_y^{B6} \cdot L_6 \cdot \cos(\theta_6) - m_6 \cdot g \cdot g_6 \cdot \cos(\theta_6) - I_{O6} \cdot \alpha_6 = 0$$

4.3.3 Suspensión Kawasaki

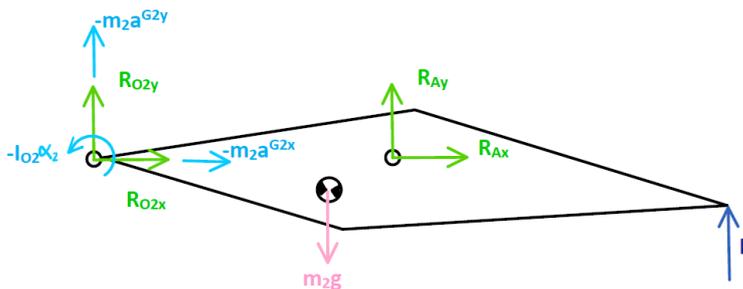
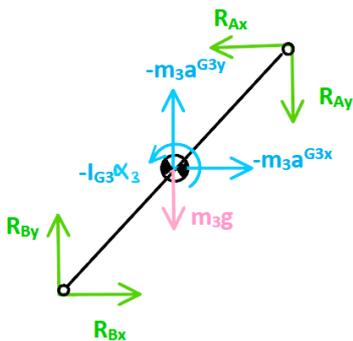


Figura 4-49. Kawasaki: barra 2

$$\begin{aligned} \sum F_x &= R_x^A + R_x^{O_2} - m_2 \cdot a_x^{G_2} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^A + R_y^{O_2} - m_2 \cdot a_y^{G_2} - m_2 \cdot g + F = 0 \\ \sum M^{O_2} &= R_x^A \cdot L_2 \cdot (-\text{sen}(\theta_2 + \beta_2)) + R_y^A \cdot L_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) - m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot \text{cos}(\theta_2 + \gamma_2) + F \cdot \\ &\quad \cdot (L_2 + L'_2) \cdot \text{cos}(\theta_2 + \beta_2) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

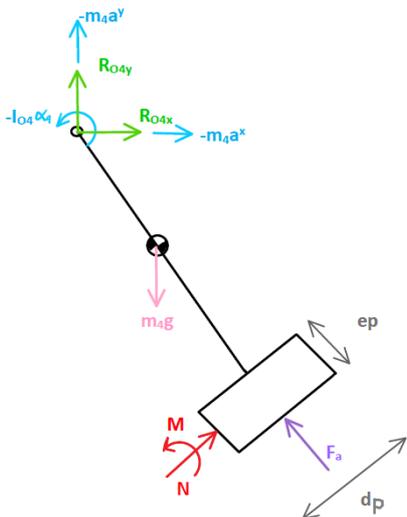
Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= -R_x^A + R_x^B - m_3 \cdot a_x^{G_3} = 0 \\ \sum F_y &= -R_y^A + R_y^B - m_3 \cdot a_y^{G_3} - m_3 \cdot g = 0 \\ \sum M^{G_3} &= R_x^A \cdot g_3 \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^A \cdot g_3 \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) + R_x^B \cdot \\ &\quad (L_3 - g_3) \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^B \cdot (L_3 - g_3) \cdot (-\text{cos}(\theta_3)) - I_{G_3} \cdot \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-50. Kawasaki: barra 3

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= R_x^{O_4} - m_4 \cdot a_x^{G_4} - F_a^x + N \cdot (-\text{cos}(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_4} - m_4 \cdot a_y^{G_4} - m_4 \cdot g + F_a^y + N \cdot (-\text{sen}(\theta_4 - \frac{\pi}{2})) = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-51. Kawasaki: barra 4

$$\sum M^{O_4} = N \cdot \left[r_2 \cdot \left(-\cos\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right) \right) + r_1 \cdot \left(-\sin\left(\theta_4 - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - F_a^x \cdot L_4 \cdot \left(-\sin(\theta_4) \right) + F_a^y \cdot L_4 \cdot \cos(\theta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \cos(\theta_4) - I_{O_4} \cdot \alpha_4 + M = 0$$

Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 4 y 5 hasta el punto O_4 de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_4 - \frac{e_p}{2} \\ -\frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:

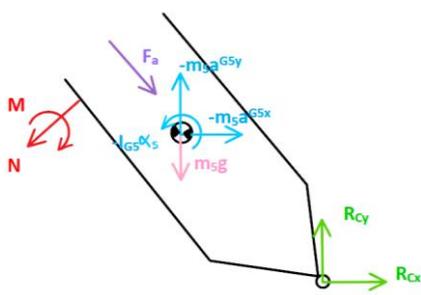


Figura 4-52. Kawasaki: barra 5

$$\sum F_x = R_x^C - m_5 \cdot a_x^{G_5} + F_a^x - N \cdot \left(-\cos\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) \right) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^C - m_5 \cdot a_y^{G_5} - m_5 \cdot g - F_a^y - N \cdot \left(-\sin\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) \right) = 0$$

$$\sum M^C = N \cdot \left[t_2 \cdot \left(-\cos\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) \right) + t_1 \cdot \left(-\sin\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - F_a^x \cdot L_5 \cdot \sin(\theta_5) + F_a^y \cdot L_5 \cdot \left(-\cos(\theta_5) \right) - \left(-m_5 \cdot a_x^{G_5} \right) \cdot g_5 \cdot \sin(\theta_5) - \left(-m_5 \cdot a_y^{G_5} \right) \cdot g_5 \cdot \left(-\cos(\theta_5) \right) + m_5 \cdot g \cdot g_5 \cdot \left(-\cos(\theta_5) \right) - I_{G_5} \cdot \alpha_5 - M = 0$$

Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 4 y 5 hasta el punto B_5 se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_4 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

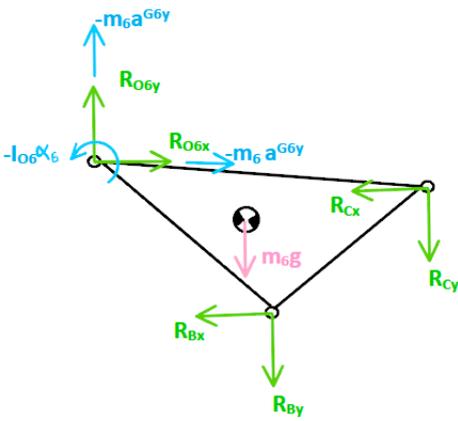
$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$\mathbf{F}_a = \left(-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_4) \\ -\sin(\theta_4) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:



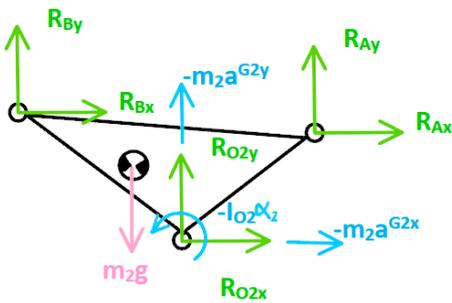
$$\begin{aligned} \sum F_x &= R_x^{O_6} - R_x^B - R_x^C - m_6 \cdot a_x^{G_6} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_6} - R_y^B - R_y^C - m_6 \cdot a_y^{G_6} - m_6 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-53. Kawasaki: barra 6

$$\begin{aligned} \sum M^{O_6} &= -R_x^B \cdot L'_6 \cdot (-\text{sen}(\theta_6)) - R_y^B \cdot L'_6 \cdot \cos(\theta_6) - R_x^C \cdot L_6 \cdot (-\text{sen}(\theta_6 + \beta_6)) - R_y^C \cdot L_6 \cdot \\ &\quad \cos(\theta_6 + \beta_6) - m_6 \cdot g \cdot g_6 \cdot \cos(\theta_6 + \gamma_6) - I_{O_6} \cdot \alpha_6 = 0 \end{aligned}$$

4.3.4 Suspensión Suzuki

Ecuaciones de equilibrio de la barra 2:

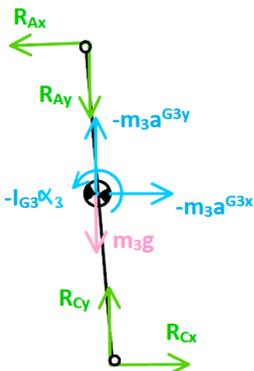


$$\begin{aligned} \sum F_x &= R_x^{O_2} + R_x^A + R_x^B - m_2 \cdot a_x^{G_2} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_2} + R_y^A + R_y^B - m_2 \cdot a_y^{G_2} - m_2 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-54. Suzuki: barra 2

$$\begin{aligned} \sum M^{O_2} &= -R_x^A \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2 - \beta_2) + R_y^A \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_2 - \beta_2) - R_x^B \cdot L'_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) - R_y^B \cdot L'_2 \cdot \\ &\quad (-\cos(\theta_2)) + m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot (-\cos(\theta_2 - \gamma_2)) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= -R_x^A + R_x^C - m_3 \cdot a_x^{G_3} = 0 \\ \sum F_y &= -R_y^A + R_y^C - m_3 \cdot a_y^{G_3} - m_3 \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Figura 4-55. Suzuki: barra 3

$$\sum M^{G_3} = R_x^A \cdot g_3 \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) + R_y^A \cdot g_3 \cdot \cos(\theta_3) + R_x^C \cdot (L_3 - g_3) \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) + R_y^C \cdot (L_3 - g_3) \cdot \cos(\theta_3) - I_{G_3} \cdot \alpha_3 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:

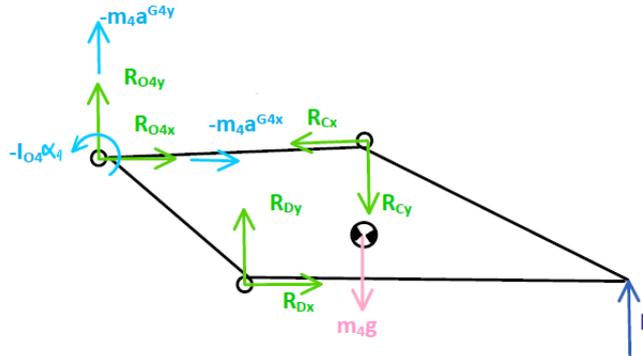


Figura 4-56. Suzuki: barra 4

$$\sum F_x = -R_x^C + R_x^D + R_x^{O_4} - m_4 \cdot a_x^{G_4} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^C + R_y^D + R_y^{O_4} - m_4 \cdot a_y^{G_4} - m_4 \cdot g + F = 0$$

$$\sum M^{O_4} = R_x^C \cdot L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) - R_y^C \cdot L_4 \cdot \cos(\theta_4) + R_x^D \cdot L'_4 \cdot (-\text{sen}(\theta_4 - \beta_4)) + R_y^D \cdot L_4 \cdot \cos(\theta_4 - \beta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \cos(\theta_4 - \gamma_4) + F \cdot L''_4 \cdot \cos(\theta_4 - \beta'_4) - I_{O_4} \cdot \alpha_4 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:

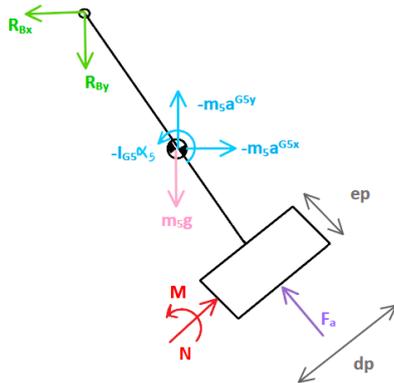


Figura 4-57. Suzuki: barra 5

$$\sum F_x = -R_x^B - m_5 \cdot a_x^{G_5} - F_a^x + N \cdot (-\cos(\theta_5 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^B - m_5 \cdot a_y^{G_5} - m_5 \cdot g + F_a^y + N \cdot (-\text{sen}(\theta_5 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum M^{G_5} = N \cdot \left[r_2 \cdot (-\cos(\theta_5 - \frac{\pi}{2})) + r_1 \cdot (-\text{sen}(\theta_5 - \frac{\pi}{2})) \right] + R_x^B \cdot g_5 \cdot (-\text{sen}(\theta_5)) + R_y^B \cdot g_5 \cdot \cos(\theta_5) - F_a^x \cdot (L_5 - g_5) \cdot (-\text{sen}(\theta_5)) + F_a^y \cdot (L_5 - g_5) \cdot \cos(\theta_5) - I_{G_5} \cdot \alpha_5 + M = 0$$

Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 5 y 6 hasta el punto B de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_5) & -\text{sen}(\theta_5) \\ \text{sen}(\theta_5) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_5 - \frac{e_p}{2} \\ -\frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

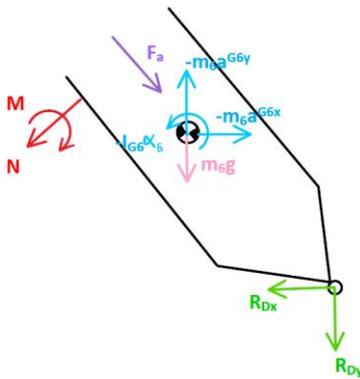
$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$\mathbf{F}_a = (-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_5) \\ -\text{sen}(\theta_5) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:



$$\sum F_x = -R_x^D - m_6 \cdot a_x^{G6} + F_a^x - N \cdot (-\cos(\theta_6 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^D - m_6 \cdot a_y^{G6} - m_5 \cdot g - F_a^y - N \cdot (-\text{sen}(\theta_6 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

Figura 4-58. Suzuki: barra 6

$$\begin{aligned} \sum M^D = N \cdot [t_2 \cdot (-\cos(\theta_6 + \frac{\pi}{2})) + t_1 \cdot (-\text{sen}(\theta_6 + \frac{\pi}{2}))] - F_a^x \cdot L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) + F_a^y \cdot L_6 \cdot \\ (-\cos(\theta_6)) - (-m_6 \cdot a_x^{G6}) \cdot g_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) - (-m_6 \cdot a_y^{G6}) \cdot g_6 \cdot (-\cos(\theta_6)) + m_6 \cdot g \cdot g_6 \cdot \\ (-\cos(\theta_6)) - I_{G6} \cdot \alpha_6 - M = 0 \end{aligned}$$

Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 5 y 6 hasta el punto D se obtiene de la siguiente forma:

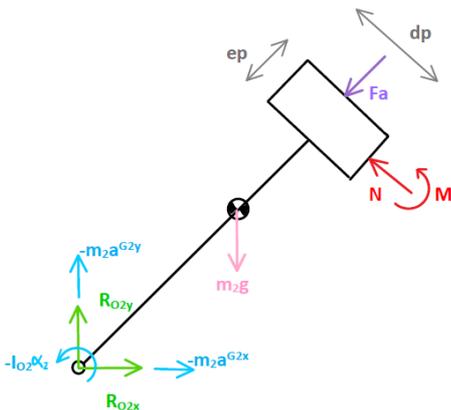
$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_6) & -\text{sen}(\theta_6) \\ \text{sen}(\theta_6) & \cos(\theta_6) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_5 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

4.3.5 Suspensión Morbidelli 500GP

Ecuaciones de equilibrio de la barra 2:



$$\sum F_x = R_x^{O2} - m_5 \cdot a_x^{G2} - F_a^x - N \cdot (-\cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O2} - m_2 \cdot a_y^{G2} - m_2 \cdot g - F_a^y + N \cdot \text{sen}(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) = 0$$

Figura 4-59. Morbidelli: barra 2

$$\sum M^{O_2} = N \cdot \left[r_2 \cdot \left(-\cos\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right) + r_1 \cdot \sin\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right] - m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot \cos(\theta_2) + F_a^x \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_2) - F_a^y \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_2) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 + M = 0$$

Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 2 y 3 hasta el punto O_2 de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_2 - \frac{e_p}{2} \\ -\frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$\mathbf{F}_a = \left(-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:

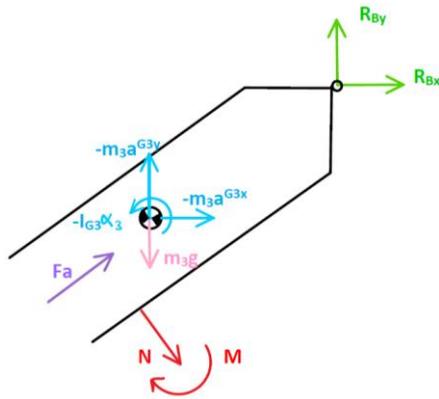


Figura 4-60. Morbidelli: barra 3

$$\sum F_x = R_x^B - m_3 \cdot a_x^{G_3} + F_a^x + N \cdot \cos\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^B - m_3 \cdot a_y^{G_3} - m_3 \cdot g + F_a^y + N \cdot \left(-\sin\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) \right) = 0$$

$$\sum M^B = N \cdot \left[t_1 \cdot \cos\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) + t_2 \cdot \left(-\sin\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] + F_a^x \cdot L_3 \cdot \left(-\sin(\theta_3) \right) - F_a^y \cdot L_3 \cdot \left(-\cos(\theta_3) \right) + \left(-m_3 \cdot a_x^{G_3} \right) \cdot g_3 \cdot \left(-\sin(\theta_3) \right) - \left(-m_3 \cdot a_y^{G_3} \right) \cdot g_3 \cdot \left(-\cos(\theta_3) \right) + m_3 \cdot g \cdot g_3 \cdot \left(-\cos(\theta_3) \right) - I_{G_3} \cdot \alpha_3 - M = 0$$

Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 2 y 3 hasta el punto B se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_2 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:

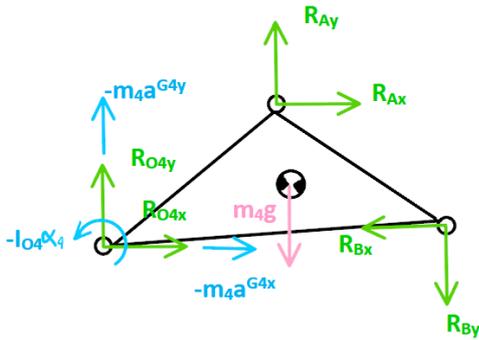


Figura 4-61. Morbidelli: barra 4

$$\sum F_x = R_x^{O_4} + R_x^A - R_x^B - m_4 \cdot a_x^{G_4} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O_4} + R_y^A - R_y^B - m_4 \cdot a_y^{G_4} - m_4 \cdot g = 0$$

$$\sum M^{O_4} = -R_x^A \cdot L'_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) + R_y^A \cdot L'_4 \cdot \text{cos}(\theta_4) + R_x^B \cdot L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4 - \beta_4) - R_y^B \cdot L_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \beta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \text{cos}(\theta_4 - \gamma_4) - I_{O_4} \cdot \alpha_4 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:

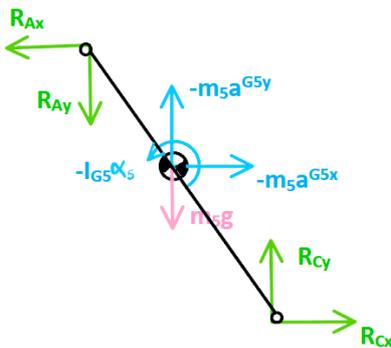


Figura 4-62. Morbidelli: barra 5

$$\sum F_x = -R_x^A + R_x^C - m_5 \cdot a_x^{G_5} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^A + R_y^C - m_5 \cdot a_y^{G_5} - m_5 \cdot g = 0$$

$$\sum M^{G_5} = R_x^A \cdot g_5 \cdot (-\text{sen}(\theta_5)) + R_y^A \cdot g_5 \cdot \text{cos}(\theta_5) + R_x^C \cdot (L_5 - g_5) \cdot (-\text{sen}(\theta_5)) + R_y^C \cdot (L_5 - g_5) \cdot \text{cos}(\theta_5) - I_{G_5} \cdot \alpha_5 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:

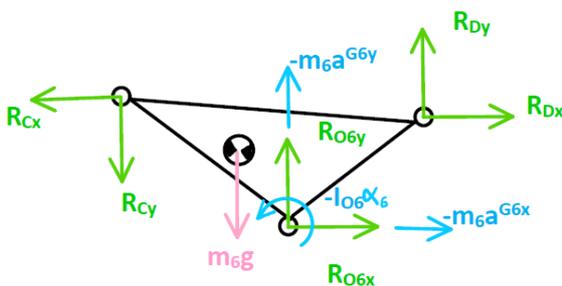


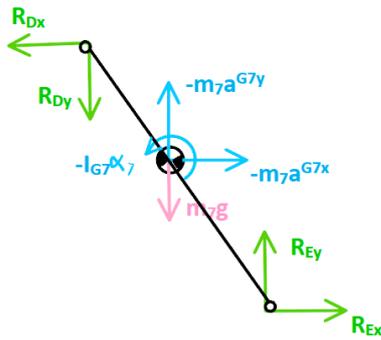
Figura 4-63. Morbidelli: barra 6

$$\sum F_x = R_x^{O_6} - R_x^C + R_x^D - m_6 \cdot a_x^{G_6} = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O_6} - R_y^C + R_y^D - m_6 \cdot a_y^{G_6} - m_6 \cdot g = 0$$

$$\sum M^{O_6} = R_x^C \cdot L_6 \cdot \text{sen}(\theta_6 + \beta_6) + R_y^C \cdot L_6 \cdot (-\text{cos}(\theta_6 + \beta_6)) - R_x^D \cdot L'_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) - R_y^D \cdot L'_6 \cdot \text{cos}(\theta_6) + m_6 \cdot g \cdot g_6 \cdot (-\text{cos}(\theta_6 + \gamma_6)) - I_{O_6} \cdot \alpha_6 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 7:



$$\sum F_x = -R_x^D + R_x^E - m_7 \cdot a_x^{G_7} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^D + R_y^E - m_7 \cdot a_y^{G_7} - m_7 \cdot g = 0$$

Figura 4-64. Morbidelli: barra 7

$$\sum M^{G_7} = R_x^D \cdot g_7 \cdot (-\text{sen}(\theta_7)) + R_y^D \cdot g_7 \cdot \text{cos}(\theta_7) + R_x^E \cdot (L_7 - g_7) \cdot (-\text{sen}(\theta_7)) + R_y^E \cdot (L_7 - g_7) \cdot \text{cos}(\theta_7) - I_{G_7} \cdot \alpha_7 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 8:

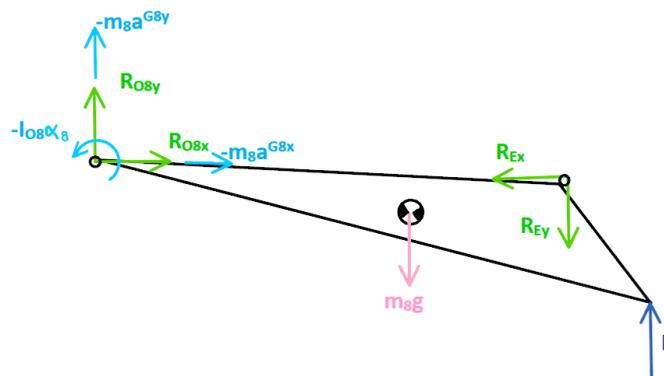


Figura 4-65. Morbidelli: barra 8

$$\sum F_x = -R_x^E + R_x^{O_8} - m_8 \cdot a_x^{G_8} = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^E + R_y^{O_8} - m_8 \cdot a_y^{G_8} - m_8 \cdot g + F = 0$$

$$\sum M^{O_8} = R_x^E \cdot L_8 \cdot \text{sen}(\theta_8) - R_y^E \cdot L_8 \cdot \text{cos}(\theta_8) - m_8 \cdot g \cdot g_8 \cdot \text{cos}(\theta_8 - \gamma_8) + F \cdot L'_8 \cdot \text{cos}(\theta_8 - \beta_8) - I_{O_8} \cdot \alpha_8 = 0$$

4.3.6 Suspensión Elf Honda GP

Ecuaciones de equilibrio de la barra 2:

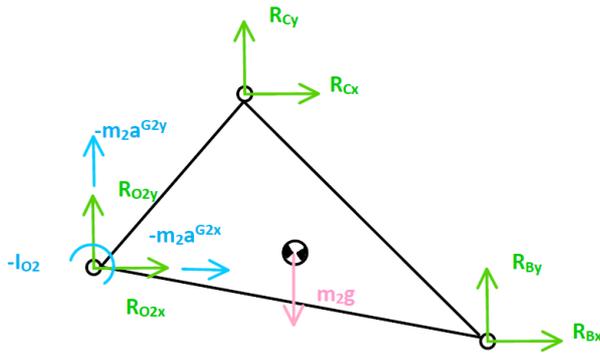


Figura 4-66. Elf Honda GP: barra 2

$$\begin{aligned}\sum F_x &= R_x^{O_2} + R_x^B + R_x^C - m_2 \cdot a_x^{G_2} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_2} + R_y^B + R_y^C - m_2 \cdot a_y^{G_2} - m_2 \cdot g = 0\end{aligned}$$

$$\sum M^{O_2} = R_x^B \cdot L'_2 \cdot (-\text{sen}(\theta_2 - \beta_2)) + R_y^B \cdot L'_2 \cdot \cos(\theta_2 - \beta_2) - R_x^C \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) + R_y^C \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_2) - m_2 \cdot g \cdot g_2 \cdot \cos(\theta_2 - \gamma_2) - I_{O_2} \cdot \alpha_2 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 3:

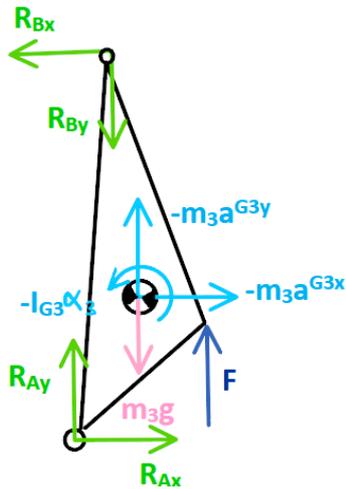


Figura 4-67. Elf Honda GP: barra 3

$$\begin{aligned}\sum F_x &= R_x^A - R_x^B - m_3 \cdot a_x^{G_3} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^A - R_y^B - m_3 \cdot a_y^{G_3} - m_3 \cdot g + F = 0\end{aligned}$$

$$\sum M^B = R_x^A \cdot L_3 \cdot (-\text{sen}(\theta_3)) - R_y^A \cdot L_3 \cdot (-\cos(\theta_3)) + F \cdot L'_3 \cdot \cos(\theta_3 + \beta_3) + (-m_3 \cdot a_x^{G_3}) \cdot g_3 \cdot (-\text{sen}(\theta_3 + \gamma_3)) + (-m_3 \cdot a_y^{G_3}) \cdot g_3 \cdot \cos(\theta_3 + \gamma_3) - m_3 \cdot g \cdot g_3 \cdot \cos(\theta_3 + \gamma_3) - I_{G_3} \cdot \alpha_3 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 4:

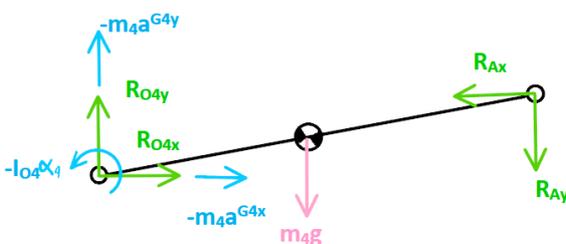
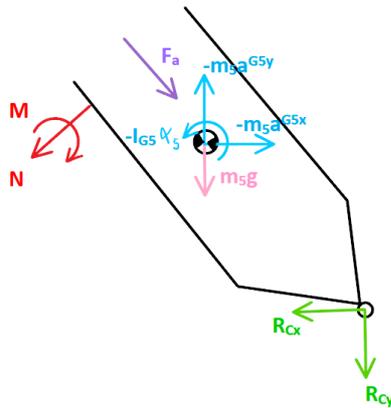


Figura 4-68. Elf Honda GP: barra 4

$$\begin{aligned}\sum F_x &= R_x^{O_4} - R_x^A - m_4 \cdot a_x^{G_4} = 0 \\ \sum F_y &= R_y^{O_4} - R_y^A - m_4 \cdot a_y^{G_4} - m_4 \cdot g = 0\end{aligned}$$

$$\sum M^{O_4} = R_x^A \cdot L_4 \cdot \text{sen}(\theta_4) - R_y^A \cdot L_4 \cdot \cos(\theta_4) - m_4 \cdot g \cdot g_4 \cdot \cos(\theta_4) - I_{O_4} \cdot \alpha_4 = 0$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 5:



$$\sum F_x = -R_x^C - m_5 \cdot a_x^{G_5} + F_a^x - N \cdot (-\cos(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = -R_y^C - m_5 \cdot a_y^{G_5} - m_5 \cdot g - F_a^y - N \cdot (-\sin(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) = 0$$

Figura 4-69. Elf Honda GP: barra 5

$$\begin{aligned} \sum M^C = N \cdot \left[t_2 \cdot (-\cos(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) + t_1 \cdot (-\sin(\theta_5 + \frac{\pi}{2})) \right] - F_a^x \cdot L_5 \cdot \sin(\theta_5) + F_a^y \cdot L_5 \cdot \\ (-\cos(\theta_5)) - (-m_5 \cdot a_x^{G_5}) \cdot g_5 \cdot \sin(\theta_5) - (-m_5 \cdot a_y^{G_5}) \cdot g_5 \cdot (-\cos(\theta_5)) + m_5 \cdot g \cdot g_5 \cdot \\ (-\cos(\theta_5)) - I_{G_5} \cdot \alpha_5 - M = 0 \end{aligned}$$

Donde la distancia existente desde el punto de contacto del sólido 5 y 6 hasta el punto C se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - L_6 \\ \frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

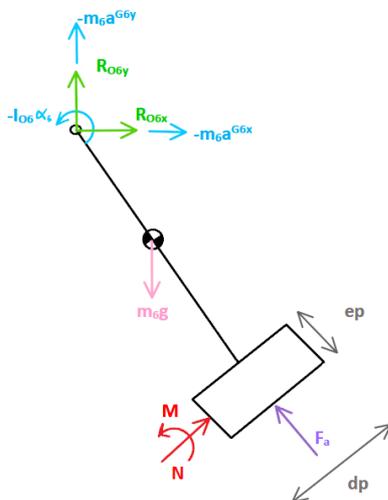
$$t_1 = |\mathbf{t}(1)|$$

$$t_2 = |\mathbf{t}(2)|$$

La fuerza de compresión del amortiguador se calcula como:

$$\mathbf{F}_a = (-k \cdot (s - s_0) - c \cdot (\dot{s} - \dot{s}_0)) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_6) \\ -\sin(\theta_6) \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de equilibrio de la barra 6:



$$\sum F_x = R_x^{O_6} - m_6 \cdot a_x^{G_6} - F_a^x + N \cdot (-\cos(\theta_6 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sum F_y = R_y^{O_6} - m_6 \cdot a_y^{G_6} - m_6 \cdot g + F_a^y + N \cdot (-\sin(\theta_6 - \frac{\pi}{2})) = 0$$

Figura 4-70. Elf Honda GP: barra 6

$$\Sigma M^{O_6} = N \cdot \left[r_2 \cdot \left(-\cos\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right) \right) + r_1 \cdot \left(-\text{sen}\left(\theta_6 - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - F_a^x \cdot L_6 \cdot (-\text{sen}(\theta_6)) + F_a^y \cdot L_6 \cdot \cos(\theta_6) - I_{O_6} \cdot \alpha_6 + M = 0$$

Siendo la distancia entre el punto de contacto del sólido 5 y 6 hasta el punto O_6 de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_6) & -\text{sen}(\theta_6) \\ \text{sen}(\theta_6) & \cos(\theta_6) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_6 - \frac{e_p}{2} \\ -\frac{d_p}{2} \end{pmatrix}$$

$$r_1 = |\mathbf{r}(1)|$$

$$r_2 = |\mathbf{r}(2)|$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Ejecutando el código de MATLAB para el cálculo cinemático y dinámico de las suspensiones, basado en el planteamiento desarrollado en el capítulo anterior, se obtienen los resultados numéricos deseados.

Como ya se mencionó previamente, se ha planteado una propuesta inicial de diseño de los mecanismos, de forma que puedan realizarse los cálculos necesarios.

A continuación, se detallarán los modelos iniciales para cada sistema de suspensión y se mostrarán los valores de las variables cinemáticas en todo su recorrido, la distribución de velocidades y aceleraciones y, finalmente, la evolución de las fuerzas y momentos calculados.

5.1 Suspensión Honda

Parámetros y dimensiones del mecanismo:

Tabla 5-1. Parámetros suspensión Honda

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Basculante (barra 2)	$L_2= 17.38\text{cm}$ $L'_2= 41.28\text{cm}$	$\beta_2= 22.43^\circ$	$g_2= 19.16\text{cm}$ $\gamma_2= 16.96^\circ$	$m_2= 3.70\text{kg}$
Amortiguador (barras 3 y 4)	$L_3= 15.94\text{cm}$ $L_4= 21.86\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_3= 8.11\text{cm}$ $g_4= 15.98\text{cm}$	$m_3= 3.01\text{kg}$ $m_4= 0.34\text{kg}$
Bieleta superior (barra 5)	$L_5= 13.04\text{cm}$ $L'_5= 21.73\text{cm}$ $L''_5= 11.59\text{cm}$	$\beta_5= 26.32^\circ$ $\beta'_5= 123.75^\circ$	$g_5= 11.73\text{cm}$ $\gamma_5= 18.10^\circ$	$m_5= 0.29\text{kg}$
Bieleta inferior (barra 6)	$L_6= 11.59\text{cm}$	-	$g_6= 5.80\text{cm}$	$m_6= 0.047\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O_2	$x_2= 0.00\text{cm}$		$h_2= 0.00\text{cm}$	
O_4	$x_{24}= 0.00\text{cm}$		$h_{24}= 23.18\text{cm}$	
O_6	$x_{26}= 7.97\text{cm}$		$h_{26}= -22.45\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR				
$k= 103000\text{N/m}$	$c= 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0= 36.00\text{cm}$	$sp_0= 0.00\text{cm/s}$	

Resultados cinemáticos:

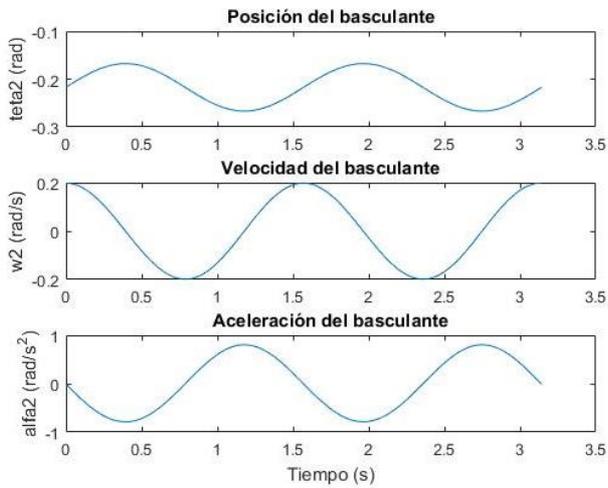


Figura 5-1. Variables cinemáticas basculante Honda

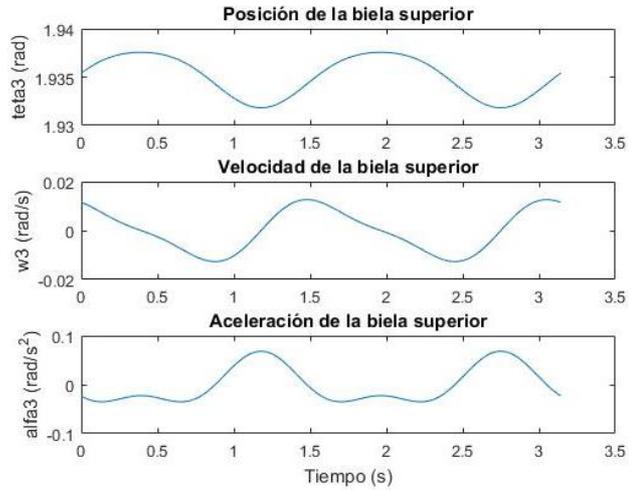


Figura 5-2. Variables cinemáticas biela superior Honda

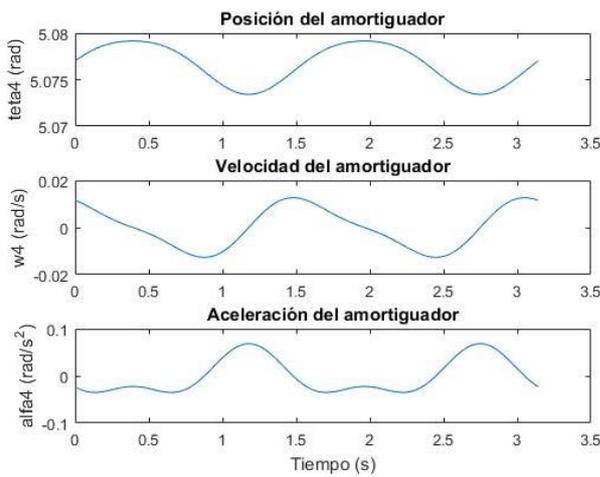


Figura 5-3. Variables cinemáticas amortiguador HONDA

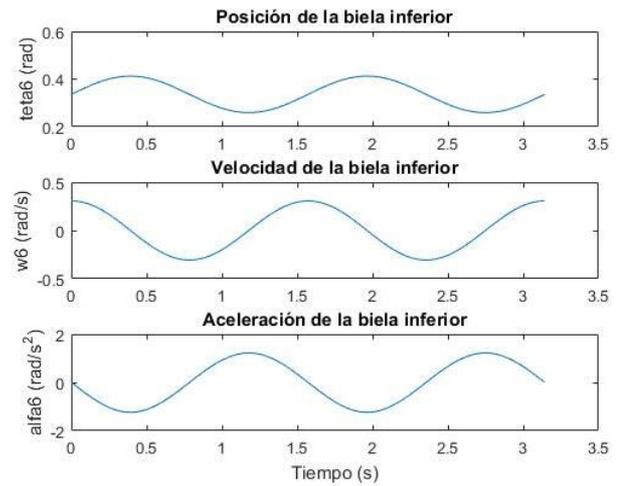


Figura 5-4. Variables cinemáticas biela inferior HONDA

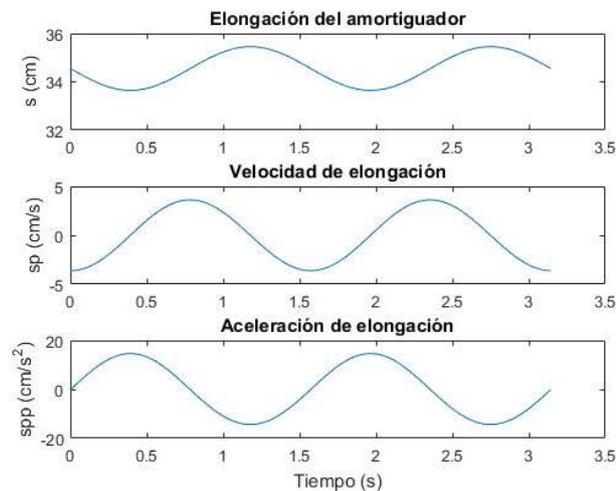


Figura 5-5. Variables cinemáticas elongación HONDA

Resultados dinámica:

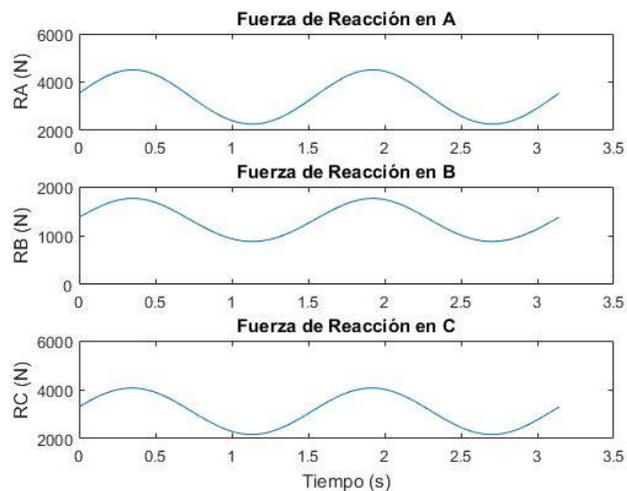


Figura 5-6. Fuerzas de reacción pares móviles HONDA

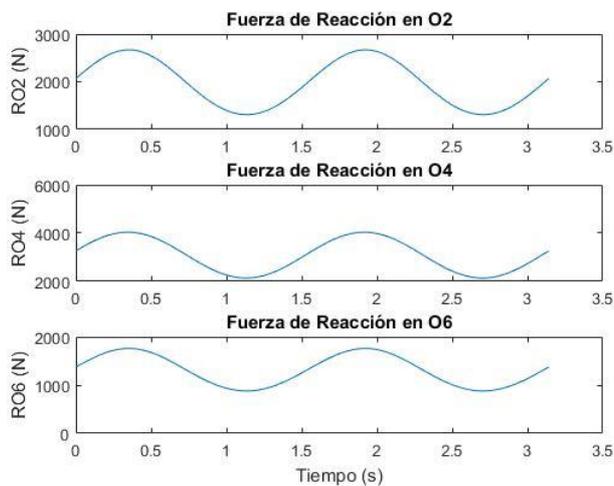


Figura 5-7. Fuerzas de reacción pares fijos HONDA

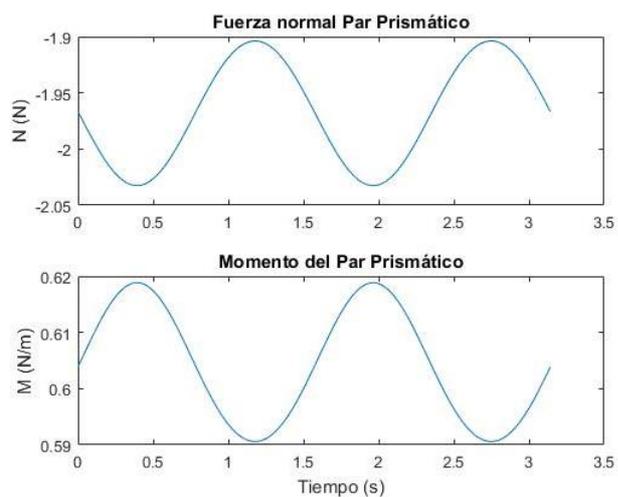


Figura 5-8. Reacciones par prismático HONDA

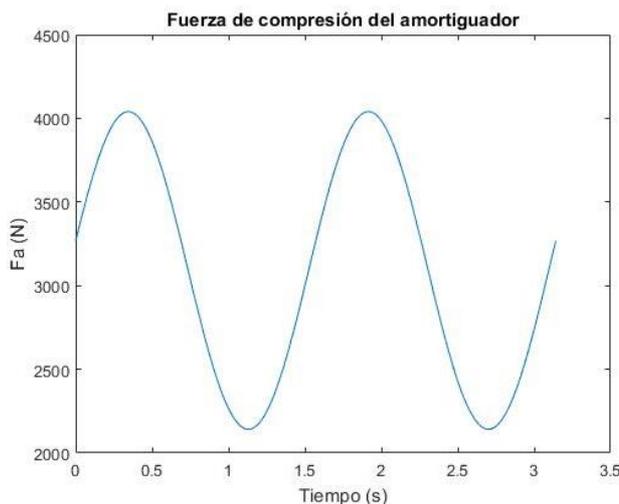


Figura 5-9. Fuerza amortiguador HONDA

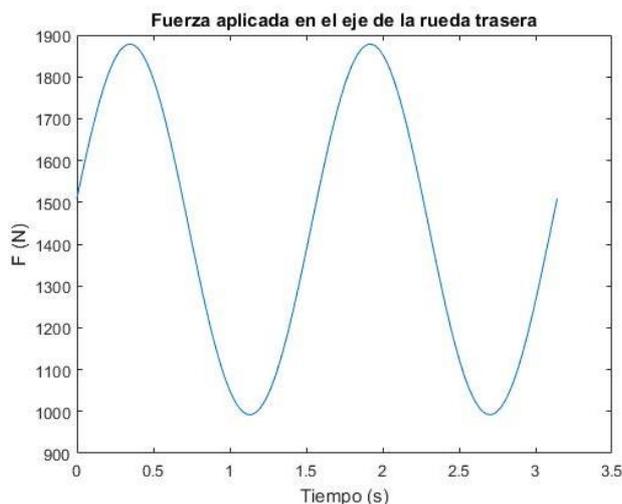


Figura 5-10. Fuerza eje trasero HONDA

Tabla 5-2. Fuerzas y reacciones máximas HONDA

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A= 4509.70\text{N}$	$R^{O2}= 2669.40\text{N}$	$N= -2.03\text{N}$	$F_a= 4040.30\text{N}$
$R^B= 1759.60\text{N}$	$R^{O4}= 4037.20\text{N}$	$M= 0.62\text{N/m}$	$F_{eje}= 1878.20\text{N}$
$R^C= 4067.90\text{N}$	$R^{O6}= 1759.40\text{N}$		

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que las mayores velocidades y aceleraciones angulares son las pertenecientes a la bieleta inferior seguida del basculante, con valores máximos aproximados de 0.5 y 0.2rad/s, 2 y 1rad/s² respectivamente. Además, el amortiguador experimenta una elongación máxima de unos 3cm.

Del análisis dinámico se puede apreciar que las reacciones de los pares de rotación móviles más elevadas superan los 4000N y son propias del amortiguador y del basculante que conectan con la bieleta superior (barra 5). Respecto a los pares de rotación fijos, se observa que la mayor fuerza de reacción surge en el punto O₄ en el que se ancla el amortiguador con el chasis, alcanzando los 4037.2N.

La fuerza y el momento de reacción que aparece en el par prismático del amortiguador, poseen un valor muy reducido, tal y como se esperaba considerando que el amortiguador debe cumplir las especificaciones del fabricante. Por otro lado, el amortiguador trabaja en todo su recorrido a compresión, alcanzando valores superiores a 4000N.

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera oscila en torno a un valor inferior al deseado, por lo que será necesario aplicar una precarga mayor para ajustar correctamente la suspensión. Este asunto se analizará con mayor detalle en los capítulos posteriores.

5.2 Suspensión Yamaha

Parámetros y dimensiones del mecanismo:

Tabla 5-3. Parámetros suspensión Yamaha

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Basculante (barra 2)	$L_2= 12.31\text{cm}$ $L'_2= 28.25\text{cm}$	$\beta_2= 14.67^\circ$ $\beta'_2= 22.69^\circ$	$g_2= 18.35\text{cm}$ $\gamma_2= 15.87^\circ$	$m_2= 3.70\text{kg}$
Bieleta superior (barra 3)	$L_3= 11.59\text{cm}$	-	$g_3= 5.80\text{cm}$	$m_3= 0.047\text{kg}$
Amortiguador (barras 4 y 5)	$L_4= 19.69\text{cm}$ $L_5= 16.66\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_4= 14.70\text{cm}$ $g_5= 8.47\text{cm}$	$m_4= 0.32\text{kg}$ $m_5= 3.15\text{kg}$
Bieleta inferior (barra 6)	$L_6= 10.14\text{cm}$	-	$g_6= 5.07\text{cm}$	$m_6= 0.042\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O ₂	$x_2= 0.00\text{cm}$		$h_2= 0.00\text{cm}$	
O ₄	$x_{24}= 5.07\text{cm}$		$h_{24}= 19.56\text{cm}$	

O_6	$x_{26} = -2.90\text{cm}$	$h_{26} = -15.21\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR			
$k = 103000\text{N/m}$	$c = 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0 = 34.00\text{cm}$	$sp_0 = 0.00\text{cm/s}$

Resultados cinemáticos:

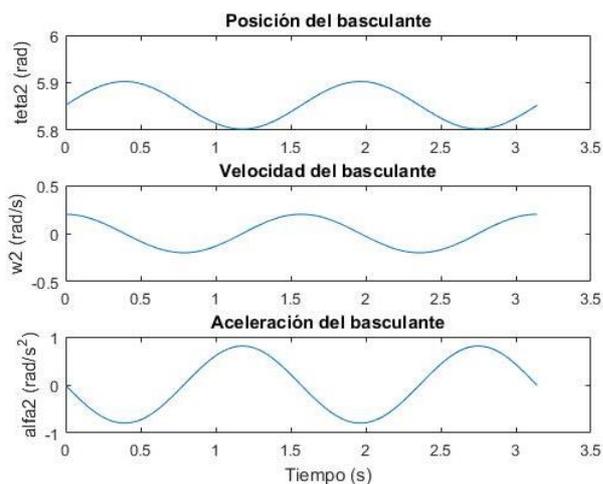


Figura 5-11. Variables cinemáticas basculante YAMAHA

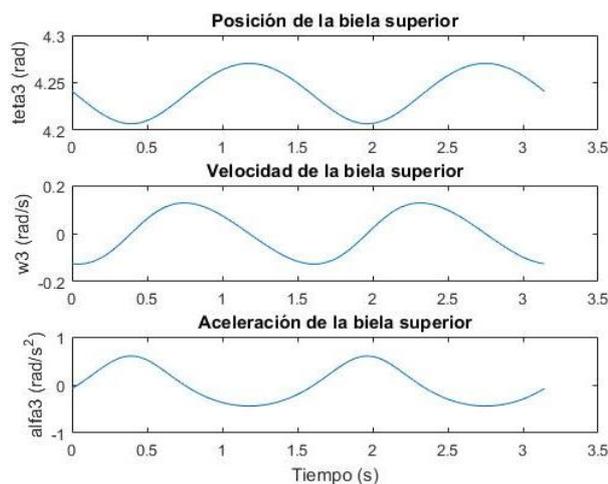


Figura 5-12. Variables cinemáticas biela superior YAMAHA

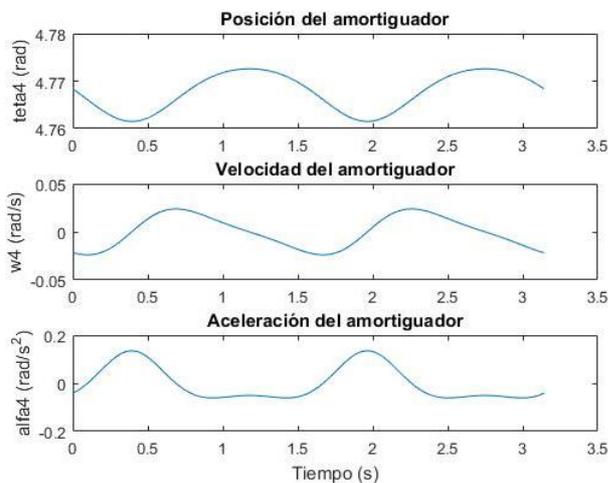


Figura 5-13. Variables cinemáticas amortiguador YAMAHA

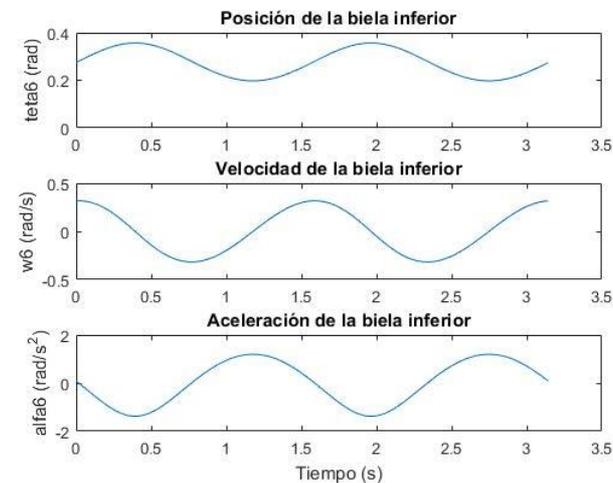


Figura 5-14. Variables cinemáticas biela inferior YAMAHA

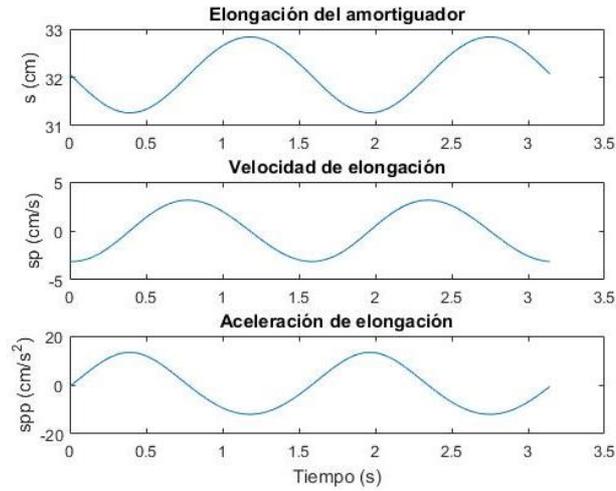


Figura 5-15. Variables cinemáticas elongación YAMAHA

Resultados dinámica:

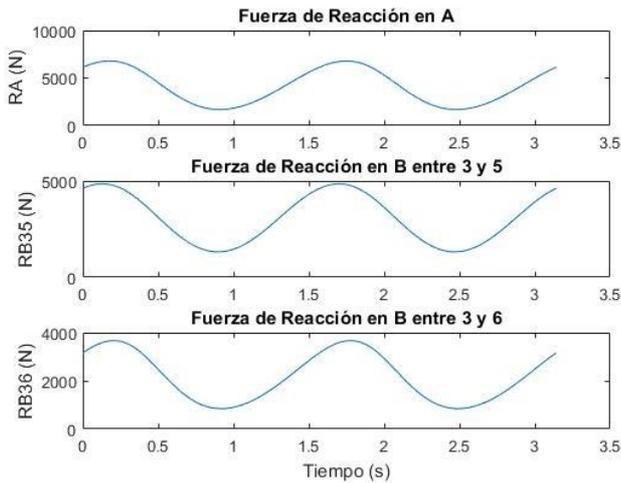


Figura 5-16. Fuerzas de reacción pares móviles YAMAHA

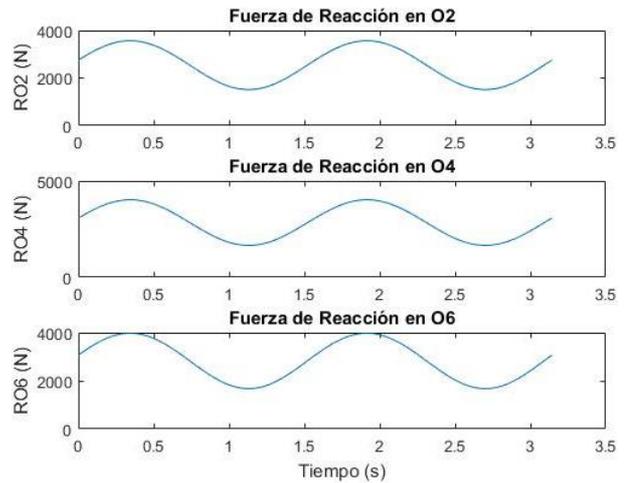


Figura 5-17. Fuerzas de reacción pares fijos YAMAHA

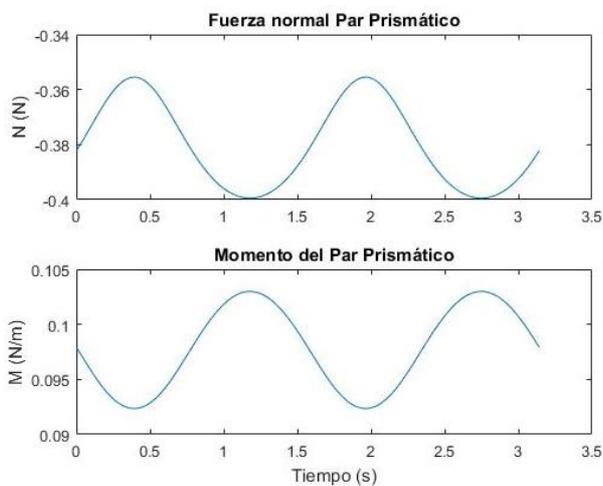


Figura 5-18. Reacciones par prismático YAMAHA

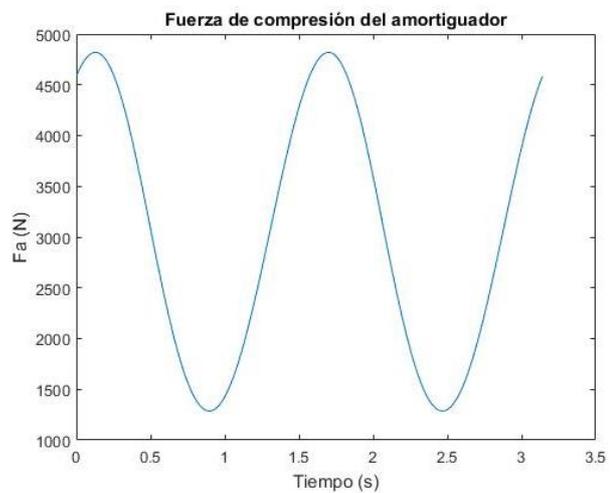


Figura 5-19. Fuerza amortiguador YAMAHA

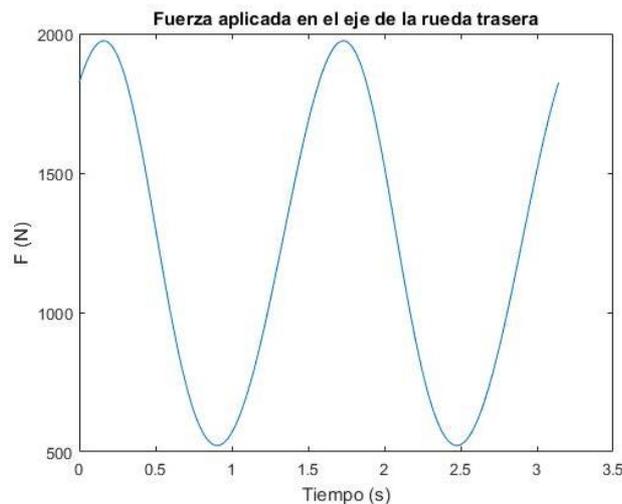


Figura 5-20. Fuerza eje trasero YAMAHA

Tabla 5-4. Fuerzas y reacciones máximas YAMAHA

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A = 6793.20\text{N}$	$R^{02} = 5170.60\text{N}$	$N = -0.40\text{N}$	$F_a = 4820.00\text{N}$
$R^{B5} = 4850.60\text{N}$	$R^{04} = 4816.80\text{N}$	$M = 0.10\text{N/m}$	$F_{eje} = 1974.20\text{N}$
$R^{B6} = 3668.40\text{N}$	$R^{06} = 3668.30\text{N}$		

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que las mayores velocidades y aceleraciones angulares son las pertenecientes a la bieleta inferior seguida del basculante, con valores máximos aproximados de 0.5 rad/s y $2 \text{ y } 1 \text{ rad/s}^2$. Por otro lado, el amortiguador experimenta una elongación máxima de 2 cm .

Del análisis dinámico se puede apreciar que la reacción de los pares de rotación móviles más elevada supera 6700N , propia del basculante en el punto de conexión con la bieleta superior (barra 3). Respecto a los pares de rotación fijos, se observa que las mayores fuerzas de reacción surgen en los puntos O_2 y O_4 , donde el amortiguador y el basculante se fijan al chasis, con valores próximos a 5000N .

La fuerza y el momento de reacción que aparecen en el par prismático del amortiguador, poseen un valor muy reducido, al igual que la suspensión anterior. Y la fuerza que surge en el amortiguador es siempre de compresión, alcanzando valores superiores a 4000N .

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera sobrepasa los 1900N .

5.3 Suspensión Kawasaki

Tabla 5-5. Parámetros suspensión Kawasaki

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Basculante (barra 2)	$L_2 = 18.83\text{cm}$ $L'_2 = 23.18\text{cm}$	$\beta_2 = 18.91^\circ$ $\beta'_2 = 31.25^\circ$	$g_2 = 20.68\text{cm}$ $\gamma_2 = 22.15^\circ$	$m_2 = 3.70\text{kg}$
Bieleta superior (barra 3)	$L_3 = 26.80\text{cm}$	-	$g_3 = 13.40\text{cm}$	$m_3 = 0.084\text{kg}$

Amortiguador (barras 4 y 5)	$L_4= 21.14\text{cm}$ $L_5= 16.66\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_4= 15.57\text{cm}$ $g_5= 8.47\text{cm}$	$m_4= 0.32\text{kg}$ $m_5= 3.15\text{kg}$
Bieleta inferior (barra 6)	$L_6= 15.94\text{cm}$ $L'_6= 12.31\text{cm}$ $L''_6= 12.31\text{cm}$	$\beta_6= 49.68^\circ$	$g_6= 8.42\text{cm}$ $\gamma_2= 30.71^\circ$	$m_6= 0.216\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O_2	$x_2= 0.00\text{cm}$		$h_2= 0.00\text{cm}$	
O_4	$x_{24}= 0.00\text{cm}$		$h_{24}= 10.14\text{cm}$	
O_6	$x_{26}= -5.79\text{cm}$		$h_{26}= -15.21\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR				
$k= 103000\text{N/m}$	$c= 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0= 33.00\text{cm}$	$sp_0= 0.00\text{cm/s}$	

Resultados cinemáticos:

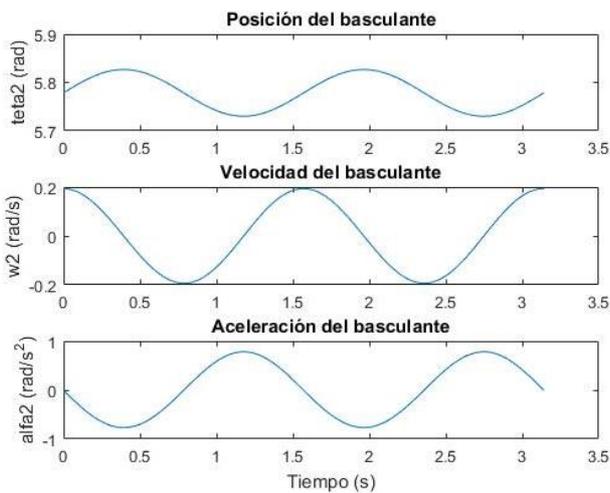


Figura 5-21. Variables cinemáticas basculante KAWASAKI

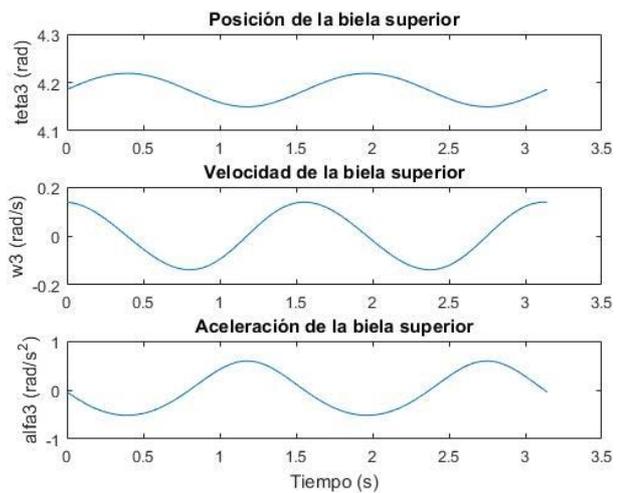


Figura 5-22. Variables cinemáticas biela superior KAWASAKI

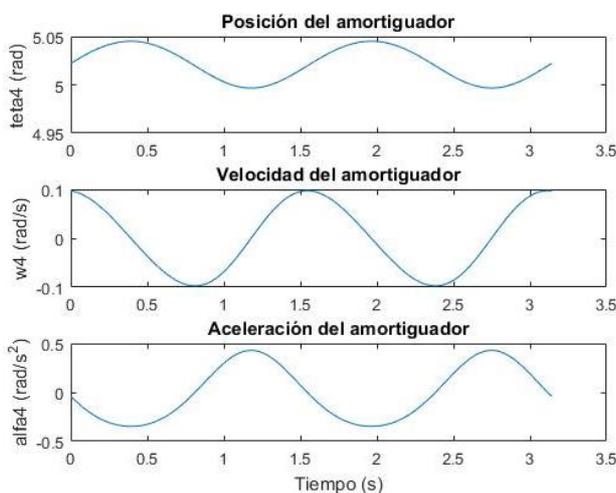


Figura 5-23. Variables cinemáticas amortiguador KAWASAKI

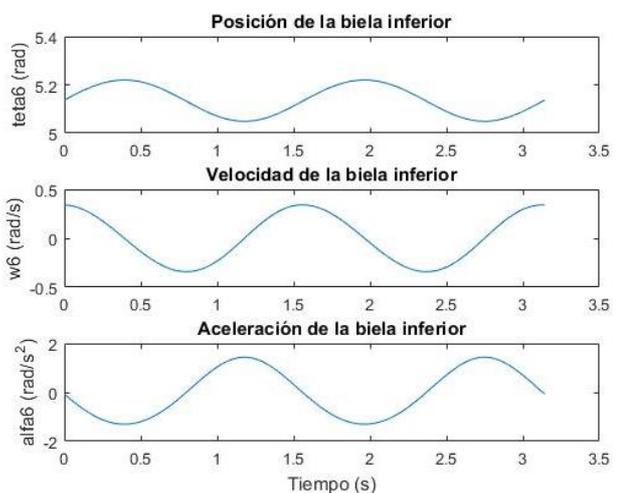


Figura 5-24. Variables cinemáticas biela inferior KAWASAKI

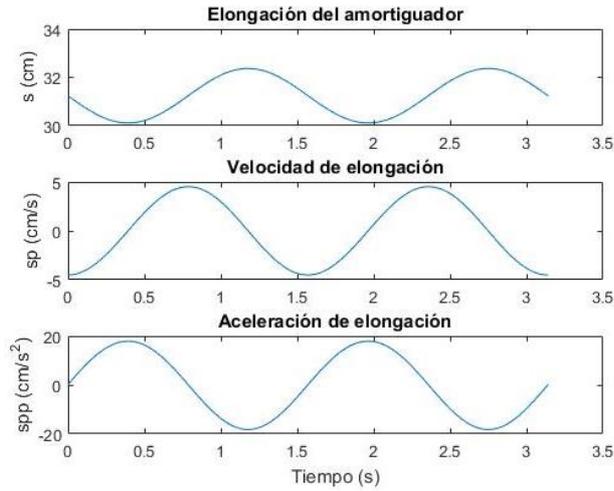


Figura 5-25. Variables cinemáticas elongación KAWASAKI

Resultados dinámica:

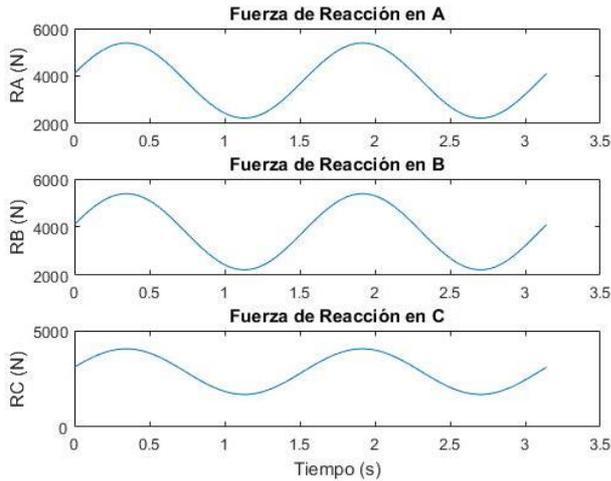


Figura 5-26. Fuerzas de reacción pares móviles KAWASAKI

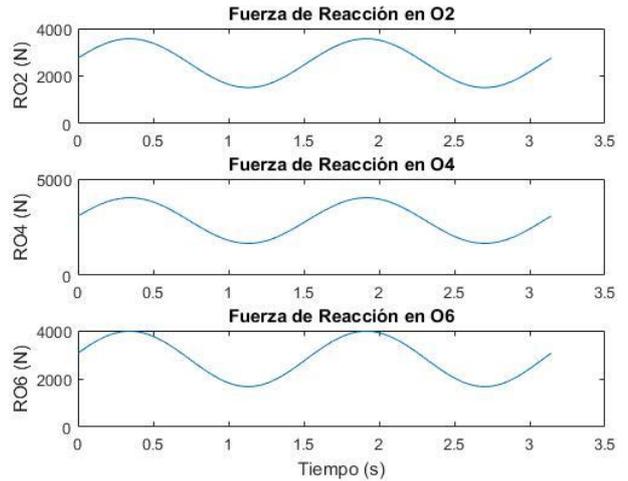


Figura 5-27. Fuerzas de reacción pares fijos KAWASAKI

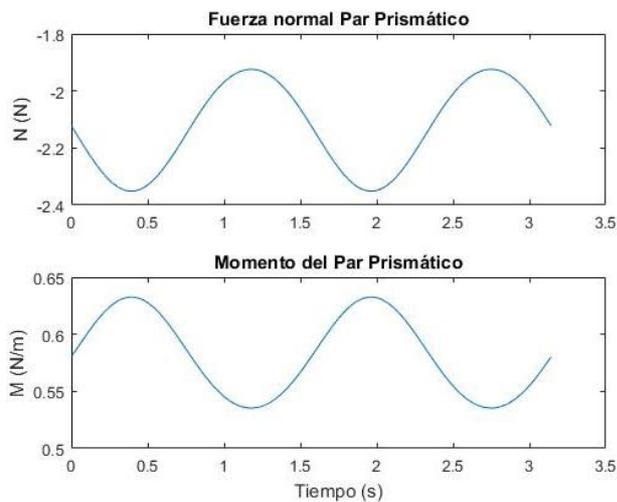


Figura 5-28. Fuerza par prismático KAWASAKI

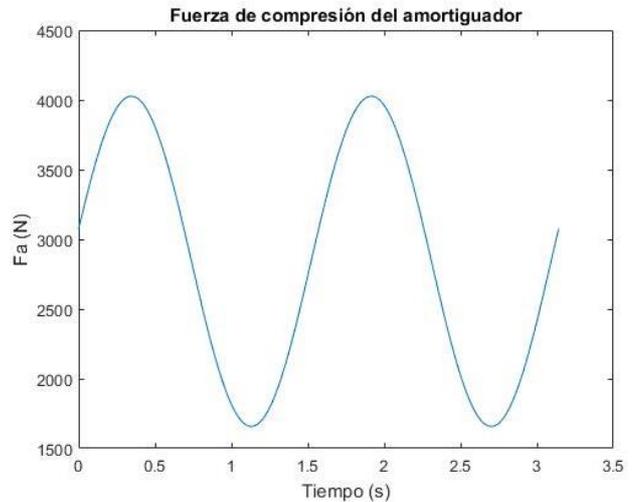


Figura 5-29. Fuerza amortiguador KAWASAKI

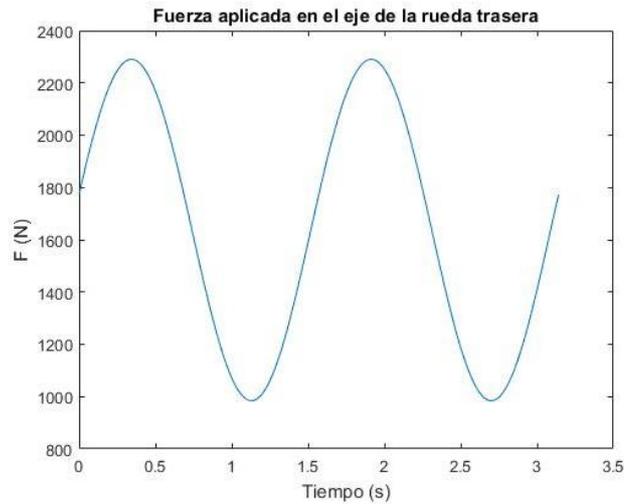


Figura 5-30. Fuerza eje trasero KAWASAKI

Tabla 5-6. Fuerzas y reacciones máximas KAWASAKI

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A= 5388.30N$	$R^{02}= 3567.40N$	$N= -2.35N$	$F_a= 4026.80N$
$R^B= 5387.60N$	$R^{04}= 4023.80N$	$M= 0.63N/m$	$F_{eje}= 2290.20N$
$R^C= 4055.40N$	$R^{06}= 3975.70N$		

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que las mayores velocidades y aceleraciones angulares son las pertenecientes a la bieleta inferior seguida del basculante y la bieleta superior, con valores máximos aproximados de 0.5, 0.2 y 0.2rad/s, 2, 1 y 1rad/s² respectivamente. Por otro lado, el amortiguador experimenta una elongación máxima de más de 2cm.

Del análisis dinámico se puede apreciar que las reacciones de los pares de rotación móviles más elevadas alcanzan 5300N, propia de la bieleta superior (barra 3) en sus dos conexiones, la del basculante y la que conecta con la bieleta inferior. Respecto a los pares de rotación fijos, se observa que las fuerzas de reacción son similares en los tres puntos de anclaje del mecanismo, entorno a los 4000N.

La fuerza y el momento de reacción que aparecen en el par prismático del amortiguador, poseen un valor muy reducido al igual que los anteriores. Y la fuerza que surge en el amortiguador es siempre de compresión, alcanzando valores de 4000N.

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera sobrepasa los 2200N.

5.4 Suspensión Suzuki

Tabla 5-7. Parámetros suspensión Suzuki

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Bieleta superior (barra 2)	$L_2= 8.69cm$ $L'_2= 10.14cm$ $L''_2= 13.04cm$	$\beta_2= 87.27^\circ$	$g_2= 4.72cm$ $\gamma_2= 47.84^\circ$	$m_2= 0.20kg$
Bieleta inferior (barra 3)	$L_3= 20.28cm$	-	$g_3= 10.14cm$	$m_3= 0.061kg$

Basculante (barras 4)	$L_4= 16.66\text{cm}$ $L'_4= 13.76\text{cm}$ $L''_4= 37.67\text{cm}$	$\beta_4= 59.09^\circ$ $\beta'_4= 26.32^\circ$	$g_4= 17.09\text{cm}$ $\gamma_4= 26.29^\circ$	$m_4= 3.70\text{kg}$
Amortiguador (barras 5 y 6)	$L_5= 21.14\text{cm}$ $L_6= 18.11\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_5= 15.57\text{cm}$ $g_6= 9.21\text{cm}$	$m_5= 0.331\text{kg}$ $m_6= 3.42\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O_2	$x_{42}=10.14\text{cm}$		$h_{42}= 15.21\text{cm}$	
O_4	$x_4= 0.00\text{cm}$		$h_4= 0.00\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR				
$k= 103000\text{N/m}$	$c= 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0= 37\text{cm}$	$sp_0= 0\text{cm/s}$	

Resultados cinemáticos:

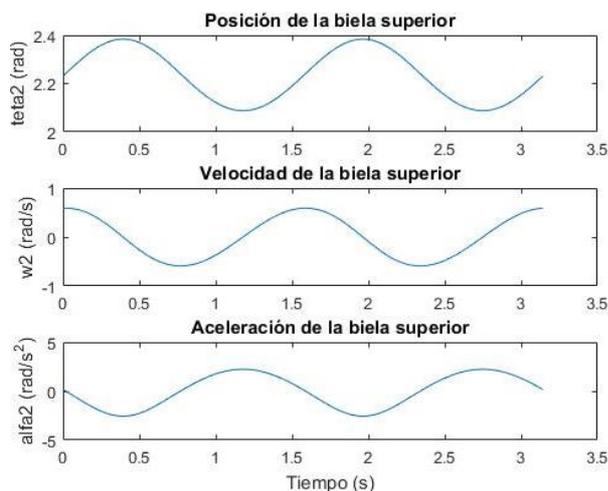


Figura 5-31. Variables cinemáticas biela superior SUZUKI

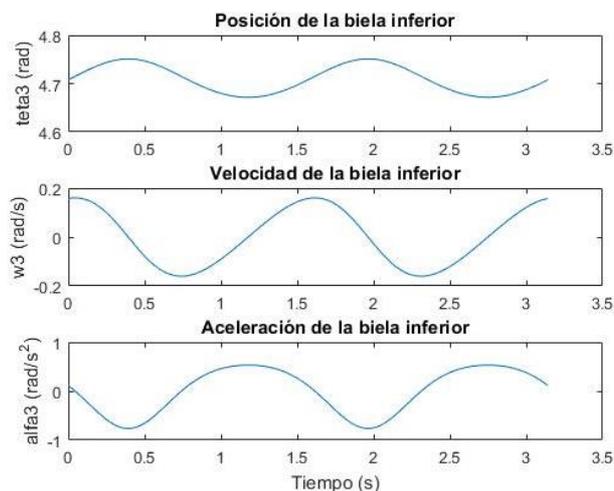


Figura 5-32. Variables cinemáticas biela inferior SUZUKI

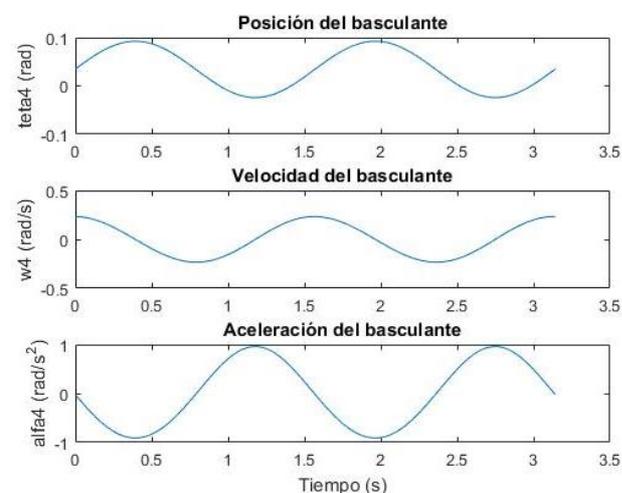


Figura 5-33. Variables cinemáticas basculante SUZUKI

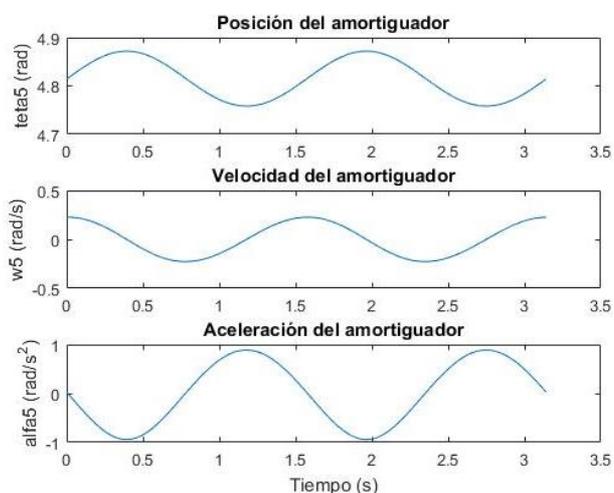


Figura 5-34. Variables cinemáticas amortiguador SUZUKI

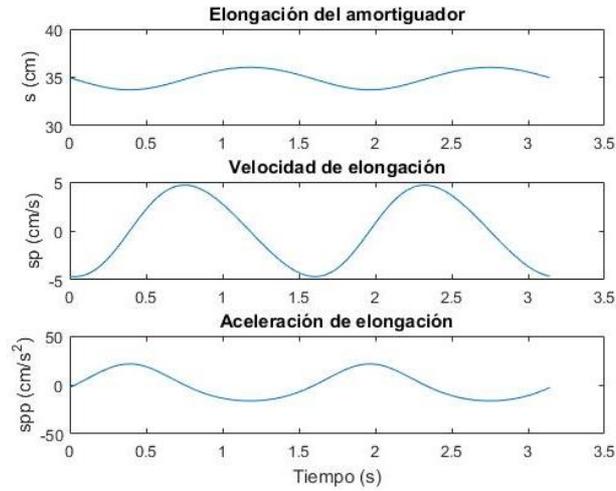


Figura 5-35. Variables cinemáticas elongación SUZUKI

Resultados dinámica:

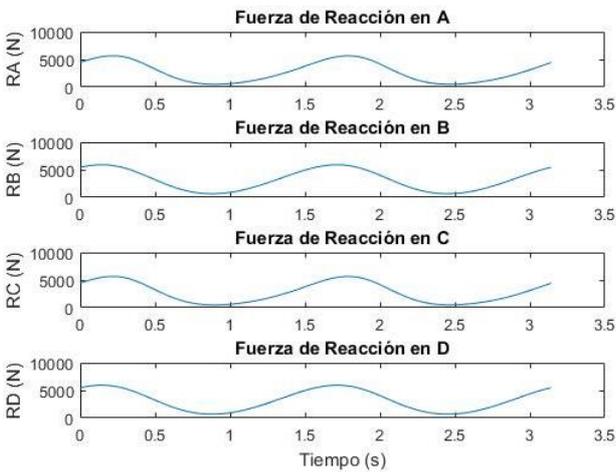


Figura 5-36. Fuerzas de reacción pares móviles SUZUKI

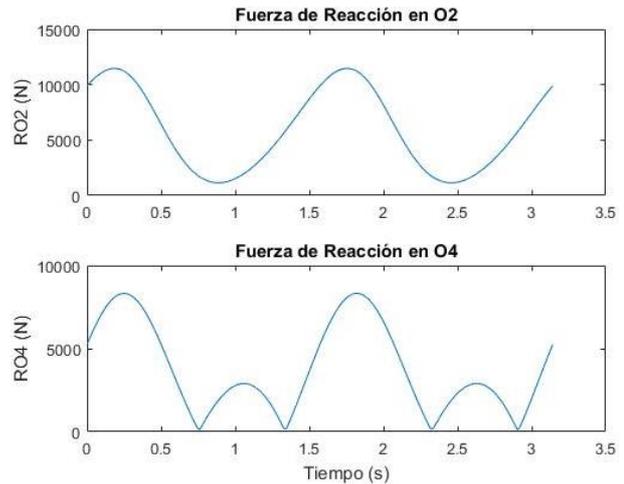


Figura 5-37. Fuerzas reacción pares fijos SUZUKI

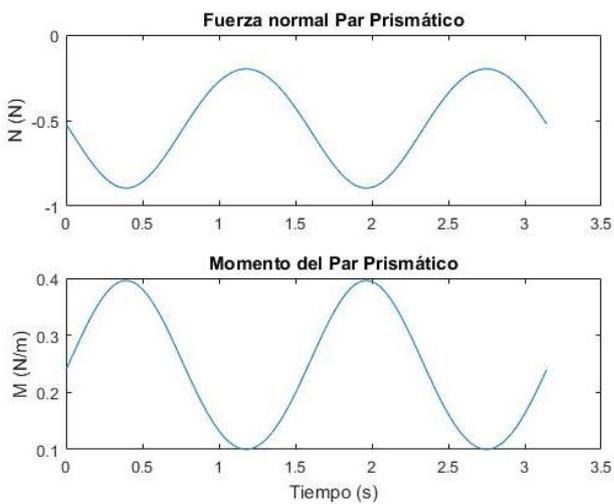


Figura 5-38. Fuerzas par prismático SUZUKI

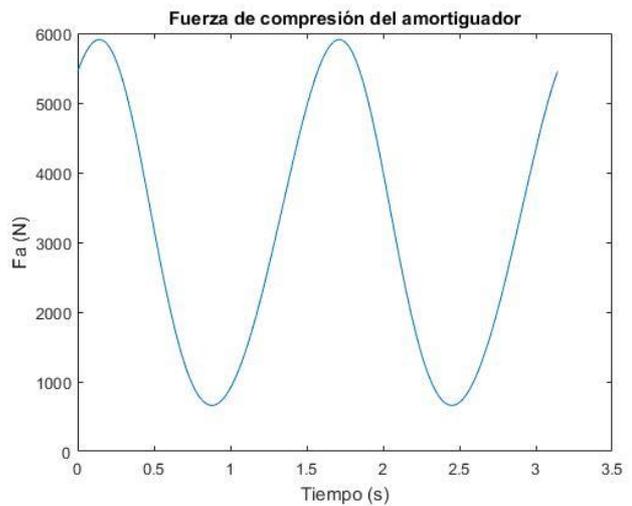


Figura 5-39. Fuerza amortiguador SUZUKI

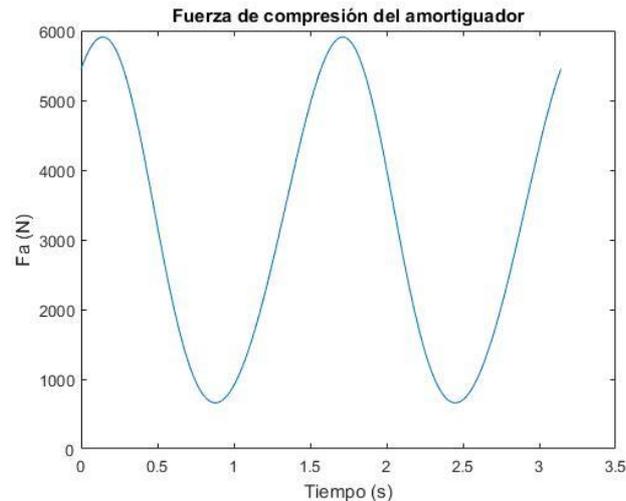


Figura 5-40. Fuerza eje trasero SUZUKI

Tabla 5-8. Fuerzas y reacciones máximas SUZUKI

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A = 5662.90\text{N}$	$R^{O2} = 11470.00\text{N}$	$N = -0.89\text{N}$	$F_a = 5909.00\text{N}$
$R^B = 5905.80\text{N}$	$R^{O4} = 8321.40\text{N}$	$M = 0.39\text{N/m}$	$F_{eje} = 5983.30\text{N}$
$R^C = 5663.50\text{N}$			
$R^D = 5942.20\text{N}$			

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que la mayor velocidad y aceleración angular son las pertenecientes a la bieleta superior, con un valor máximo aproximado de 1rad/s y 2.5rad/s^2 . Por otro lado, el amortiguador experimenta una elongación máxima de 2cm .

Del análisis dinámico se puede apreciar que las reacciones de los pares de rotación móviles son muy similares entre sí, alcanzando 5500N . Respecto a los pares de rotación fijos, se observa que la mayor fuerza de reacción surge en el punto O_2 sobrepasando los 11000N , donde la bieleta superior se fija al chasis. Como observación, se puede mencionar que las reacciones en O_4 no siguen una trayectoria armónica continuada, alcanzando valores nulos. Además, las reacciones de ambos pares fijos, son notablemente más elevadas que en los casos anteriores.

La fuerza y el momento de reacción que aparecen en el par prismático del amortiguador, poseen un valor muy reducido. Y la fuerza que surge en el amortiguador es puramente compresión en todo su recorrido, alcanzando valores superiores a 5900N .

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera, también supera los 5900N .

5.5 Suspensión Morbidelli 500GP

Tabla 5-9. Parámetros suspensión Morbidelli 500GP

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Amortiguador (barras 2 y 3)	$L_2= 18.96\text{cm}$ $L_3= 13.76\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_2= 14.27\text{cm}$ $g_3= 7.00\text{cm}$	$m_2= 0.312\text{kg}$ $m_3= 2.60\text{kg}$
Bieleta superior I (barra 4)	$L_4= 13.76\text{cm}$ $L'_4= 10.14\text{cm}$	$\beta_4= 34.96^\circ$	$g_4= 7.76\text{cm}$ $\gamma_4= 17.43^\circ$	$m_4= 0.197\text{kg}$
Bieleta superior II (barras 5)	$L_5= 20.28\text{cm}$	-	$g_5= 10.14\text{cm}$	$m_5= 0.073\text{kg}$
Bieleta media (barra 6)	$L_6= 6.52\text{cm}$ $L'_6= 7.24\text{cm}$	$\beta_6= 86.18^\circ$	$g_6= 3.67\text{cm}$ $\gamma_6= 32.08^\circ$	$m_6= 0.157\text{kg}$
Bieleta inferior (barra 7)	$L_7= 18.11\text{cm}$	-	$g_7= 9.06\text{cm}$	$m_7= 0.067\text{kg}$
Basculante (barras 8)	$L_8= 31.15\text{cm}$ $L'_8= 39.84\text{cm}$	$\beta_8= 12.49^\circ$	$g_8= 21.00\text{cm}$ $\gamma_8= 7.30^\circ$	$m_8= 3.70\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O ₂	$x_{28}= -3.62\text{cm}$		$h_2= 10.14\text{cm}$	
O ₄	$x_{48}= 1.45\text{cm}$		$h_{48}= 29.70\text{cm}$	
O ₆	$x_{64}= -16.66\text{cm}$		$h_{64}= 18.11\text{cm}$	
O ₈	$x_8= 0.00\text{cm}$		$h_8= 0.00\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR				
$k= 103000\text{N/m}$	$c= 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0= 29.00\text{cm}$	$sp_0= 0.00\text{cm/s}$	

Resultados cinemáticos:

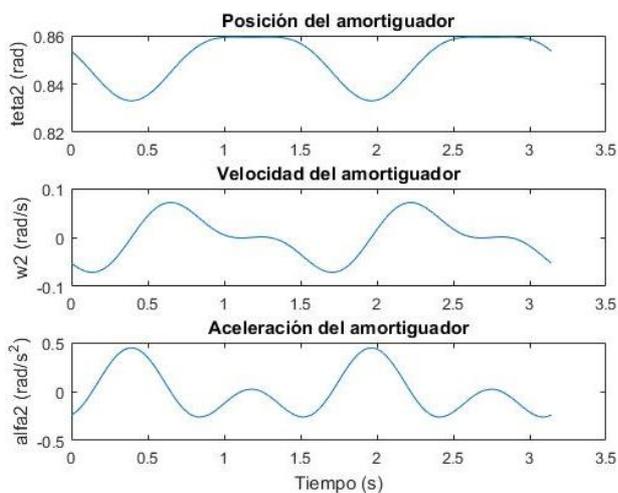


Figura 5-41. Variables cinemáticas amortiguador MORBIDELLI 500GP

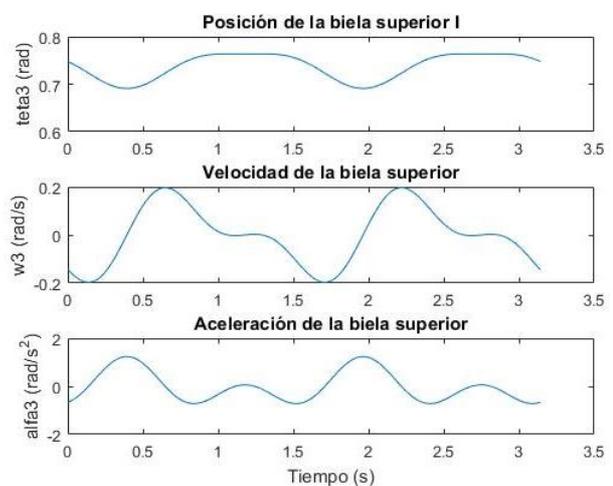


Figura 5-42. Variables cinemáticas bieleta superior I MORBIDELLI 500GP

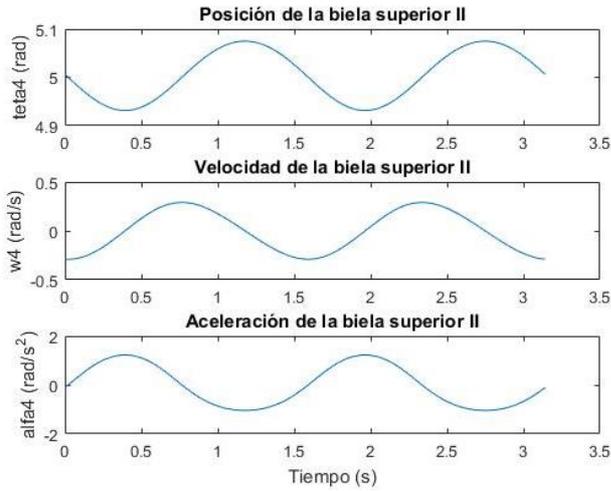


Figura 5-43. Variables cinemáticas biela superior II MORBIDELLI 500GP

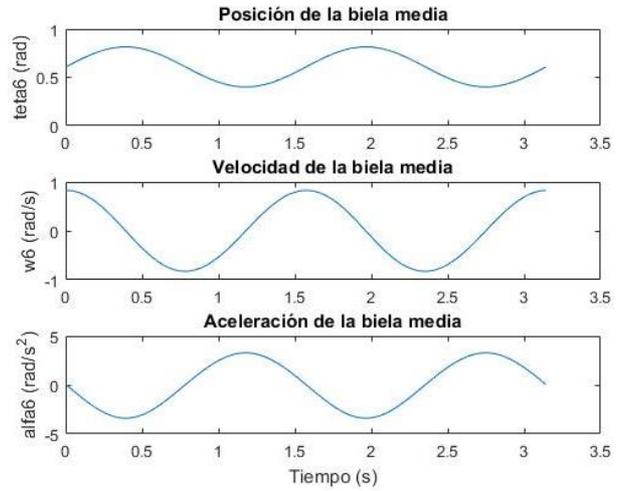


Figura 5-44. Variables cinemáticas biela media MORBIDELLI 500GP

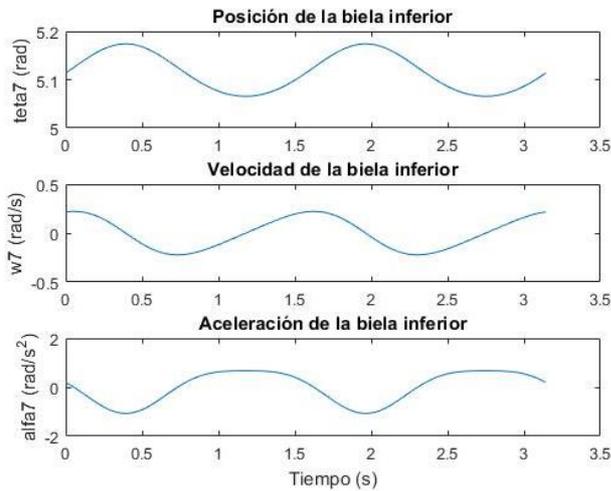


Figura 5-45. Variables cinemáticas biela inferior MORBIDELLI 500GP

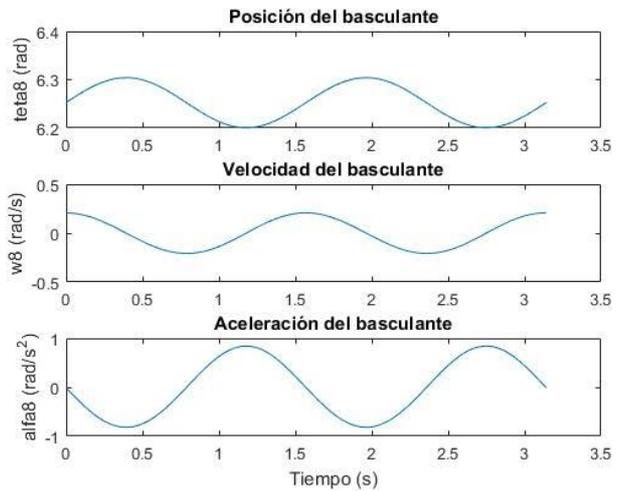


Figura 5-46. Variables cinemáticas basculante MORBIDELLI 500GP

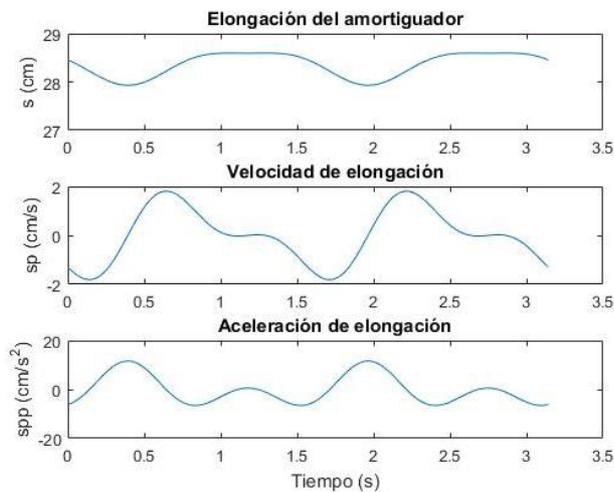


Figura 5-47. Variables cinemáticas elongación MORBIDELLI 500GP

Resultados dinámica:

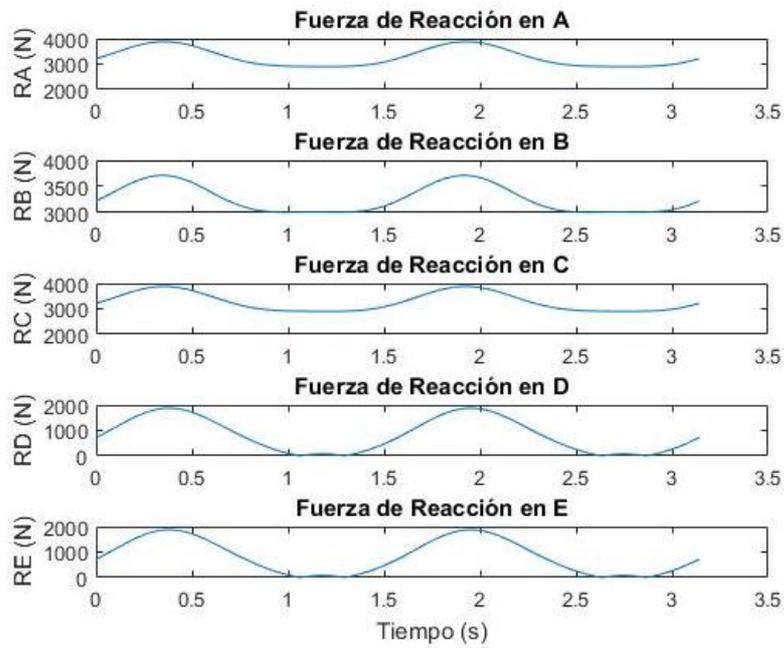


Figura 5-48. Fuerzas de reacción pares móviles MORBIDELLI 500GP

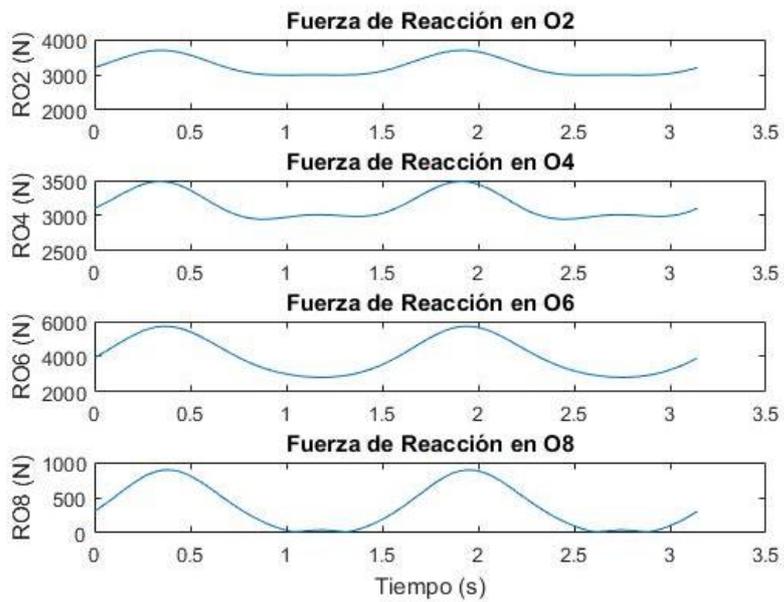


Figura 5-49. Fuerzas de reacción pares fijos MORBIDELLI 500GP

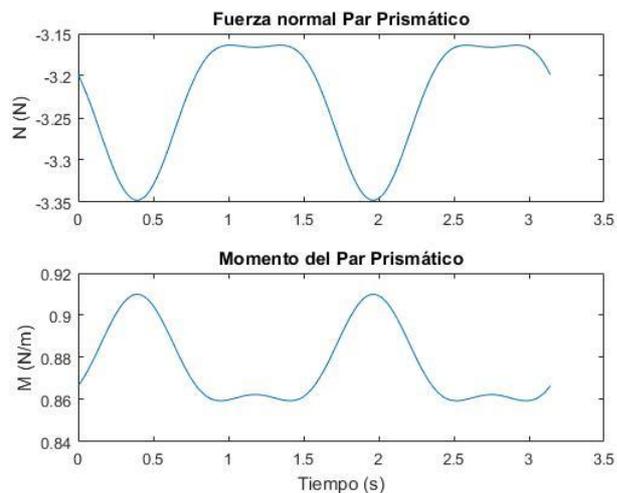


Figura 5-50. Fuerza par prismático MORBIDELLI 500GP

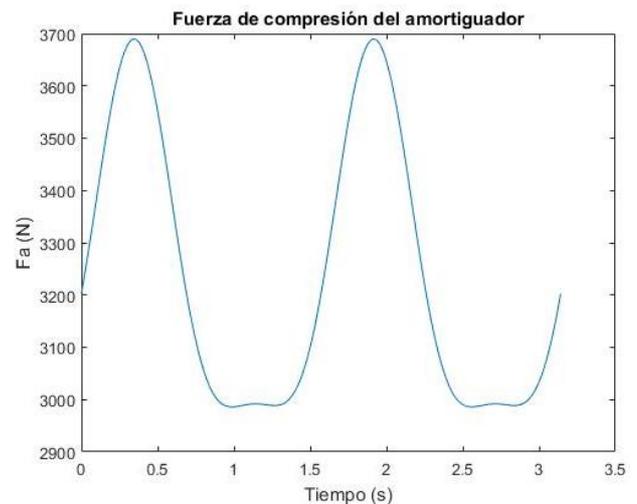


Figura 5-51. Fuerza amortiguador MORBIDELLI 500GP

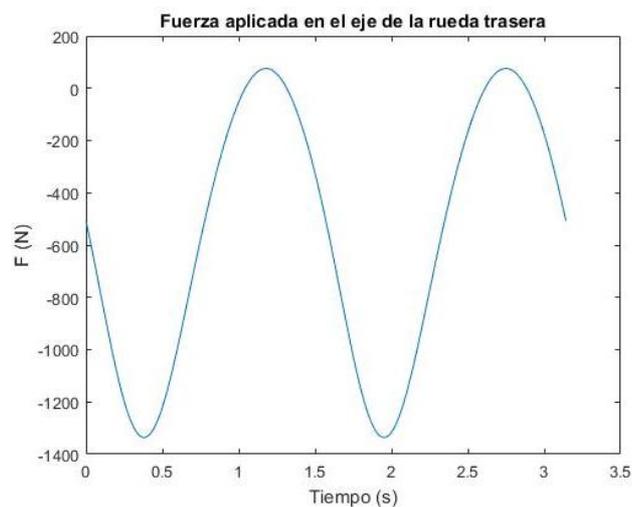


Figura 5-52. Fuerza eje trasero MORBIDELLI 500GP

Tabla 5-10. Fuerzas y reacciones MORBIDELLI 500GP

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A = 3882.20\text{N}$	$R^{02} = 3692.10\text{N}$	$N = -3.35\text{N}$	$F_a = 3689.80\text{N}$
$R^B = 3712.10\text{N}$	$R^{04} = 3485.90\text{N}$	$M = 0.91\text{N/m}$	$F_{eje} = \text{no válida}$
$R^C = 3882.90\text{N}$	$R^{06} = 5724.00\text{N}$		
$R^D = 1879.70\text{N}$	$R^{08} = 892.74\text{N}$		
$R^E = 1879.20\text{N}$			

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que la mayor velocidad y aceleración angular son las pertenecientes a la bieleta media, con un valor máximo aproximado de 1rad/s y 5rad/s^2 . Por otro lado, el amortiguador y la bieleta superior I (barra 4) experimentan un periodo estático en el que la velocidad se hace 0rad/s , debido a la topología del doble mecanismo de 4 barras. La elongación del amortiguador es menor de 1cm y también sufre un periodo de velocidad nula.

Del análisis dinámico se puede apreciar que las reacciones de los pares de rotación móviles más elevadas alcanzan 3800N , propias de las conexiones del cuadrilátero articulado superior y del amortiguador. Respecto a

los pares de rotación fijos, se observa que la mayor fuerza de reacción con un valor de 5724N surge, como cabía esperar, en el punto O_6 , donde la bieleta media se fija al chasis, bieleta que conecta ambos cuadriláteros. Los puntos fijos O_2 y O_4 , sufren reacciones muy similares, próximas a los 3500N.

La fuerza y el momento de reacción que aparecen en el par prismático del amortiguador, poseen un valor reducido pero en el caso de la fuerza normal, sutilmente superior al resto de suspensiones. Y la fuerza que surge en el amortiguador es puramente de compresión y alcanza valores de hasta 3600N. La trayectoria de las fuerzas procedentes del amortiguador, se ven afectadas por el movimiento que discontinuo del mecanismo.

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera fluctua entre valores inferiores a 75N y superiores a -1336N, posiblemente debido a las reducidas dimensiones del basculante. El valor negativo de la fuerza carece de sentido físico, lo que indica un claro error en el diseño del mecanismo.

5.6 Suspensión Elf Honda GP

Tabla 5-11. Parámetros suspensión Elf Honda GP

SÓLIDO	DIMENSIONES	ÁNGULOS	CENTRO DE GRAVEDAD	MASAS
Bieleta superior (barra 2)	$L_2= 13.04\text{cm}$ $L'_2= 27.52\text{cm}$	$\beta_2= 63.43^\circ$	$g_2= 12.63\text{cm}$ $\gamma_2= 48.62^\circ$	$m_2= 0.55\text{kg}$
Basculante (barra 3)	$L_3= 15.94\text{cm}$ $L'_3= 10.14\text{cm}$	$\beta_3= 24.84^\circ$	$g_3= 7.78\text{cm}$ $\gamma_3= 7.57^\circ$	$m_3= 3.70\text{kg}$
Bieleta inferior (barras 4)	$L_4= 28.25\text{ cm}$	-	$g_4= 14.13\text{cm}$	$m_4= 0.098\text{kg}$
Amortiguador (barras 5 y 6)	$L_5= 18.24\text{cm}$ $L_6= 13.76\text{cm}$ $d_p= 4.00\text{cm}$ $e_p= 1.50\text{cm}$	-	$g_5= 13.83\text{cm}$ $g_6= 7.00\text{cm}$	$m_5= 0.17\text{kg}$ $m_6= 2.60\text{kg}$
PUNTO FIJO	LOCALIZACIÓN			
O_2	$x_2= 0.00\text{cm}$		$h_2= 0.00\text{cm}$	
O_4	$x_{24}= -3.62\text{cm}$		$h_{24}= -25.35\text{cm}$	
O_6	$x_{26}= -15.21\text{cm}$		$h_{26}= 20.28\text{cm}$	
PROPIEDADES DEL AMORTIGUADOR				
$k= 103000\text{N/m}$	$c= 50000\text{N}\cdot\text{s/m}$	$s_0=28.00\text{cm}$	$sp_0= 0.00\text{cm/s}$	

Resultados cinemáticos:

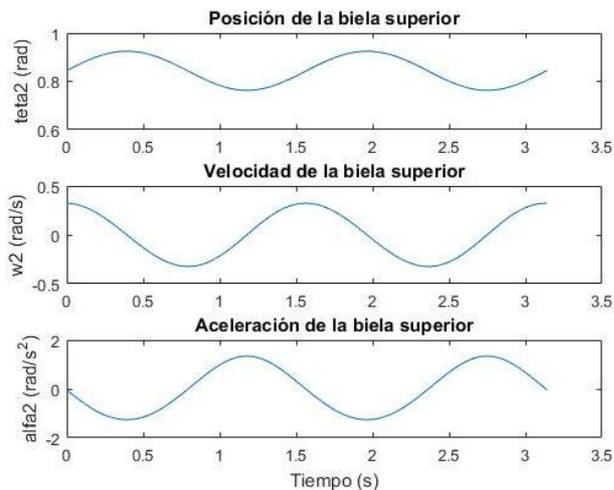


Figura 5-53. Variables cinemáticas biela superior ELF HONDA GP

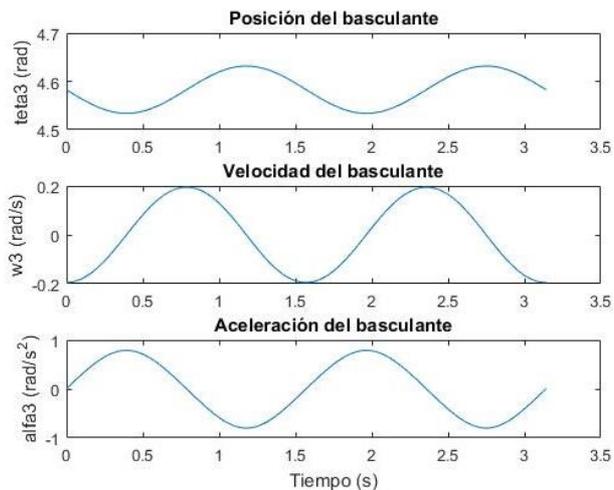


Figura 5-54. Variables cinemáticas basculante ELF HONDA GP

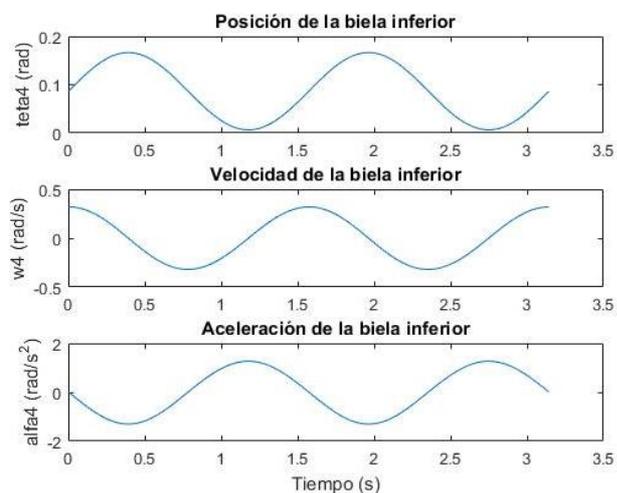


Figura 5-55. Variables cinemáticas biela inferior ELF HONDA GP

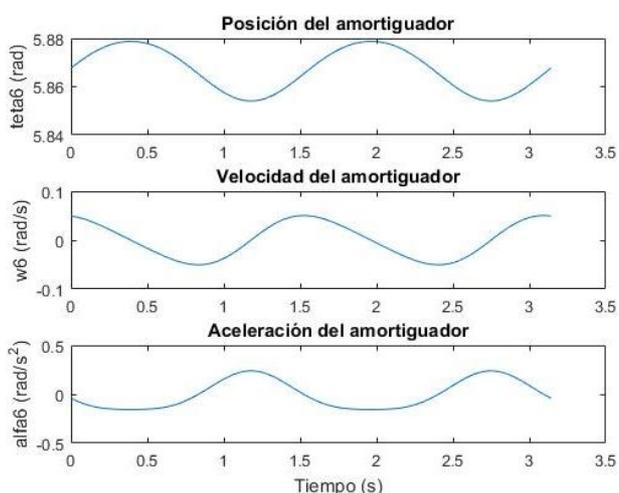


Figura 5-56. Variables cinemáticas amortiguador ELF HONDA GP

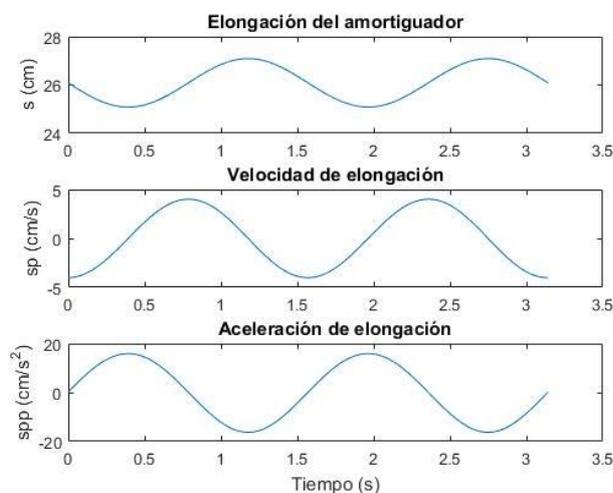


Figura 5-57. Variables cinemáticas elongación ELF HONDA GP

Resultados dinámica:

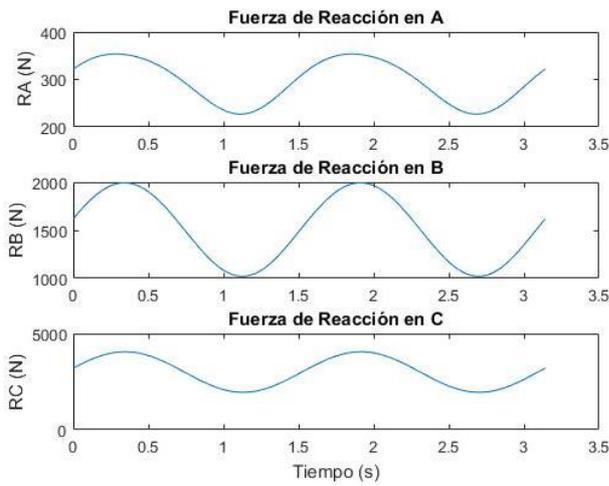


Figura 5-58. Fuerza de reacción pares móviles ELF HONDA GP

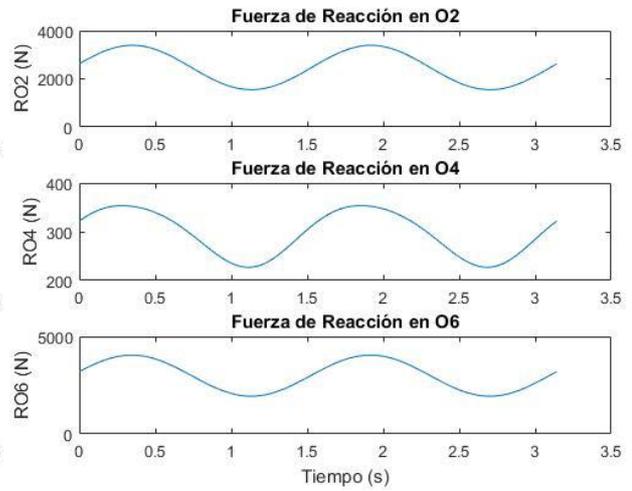


Figura 5-59. Fuerzas de reacción pares fijos ELF HONDA GP

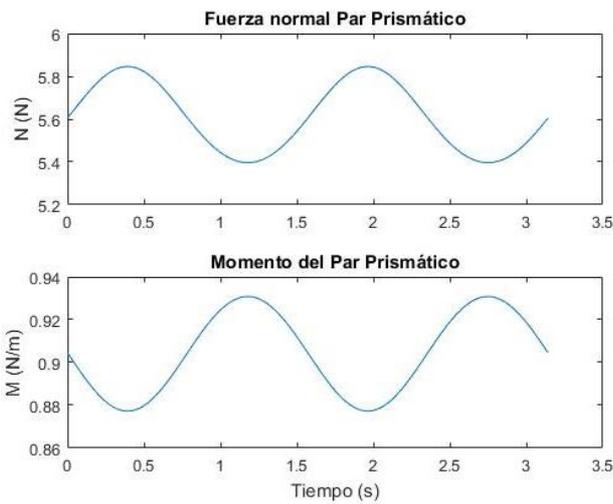


Figura 5-60. Fuerza par prismático ELF HONDA GP

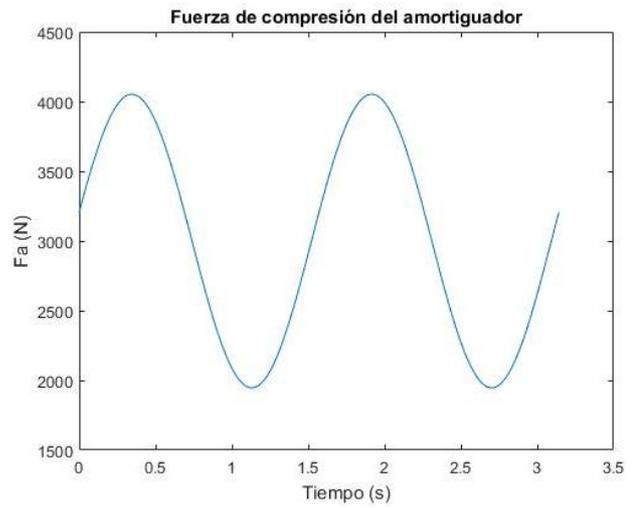


Figura 5-61. Fuerza amortiguador ELF HONDA GP

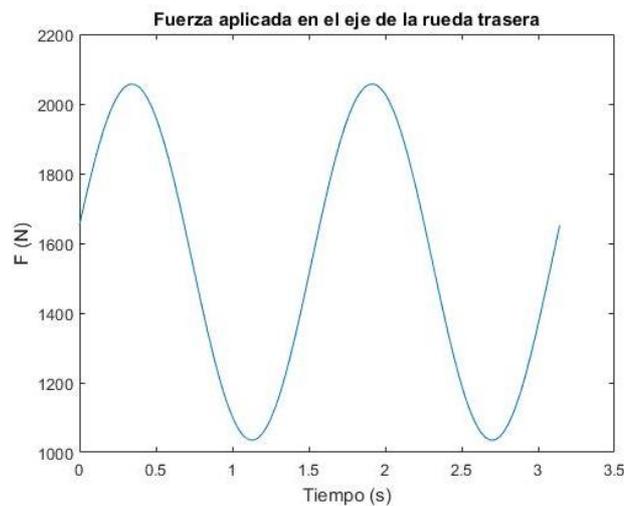


Figura 5-62. Fuerza eje trasero ELF HONDA GP

Tabla 5-12. Fuerzas y reacciones ELF HONDA GP

FUERZAS Y REACCIONES MÁXIMAS			
$R^A = 353.75\text{N}$	$R^{O2} = 3394.40\text{N}$	$N = 5.85\text{N}$	$F_a = 4052.80\text{N}$
$R^B = 1994.10\text{N}$	$R^{O4} = 353.60\text{N}$	$M = 0.93\text{N/m}$	$F_{eje} = 2056.80\text{N}$
$R^C = 4053.40\text{N}$	$R^{O6} = 4042.70\text{N}$		

De los resultados obtenidos del análisis cinemático se observa que las mayores velocidades y aceleraciones angulares son las pertenecientes a las bieleta superior e inferiores, con un valor máximo aproximado de 0.3rad/s y 1rad/s^2 . Por otro lado, el amortiguador experimenta una elongación máxima de unos 2cm.

Del análisis dinámico se puede apreciar que las reacciones de los pares de rotación móviles más elevadas alcanzan los 4000N y 2000N, propias del amortiguador y la bieleta superior; siendo mucho inferior la reacción del basculante con la bieleta inferior. Respecto a los pares de rotación fijos, se observa que las mayores fuerzas de reacción surgen en los puntos O_2 y O_6 , donde el amortiguador y la bieleta superior se fijan al chasis, alcanzando 3400 y 4000N respectivamente.

La fuerza y el momento de reacción que aparecen en el par prismático del amortiguador, poseen un valor muy reducido, pero sutilmente superior respecto al resto de sistemas. Y la fuerza que surge en el amortiguador es de compresión en todo su recorrido, alcanzando valores máximos de 4052.8N.

Por último, la fuerza aplicada sobre el eje de la rueda trasera sobrepasa valores de 2000N.

6 CRITERIOS DE DISEÑO

Para poder estudiar los seis sistemas de suspensión descritos, ha sido necesario seleccionar los parámetros dimensionales que definen por completo los mecanismos. Sin embargo, como el diseño de las suspensiones no era el objetivo propuesto en este proyecto, dichos parámetros se han estimado con la mayor proximidad posible a la realidad, pero sin exigir ninguna condición de diseño. Por este motivo, se ha planteado elegir algunos criterios de diseño que permitan optimizar en la medida de lo posible los modelos presentados.

Existen una gran cantidad de opciones para ajustar la suspensión de una motocicleta. Inicialmente se barajaron distintas posibilidades, dependiendo del ámbito que se pretenda mejorar. Algunos de estos factores a considerar podrían ser los efectos provocados por la cadena, como son las fuerzas que genera en el basculante y la holgura que se produce en ésta.

En primer lugar, estos efectos son considerados debido a que las fuerzas que provoca la cadena sobre el basculante son significativas y, sumadas a las demás fuerzas producidas en los anclajes, puede provocar comportamientos indeseados. Y en segundo lugar, porque la longitud de la cadena varía durante el recorrido de la suspensión. Por lo general, a excepción de las motocicletas de campo y de cross, no supone un problema excesivo; sin embargo, sí afecta directamente en términos de vibración y en el efecto *squat*.

Este efecto, conocido como *squat*, hace referencia a la elevación de la parte delantera de la motocicleta y el hundimiento de la trasera como consecuencia de la transferencia de carga producida por la aceleración y las fuerzas aerodinámicas. Para evitar este comportamiento es necesario estudiar las características geométricas *anti-squat* propias del tren trasero.

Otro factor a tener en cuenta en el diseño de las suspensiones podría ser la trayectoria de la rueda trasera al alcanzar un bache. Lo ideal sería que la dirección de la fuerza originada por la irregularidad del terreno estuviera alineada con el movimiento de la rueda, pues de este modo toda la fuerza sería absorbida por la suspensión. Sin embargo, esto no sucede en la realidad y parte de la fuerza será compensada por el resto de componentes del vehículo. Para minimizar este efecto, se procede colocando el basculante en una posición mucho más elevada que el eje de la cadena.

Todos estos criterios son importantes para diseñar un sistema de suspensión, no obstante, han sido descartados en este estudio. Esto se debe a la necesidad de realizar un análisis tanto estructural como dinámico que abarcara los demás elementos de la motocicleta para tener en consideración estos factores, lo cual, se excedería notablemente del alcance del proyecto. Por consiguiente, se han escogido dos criterios que permitan optimizar las suspensiones y que no nos aleje de la consideración de partida que indicaba que los sistemas se estudiarían como mecanismos independientes del vehículo.

Valiéndose de la principal características de estos sistemas de suspensión conformados por bieletas, se optará por seleccionar la progresividad como uno de los criterios de diseño. Y la posición de equilibrio estático de los mecanismos como segundo criterio a analizar. Ambos factores se explicarán con mayor exactitud a continuación.

6.1 Progresividad

La progresividad de un sistema de suspensión se define como el incremento de la fuerza necesaria para comprimir el amortiguador la misma distancia que se desplaza el punto de aplicación de la fuerza ejercida en el eje de la rueda trasera durante el recorrido del mecanismo.

Es conveniente alcanzar cierto grado de progresividad en el sistema, pues esta propiedad es la que permite que la suspensión se comporte con alta sensibilidad ante irregularidades leves al inicio del recorrido y

se vaya endureciendo conforme avanza hacia el tramo final, de forma que pueda hacer frente a baches de gran tamaño o repentinos.

La representación gráfica de la progresividad de un sistema puede dar lugar a una curva lineal, progresiva ascendente o decreciente. El primer caso se correspondería con una suspensión lineal, el segundo caso con una suspensión progresiva y regresiva en el tercer caso.

Por otro lado, este factor no depende únicamente de la geometría del mecanismo, sino también está influenciado por la constante de rigidez k y amortiguamiento c del sistema, las cuales, en este estudio, se han considerado constantes e invariables.

A continuación, se muestra una gráfica extraída del libro *Motorcycle Dynamics* de Vittore Cossalter, en la que se ilustra los distintos tipos de suspensiones enunciadas previamente.

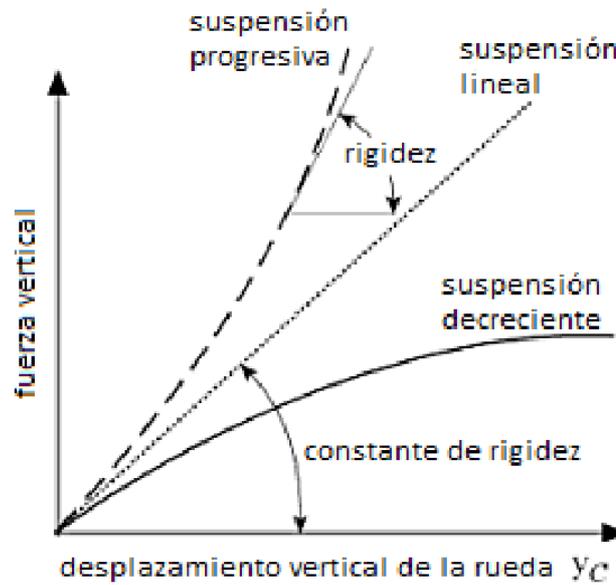


Figura 6-1. Fuerza vertical de la rueda frente al desplazamiento, de *Motorcycles Dynamics*

Para evaluar esta propiedad en los distintos sistemas de suspensión de forma matemática, se ha definido como:

$$Progresividad = \frac{\delta s}{\delta y_{eje}}$$

Pudiendo obtenerse mediante el siguiente planteamiento:

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s}{\delta y_{eje}} \cdot \frac{\delta y_{eje}}{\delta t} \rightarrow Progresividad = \frac{\frac{\delta s}{\delta t}}{\frac{\delta y_{eje}}{\delta t}} = \frac{\dot{s}}{\dot{y}_{eje}}$$

Debido al sistema de referencia global que se ha considerado durante el modelado de las suspensiones, la trayectoria de y_{eje} siempre es negativa, por tanto, debe tenerse en cuenta a la hora de calcular la progresividad. Finalmente, para poder observar el comportamiento de los sistemas con mayor precisión a lo largo de su recorrido, se evaluarán los resultados sometiendo a las suspensiones a un movimiento del eje de la rueda de mayor amplitud.

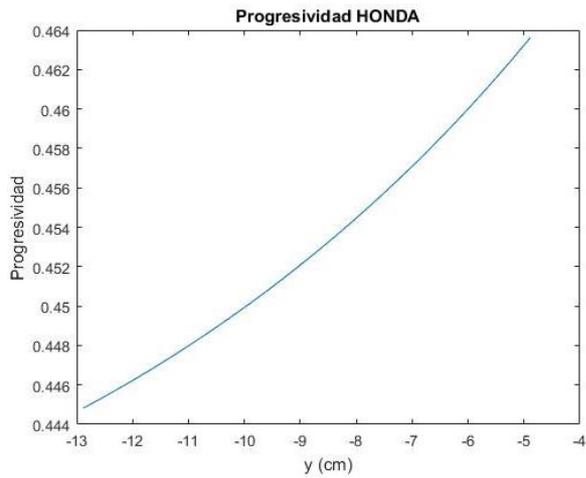


Figura 6-2. Progresividad HONDA

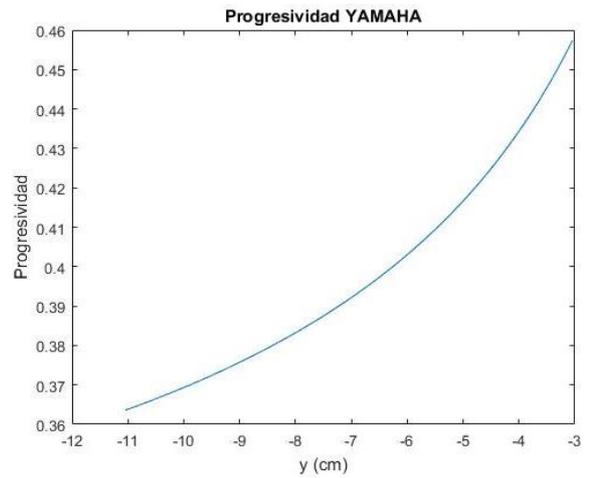


Figura 6-3. Progresividad Yamaha

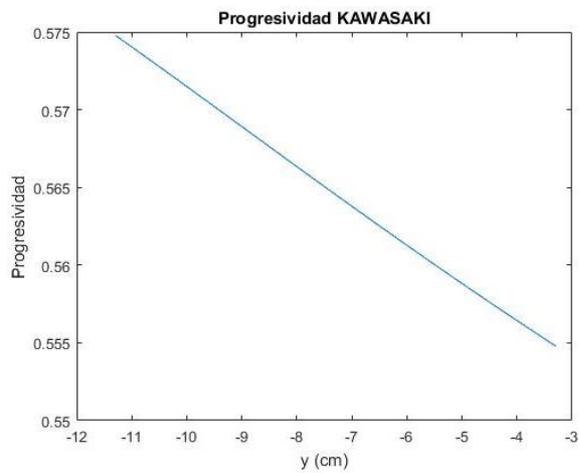


Figura 6-4. Progresividad KAWASAKI

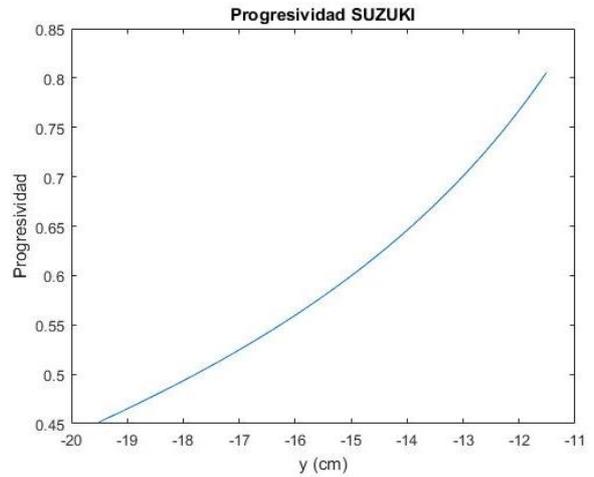


Figura 6-5. Progresividad SUZUKI

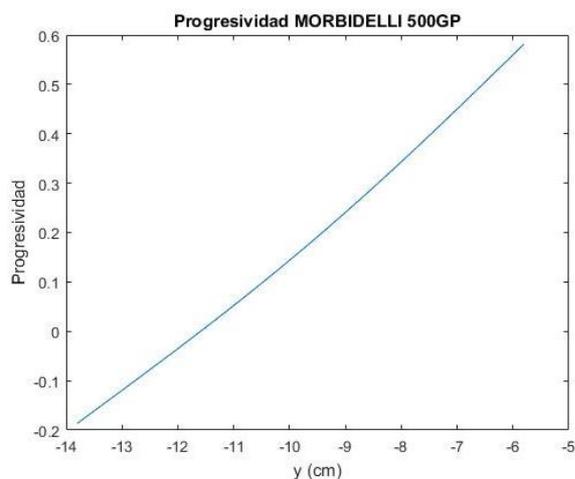


Figura 6-6. Progresividad MORBIDELLI 500GP

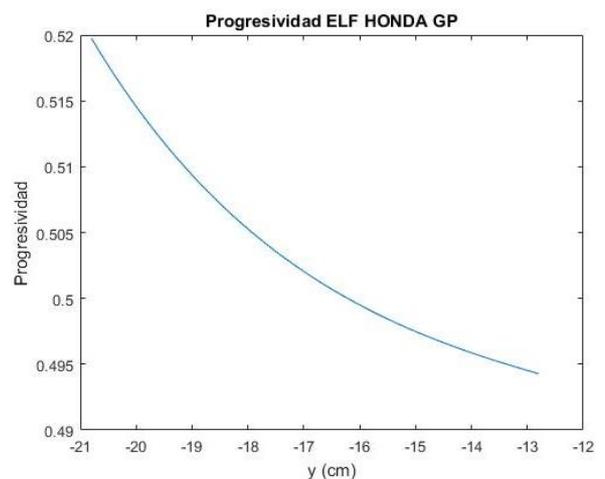


Figura 6-7. Progresividad ELF HONDA GP

Las representaciones anteriores permiten observar que la mayoría de las suspensiones muestran el comportamiento lineal-progresivo que se pretendía conseguir. Este es el caso de las suspensiones Honda, Yamaha, Suzuki y Morbidelli. No obstante, la progresividad tiende, en algunos casos, a ser más lineal de lo que interesaría, por ello, se intentarán mejorar durante la optimización.

Por el contrario, las suspensiones Kawasaki y Elf Honda GP poseen un comportamiento regresivo, variando casi con linealidad en la primera suspensión. Esto indica que el diseño inicial no ha sido suficientemente bueno, de forma, que se fijará su modificación como objetivo a alcanzar en el siguiente capítulo.

Falta indicar que los valores buscados mediante la progresividad son los próximos a 2, implicando una relación 2:1 entre la variación del recorrido del amortiguador y el que describe el eje de la rueda. Esto significaría que por cada incremento de elongación, el eje de la rueda se habrá desplazado la mitad de ese incremento.

6.2 Punto de equilibrio estático

El punto de equilibrio estático de los mecanismos de suspensión se corresponde con la posición de equilibrio mecánico estático que alcanzan los sistemas cuando la motocicleta y el piloto se encuentran en reposo. Esta carga procedente de los pesos del conjunto motocicleta-piloto, se encuentra reflejada en la fuerza normal que actúa sobre la rueda trasera.

Dicha carga se considerará constante y aplicada en el punto del basculante que conecta con el eje de la rueda trasera. Para estimar su valor, hay que tener en cuenta tanto la mitad del peso del vehículo con el depósito de gasolina completo, como el peso del piloto equipado con el casco y la ropa apropiada. Tras buscar información en las fichas técnicas de distintos modelos de motocicletas (deportivas, de media cilindrada, de cross y competición), se ha propuesto un peso total aproximado de 160kg, generando una carga de 1568N.

Para calcular la posición de equilibrio estático se considera la posibilidad de hacer uso del PPV. Para ello, se plantea el sumatorio de todas las fuerzas y momentos externos e inerciales para cada sistema, teniendo presente que las aceleraciones (tanto lineales como angulares) son nulas al imponer las condiciones del equilibrio estático buscado. Por el contrario, todos los términos que permanecen en la ecuación, son multiplicados por velocidades virtuales compatibles con las restricciones del sistema.

El valor de la coordenada s que aparece en las ecuaciones debido a la fuerza del amortiguador, se corresponderá con la longitud de elongación en el punto de equilibrio estático. A partir de dicha variable, se resolvería el problema de posición del mecanismo con el objeto de conocer las coordenadas necesarias para averiguar el valor de y_{eje} en dicha posición.

No obstante, el valor numérico de todas las velocidades virtuales es desconocido. Además, la posibilidad de expresar todas estas velocidades en función de una única coordenada generalizada como propuesta para reducir el número de incógnitas, es descartada debida a la alta dificultad que supondría. Como consecuencia, se genera un sistema incompatible de numerosas incógnitas y una única ecuación, haciendo inviable la utilización de este método.

Por estos motivos, se ha decidido aprovechar el código de cálculo dinámico ya programado para obtener el valor de la posición del eje de la rueda trasera en el equilibrio, con la salvedad de que en esta ocasión, el problema sería de dinámica directa en vez de inversa. Para ello se llevará a cabo un proceso iterativo tomando como variable y_{eje} hasta alcanzar el valor de 1568N, mencionado con anterioridad, para la fuerza aplicada en el eje trasero.

El objetivo de este criterio de diseño, es asegurar que una vez soportado el peso procedente de la motocicleta y del piloto, el mecanismo sea capaz de mantenerse dentro de su tramo de recorrido útil. Por un lado, se verificará que el pistón del amortiguador no se encuentre próximo a los topes del cilindro, de forma que el pistón siga poseyendo suficiente carrera para actuar ante las irregularidades del terreno. Esta carrera útil dependerá del tamaño del amortiguador utilizado para cada sistema. Y por otro lado, deberá cerciorarse que en esta posición, el mecanismo de bieletas no esté excesivamente cercano al suelo, pudiendo rozar en ese caso durante algún punto de su trayectoria.

A continuación, se mostrará en la siguiente tabla los resultados obtenidos para los modelos planteados hasta ahora, a excepción de la suspensión Morbidelli, debido al error de diseño que aparece en los resultados dinámicos que impide su cálculo.

La segunda columna de dicha tabla, se corresponde con la posición inicial del eje de la rueda trasera de

los diseños propuestos, la cual asegura un correcto posicionamiento del amortiguador y del mecanismo. Y la tercera columna, la posición de equilibrio estático obtenida para esos mecanismos, debiendo ser ésta última, la posición correcta de partida.

Tabla 6-1. Posición de equilibrio estático

SISTEMA DE SUSPENSIÓN	POSICIÓN INICIAL ESTIMADA y_{eje}	POSICIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}
HONDA	-8.89cm	-8.24cm
YAMAHA	-7.04cm	-5.31cm
KAWASAKI	-7.29cm	-7.54cm
SUZUKI	-15.51cm	-22.47cm
ELF HONDA GP	-16.80cm	-16.73cm

Como observación sobre los resultados obtenidos, conviene comentar que la estimación de la posición de equilibrio estático que se realizó durante el modelado de las suspensiones Honda, Kawasaki y Elf Honda GP, ha resultado ser muy precisa.

Para el caso de la suspensión Yamaha, aun no siendo exacta dicha estimación, sólo difiere en menos de 2cm, por lo que su validez deberá ser testificada según las especificaciones mencionadas en este apartado.

Por el contrario, la estimación para la suspensión Suzuki yerra en más de 7cm, por lo que su diseño deberá ser rectificado atendiendo también a este criterio.

No obstante, analizando la información obtenida de forma general, se confirma que tanto de este criterio de diseño como del anterior, se han obtenido resultados favorables en la mayoría de los casos, facilitando la optimización de los diseños al partir de modelos suficientemente válidos.

7 OPTIMIZACIÓN DE LOS MECANISMOS

Tras evaluar en el Capítulo 6 los criterios de diseño escogidos para el conjunto de suspensiones, se verifica que los modelos propuestos podrían ser optimizados con el fin de obtener mejores comportamientos, más próximos a la realidad y más eficientes.

Para llevar a cabo este proceso de mejora, se optará por modificar los parámetros dimensionales que definen la geometría de los mecanismos (longitudes, ángulos y posiciones de puntos fijos) hasta alcanzar resultados más favorables.

En el caso de la progresividad, se tomará como criterio de partida las indicaciones extraídas del libro *Motocicletas, comportamiento dinámico y diseño de chasis* de Tony Foale, en el cual se expone cómo varía el comportamiento progresivo de la suspensión dependiendo de la inclinación con la que se posiciona el amortiguador.

Si los amortiguadores están demasiado (o muy poco) inclinados, la variación de la constante de rigidez a lo largo del recorrido de la suspensión podrá llegar a ser regresiva, esto es, la constante disminuye conforme aumenta la compresión (Foale, 2002:240).

Para poder comprenderlo con mayor claridad, se muestra a continuación una representación gráfica, del libro citado con anterioridad, en la que se definen el conjunto de posibilidades de colocación del amortiguador para producir las distintas características:

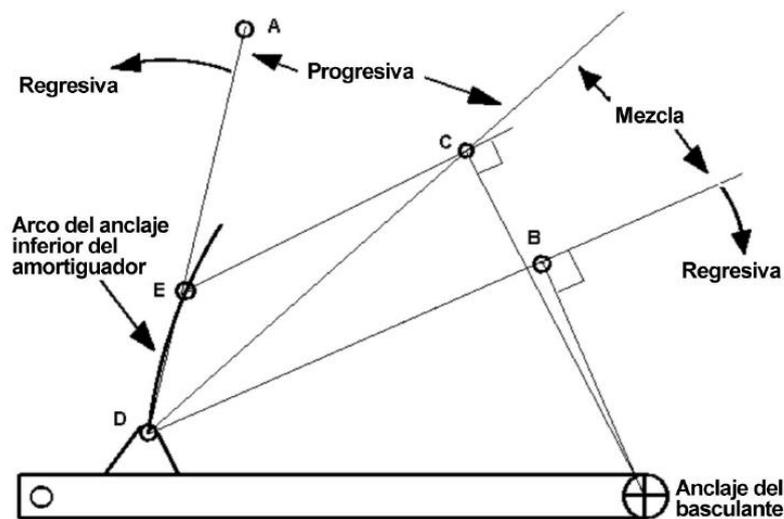


Figura 7-1. Posiciones del amortiguador para alcanzar distintas características

‘A’, ‘B’ y ‘C’ son distintas alternativas de montaje del extremo superior del amortiguador. ‘D’ y ‘E’ marcan el recorrido del extremo inferior del amortiguador. Cuando el amortiguador está montado en ‘A’ existe una variación mínima del brazo de palanca y por lo tanto la constante elástica efectiva permanece constante. Si el extremo superior se ancla a la izquierda de ‘A’, la variación de la constante será regresiva, y a la derecha será progresiva. ‘B’ y ‘C’ están definidos como los puntos de anclaje superiores en los que una línea desde ellos hasta el punto de giro del amortiguador, ‘B’ es para la máxima extensión y ‘C’ para máxima compresión. Cuando el anclaje superior está por debajo de ‘B’ entonces la acción es regresiva en todo el recorrido. Pero si está entre ‘B’ y ‘C’ la parte inicial del recorrido será progresiva e irá cambiando a regresiva conforme se vaya comprimiendo la suspensión (Foale, 2002:241).

Atendiendo a estas explicaciones y comparando los sistemas de suspensión que se estudian en este documento, se comprueba que, exceptuando la suspensión Elf Honda GP con su diferenciador montaje inverso, todos los demás mecanismos tienen el amortiguador orientado a la derecha de la posición ‘A’ (mostrada en Figura 7-1). Esto podría ser uno de los motivos por los cuales esta suspensión muestra un

comportamiento regresivo. Siendo por ello este parámetro el primero a modificar.

Respecto al criterio del punto de equilibrio estático, se evaluará una vez alcanzadas ciertas mejoras en la progresividad. En supuesto de que la optimización de esta característica implique un empeoramiento de la posición de equilibrio, se variarán nuevamente los parámetros hasta alcanzar unos resultados más equilibrados.

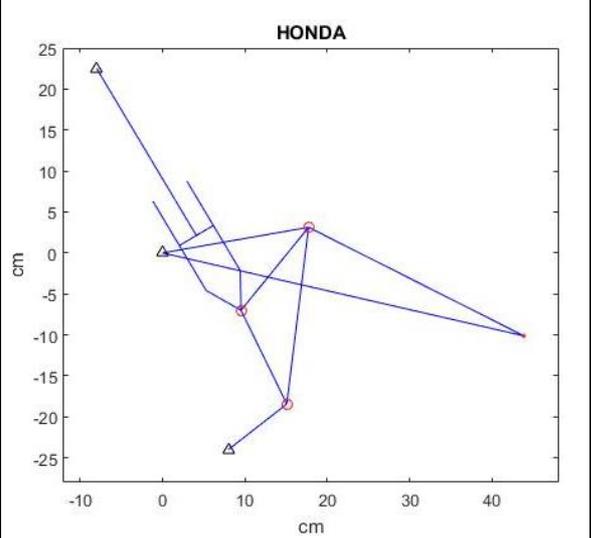
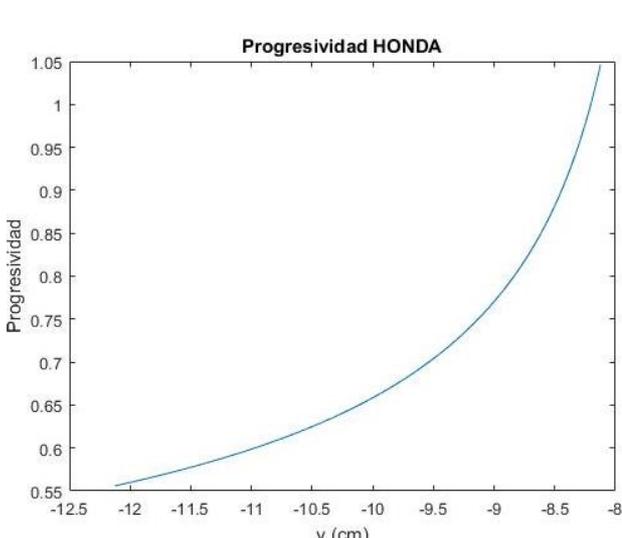
En el caso de la suspensión Morbidelli, se comentó en el capítulo anterior que debido a la mala elección del diseño escogido se habían obtenido unos resultados que carecían de sentido físico. Por tanto, en este proceso de mejora, se procederá solventando, en primer lugar, dicho defecto y, posteriormente, analizando la posición deseada.

Además, se deberá testificar que las suspensiones no sufran un hundimiento excesivo que las aproxime al suelo al posicionarse en este punto de equilibrio; y que el amortiguador siga poseyendo suficiente recorrido útil para poder trabajar correctamente sin colisionar con los topes del cilindro.

En los siguientes apartados se expondrán los resultados obtenidos para cada una de las suspensiones, además de las modificaciones que se han realizado para alcanzarlos (remarcadas en negrita) y las dificultades encontradas.

7.1 Suspensión Honda

Tabla 7-1. Optimización HONDA

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
 <p>HONDA</p>		 <p>Progresividad HONDA</p>	
PARÁMETROS			
$L_2= 18.00\text{cm}$	$\beta_2= 23.00^\circ$	POSICIÓN INICIAL y_{eje}	-10.120cm
$L'_2= 45.00\text{cm}$	$\beta_5= 32.00^\circ$	POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-10.125cm
$L_3= 16.90\text{cm}$	$\beta'_5= 123.75^\circ$	PRECARGA INICIAL	3.50cm
$L_4= 17.00\text{cm}$	$x_{26}= 8.00\text{cm}$	PRECARGA CORREGIDA	-
$L_5= 13.04\text{cm}$	$h_{26}= -24.00\text{cm}$		
$L'_5= 21.73\text{cm}$	$x_{24}= -8.00\text{cm}$		
$L''_5= 12.71\text{cm}$	$h_{24}= 22.50\text{cm}$		
$L_6= 8.60\text{cm}$			
REACCIONES MÁXIMAS		FUERZAS MÁXIMAS EXTERNAS	
$R^A= 11075.00\text{N}$	$R^{04}= 3900.70\text{N}$	$F_{amort}= 3903.50\text{N}$ $F_{eje}= 4099.70\text{N}$	
$R^B= 8601.10\text{N}$	$R^{06}= 8600.70\text{N}$		
$R^C= 3929.10\text{N}$	$N= -3.03\text{N}$		
$R^{02}= 7157.10\text{N}$	$M= 0.92\text{N/m}$		

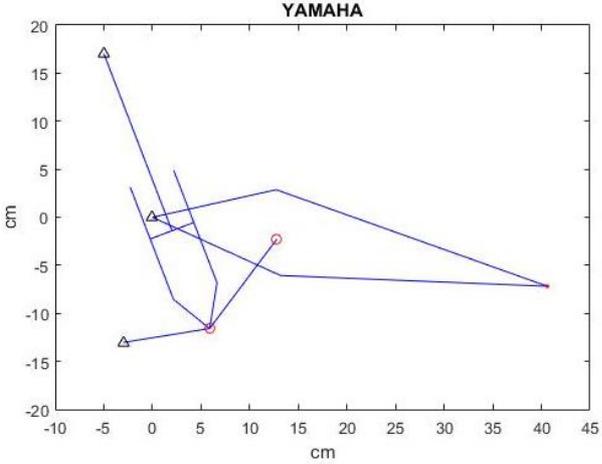
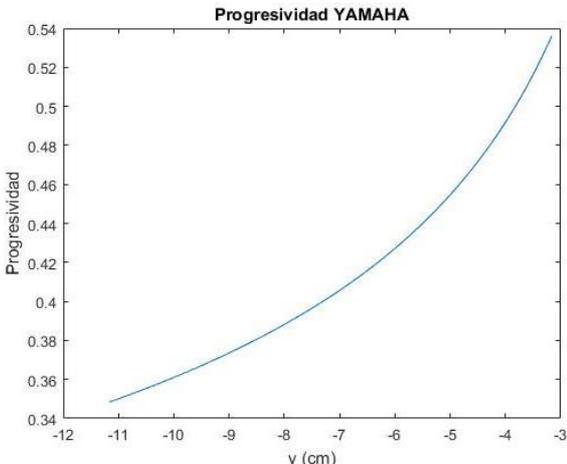
El diseño de la suspensión Honda podía considerarse un buen modelo de partida, pues el sistema tenía características progresivas y la estimación de su punto de equilibrio estático era muy precisa. Sin embargo, la progresividad mostraba valores muy pequeños y su curvatura era poco significativa.

Tras realizar el proceso iterativo de mejora, se propone esta nueva disposición del mecanismo, en la que han sufrido pequeñas transformaciones todos los sólidos exceptuando el número 5 (bioleta triangular). Los principales cambios se han producido en la bieleta 6, la cual ha disminuido de tamaño; y la posición del amortiguador, que ha tomado mayor inclinación. De esta forma, se ha logrado una notable mejoría en la curva de la progresividad, indicando un aumento de la velocidad de elongación del amortiguador respecto al movimiento del eje de la rueda trasera (confirmando la influencia de la inclinación del amortiguador sobre su comportamiento progresivo que Tony Foale explicaba en su libro). Además, se ha conseguido sin perjudicar la posición de equilibrio estático, que sólo requerirá de una precarga inicial de 3.5cm para ser compensada, tal y como se había previsto.

Respecto a las reacciones generadas durante el recorrido, han aumentado ligeramente, sin embargo, no se exceden en orden de magnitud.

7.2 Suspensión Yamaha

Tabla 7-2. Optimización YAMAHA

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
			
PARÁMETROS		POSICIÓN INICIAL y_{eje}	-7.16cm
$L_2= 16.00\text{cm}$	$\beta_2= 14.67^\circ$	POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-7.57cm
$L'_2= 28.25\text{cm}$	$\beta'_2= 22.69^\circ$	PRECARGA INICIAL	3.50cm
$L_3= 11.59\text{cm}$	$x_{26}= -3.00\text{cm}$	PRECARGA CORREGIDA	3.73cm
$L_4= 19,69\text{cm}$	$h_{26}= -13.00\text{cm}$		
$L_5= 16.66\text{cm}$	$x_{24}= -5.00\text{cm}$		
$L_6= 9.00\text{cm}$	$h_{24}= 17.00\text{cm}$		
REACCIONES MÁXIMAS		FUERZAS MÁXIMAS EXTERNAS	
$R^A= 8935.00\text{N}$	$R^{O4}= 5712.00\text{N}$	$F_a= 5714.90\text{N}$	
$R^{B5}= 5743.60\text{N}$	$R^{O6}= 7718.10\text{N}$	$F_{eje}= 2480.30\text{N}$	
$R^{B6}= 7718.20\text{N}$	$N= -2.68\text{N}$		
$R^{O2}= 7168.90\text{N}$	$M= 0.67\text{N/m}$		

La suspensión Yamaha, al igual que la anterior, podía considerarse un buen diseño inicial por sus características progresivas y la estimación aproximadas de su punto de equilibrio estático. Pese a ello, no ha sido posible lograr una mejoría relevante de sus propiedades. Para el caso de la progresividad, los valores han ascendido sutilmente, pero la trayectoria de la curva es muy similar.

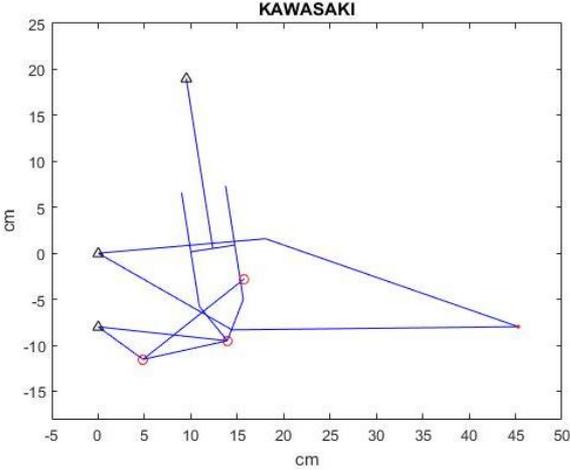
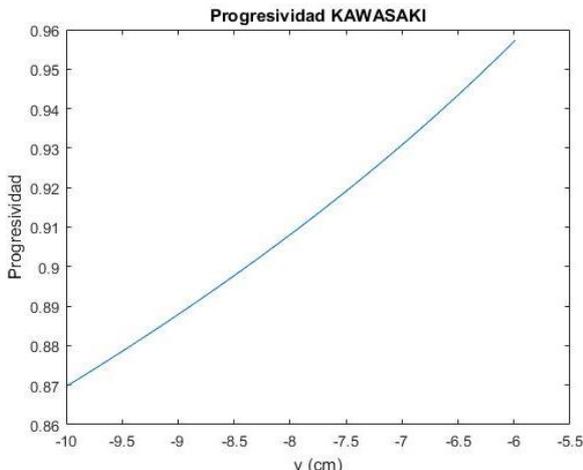
En relación al punto de equilibrio estático, sí se ha obtenido un buen resultado, pues coincide con la posición inicial idónea que se consideró, requiriendo únicamente una precarga de 3.73cm.

Para alcanzar estos resultados, ha sido necesario variar ligeramente las dimensiones de la bieleta 6, alejar la articulación A del par fijo y modificar la posición de los anclajes al chasis de dicha barra y del amortiguador, proporcionándole a este último mayor inclinación.

Como consecuencia de la nueva distribución, han aumentado las reacciones de los pares cinemáticos, pero han descendido los valores de las fuerzas externas.

7.3 Suspensión Kawasaki

Tabla 7-3. Optimización KAWASAKI

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
			
PARÁMETROS			
$L_2= 16.00\text{cm}$ $L'_2= 30.00\text{cm}$ $L_3= 14.00\text{cm}$ $L_4= 18.70\text{cm}$ $L_5= 16.66\text{cm}$ $L_6= 15.00\text{cm}$ $L'_6= 5.00\text{cm}$ $L''_6= 10.96\text{cm}$	$\beta_2= 20.00^\circ$ $\beta'_2= 35.00^\circ$ $\beta_6= 30.00^\circ$ $x_{26}= 0.00\text{cm}$ $h_{26}= -8.00\text{cm}$ $x_{64}= 9.50\text{cm}$ $h_{64}= 27.00\text{cm}$	POSICIÓN INICIAL y_{eje}	-7.99cm
		POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-8.38cm
		PRECARGA INICIAL	3.50cm
		PRECARGA CORREGIDA	3.75cm
REACCIONES MÁXIMAS		FUERZAS MÁXIMAS EXTERNAS	
$R^A= 17023.00\text{N}$ $R^B= 17022.00\text{N}$ $R^C= 5067.10\text{N}$ $R^{O2}= 15029.00\text{N}$	$R^{O4}= 5034.50\text{N}$ $R^{O6}= 15681.00\text{N}$ $N= -1.69\text{N}$ $M= 0.40\text{N/m}$	$F_a= 5037.60\text{N}$ $F_{eje}= 4094.70\text{N}$	

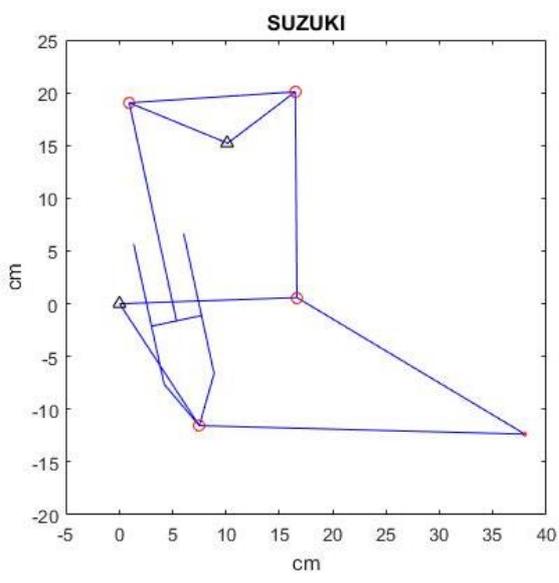
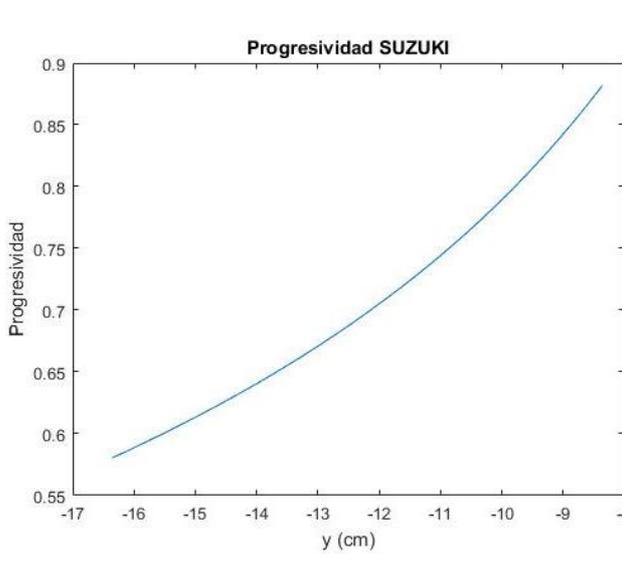
El diseño de la suspensión Kawasaki no resultó ser tan válido como los dos anteriores, pues, aunque sí contaba con un buen posicionamiento del punto de equilibrio estático, el comportamiento del sistema era regresivo, variando de forma lineal conforme ascendía el eje de la rueda. Es por ello, por lo que ha sido necesario realizar cambios en las dimensiones y disposición de todas las barras del mecanismo para conseguir modificar su comportamiento. Finalmente, se puede afirmar que los cambios han resultado beneficiosos, pues el mecanismo ha respondido adquiriendo características progresivas con valores favorables.

Adicionalmente, la nueva posición de equilibrio estático se encuentra muy próxima a la inicial considerada, demandando una pequeña precarga correctora de 3.75cm para situarse en la posición idónea.

Sobre las fuerzas y reacciones del sistema puede mencionarse que algunas han aumentado significativamente de valor, pero aun así, no sobrepasan los órdenes de magnitud aceptados. En cambio, al reducir las dimensiones de las bieletas (sólidos 3 y 6) y aproximar los anclajes al chasis, se ha obtenido un mecanismo más compacto.

7.4 Suspensión Suzuki

Tabla 7-4. Optimización SUZUKI

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
 <p>SUZUKI</p>		 <p>Progresividad SUZUKI</p>	
PARÁMETROS		POSICIÓN INICIAL y_{eje}	-12.36cm
$L_2= 8.00\text{cm}$ $L'_2= 10.00\text{cm}$ $L_3= 19.50\text{cm}$ $L_4= 16.16\text{cm}$ $L'_4= 13.76\text{cm}$ $L''_4= 40.00\text{cm}$ $L_5= 21.14\text{cm}$	$L_6= 18.11\text{cm}$ $\beta_2= 120.00^\circ$ $\beta_4= 59.09^\circ$ $\beta'_4= 20.00^\circ$ $x= 10.14\text{cm}$ $h= 15.21\text{cm}$	POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-17.24cm
		PRECARGA INICIAL	3.5 cm
		PRECARGA CORREGIDA	0.11cm
REACCIONES MÁXIMAS		FUERZAS MÁXIMAS EXTERNAS	
$R^A= 9230.60\text{N}$ $R^B= 6562.30\text{ N}$ $R^C= 9231.20\text{N}$ $R^D= 6598.10\text{N}$	$R^{O2}= 15660.00\text{N}$ $R^{O4}= 11067.00\text{N}$ $N= -1.51\text{N}$ $M= 0.67\text{N/m}$	$F_a= 6565,50\text{ N}$ $F_{eje}= 5905.70\text{N}$	

La suspensión Suzuki contaba, por un lado, con una curva de progresividad bastante favorable; sin embargo, por otro lado, el punto de equilibrio estático difería significativamente de la posición correcta estimada.

Durante el proceso iterativo de optimización han surgido algunos inconvenientes. Inicialmente, resultó sencillo mejorar el comportamiento progresivo de la suspensión, pues la bieleta triangular situada en la parte superior permite que el amortiguador absorba con facilidad el movimiento provocado en el eje, llegando a generar curvas de progresividad con valores próximos a 2 y el siguiente perfil:

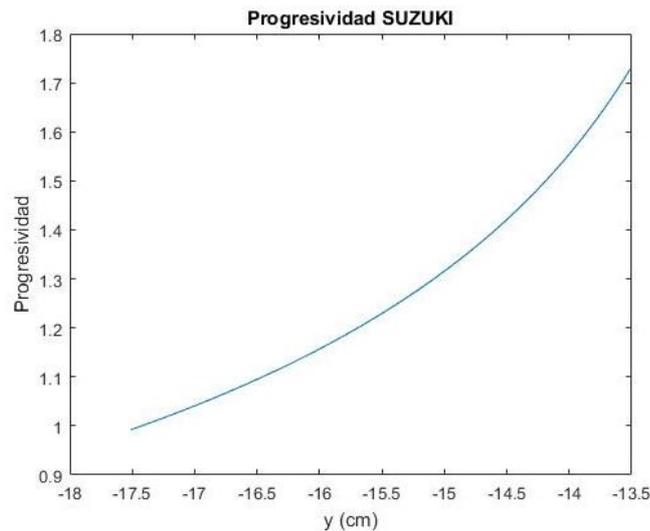


Figura 7-2. Progresividad SUZUKI (obtenida del proceso iterativo)

Sin embargo, alcanzar estos resultados, ha supuesto la aparición de fuerzas y reacciones muy elevadas en el mecanismo, además de un sustancial empeoramiento de la posición de equilibrio estático. Estos motivos han obligado a renunciar a los exitosos resultados de la progresividad con el fin de buscar un equilibrio entre ambos criterios de diseño. Para ello, se ha optado por modificar el tamaño de las bieletas y la longitud del basculante, suponiendo una curva de progresividad de valores algo inferiores, pero también una reducción en las fuerzas y reacciones generadas.

Desafortunadamente, tras experimentar con multitud de composiciones distintas para el sistema, no se ha conseguido hallar ninguna geometría que permita una posición de equilibrio estático favorable. La diferencia entre la posición óptima y la real, es aproximadamente de 5cm, menor a los 7cm del diseño inicial, pero igualmente inadecuada considerando que ya se le ha aplicado una precarga de 3.5cm.

El problema principal radica en las elevadas fuerzas que soporta el mecanismo en la posición de partida (Figura 7-3), siendo innecesaria toda precarga, ya que, la suspensión presenta una gran rigidez inicial que impediría la absorción de irregularidades del terreno de pequeño tamaño pudiendo resultar poco confortable. No obstante, a veces la dureza de la suspensión no tiene por qué ser un inconveniente, como es el caso de las motocicletas deportivas. Pero sí puede llegar a ser un problema cuando la posición de equilibrio estático provoca que el mecanismo se aproxime en exceso al suelo o sitúe el pistón del amortiguador en un punto desfavorable que le impida trabajar correctamente, como encontrarse cerca de los topes.

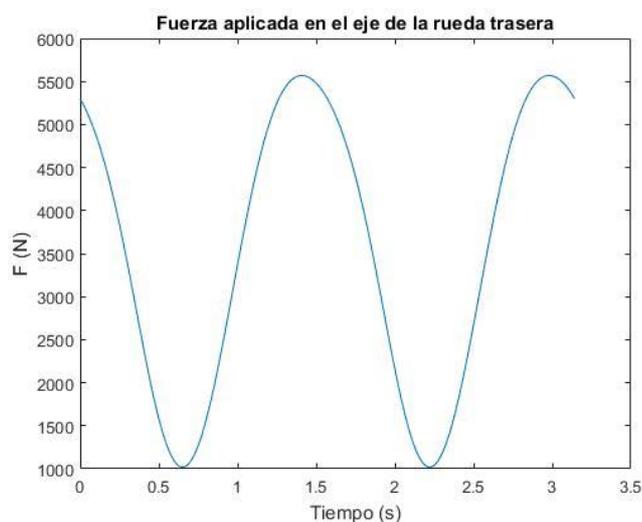
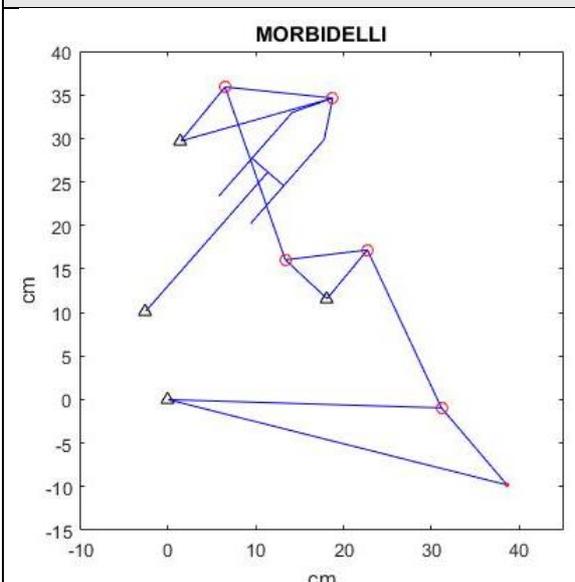
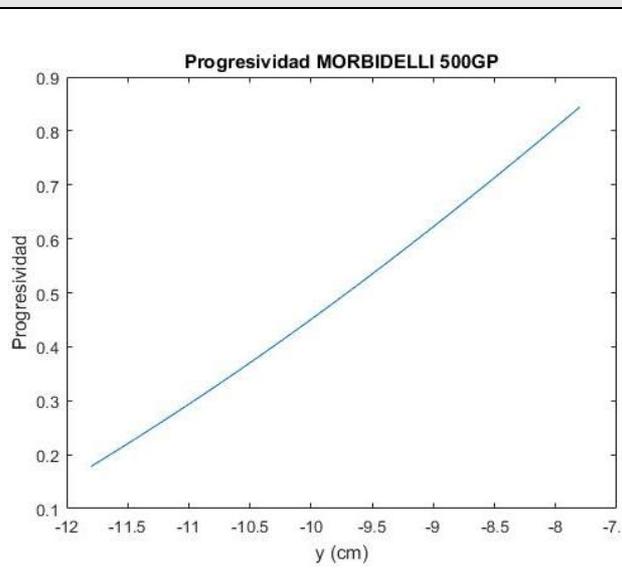


Figura 7-3. Fuerza eje SUZUKI optimizada

7.5 Suspensión Morbidelli 500GP

Tabla 7-5. Optimización MORBIDELLI 500GP

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
			
PARÁMETROS		POSICIÓN INICIAL y_{eye}	-9.80cm
$L_2= 16.00\text{cm}$	$\beta_4= 34.96^\circ$	POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-
$L_3= 17.00\text{cm}$	$\beta_6= 86.18^\circ$	PRECARGA INICIAL	3.5 cm
$L_4= 18.00\text{cm}$	$\beta_8=12.49^\circ$	PRECARGA CORREGIDA	-
$L'_4= 8.00\text{cm}$	$x_{64}= -16.66\text{cm}$	Error de dinámica no corregido	
$L_5= 21.00\text{cm}$	$h_{64}= 18.11\text{cm}$		
$L_6= 6.52\text{cm}$	$x_{86}= 18.11\text{cm}$		
$L'_6= 7.24\text{cm}$	$h_{86}= 11.59\text{cm}$		
$L_7= 20.00\text{cm}$	$x_{24}= 4.00\text{cm}$		
$L_8= 31.15\text{cm}$	$h_{24}= 19.56\text{cm}$		
$L'_8= 39.84\text{cm}$			

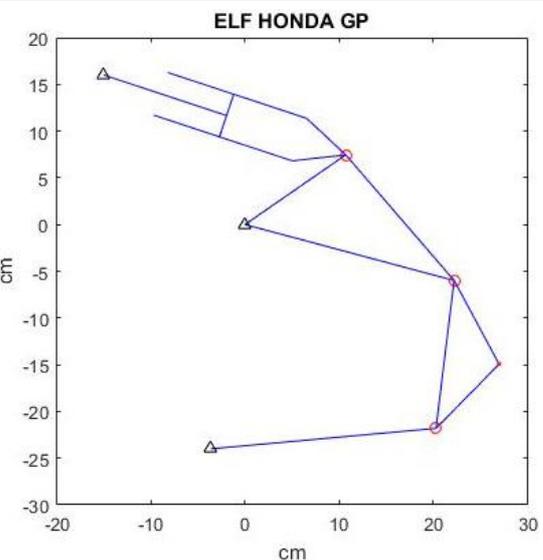
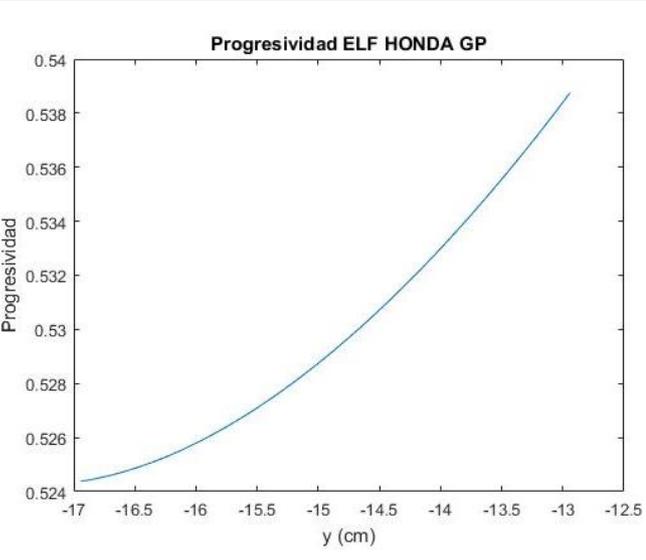
La suspensión Morbidelli ha resultado ser más tediosa de estudiar en comparación con los demás sistemas, sin duda debido al mayor número de sólidos del mecanismo. Por un lado, el movimiento de sus barras era irregular, pues hasta alcanzar cierta amplitud, no se desplazaba el conjunto completo. Por otro lado, en la resolución dinámica no fue posible la obtención fiable de resultados.

El primer objetivo de la optimización del sistema Morbidelli es solventar ese defecto en el diseño que imposibilita el análisis dinámico. Desgraciadamente, de la única forma que se ha logrado resolver este problema ha sido mediante determinadas geometrías del mecanismo que frente a la ascensión del eje de la rueda, el amortiguador responde a trabajando a tracción. Puesto que los sistemas de suspensión de motocicletas se diseñan para que el amortiguador trabaje preferentemente a compresión, si no en todo su recorrido, sí en la mayor parte, dicha solución quedaría descartada.

No habiendo encontrado ninguna medida correctora para esta complicación, sólo se puede analizar el mecanismo desde un punto de vista cinemático. Gracias a las transformaciones aplicadas a su geometría, se ha conseguido generar un movimiento más continuado para todos los sólidos; y aunque la curva de la progresividad continúa siendo lineal, sí ha adquirido valores más elevados, conllevando una relación entre la elongación y el movimiento del eje más favorable.

7.6 Suspensión Elf Honda GP

Tabla 7-6. Optimización ELF HONDA GP

SUSPENSIÓN		PROGRESIVIDAD	
			
PARÁMETROS		POSICIÓN INICIAL y_{eje}	-14.94cm
$L_2= 13.04\text{cm}$	$\beta_2= 50.00^\circ$	POSICIÓN EQUILIBRIO ESTÁTICO y_{est}	-15.19cm
$L'_2= 23.00\text{cm}$	$\beta_3= 35.00^\circ$	PRECARGA INICIAL	3.50cm
$L_3= 15.94\text{cm}$	$x_{24}= -3.62\text{cm}$	PRECARGA CORREGIDA	3.64cm
$L'_3= 10.14\text{cm}$	$h_{24}= -24\text{cm}$		
$L_4= 24.00\text{cm}$	$x_{26}= -15.00\text{cm}$		
$L_5= 15.50\text{cm}$	$h_{26}= 16.00\text{cm}$		
$L_6= 13.76\text{cm}$			
REACCIONES MÁXIMAS		FUERZAS MÁXIMAS EXTERNAS	
$R^A= 634.08\text{N}$	$R^{0A}= 633.90\text{N}$	$F_a= 3986.80\text{N}$	
$R^B= 2131.30\text{N}$	$R^{0B}= 3979.50\text{N}$	$F_{eje}= 2192.80\text{N}$	
$R^C= 3987.30\text{N}$	$N= 5.83\text{N}$		
$R^{0C}= 3308.90\text{N}$	$M= 0.99\text{N/m}$		

La suspensión Elf Honda GP presenta una disposición de sus elementos mecánicos diferente a los demás sistemas, caracterizada por la orientación del amortiguador y el reducido tamaño del basculante. Sus dinámicos han resultado ser muy favorables por las reducidas fuerzas y reacciones que presenta. También, la posición de equilibrio estático tuvo una precisa estimación. Por el contrario, la curva de la progresividad resultó presentar un comportamiento regresivo indeseado.

Para adquirir progresividad en el comportamiento, sólo ha sido necesario hacer algunos ajustes en las dimensiones de las bieletas (sólidos 2 y 4) y en los puntos de anclaje al chasis. Finalmente, se ha logrado las características progresivas deseadas, aunque no con unos valores muy elevados.

Afortunadamente, estas modificaciones no han afectado desfavorablemente a la posición de equilibrio estático (el cual sólo necesita ser corregido con una precarga de 3.64N) ni tampoco a las reducidas fuerzas y reacciones que diferenciaban a este mecanismo.

8 ANÁLISIS COMPARATIVO

Una vez finalizada la optimización del conjunto de mecanismos atendiendo a los criterios de diseño seleccionados, se ha reunido suficiente información para poder realizar el análisis comparativo entre los distintos sistemas de suspensión, objetivo final de este proyecto.

Tal y como se comentó en los primeros capítulos, los resultados de los sistemas de suspensión compuestos por bieletas no difieren en gran medida uno de otros. Por este motivo, se tendrán en cuenta algunas propiedades más para llevar a cabo un análisis más exhaustivo.

Algunas de estas características a considerar, podrían ser el peso global del sistema y la compacidad. Por normal general, a la hora de realizar el diseño de un vehículo, el peso suele ser una variable significativa. En el caso particular de las motocicletas, conforme mayor sea el peso del conjunto completo moto-piloto, mayor será la masa suspendida del vehículo, mayores sus inercias, su consumo y la dificultad para trazar la trayectoria deseada. Respecto a la compacidad, el espacio que requiera la suspensión completa en la motocicleta es un factor relevante. Por un lado, es preferible colocar el mecanismo alejado del suelo, para reducir su vulnerabilidad ante la suciedad de la carretera, impactos, gravilla, etc. Y por otro lado, puesto que el amortiguador requiere de cierta refrigeración, debe evitar montarse cerca de fuentes caloríficas como el sistema de escape, por ejemplo.

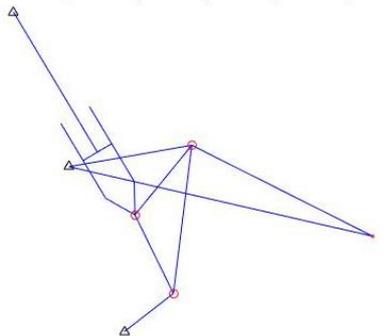
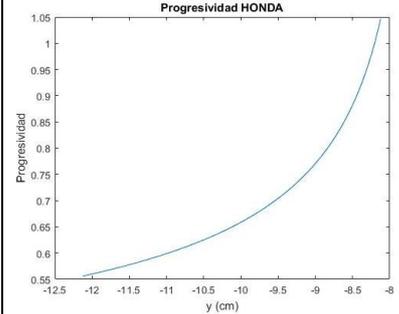
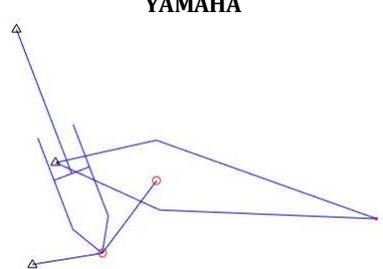
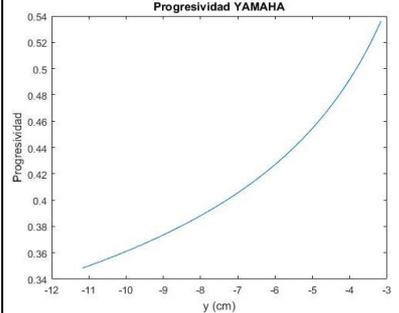
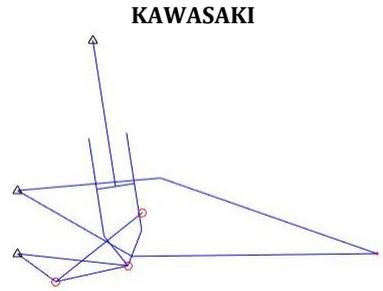
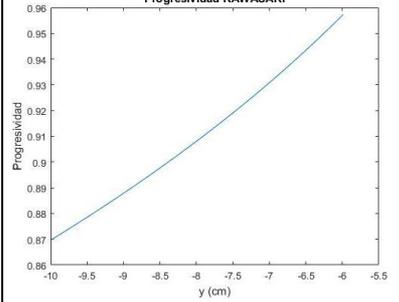
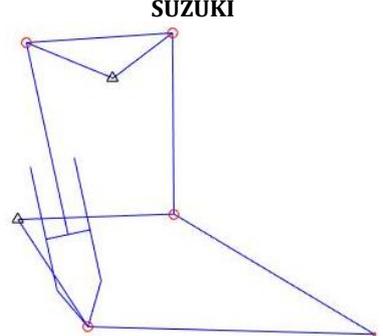
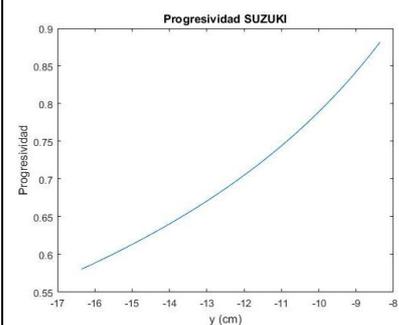
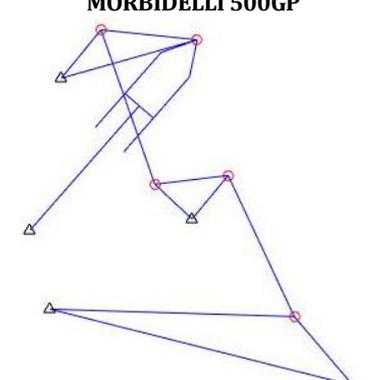
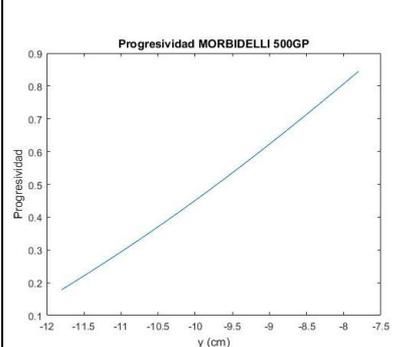
Otro factor considerable es el número de articulaciones móviles que forme el sistema. Con el uso y el paso del tiempo, los pares de rotación pueden dar lugar a desgastes y holguras producidos por el rozamiento y las vibraciones. Por lo tanto, es conveniente que sea lo más reducido posible.

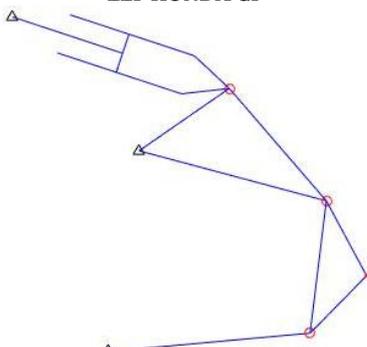
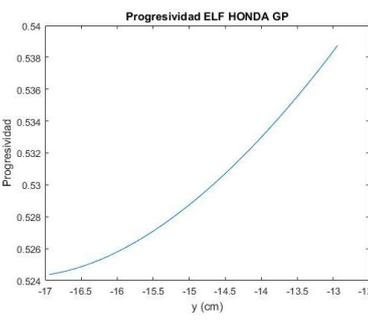
En definitiva, estas tres nuevas características, además de la progresividad y el punto de equilibrio estático, se utilizarán como criterios para evaluar las distintas suspensiones.

Por supuesto, hay otros muchos factores imprescindibles que no se pueden obviar a la hora de realizar el diseño de cualquier mecanismo. Como podrían ser los estudios estructurales, fundamentales para garantizar la integridad del sistema mecánico. Sin embargo, las consideraciones estructurales no están dentro del alcance de este proyecto.

Con el fin de hacer más fácil de visualizar este análisis, se ha elaborado una tabla que recoge toda la información necesaria para poder realizar las evaluaciones requeridas. En ella aparece el esquema de cada una de las suspensiones; las reacciones y fuerzas máximas a las que están sometidas, además del peso total del sistema; la representación de la progresividad lograda frente al recorrido del eje de la rueda trasera en cm; una cuarta columna en la que se indicará si el Punto de Equilibrio Estático (*PEE*) del mecanismo es aceptable según los criterios explicados (*Apto/No apto*); y una última columna en la que se indica el grado de compacidad atendiendo a las dimensiones globales de los mecanismos (*Bajo/Medio/Alto*). En el caso especial de la suspensión Morbidelli, aparece un “-“ en la columna de reacciones, debido a la imposibilidad de obtener resultados fiables del problema de dinámica, según se comentó en el capítulo anterior.

Tabla 8-1. Análisis comparativo

SUSPENSIÓN	REACCIONES	PROGRESIVIDAD	PEE	COMPACIDAD
<p>HONDA</p> 	$R^A = 11075.00N$ $R^B = 8601.10N$ $R^C = 3929.10N$ $R^{O2} = 7157.10N$ $R^{O4} = 3900.70N$ $R^{O6} = 8600.70N$ $N = -3.03N$ $M = 0.92N/m$ $F_{amort} = 3903.50N$ $F_{eje} = 4099.70N$ PESO: 7.39kg		Apto	Media
<p>YAMAHA</p> 	$R^A = 8935.00N$ $R^{B5} = 5743.60N$ $R^{B6} = 7718.20N$ $R^{O2} = 7168.90N$ $R^{O4} = 5712.00N$ $R^{O6} = 7718.10N$ $N = -2.68N$ $M = 0.67N/m$ $F_{amort} = 5714.90N$ $F_{eje} = 2480.30N$ PESO: 7.26kg		Apto	Alta
<p>KAWASAKI</p> 	$R^A = 17023.00N$ $R^B = 17022.00N$ $R^C = 5067.10N$ $R^{O2} = 15029.00N$ $R^{O4} = 5034.50N$ $R^{O6} = 15681.00N$ $N = -1.69N$ $M = 0.40N/m$ $F_{amort} = 5037.60N$ $F_{eje} = 4094.70N$ PESO: 7.46kg		Apto	Alta
<p>SUZUKI</p> 	$R^A = 9230.60N$ $R^B = 6562.30N$ $R^C = 9231.20N$ $R^D = 6598.10N$ $R^{O2} = 15660.00N$ $R^{O4} = 11067.00N$ $N = -1.51N$ $M = 0.67N/m$ $F_{amort} = 6565.50N$ $F_{eje} = 5905.70N$ PESO: 7.71kg		No apto	Media
<p>MORBIDELLI 500GP</p> 	<p>-</p> <p>PESO: 8.2kg</p>		-	Baja

 <p>ELF HONDA GP</p>	$R^A = 634.08\text{N}$ $R^B = 2131.30\text{N}$ $R^C = 3987.30\text{N}$ $R^{O2} = 3308.90\text{N}$ $R^{O4} = 633.90\text{N}$ $R^{O6} = 3979.50\text{N}$ $N = 5.83\text{N}$ $M = 0.99\text{N/m}$ $F_a = 3986.80\text{N}$ $F_{eje} = 2192.80\text{N}$ PESO: 7.12kg	 <p>Progresividad ELF HONDA GP</p>	Apto	Media
--	--	--	------	-------

Tomando de referencia el orden de las columnas de la tabla anterior, se comenzará evaluando las fuerzas y reacciones existentes en cada uno de los sistemas. Sin lugar a dudas, la suspensión Elf Honda GP es la que genera las reacciones y fuerzas más reducidas; seguido de Honda y Yamaha, con reacciones intermedias; y finalmente, Suzuki y Kawasaki, en las que se producen fuerzas de mayor magnitud. De igual forma, conviene hacer énfasis en que todas suspensiones han dado como resultado valores máximos pertenecientes al rango de 10^3 o 10^4N , cuyos órdenes de magnitud son completamente válidos.

Continuando con el comportamiento progresivo del amortiguador, conviene mencionar, que aunque ninguna de las suspensiones ha alcanzado valores de progresividad próximos a 2, sí se ha logrado mejorar el comportamiento de los mecanismos en la mayoría de los casos. La suspensión Honda es la única que alcanza valores superiores a 1, la que mayor concavidad ofrece su curva y, por tanto, mejores resultados ha proporcionado ante este criterio. Suzuki, Kawasaki y Morbidelli, son los siguientes a alcanzar mayores valores, siendo Suzuki la que presenta más progresividad ante la casi linealidad de las otras dos. Y finalmente, Yamaha y Elf Honda GP, que aunque muestren comportamiento progresivo, poseen valores bastante reducidos.

Al juzgar el criterio del PEE, las suspensiones Suzuki y Morbidelli quedarían inmediatamente descartadas. Sin embargo, los insatisfactorios resultados obtenidos, no son causa directa de la topología de los mecanismos sino de un modelo de diseño propuesto desacertado o un error durante el proceso resolutivo de cálculo. Por ello, se continuará evaluando la suspensión Suzuki junto a las demás. Desafortunadamente, la Morbidelli se mantiene apartada, pues, aun suponiendo que los resultados dinámicos fueran muy favorables, si atendemos al resto de criterios se aprecia que es la que más espacio de montaje requeriría, implicando muy baja compacidad; su curva de progresividad responde más a un comportamiento lineal que progresivo; y es por la que más sólidos está compuesta, implicando mayor peso, precio y número de articulaciones. Todos estos factores hacen que la suspensión Morbidelli no sea la que mejores prestaciones ofrezca.

Continuando con la evaluación de las demás suspensiones, es difícil determinar cuál de ellas ha proporcionado mejores resultados. El factor peso y número de articulaciones no aportan más información para el resto de suspensiones, pues todas tienen igual número de pares de rotación y pesos similares. Por lo que se procederá analizando subgrupos con alguna característica común y descartando según las demás prestaciones.

Por un lado, podrían agruparse Yamaha y Suzuki, por sus similares valores en reacciones. Yamaha ofrece una compacidad muy buena, permitiendo su instalación en un gran número de motocicletas. Sin embargo, Suzuki, aun requiriendo más espacio de montaje, presenta un comportamiento más progresivo, que es justamente lo que se pretende lograr con este tipo de suspensiones. Por tanto, Yamaha sería descartada.

Si focalizamos el criterio de la progresividad, Kawasaki podría competir contra Suzuki. No obstante, su comportamiento es más lineal y sus reacciones más elevadas en todas sus articulaciones.

Finalmente, quedarían las dos suspensiones Honda y Suzuki. Elf Honda GP, posee las mejores reacciones de todas, pero su progresividad continúa siendo muy mejorable. Entre Suzuki y Honda, ambas de compacidad media y reacciones similares, los valores ofrecidos por Honda no son superados por su

competidor, haciendo decisivo el descarte de Suzuki.

Como conclusión, podemos afirmar que la suspensión Honda es la que proporciona el comportamiento más progresivo, no genera unas reacciones muy elevadas y, aunque haya sido valorado con compacidad media, podría reajustarse el diseño de los elementos para disminuir su tamaño.

A pesar de haber escogido el sistema de Honda como el mejor diseño, la realidad es que cualquiera de los otros modelos podría haber sido igual de válido. La elección de uno u otro dependerá de las necesidades que surjan para cada vehículo, siendo prioritario a veces el espacio, otras veces la variación de rigidez del amortiguador o su comportamiento ante distintos terrenos. Evidentemente, los requerimientos de una motocicleta de cross no serán los mismos que una deportiva de competición. Reafirmando que el interés por seleccionar como ganador alguno de los modelos analizados, se debe únicamente al desarrollo de este estudio académico.

9 CONCLUSIONES

La finalidad de este proyecto era el estudio del comportamiento de distintos tipos de suspensiones traseras de motocicletas con bieletas, realizando un detallado análisis cinemático y dinámico que permitiera evaluar los diferentes modelos ante determinados criterios.

Como partida, se realiza una propuesta inicial de seis diseños de suspensiones pertenecientes a las principales casas de motocicletas. Aprovecho para enfatizar que, de estos diseños, se ha usado únicamente los esquemas que describen la topología de los mecanismos, pero ninguno de los sistemas aquí analizados se han basado en ningún modelo real en concreto. Precisamente por ese motivo, surge la primera complicación durante el análisis matemático: la estimación numérica de los parámetros del mecanismo.

Para poder obtener resultados de los análisis, es más que evidente, la necesidad de los valores cuantitativos, tanto de los parámetros que definen el mecanismo, como de las propiedades másicas e inerciales. Como este proyecto no tiene por objeto el diseño de las suspensiones, la exactitud de los valores no es necesariamente imprescindibles. Sin embargo, desde el inicio del proyecto, se ha pretendido que los resultados obtenidos se asemejaran lo máximo posible a la realidad, de forma que permitan ser evaluados con cierto criterio.

Para la obtención de estos parámetros, se han tomado medidas reales de distintas motocicletas, adquirido datos de planos de fabricantes de piezas o de otros TFG centrados en el diseño de suspensiones. Además de haber utilizado programas de diseño para obtener las propiedades geométricas másicas con mayor exactitud. No obstante, los valores finales de los parámetros del mecanismo están basados en estimaciones, alejándonos irremediamente de la realidad y pudiendo dificultar la posibilidad de obtener mejores resultados. Sin duda alguna, este sería el primer aspecto a mejorar.

Pese a esta carencia, los resultados obtenidos del análisis cinemático y dinámico han sido bastante favorables. Con la salvedad del caso particular de la suspensión Morbidelli, que ya sea por el superior número de parámetros a estimar o por las carencias de estas estimaciones, ha sido imposible encontrar un conjunto de parámetros que proporcionen un comportamiento lógico.

Además del análisis físico/matemático, el otro objetivo fundamental del proyecto ha sido la optimización de los diseños, imponiendo como criterios la progresividad y la verificación de la correcta posición del mecanismo en el equilibrio estático. Estos objetivos también han generado resultados satisfactorios.

En primer lugar, la progresividad es la característica fundamental de este tipo de suspensión, pues es precisamente la utilización de las bieletas lo que favorece esta propiedad, además de permitir mayores desplazamientos del eje sin perjudicar la comodidad del piloto. De los primeros resultados de progresividad procedentes de los modelos iniciales, se obtuvieron cuatro mecanismos con características progresivas o lineales. Y posteriormente, tras la optimización de los diseños, se consiguió que todos los mecanismos respondieran progresivamente, de forma más o menos lineal.

Aunque los resultados finales fueran los deseados, el valor de la progresividad era más bajo que el recomendado. Como ya se ha mencionado, los valores ideales de progresividad son próximos a 2, pero sólo con la suspensión Honda se han conseguidos valores superiores a 1. Como hipótesis, podría deberse a una amplitud de excitación demasiado pequeña como para que se pueda apreciar la tendencia de la suspensión en todo su recorrido o simplemente a errores de diseño. De igual forma, la obtención de valores superiores sería otro factor a mejorar.

Otra dificultad que ha surgido y a la que no se le ha hallado solución, es a la optimización de la suspensión Suzuki, la cual generaba fuerzas iniciales demasiado elevadas, impidiendo alcanzar una posición de equilibrio estático adecuada.

Este inconveniente, quizás, podría haberse solventado si se hubiera realizado un proceso de optimización más elaborado y eficiente. Pues, pese a haber realizado un elevado número de iteraciones en busca de resultados propicios, la probabilidad de éxito frente a la de un programa informático de cálculo, es infinitamente más reducida. Sin embargo, haber desarrollado un código de programación para la optimización,

se hubiera excedido significativamente del alcance de este proyecto, aun así, debe ser planteado como posible mejora.

Otra propuesta podría ser la realización de la optimización de los mecanismos atendiendo a otros de los criterios de diseño aquí mencionados, como podría ser el caso del efecto *squat* o la tensión de la cadena de la motocicleta.

Como últimos comentarios, conviene mencionar que el valor otorgado a la compacidad de las suspensiones está basado únicamente en las dimensiones de estos mecanismos concretos, pudiendo diferir mucho con la realidad, ya que, una misma topología podría dar lugar a mecanismos de distintos tamaños o con pequeñas variaciones, válidos para diferentes tipos de motocicletas o requerimientos. No obstante, todos los criterios definidos han sido útiles para poder realizar el análisis comparativo que se pretendía.

BIBLIOGRAFÍA

CARDONA FOIX, Salvador; Daniel CLOS COSTA, 2001. *Teoría de máquinas*. Barcelona: Edicions UPC.

CHACARTEGUI GARCÍA, Víctor, 2017. *Diseño y desarrollo de la suspensión trasera de una motocicleta para la competición Motostudent 15-16*. Trabajo Fin de Grado para optar al Título de Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad de Cantabria, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación, Cantabria.

COSSALTER, Vittore, 2006. *Motorcycle Dynamics*, Second Edition.

FOALE, Tony, 2002. *MOTOCICLETAS: Comportamiento dinámico y diseño de chasis: el arte y la ciencia*, España.

DOMÍNGUEZ ABASCAL, Jaime, 2016. *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. Sevilla: Universidad de Sevilla.

HOLLOWAY CAMPOS, Daniel, 2014. *Diseño de mecanismo de suspensión trasera flotante para motocicletas de competición*. Daniel García Vallejo, tut., Proyecto Fin de Carrera para optar al Título de Ingeniería Industrial Superior. Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla.

RAMÍREZ CANO, F. Javier, 2012. *Diseño sistema de suspensión progresivo*. Enrique del Pozo Polidoro, dir., Proyecto Fin de Carrera para optar al Título de Ingeniería Industrial Superior. Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla.

RUIZ FERNÁNDEZ, Hugo, 2016. *Diseño del basculante de una motocicleta de competición de 250 CC*. Trabajo Fin de Grado para optar al Título de Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad de Cantabria, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación, Cantabria.

SEQUERA SOTO, Martín, 2015. *Análisis numérico y experimental de la suspensión trasera de una motocicleta de competición*. Daniel García Vallejo, tut., Trabajo Fin de Grado para optar al Título de Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales. Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla.

URIARTE ITURREGI, Beñat, 2015. *Diseño de sistema de suspensión trasera: alternativa Uni-Track*. Mikel Abasolo Bilbao, tut., Trabajo Fin de Grado para optar al Título de Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad del País Vasco, Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao, Bilbao.

VELÁZQUEZ KENNEDY, Miguel, 2012. *Propuesta de un basculante y sistema de suspensión para una moto de competición*. Higinio Rubio Alonso, tut., Trabajo Fin de Grado para optar al Título de Grado en Ingeniería Mecánica. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento Ingeniería Mecánica, Leganés.

<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/3895/fichero/4.pdf>

<http://lim.ii.udc.es/docencia/phd-meccomp/capitulo2.pdf>

<http://www.aluminiosmetalesunicornio.com.mx/7075.html>