

Proyecto Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Automatización del estudio de cascadas de álabes de compresor en entorno CFD

Autor: D. Carlos Tello Castillo

Tutor: Prof. David Sánchez Martínez

Dpto. Ingeniería Energética
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2013



GMTS | GRUPO DE MAQUINAS Y MOTORES
TERMICOS DE SEVILLA

Trabajo Fin de Grado
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Automatización del estudio de cascadas de álabes de compresor en entorno CFD

Autor:

Carlos Tello Castillo

Tutor:

David Tomás Sánchez Martínez

Catedrático de Universidad

Grupo de Máquinas y Motores Térmicos

Dpto. de Ingeniería Energética

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Proyecto Fin de Carrera: Automatización del estudio de cascadas de álabes de compresor en entorno CFD

Autor: Carlos Tello Castillo

Tutor: David Tomás Sánchez Martínez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2013

El Secretario del Tribunal

A mis padres

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

Como todos los que estudiamos una ingeniería sabemos, esta no es una carrera que se recorra en solitario, y en mi caso son muchas las personas que me han apoyado a lo largo del camino para que hoy pueda estar aquí. Por ello, este Trabajo de Fin de Grado es no solo mío, sino también de todos los que me han ayudado a llegar a este momento. Así, quiero dar las gracias en primer lugar a mi familia y en especial mis padres, por los consejos que me han dado desde el primer año, sin los cuales seguramente este TFG habría tardado un poco más en llegar. También doy especialmente las gracias a mis amigos, los cuales saben quiénes son, por el apoyo mutuo y los buenos momentos que pasamos aunque los resultados de los exámenes no acompañen, sin duda son lo mejor que he sacado de esta carrera. Merece también una mención especial José María Rodríguez Muñoz, en cuyo Proyecto de Fin de Carrera se basa este trabajo, y quien me ha ayudado a comprender las bases del programa con infinita paciencia y amabilidad. Por último, me gustaría dar las gracias a todos los profesores que muestran su lado humano y su interés por ofrecer una docencia de calidad, ya que hacen posible entrar a un aula a veces incluso con impaciencia por escuchar y aprender.

Carlos Tello Castillo

Sevilla, 2018

Hasta hace relativamente poco tiempo, el conocimiento existente sobre el perfil de un álabe y su comportamiento aerodinámico se basaba en los estudios realizados durante la Segunda Guerra Mundial. En aquella época, debido a la importancia de la industria de la aviación, se llevaron a cabo rigurosos estudios al respecto, lo que dio lugar a un amplio registro de perfiles de ala. Aquellos perfiles fueron definidos de forma experimental en el túnel de viento, y generados a partir de una línea media y una distribución de espesores superpuesta.

Hoy en día, los avances tecnológicos y las capacidades computacionales, así como la aparición de las herramientas CFD (Computational Fluid Dynamics), nos permiten ir un paso más allá y conseguir la adaptación de cada perfil a su aplicación concreta.

En esta línea, el Grupo de Máquinas y Motores Térmicos de la Universidad de Sevilla pretende desarrollar un programa capaz de optimizar el comportamiento de los álabes en función de las condiciones de trabajo.

Como primer paso, este TFG se ha centrado en el desarrollo de un programa capaz de parametrizar la geometría de los perfiles estandarizados, construidos mediante una línea media y una distribución de espesores, y crear un mallado para su estudio y optimización en entorno CFD.

Con el objetivo de seleccionar el método más adecuado de parametrización, se han seguido cuatro caminos diferentes, comprobando en cada una de ellos tres aspectos fundamentales: el error del método, el tiempo de computación y la sensibilidad al cambio en la posición de los puntos del perfil.

Con posterioridad, se ha procedido a la adaptación de un fichero para introducir la parametrización final de cada álabe en el programa de elementos finitos ANSYS, que será el encargado de generar el mallado destinado a la optimización del perfil.

Por último, y para facilitar el uso del programa, se ha creado una interfaz de usuario que facilita la entrada de datos, la visualización de resultados y la generación de un fichero de entrada de datos para el citado programa.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
1 Introducción y Motivación	11
1.1 <i>Introducción</i>	11
1.2 <i>Motivación</i>	12
2 Caracterización de la Geometría de Álabes	13
2.1 <i>Geometría de los álabes</i>	13
2.1.1 Partes del álabe	13
2.1.2 Parámetros de álabes	14
2.1.3 Ángulos de álabes y cascadas	15
2.2 <i>Fuerzas sobre los álabes</i>	15
2.3 <i>Parámetros necesarios para la definición completa de una cascada de álabes</i>	15
3 Optimización de las Geometrías	17
3.1 <i>Curvas de Bezier</i>	17
3.2 <i>Spline Cúbico</i>	18
4 Generación del Perfil	19
4.1 <i>Línea Media</i>	19
4.2 <i>Distribución de espesores</i>	20
5 Cierre de las Curvas	22
6 Métodos de Parametrización	25
6.1 <i>Método 1: Perfil completamente generado por curvas de Bezier</i>	25
6.1.1 Método 1, opción 1: Utilizar la intersección de las pendientes de cada punto	26
6.1.2 Método 1, opción 2: Utilizar la intersección de las pendientes de cada punto con las mediatrices	27
6.1.3 Conclusiones del Método 1	29
6.2 <i>Método 2: Perfil generado completamente por curvas Spline</i>	30
6.2.1 Método 2, opción 1: Bordes de ataque y estela con pendiente vertical	30
6.2.2 Método 2, opción 2: Cambio de variable	32
6.2.3 Conclusiones del Método 2	34
6.3 <i>Método 3: Bordes mediante Spline y caras de succión y presión mediante Bezier</i>	34
6.3.1 Conclusiones del Método 3	36
6.4 <i>Método 4: Bordes mediante curvas de Bezier y Caras de succión y presión mediante curvas de Bezier diferenciadas</i>	36
6.4.1 Conclusiones del Método 4	38
7 Cuantificación del Error	39

7.1	<i>Elección de los puntos a comparar</i>	39
7.2	<i>Comprobación del cálculo del área</i>	40
7.3	<i>Combinatoria de parámetros</i>	40
7.3.1	Establecimiento del perfil inicial	41
7.3.2	Variaciones moderadas de cada parámetro	41
7.3.3	Estudio de los casos con valores extremos de los parámetros de entrada	45
7.3.4	Relación Precisión-Tiempo de computación	46
7.3.5	Conclusión	46
8	Estudio de Sensibilidad	48
8.1	<i>Método 1: Bezier</i>	48
8.2	<i>Método 2: Spline</i>	49
8.3	<i>Método 3: Spline-Bezier</i>	50
8.4	<i>Método 4: Bezier Doble</i>	51
8.5	<i>Conclusión</i>	51
9	Mallado	53
10	Interfaz de Usuario	55
11	Conclusión y posibles mejoras	57
	Referencias	59

ÍNDICE DE TABLAS

- Tabla 4-1. Tabla de distribución de espesores para los perfiles NACA65010 y C4 extraída de la Referencia [3] 20
- Tabla 7-1. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (1) 45
- Tabla 7-2. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (2) 45
- Tabla 7-3. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (3) 46
- Tabla 7-4. Evolución del tiempo de computación para diferente número de puntos de control y precisión 46

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Capa Límite	11
Figura 2-1. Corona de álabes de una turbomáquina	13
Figura 2-2. Partes de un álabe	13
Figura 2-3. Parámetros de una cascada de álabes	14
Figura 2-4. Superposición de Línea Media y Distribución de Espesores	16
Figura 3-1. Curva de Bezier	18
Figura 3-2. Comparación de diferentes ajustes polinómicos.	18
Figura 4-1. Línea media del álabe generada a partir del coeficiente de sustentación	20
Figura 4-2. Distribución de espesores en torno a la línea media de un perfil de la serie NACA 65010 sin curvatura, representada según las tablas de la Referencia [3]	21
Figura 4-3. Distribución de espesores con un número de puntos elegido por el usuario	21
Figura 5-1. Circunferencia para el cierre original de las curvas. (Referencia [2])	22
Figura 5-2. Circunferencia dada por la Referencia [2] para el cerramiento del perfil	23
Figura 5-3. Punto de control resultado de la intersección de las pendientes de la circunferencia y de la cara de succión en el borde de ataque	23
Figura 5-4. Comparación de bordes resultantes al usar diferentes puntos de unión en las curvas de Bezier	24
Figura 5-5. Resultado final de cerrar el perfil mediante las curvas de Bezier	24
Figura 5-6. Comparación de los bordes de ataque de los perfiles estándar y los calculados	24
Figura 6-1. Puntos de control de las curvas de Bezier calculados mediante la intersección de pendientes (mostrados como x en la figura). Los círculos representan los puntos sobre las superficies	26
Figura 6-2. Puntos de control de Bezier calculados mediante la intersección de pendientes con mediatrices	28
Figura 6-3. Resultado final obtenido mediante curvas de Bezier	28
Figura 6-4. Borde de ataque para el método Bezier-Simple	29
Figura 6-5. Borde de ataque para el método Bezier-Simple	29
Figura 6-6. Borde de ataque problemático en el método de Spline Cúbico	30
Figura 6-7. Detalle del borde de ataque con pendiente vertical	31
Figura 6-8. Bordos de ataque y estela solucionados con pendientes verticales	31
Figura 6-9. Detalle del borde de estela con pendiente vertical	31
Figura 6-10. Discontinuidad en la primera derivada cuando la curvatura es elevada para el caso de pendiente vertical	32
Figura 6-11. Problema de continuidad con la solución del cambio de variable	32
Figura 6-12. Detalle de pendientes para el problema de pendientes	33
Figura 6-13. Resultado final de Spline cúbico tras solucionar el problema de continuidad	33
Figura 6-14. Mejora del borde de ataque con respecto a las pendientes verticales	34

Figura 6-15. Perfil compuesto por bordes generados con Spline Cúbico y caras con curvas de Bezier	35
Figura 6-16. Detalle del borde de ataque para el método Spline-Bezier	35
Figura 6-17. Detalle del borde de estela para el método Spline-Bezier	35
Figura 6-18. Perfil generado mediante menos puntos de control para el método Spline-Bezier	36
Figura 6-19. Perfil generado mediante tres curvas de Bezier diferentes por cada cara	37
Figura 6-20. Detalle del borde de ataque para el método de Bezier Múltiple	37
Figura 6-21. Detalle del borde de estela para el método de Bezier Múltiple	37
Figura 7-1. Variación del error en función de la curvatura	41
Figura 7-2. Variación del error en función del ángulo de calado	42
Figura 7-3. Variación del error en función de la solidez	43
Figura 7-4. Variación del error en función del número de puntos de control	43
Figura 7-5. Variación del error en función del número de puntos de precisión	44
Figura 8-1. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Bezier Simple	48
Figura 8-2. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Spline Cúbico	49
Figura 8-3. Detalle del borde de ataque tras cambiar varios puntos para Spline	49
Figura 8-4. Deformación más leve para el método Spline	50
Figura 8-5. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Spline-Bezier	50
Figura 8-6. Detalle del borde de ataque tras cambiar varios puntos para Spline-Bezier	50
Figura 8-7. Detalle del borde de estela tras cambiar varios puntos para Spline-Bezier	51
Figura 8-8. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Bezier Múltiple	51
Figura 9-1. Volumen de control elegido para el mallado	53
Figura 9-2. División del volumen de control para separar los dos tipos de mallado	54
Figura 9-3. Vista general del mallado final	54
Figura 9-4. Detalle del mallado final del perfil	54
Figura 10-1. Vista de la Interfaz de usuario	55
Figura 10-2. Panel desplegable 2	55
Figura 10-3. Panel desplegable 1	55
Figura 10-4. Interfaz de usuario mostrando el resultado	56
Figura 10-5. Interfaz de usuario mostrando el perfil calculado con las tablas de la Referencia	56
Figura 10-6. Cuadrícula	56
Figura 10-7. Puntos de control	56
Figura 11-1. Comparación de las interpolaciones con Spline Cúbico y Spline Akima	57

1 INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

1.1 Introducción

La historia de las turbomáquinas comenzó hace aproximadamente 2000 años. Ya en el año 200 AC, Herón de Alejandría inventó la primera máquina propulsada por chorros de vapor, la Eolípila, aunque su función no está del todo clara.

Sin embargo, la historia real de los turbocompresores no empieza hasta el siglo XIX, con el desarrollo de los perfiles de ala. Antes de esta época se sabía que una simple placa plana con un cierto ángulo de inclinación sufría una fuerza de sustentación al enfrentarse a una corriente de fluido.

George Cayley y Otto Liliental observaron que las superficies curvas tenían un mejor comportamiento que las planas, produciendo mayor sustentación y menor arrastre, aunque el desarrollo fue totalmente empírico. En 1903, los hermanos Wright consiguen hacer volar el primer aeroplano, pese a que no se tenía un conocimiento profundo de la aerodinámica de las alas.

En 1904, Prandtl introdujo el concepto de capa límite, lo que supuso un gran avance en el campo de la mecánica de fluidos: observó que cuando un fluido entra en contacto con una superficie, aparecen dos zonas claramente diferenciadas. Una muy delgada cercana a la superficie, denominada capa límite, en la que la velocidad relativa evoluciona rápidamente desde cero hasta la del propio fluido, y otra más alejada, en la que el flujo se encuentra libre de perturbaciones.

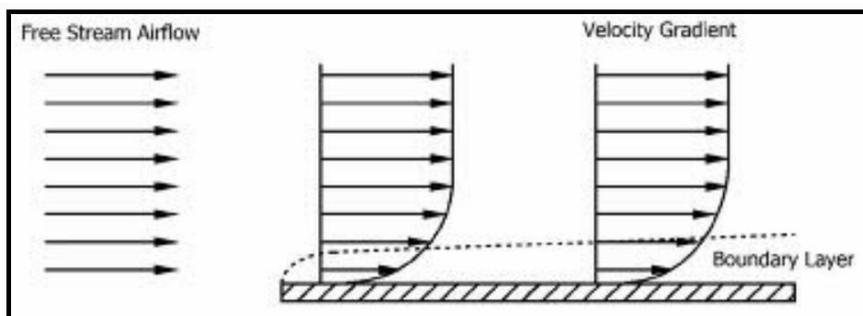


Figura 1-1. Capa Límite

Con la llegada de la Primera Guerra Mundial, comenzó a ser más acusada la necesidad de un desarrollo de los perfiles de ala que condujese a mejores aviones. Y países como Francia, Alemania y Gran Bretaña contribuyeron a su desarrollo.

Sin embargo, no fue hasta la llegada de la Segunda Guerra Mundial cuando realmente se produce el mayor avance, debido en gran parte a los estudios de la NACA (actual NASA), los cuales fueron los más rigurosos y sistemáticos. Tanto que a día de hoy estos perfiles se siguen utilizando.

Por su parte, el interés de los turbocompresores surge a partir del desarrollo de las turbinas de gas, que requerían un elemento capaz de comprimir el aire antes del proceso de combustión. Los aerorreactores representan en la actualidad el principal método de propulsión en la aviación, debido a que la cantidad de aire que entra en ellos es mucho mayor que para los motores alternativos, lo cual significa que también entra más cantidad de oxígeno, aumentando el ritmo al que se quema el combustible y otorgando así una mayor potencia.

Sin embargo, parecía existir una barrera para el desarrollo de estas máquinas: todas las turbinas hasta aquel momento habían funcionado satisfactoriamente, mientras que los compresores, pese a su similitud con ellas, presentaban un comportamiento pésimo. Este problema fue resuelto gracias al desarrollo de los perfiles de ala, anteriormente mencionado, que estudiaron el fenómeno de la capa límite e introdujeron el concepto del desprendimiento, que resultó clave para el desarrollo de álabes de compresor con un buen rendimiento.

Por este motivo, no es hasta 1920 cuando la implementación de estos álabes hace que los compresores comiencen a ser lo suficientemente eficientes para su uso en turbinas de gas, gracias a su buen comportamiento todavía hoy perfiles como los de la serie NACA65 o sus homólogos británicos, los C4, son usados en este tipo de turbomáquinas.

1.2 Motivación

La importancia de los álabes a la hora de conseguir un turbocompresor de buenas características resulta incuestionable. Sin embargo, los álabes no siempre trabajan bajo las mismas condiciones: su principal fluido de trabajo es el aire, aunque recientemente se ha puesto de manifiesto que existen otros fluidos de trabajos que pueden aportar mayores beneficios, como el CO₂ súpercrítico.

Como se ha comentado, la NACA realizó un estudio profundo sobre la geometría de los perfiles de ala en la época de la Segunda Guerra Mundial, dando lugar a series de perfiles normalizados cuyas prestaciones eran validadas experimentalmente en túneles de viento. No obstante, las características de estos álabes no tienen por qué ser las adecuadas para otro tipo de fluidos o aplicaciones y, en cualquier caso, se limitan a álabes bidimensionales en los que la caracterización o adaptación del flujo tridimensional no resulta sencilla. Por ello, resultaría de gran interés automatizar la obtención de los perfiles óptimos dado un fluido de trabajo y una aplicación y condiciones de operación concretas.

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es la preparación de una herramienta informática capaz de generar geometrías de álabes de compresor en el entorno de MATLAB, con el fin de integrarla en una herramienta mayor que permita optimizar dichos perfiles para diferentes aplicaciones y condiciones de operación, a fin de obtener así una geometría con pérdidas mínimas.

Para ello, se partirá del trabajo ya existente sobre perfiles de álabes estandarizados y, una vez dibujados, se transformará la definición de la geometría de modo que quede constituida por curvas de ajuste que puedan ser modificadas por un optimizador.

Con este objetivo, se seguirá la siguiente metodología:

- Generación de las geometrías estándar de los álabes ya existentes a partir de los parámetros característicos del álabe y la cascada.
- Parametrización de los perfiles: establecimiento de los puntos que serán posteriormente introducidos en el programa de optimización, correspondientes a las caras de presión y succión y a los bordes de ataque y estela.
- Estudio del error del ajuste numérico mediante comparación de las coordenadas de las superficies de ambas caras del álabe. Se prestará especial atención a la geometría de los bordes de ataque y estela.
- Análisis de sensibilidad de las características de la superficie al movimiento de puntos individuales, de cara a la implementación de la herramienta en el optimizador.
- Creación de una interfaz de usuario que automatice y facilite el uso de la herramienta.

2 CARACTERIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE ÁLABES

El principal cometido de las turbomáquinas es intercambiar energía con el fluido de trabajo. La transmisión de esta energía se realiza gracias a la rotación de su eje, a lo largo del cual se disponen unos discos llamados tambores o discos. En la superficie exterior de estos discos se encuentran los elementos responsables del intercambio de energía entre fluido y máquina: los álabes.

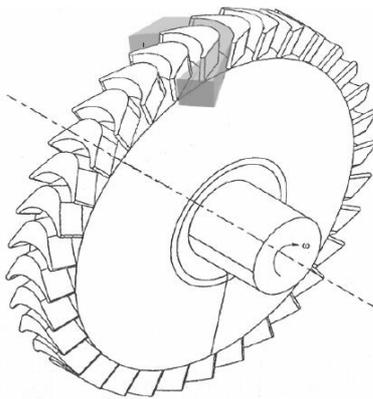


Figura 2-1. Corona de álabes de una turbomáquina

Los álabes son elementos aerodinámicos diseñados para intercambiar energía con el fluido que los atraviesa ocasionando en la corriente unas pérdidas mínimas. Esto se consigue gracias a la desviación de la corriente, lo cual induce, en aplicación de la tercera ley de Newton, una fuerza de reacción en el álabe en sentido contrario a dicha a la que el álabe ejerce sobre él.

La forma de los álabes tiene mucho que ver con su aplicación. Por ejemplo, en los compresores los álabes tienen una curvatura mucho más suave que en el caso de las turbinas. La razón es que el gradiente de presiones a lo largo de la componente axial de la turbomáquina tiene sentido contrario a la velocidad del fluido que la recorre, haciendo que puedan surgir problemas de inversión de flujo. Esta situación no aparece en las turbinas ya que el fluido siempre evoluciona a favor de un gradiente de presiones.

A continuación, se exponen las partes de un álabe, sus parámetros geométricos y sus ángulos más importantes, así como las fuerzas que actúan sobre ellos.

2.1. Geometría de los álabes

2.1.1 Partes del álabe

Las partes más importantes a diferenciar en los álabes se muestran en la Figura 2-2. Partes de un álabe, y son las siguientes:

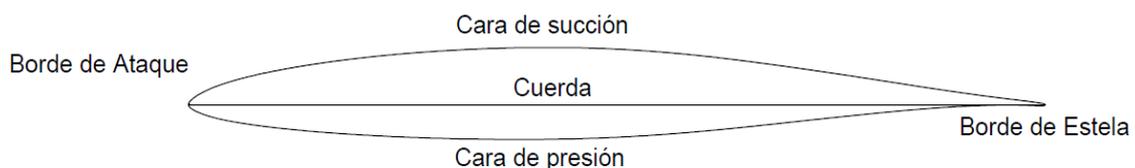


Figura 2-2. Partes de un álabe

- **Borde de ataque:** Primer punto de contacto del fluido con el álabe (cuando se trata de un álabe sin curvatura). Es responsable de dividir el flujo entre las caras de succión y de presión. Además se encarga de iniciar la aceleración del fluido en la cara de succión.

- **Borde de estela:** Constituye la “cola” del álabe. Es la zona donde se concentran las pérdidas del álabe ya que el flujo tiende a despegarse de la superficie del álabe, aumentando su turbulencia.
- **Cara de succión:** Es la cara del álabe expuesta a un fluido que se encuentra a menor presión y circula, generalmente, a mayor velocidad por lo que es más sensible al desprendimiento. En sus estudios teórico-experimentales, Lieblein analizó de manera rigurosa la contribución del flujo de la cara de succión del álabe al crecimiento de la estela, por ser esta la principal contribuyente a la región de baja velocidad aguas abajo del álabe.
- **Cara de presión:** Es la cara del álabe expuesta a un fluido que se encuentra a mayor presión. En ella las velocidades relativas son menores y su contribución a las pérdidas de energía suele ser menos importante.

2.1.2 Parámetros de álabes

Por otro lado, de cara a su mejor estudio, se debe atender a una serie de parámetros geométricos que permitirán definir la geometría del álabe:

- **Forma de la línea media:** Circular, parabólica...
- **Cuerda:** Es la distancia entre el borde de ataque y el borde de estela.
- **Flecha máxima:** Es el valor en la coordenada “y” del punto de mayor curvatura, suponiendo que el eje X coincide con la cuerda del álabe.
- **Distancia de Flecha máxima:** Es el valor de la coordenada “x” del punto de mayor curvatura.
- **Distribución de espesores:** es la distribución de espesores que se aplica a la línea media en sentido ascendente y descendente del eje “y” para coordenada “x”. Viene especificado normalmente en forma de tablas, y para valores de “x” dados asigna un valor del espesor que se medirá de forma perpendicular a la línea media (es decir, no en dirección “y” directamente).

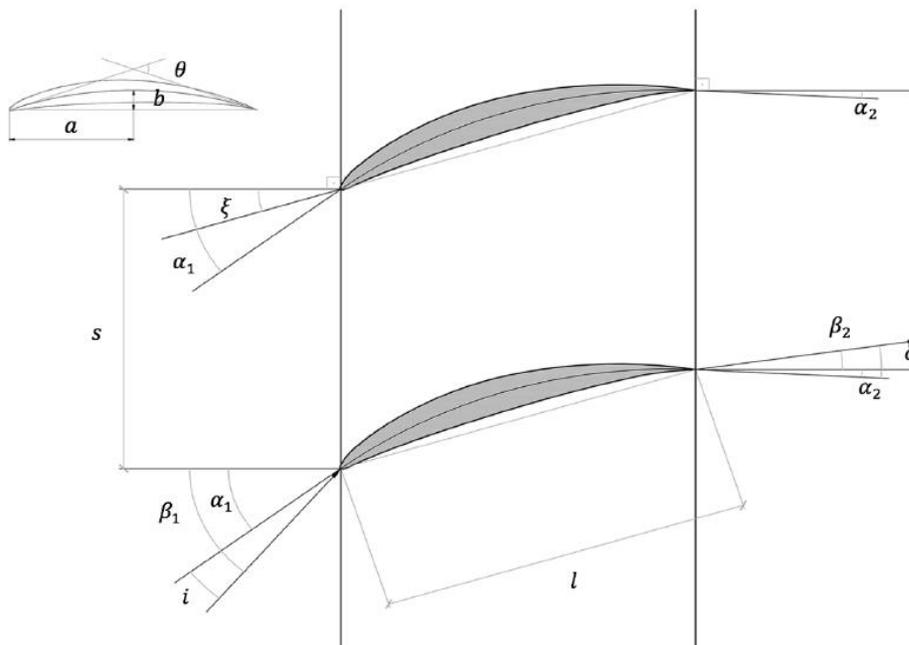


Figura 2-3. Parámetros de una cascada de álabes

2.1.3 Ángulos de álabes y cascadas

Por último, a continuación se detallan los ángulos más relevantes de un álabe:

- Ángulos de entrada y salida del flujo (α_1 y α_2 respectivamente).
- Ángulos de entrada y salida del álabe (α_1' y α_2' respectivamente). También llamado ángulo de metal
- Ángulos de incidencia y desviación (i y δ): Son la diferencia entre los ángulos de entrada y salida del flujo y el álabe respectivamente.
- Curvatura (θ): En compresores se define como la diferencia entre los ángulos de entrada y salida del álabe.
- Deflexión (ϵ): En compresores se define como la diferencia entre los ángulos de entrada y salida del flujo.

El estudio experimental del comportamiento de los álabes que forman una turbomáquina presenta numerosas dificultades. Entre ellas, debe ser tenido en cuenta el efecto que la presencia de un álabe tiene sobre los demás álabes que se encuentran próximos a él, especialmente los adyacentes. A fin de tener este efecto en cuenta, no suele estudiarse el comportamiento de los álabes aislados sino formando parte de un frente formado por varios álabes (típicamente siete o más) colocados en una posición relativa a la corriente de fluido similar a la que tendrán eventualmente en la máquina. Este frente de álabes se conoce como “cascada de álabes” y que da definido por los siguientes parámetros, al menos:

- Calado (ξ): Es el ángulo que forma la cuerda con la normal al plano frontal de la corona.
- Paso (s): Distancia entre el borde de ataque de dos álabes consecutivos. Suele expresarse en forma adimensional respecto de la cuerda, bien como relación paso-cuerda o como relación paso-cuerda (comúnmente denominada solidez).

2.2. Fuerzas sobre los álabes

Cuando el fluido pasa por una cascada de álabes, experimenta una fuerza **F** debido a las variaciones en sus propiedades (velocidad, presión...). Esta fuerza que cada álabe ejerce sobre el fluido puede descomponerse en una componente “**X**” y otra “**Y**”. La componente “**X**” es la responsable del empuje axial mientras que la “**Y**” actúa en dirección tangencial y es responsable del par de fuerzas que mueve el eje de la máquina.

Otra forma de entender esta fuerza **F** es mediante las llamadas componentes aerodinámicas, que descomponen a dicha fuerza en una fuerza de sustentación (**L**) y otra de arrastre (**D**). La componente de sustentación se define como la perpendicular a la velocidad del flujo, y la de arrastre como la paralela. En este caso, la fuerza de sustentación es la fuerza que empuja al álabe en la dirección perpendicular al flujo, mientras que la fuerza de arrastre es la que genera las pérdidas por fricción.

Como se verá más adelante, la curvatura de un álabe está directamente relacionada con el coeficiente de sustentación (C_L), de forma que, a mayor curvatura, mayor deflexión y mayor coeficiente de sustentación. Al mismo tiempo, el incremento del coeficiente de sustentación puede venir acompañado de un incremento del coeficiente de arrastre en cuyo caso las pérdidas del flujo en el paso por la cascada aumentan.

2.3. Parámetros necesarios para la definición completa de una cascada de álabes

Con vistas a la creación del programa de parametrización se deben elegir los parámetros a usar para definir la forma de los álabes y la cascada.

En lo que se refiere al álabe, la forma convencional de construirlo es mediante una línea media y una distribución de espesores. La superposición de ambos da como resultado una configuración tal y como se refleja en la Figura 2-4.

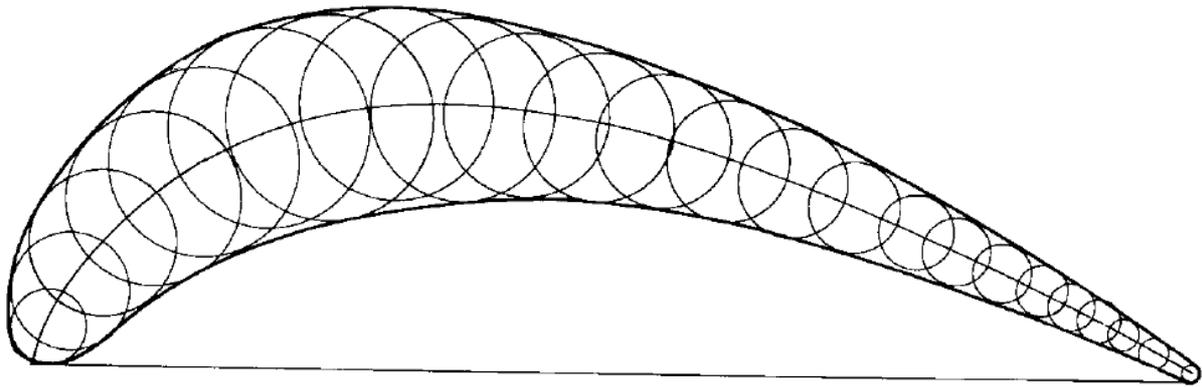


Figura 2-4. Superposición de Línea Media y Distribución de Espesores

Por otro lado, la forma de la línea media debe ser especificada. Para ello, se empleará el tipo de línea media (parabólica o circular) y el ángulo de curvatura. Éste da una idea de la deflexión del flujo y por tanto también de la fuerza de sustentación que sufrirá el álabe. También se podría usar el coeficiente de sustentación; sin embargo, esto es mucho menos intuitivo ya que no da una idea clara de la deflexión de la corriente tal como la da el ángulo de curvatura.

Una vez definida la forma del álabe, sólo queda determinar la configuración de la cascada, para lo que se necesitan el ángulo de calado y la solidez, donde esta última se define como la inversa de la relación paso-cuerda.

3 OPTIMIZACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS

En este tipo de aplicaciones, las geometrías se suelen generar a partir de dos tipos de curvas: las curvas de Bezier o los Splines Cúbicos.

Los aspectos más importantes de estas curvas en relación al proceso de optimización son los siguientes:

- **Precisión:** La curva usada tiene que ser precisa, pues de nada serviría generar una curva que no reproduzca fielmente la apariencia del perfil aerodinámico. Hay que puntualizar aquí que, aun siendo importante, esta característica no debe ser la prioritaria ya que el objetivo es precisamente modificar la forma del perfil estándar.
- **Tiempo de computación:** También es importante que la curva resultante no requiera demasiado tiempo de computación, ya que el programa de optimización generará varias geometrías, haciendo que el tiempo de computación adicional se acumule sucesivamente.
- **Sensibilidad:** El programa de optimización variará las coordenadas de los puntos resultantes para modificar la geometría, de manera que resulta interesante saber cómo se modifica la curva en torno a un determinado punto cuando este varía su posición; es decir, es necesario saber si la deformación es local o global y cuánto afecta la variación de dicho punto al resto de la curva (tanto la posición de sus puntos como a la derivada de la propia curva).

A continuación se presentan ambos tipos de curvas.

3.1 Curvas de Bezier

Se trata de curvas de ajuste que garantizan una trayectoria suave entre los puntos inicial y final, con derivabilidad infinita. Se define un polinomio de Bezier de grado “n” como:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t) ; t \in [0,1] \quad (3-1)$$

Donde los coeficientes $b_{i,n}(t)$ se conocen como polinomios de Bernstein de grado “n”, y se definen como:

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} ; i = 0,1, \dots, n \quad (3-2)$$

Las propiedades más importantes de este tipo de curvas para nuestra aplicación son las siguientes:

- La curva se encuentra dentro de la envolvente de los puntos de control.
- La curva es infinitamente derivable.
- Modificar la posición de uno de los puntos afectará a toda la curva.
- La curva comienza en su primer punto de control y acaba en el último, pero no toca a ninguno de los restantes puntos.
- El comienzo/final de la curva es tangente a la primera/última sección del polígono que definen los puntos de control.

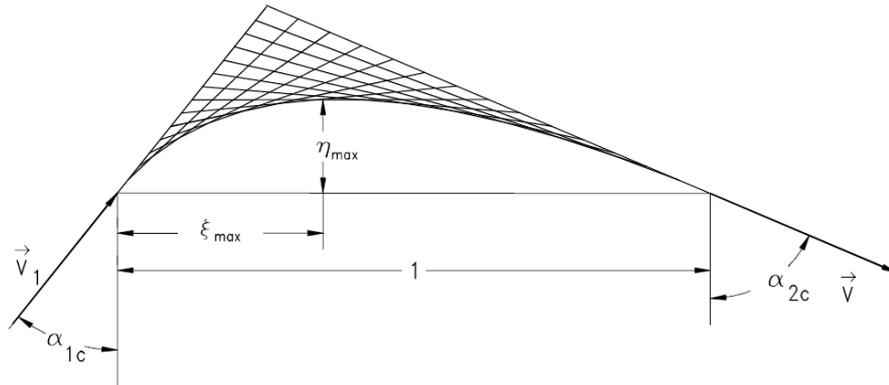


Figura 3-1. Curva de Bezier

3.2 Spline Cúbico

Se trata de curvas polinómicas que, como se explica en la Referencia [1], son usadas frecuentemente en trabajos de optimización debido a su mayor precisión que el método de las curvas de Bezier. Sus principales características son:

- La curva pasa por todos los puntos especificados.
- El error con respecto a la curva original será nulo en primera aproximación.
- La sensibilidad de la curva a la variación de sus puntos será máxima.
- El número de puntos que requiere es mayor que en el caso de las curvas de Bezier si se quiere conseguir un perfil suave.

Este tipo de curvas es adecuado para aplicaciones en las que se esperan bordes afilados o variaciones bruscas de la curva con respecto a la geometría original.

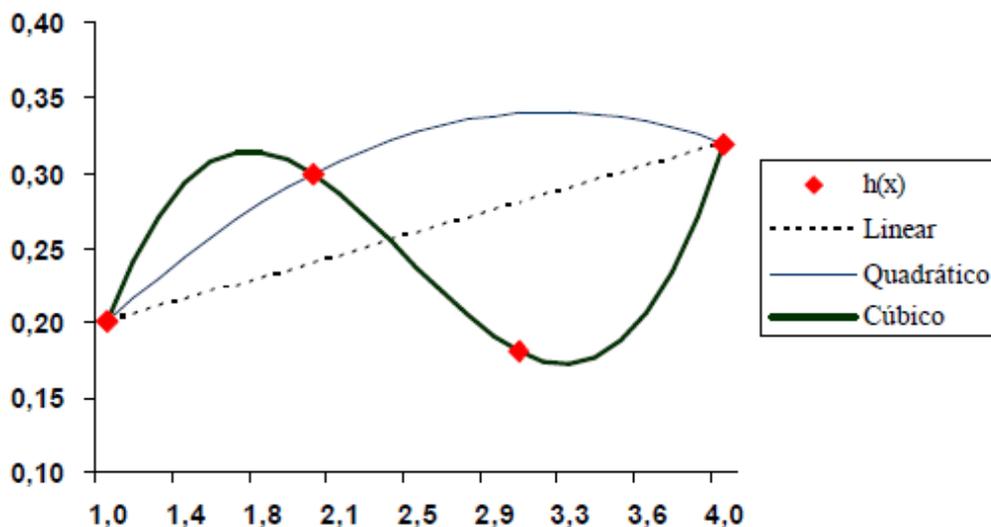


Figura 3-2. Comparación de diferentes ajustes polinómicos.

4 GENERACIÓN DEL PERFIL

El primer paso para conseguir una adecuada parametrización es la generación de los perfiles que figuran en la Referencia [2]. Para hacerlo, se construirá una línea media a partir de los parámetros elegidos en el Apartado 2.3 y se tomará la distribución de espesores proporcionada por las tablas correspondientes a las series normalizadas. Por último, y con el propósito de que el usuario sea capaz de elegir el número de puntos de control que quiere para la creación de las curvas, se interpolarán los puntos resultantes hasta conseguir la cantidad mínima y suficiente de los mismos que permita conseguir un buen ajuste.

En este trabajo se usarán los perfiles NACA65010 y la serie C4, aunque para la explicación de los métodos utilizados mostraremos sólo el caso de los NACA65010. La serie C4 sigue un procedimiento similar y no añade valor presentarlo en la memoria, si bien la aplicación desarrollada permite trabajar con la serie británica.

4.1 Línea Media

El método presentado en este trabajo para generar la geometría del álabe se aplica a perfiles de línea media parabólica (serie NACA) y circular (serie C). Aunque sólo es aplicable de manera estricta al segundo caso, la aproximación de línea media circular en el caso de la serie NACA no introduce errores importantes pues las discrepancias en la forma de la línea media no son llamativas.

Una vez realizada esta hipótesis, y a partir del ángulo de curvatura del álabe (θ) y el ángulo de calado de la cascada (ξ), se pueden despejar los ángulos de entrada y salida del álabe (α'_1 y α'_2) de la siguiente manera:

$$\theta = \alpha'_2 - \alpha'_1 \quad (4-1)$$

$$\xi = \frac{1}{2}(\alpha'_2 + \alpha'_1) \quad (4-2)$$

Teniendo estos valores, el siguiente paso es definir el contorno del perfil a partir del coeficiente de sustentación del perfil (C_L) y de la relación paso cuerda de la cascada (s/c). Para ello se emplea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_L = 2 * (s/c) * \cos(\alpha_m) * (\tan(\alpha'_1) - \tan(\alpha'_2)) \quad (4-3)$$

$$y_{LM} = -\frac{C_L}{4\pi} * [(1-x) * \log(1-x) + x * \log(x)] \quad (4-4)$$

$$\left(\frac{Dy}{Dx}\right)_{LM} = \frac{C_L}{4\pi} * [(\log(1-x) - \log(x))] \quad (4-5)$$

Como se verá a continuación, la pendiente de la línea media se ha determinado para calcular las coordenadas del contorno del perfil ya que la distribución de espesores debe aplicarse en dirección normal a dicha línea. Es importante destacar que esta definición da problemas en el punto inicial de la línea media ya que en teoría la pendiente de esta en dicho punto es infinita. Por ello, se va a imponer que para las coordenadas (0,0) la pendiente sea igual a la pendiente del siguiente punto (segundo punto de la línea media). Con esta condición, la curva de la línea media para una curvatura de, por ejemplo, 10° quedaría como se muestra en la Figura 4-1.

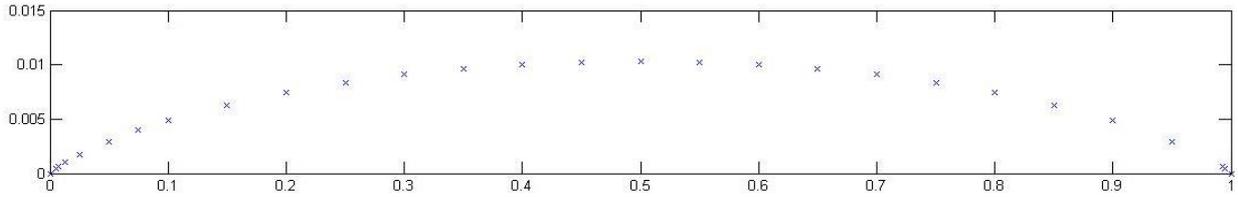


Figura 4-1. Línea media del álabe generada a partir del coeficiente de sustentación

4.2 Distribución de espesores

Para superponer la distribución de espesores, estos deben medirse perpendicularmente a la línea media, de modo que es preciso conocer además la derivada de dicha curva en cada uno de sus puntos, calculada con la expresión (4-5).

Los valores de los espesores están tabulados en la referencia [3]. En ella, para cada valor de la coordenada horizontal adimensionalizada por la cuerda del álabe (tal y como se aprecia en la Figura 4-1, la coordenada “x/c” recorre la línea que une los bordes de ataque y estela tomando valores entre 0 y 1) se establece el espesor correspondiente, que se aplicara tanto para la cara de presión como para la de succión. Las tablas para los perfiles NACA65010 y C4 son:

X [% cuerda]	0	0.5	0.75	1.25	2.5	5	7.5	10	15	20	25	30	35
Y(NACA_65) [% cuerda]	0	0.772	0.932	1.169	1.574	2.177	2.647	3.04	3.666	4.143	4.503	4.76	4.924
Y(C_4) [% cuerda]	0			1.65	2.27	3.08	3.62	4.02	4.55	4.83		5	
X [% cuerda]	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Y(NACA_65) [% cuerda]	4.996	4.963	4.812	4.53	4.146	3.682	3.156	2.584	1.987	1.385	0.81	0.306	0
Y(C_4) [% cuerda]	4.89		4.57		4.05		3.37		2.54		1.6	1.06	0

Tabla 4-1. Tabla de distribución de espesores para los perfiles NACA65010 y C4 extraída de la Referencia [3]

De todo lo anterior se desprende que las coordenadas de la distribución de espesores se corresponden con las siguientes expresiones:

$$x_{perf} = x_{ref} - y_{LM} * \sin \left[\text{atan} \left(\left(\frac{Dy}{Dx} \right)_{LM} \right) \right] \quad (4-6)$$

$$y_{perf}^{sup} = y_{LM} + y_{ref} * \cos \left[\text{atan} \left(\left(\frac{Dy}{Dx} \right)_{LM} \right) \right] \quad (4-7)$$

$$y_{perf}^{inf} = y_{LM} - y_{ref} * \cos \left[\text{atan} \left(\left(\frac{Dy}{Dx} \right)_{LM} \right) \right] \quad (4-8)$$

La aplicación de este método a un perfil sin curvatura ($\theta=0^\circ$) permite evaluar el efecto de la adición de espesor a ambos lados de la línea media. Este es el caso del perfil de la serie NACA mostrado en la Figura 4-2:

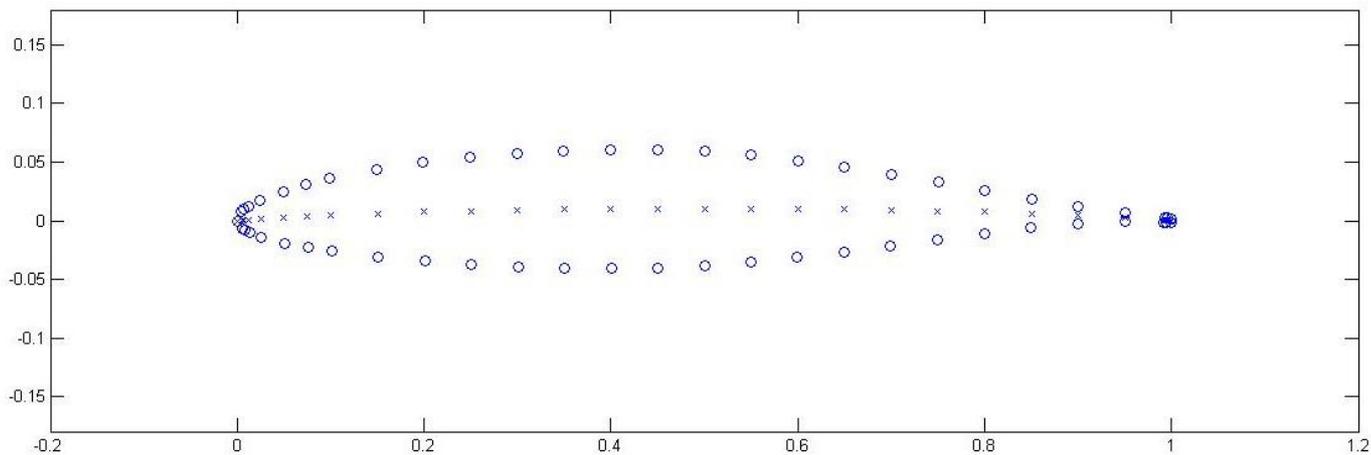


Figura 4-2. Distribución de espesores en torno a la línea media de un perfil de la serie NACA 65010 sin curvatura, representada según las tablas de la Referencia [3]

A partir de la geometría generada con las tablas de distribución de espesores, cabe la posibilidad de incrementar o disminuir el número de puntos que definen las caras de presión y succión. Un ejemplo de esto puede verse en la Figura 4-3 en la que se ha reducido el número de puntos a solamente 20 en cada cara con respecto del caso mostrado en la Figura 4-2. Es interesante comentar que esto deja abierta la definición de la geometría de los bordes de ataque y estela que deberá ser tratada de manera específica e independiente. Esto se discute con más profundidad en el capítulo siguiente.

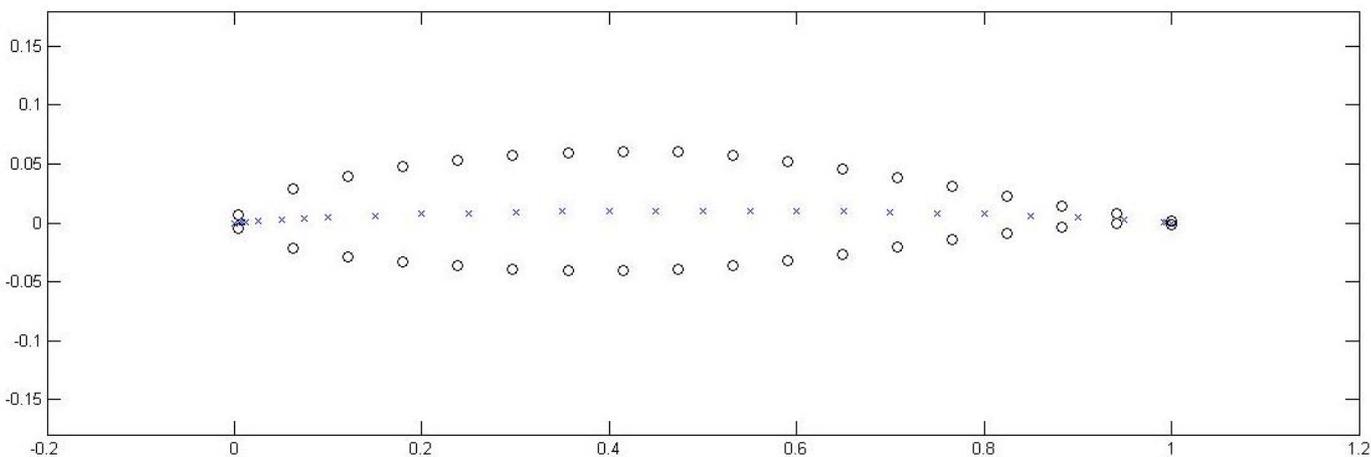


Figura 4-3. Distribución de espesores con un número de puntos elegido por el usuario

5 CIERRE DE LAS CURVAS

Los bordes de ataque y estela son las zonas más sensibles del álabe por lo que es importante que cuenten con una precisión elevada cuando sean simulados en una herramienta CFD. Sin embargo, como se observa en la Figura 4-2 los bordes no constan de muchos puntos. Por este motivo, es necesario definir el cierre del álabe en ambos extremos con una mayor precisión que en el resto de las caras de presión y succión.

Según la Referencia [2], las curvas deben cerrarse con una circunferencia de un radio dado: el centro de esta circunferencia se debe situar sobre la línea media, a una distancia del borde de ataque igual a la de su propio radio y con una inclinación con respecto a la cuerda igual a la del punto que está situado en el 5% de la longitud de la cuerda. De esta manera, la circunferencia cortará a la línea media justo en el punto donde ésta acaba, y las pendientes de circunferencia y línea media serán perpendiculares como se muestra en la Figura 5-1.

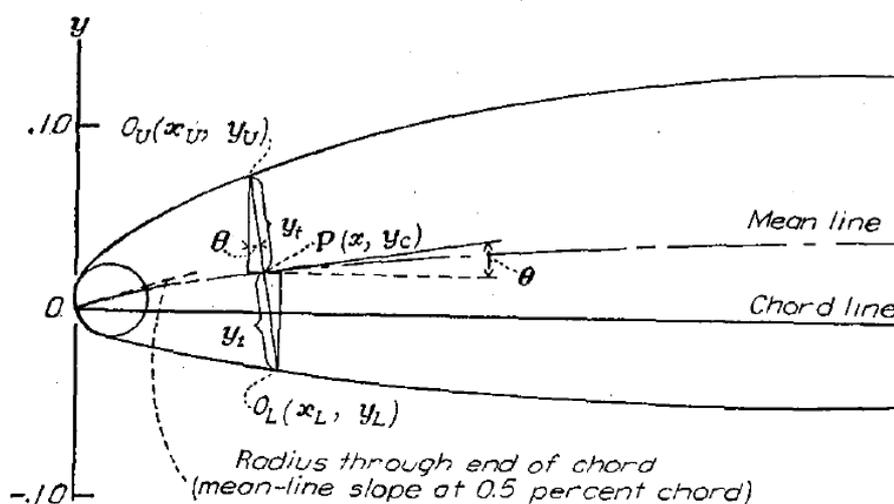


Figura 5-1. Circunferencia para el cierre original de las curvas. (Referencia [2])

Sin embargo, el trabajo de Abbot y Von Doenhoff no especifica un método exacto para cerrar las curvas ya que la fracción de circunferencia perteneciente al perfil (es decir que coincide con la cara de presión o succión) sigue siendo una incógnita. La opción más directa podría ser utilizar un arco de circunferencia que fuera tangente a la circunferencia dada y al perfil. Sin embargo, seguiría siendo una incógnita el punto a escoger para hacer las tangencias (unión de las caras de succión y presión con la circunferencia que define los bordes de ataque y estela).

Estudios posteriores (Referencia [1]) han desvelado que hay otras formas que pueden ser interesantes para cerrar los perfiles, como por ejemplo el uso de bordes elípticos y bordes generados mediante curvas de Bezier.

Las curvas de Bezier, como ya se ha comentado, tienen la ventaja de garantizar continuidad en las infinitas derivadas, produciendo mejores resultados que los otros bordes aquí comentados, como puede observarse en la (Referencia [1]). Por ello, se usará este tipo de curvas para cerrar el perfil. Para generar las curvas de Bezier son necesarios dos puntos a unir (puntos extremos que pertenecen a la curva) y un número de puntos intermedios a elegir en función del grado del polinomio deseado (estos puntos no formarán parte de la curva). En nuestro caso se usará sólo un punto más, ya que es el método más sencillo y que mejor respeta las pendientes de entrada y salida de la curva.

Para elegir los primeros dos puntos comentados (los puntos a unir) se ha decidido respetar la pendiente de la circunferencia dada en la Referencia [2], la cual es por definición perpendicular a la línea media y pasa por el vértice del borde de ataque. En cuanto al punto de la cara de succión, se ha decidido despreciar el primero de ellos ya que puede generar perfiles cuya geometría resultante en torno al borde de ataque es demasiado brusca o abrupta. En su lugar vamos a tomar como último punto de control el segundo de los puntos que definen la cara de succión y presión, lo cual nos dará un borde algo más afilado pero no lo suficiente como para que provoque un mal comportamiento.

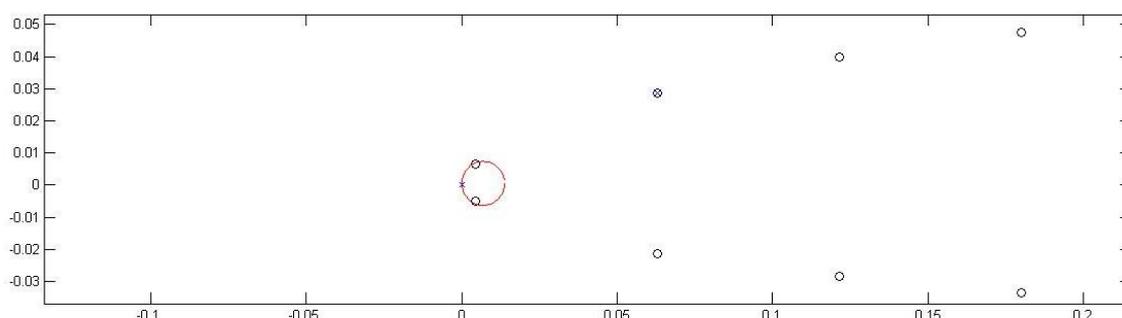


Figura 5-2. Circunferencia dada por la Referencia [2] para el cerramiento del perfil

Conviene recordar que, tal y como se definen este tipo de curvas, esta sólo pasará por los puntos inicial y final, no así por los intermedios, aquí llamados “puntos de control”. Estos últimos más bien tienen que ver con las derivadas de la curva y por tanto se pueden entender como una referencia a la que la curva tiende y que la guían en su trayectoria.

Para conseguir que se respeten las pendientes descritas en la referencia [1], la curva debe empezar con la misma pendiente de la circunferencia (es decir, debe haber continuidad en la pendiente) y terminar con la pendiente de la cara de succión en el punto de unión con esta (de nuevo continuidad en la pendiente). Por ese motivo, el punto de control de esta curva será la intersección de las dos pendientes. Así, la curva tenderá a este punto desde ambos extremos y las pendientes serán las adecuadas. El resultado es el siguiente:

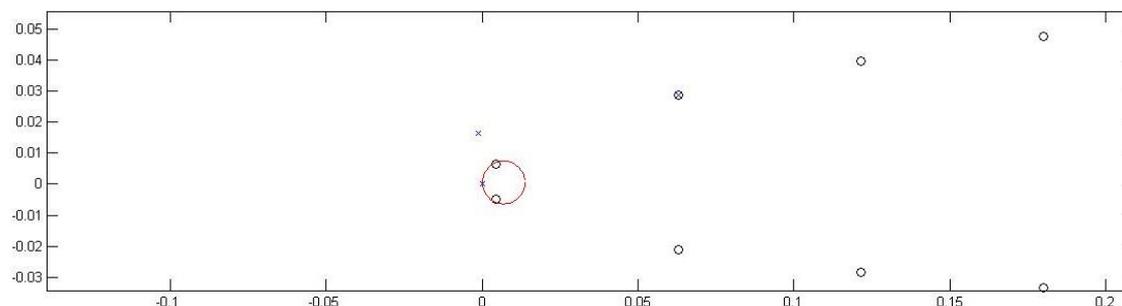


Figura 5-3. Punto de control resultado de la intersección de las pendientes de la circunferencia y de la cara de succión en el borde de ataque

Si ahora se dibuja la curva resultante que enlaza la circunferencia que define parcialmente el borde de ataque con la superficie de la cara de succión del álabe:

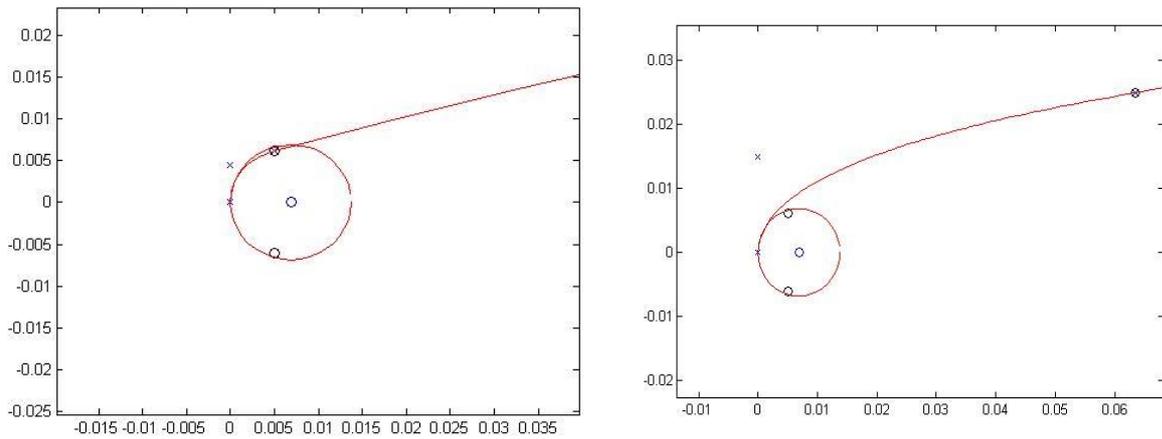


Figura 5-4. Comparación de bordes resultantes al usar diferentes puntos de unión en las curvas de Bezier

Como se observa en la Figura 5-4, el borde que resulta es bastante más suave que en el caso en que se usa el primer punto de la curva, y las pendientes respetan los valores indicados en la referencia [2]. Repitiendo esto para todos los empalmes entre los bordes de ataque y estela y las caras de presión y succión, el resultado es el que se muestra:

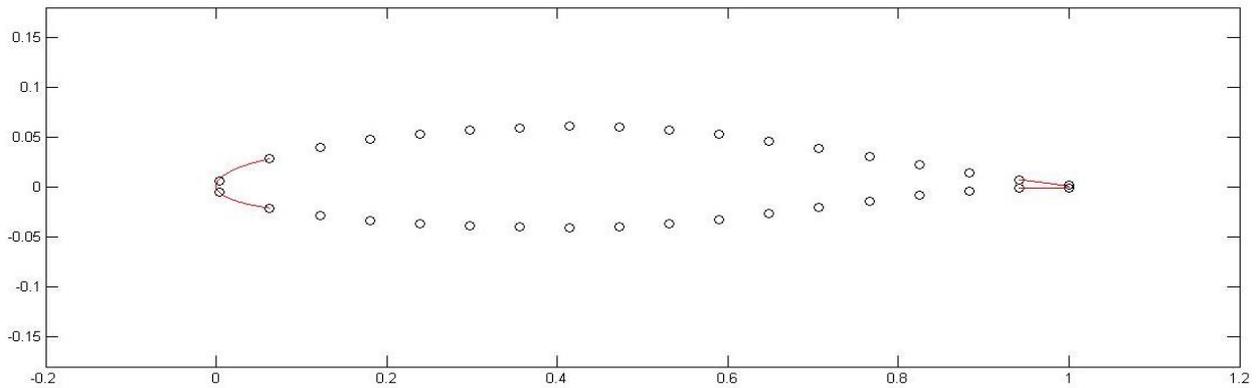


Figura 5-5. Resultado final de cerrar el perfil mediante las curvas de Bezier

Aunque se aprecia que los bordes definidos por las curvas de Bezier son ligeramente más gruesos que los que definían las tablas. No obstante, si se compara la curva de cierre con el resultado de la generación primera del perfil se comprueba que el ajuste es bueno:

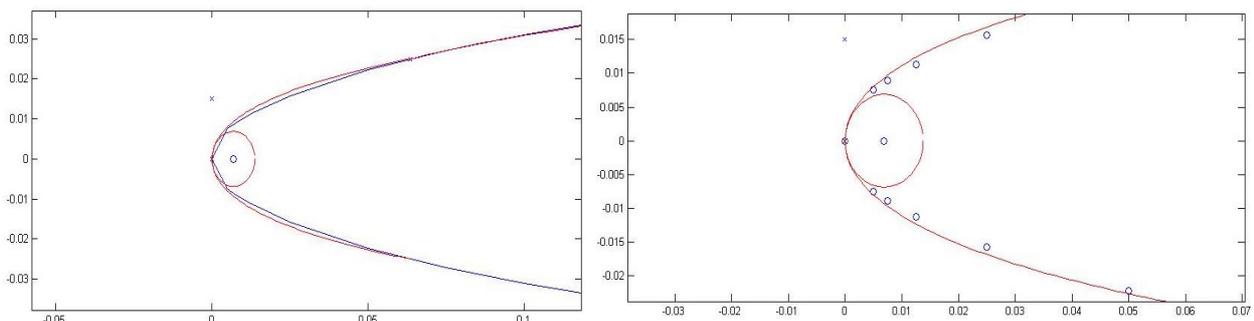


Figura 5-6. Comparación de los bordes de ataque de los perfiles estándar y los calculados

6 MÉTODOS DE PARAMETRIZACIÓN

Como se ha descrito con anterioridad, para representar el perfil completo con vistas a la optimización del mismo, es necesario generar curvas con un número suficiente de puntos. Sin embargo, por otro lado, un número demasiado alto de puntos supondría un tiempo de computación demasiado largo. Por ello, hay que alcanzar una situación de compromiso.

En este sentido, las curvas de Bezier ofrecen una gran ventaja ya que permiten generar curvas de gran precisión a partir de pocos puntos de control. Por otro lado, el mayor inconveniente es que las curvas de Bezier, al ser siempre suaves, no son muy sensibles a los cambios en la posición de los puntos de control cuando se decide alterar la geometría original.

Los Spline Cúbicos, por su parte, ajustan las curvas mediante polinomios que pasan por todos los puntos especificados. Es fácil deducir que las ventajas e inconvenientes de estas curvas son exactamente las opuestas que las de las curvas de Bezier: existe una gran sensibilidad al cambio en la posición de los puntos y la carga de computación se incrementa sensiblemente.

Con el objetivo de determinar la metodología más adecuada, se generarán los perfiles utilizando cuatro variaciones, tal como se describe a continuación:

- Perfil completamente generado por curvas de Bezier (de aquí en adelante Bezier-Simple).
- Perfil generado completamente por Spline Cúbicos (de aquí en adelante TFG Spline).
- Bordes de ataque y estela generados mediante Spline y caras de succión y presión mediante Bezier (de aquí en adelante Spline-Bezier).
- Bordes de ataque y estela generados mediante curvas de Bezier y caras de succión y presión mediante curvas de Bezier diferenciadas (de aquí en adelante Bezier-Múltiple).

En cada método se especificarán dos parámetros, además de los ya comentados, para la generación del perfil. Esto parámetros serán los siguientes:

- Número de puntos de control: número de puntos calculados a partir de la curva estándar, ya sea interpolando o con otros métodos que se explicarán a continuación. En las figuras, estos puntos están marcados con una “x” y son los que el programa de optimización podrá modificar en su búsqueda de la geometría óptima.
- Número de puntos de precisión: número de puntos que definen la curva resultado y que se calculan mediante uno de los dos métodos anteriormente expuestos (Bezier o Spline). Estos puntos conformarán la curva resultante y serán los puntos que se le pasarán al programa de mallado en entorno CFD.

6.1 Método 1: Perfil completamente generado por curvas de Bezier

En este primer caso se obviarán las curvas de Bezier empleadas para cerrar el perfil estándar y se buscará una solución más sencilla: definiremos una curva para la cara de succión completa y otra para la cara de presión completa, de modo que solo hay que elegir los puntos usados en cada cara.

Con objeto de respetar la longitud de la cuerda, los puntos inicial y final de ambas curvas (que como se ha comentado son los dos únicos puntos por los que sí pasa la curva) van a ser los bordes de ataque y estela respectivamente, respetando así la longitud de la cuerda.

Para los puntos de control de los bordes se respetarán los calculados en el cierre de las curvas, ya que son los que mejor respetan las pendientes originales. Para definir los puntos de control de las caras, hay que tener en cuenta que la curva va a tender a ellos aunque nunca los tocará de modo que la curva de Bezier estará siempre por debajo de la línea que definan sus puntos de control. Por este motivo, los puntos de control se definirán de forma que estén por encima de los puntos de la referencia. Para calcular estos puntos se han tenido en consideración dos ideas principales, descritas más abajo.

6.1.1 Método 1, opción 1: Utilizar la intersección de las pendientes de cada punto

A la hora de definir los puntos de control, se pensó en un primer momento utilizar un procedimiento similar al presentado anteriormente para el cierre de las caras de succión con los bordes de ataque y estela (capítulo 5): utilizar las pendientes de las curvas a ambos lados del punto de encuentro para hallar su intersección, de manera que el punto ayudase a la curva a respetar su pendiente por ambos lados.

Aquí hay que resaltar que las pendientes, dados los puntos de una curva, sólo pueden definirse mediante la unión de dos puntos de la misma. Por ello, la opción que mejor respeta la definición matemática de la pendiente será la unión de un punto con el que le sucede o con el que le precede de modo que, cuando el número de puntos de la curva tienda a infinito, el valor de la pendiente será el real. Así, dados un punto “i” y su siguiente el “i+1”, podemos definir la pendiente del primero por la derecha como:

$$(Dy/Dx)_i = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i) \quad (6-1)$$

Esta formulación no es válida para el último punto, ya que no existe otro punto aguas abajo. Para resolver esta indeterminación, la pendiente de este punto se definirá haciendo uso del punto precedente. Como se verá a continuación, esta solución no es del todo buena, ya que los dos últimos puntos de las curvas están unidos dos veces: el penúltimo con su sucesor y el último con su predecesor. Una vez cada recta ha sido definida como un punto y una pendiente, sólo falta hacer la intersección

$$y = y_1 + m_1 * (x - x_1) \quad (6-2)$$

$$y = y_2 + m_2 * (x - x_2) \quad (6-3)$$

$$y_1 - y_2 = m_2(x - x_2) - m_1(x - x_1) \quad (6-4)$$

$$x = \frac{[(y_1 - y_2) + m_2 * x_2 - m_1 * x_1]}{m_2 - m_1}; y = y_2 + m_2 * (x - x_2) \quad (6-5)$$

El resultado final se muestra a continuación:

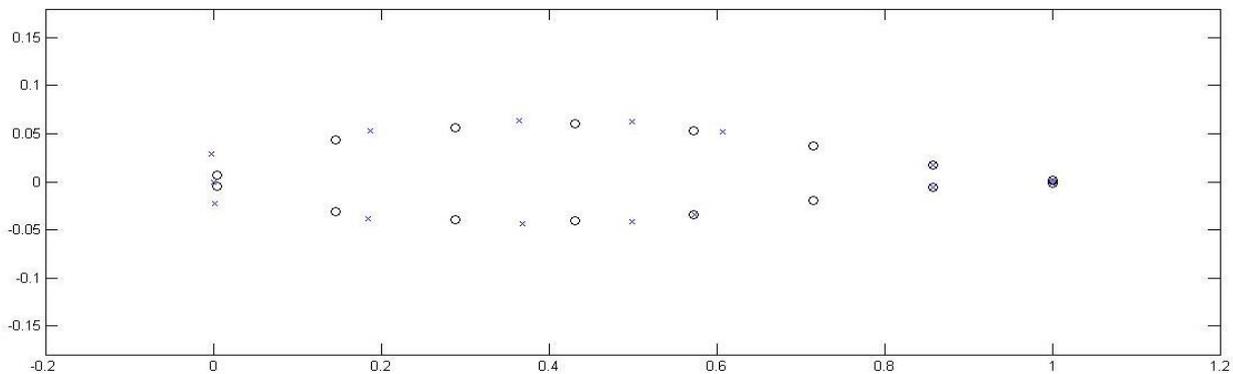


Figura 6-1. Puntos de control de las curvas de Bezier calculados mediante la intersección de pendientes (mostrados como x en la figura). Los círculos representan los puntos sobre las superficies. En la Figura 6-1, los puntos marcados con una “o” representan puntos de la superficies dados por la referencia

[2] y los puntos de control calculados se indican con una “x”. En la figura se observa que en la zona cercana al borde de ataque aparecen los puntos esperados pero en las cercanías del borde de estela aparecen las siguientes irregularidades:

- Parece que faltan algunos puntos para poder cerrar el perfil con precisión.
- La posición de otros es algo dudosa.

Puede llamar la atención el hecho de que haya puntos de control coincidentes con los puntos de la curva de referencia. Esto se debe a que, como se comentó, el último punto tenía su pendiente definida con el anterior, mientras que el penúltimo la tiene definida con el posterior. Esto hace que el punto coincidente de ambas pendientes sea el penúltimo punto de la curva.

En cuanto a la ausencia de algunos puntos o la variación en la densidad de puntos, se llegó a la conclusión de que era consecuencia de la invalidez del método usado puesto que este solo funciona de la manera esperada cuando el signo de la curvatura se mantiene constante. Con esto se explica qué está sucediendo: al cambiar de signo la curvatura, la función pasa por un punto de inflexión que hace que las pendientes dejen de ser secantes progresivamente para volverse paralelas antes de volver a la normalidad fuera de las proximidades de dicho punto de inflexión. Debido a este eventual paralelismo de las pendientes, el punto de intersección de ambas puede aparecer muy alejado de lo que cabría esperar, generando irregularidades en el perfil que llegan a ser inadmisibles.

Por eso, se concluye que este método no puede usarse de forma generalizada ya que, ya sea en una o ambas caras, siempre existirá un cambio de curvatura en algún punto del perfil.

6.1.2 Método 1, opción 2: Utilizar la intersección de las pendientes de cada punto con las mediatrices

Puesto que el problema del método anterior es la irregularidad en la posición de los puntos de control, una mejor solución puede pasar por conseguir una mejor ubicación de los mismos, por ejemplo en el punto medio de cada par de puntos lo cual proporcionaría además con seguridad una densidad homogénea. Por ello, el segundo método consistirá en el uso de mediatrices y su corte con las pendientes.

La idea sigue siendo utilizar el método de la intersección de dos rectas para lo cual se debe definir la recta mediatriz. Para ello se empleará el punto medio del segmento que une cada par de puntos y una pendiente que será la normal a dicho segmento. El siguiente sistema de ecuaciones define el punto medio buscado y su pendiente.

$$x_i^{med} = (x_i + x_{i+1})/2 \quad (6-6)$$

$$y_i^{med} = (y_i + y_{i+1})/2 \quad (6-7)$$

$$(Dy/Dx)_i^{med} = -1/(Dy/Dx)_i \quad (6-8)$$

En esta ocasión, los puntos resultantes son los mostrados:

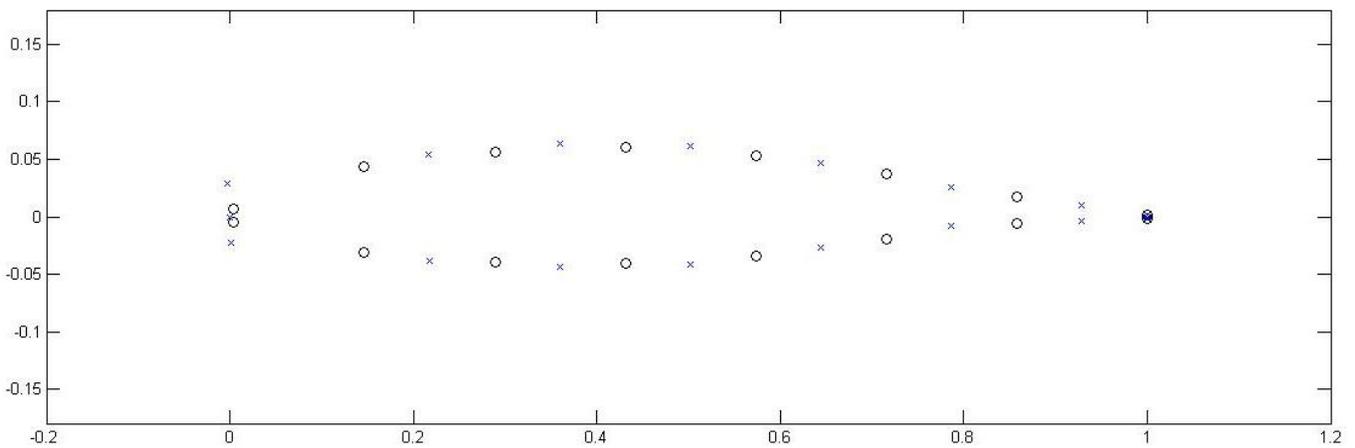


Figura 6-2. Puntos de control de Bezier calculados mediante la intersección de pendientes con mediatrices

Se comprueba que el resultado ahora sí es homogéneo, con cada punto de control situado entre dos puntos de la geometría de referencia, independientemente de la curvatura de la función en dicha localización. Además, el problema del último punto ha desaparecido ya que la pendiente del último punto no se utiliza para hallar ningún punto de control.

La curva de Bezier final se muestra en verde en la Figura 6-3:

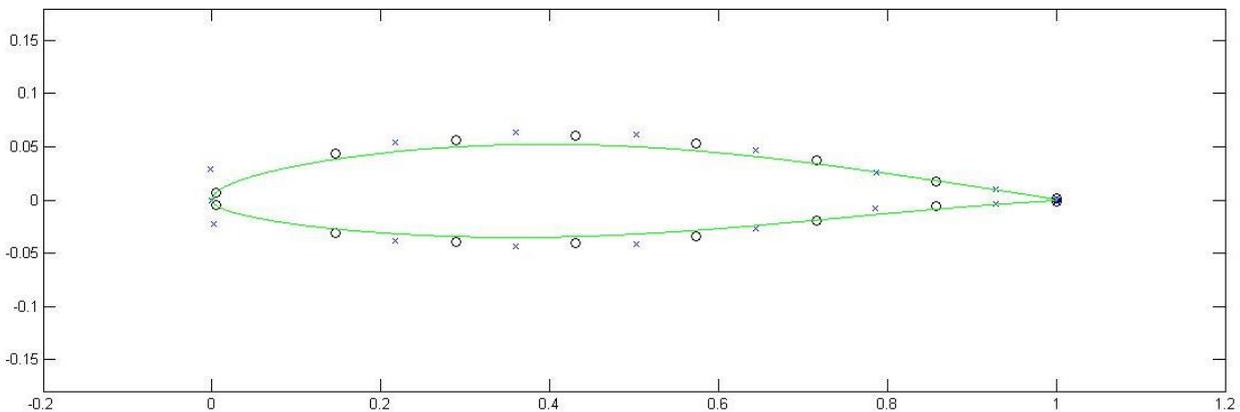


Figura 6-3. Resultado final obtenido mediante curvas de Bezier

Como se había previsto, la curva queda por debajo de los puntos de referencia, a excepción de los puntos próximos a los bodes de ataque y estela, lo cual se debe al cambio de curvatura del perfil. Este puede parecer una deficiencia del método pero debe tenerse en cuenta que cuanto mayor sea el número de puntos considerados, mas se aproximarán ambas curvas. Por otro lado, también se aprecia que los puntos del borde de ataque y el borde de estela sí se respetan y que las pendientes de los mismos tienden a las calculadas inicialmente en el apartado del cierre de curvas, no siendo iguales debido a que existen más puntos de control que también atraen la curva hacia sí. Esto se puede apreciar en la Figura 6-4.

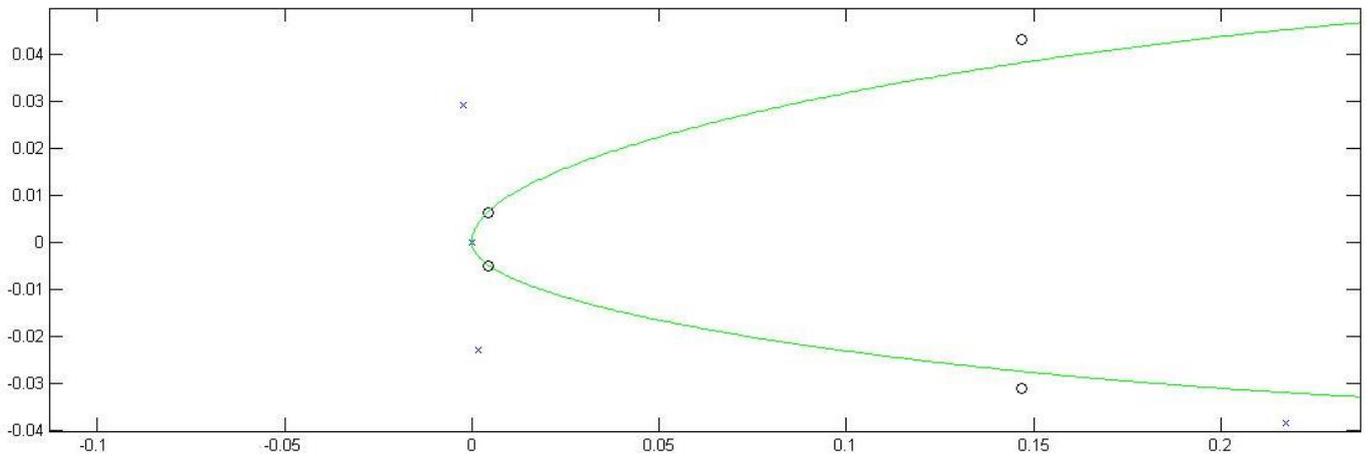


Figura 6-4. Borde de ataque para el método Bezier-Simple

Aquí los bordes no se han cerrado estrictamente como se explicó en el apartado anterior, sino que simplemente se han utilizado esos mismos puntos de control y se han integrado en el conjunto usado para generar la curva. Esto hace que su influencia en la curva sea menor. Por ello, el perfil será siempre más estrecho en la región del borde de estela que el original.

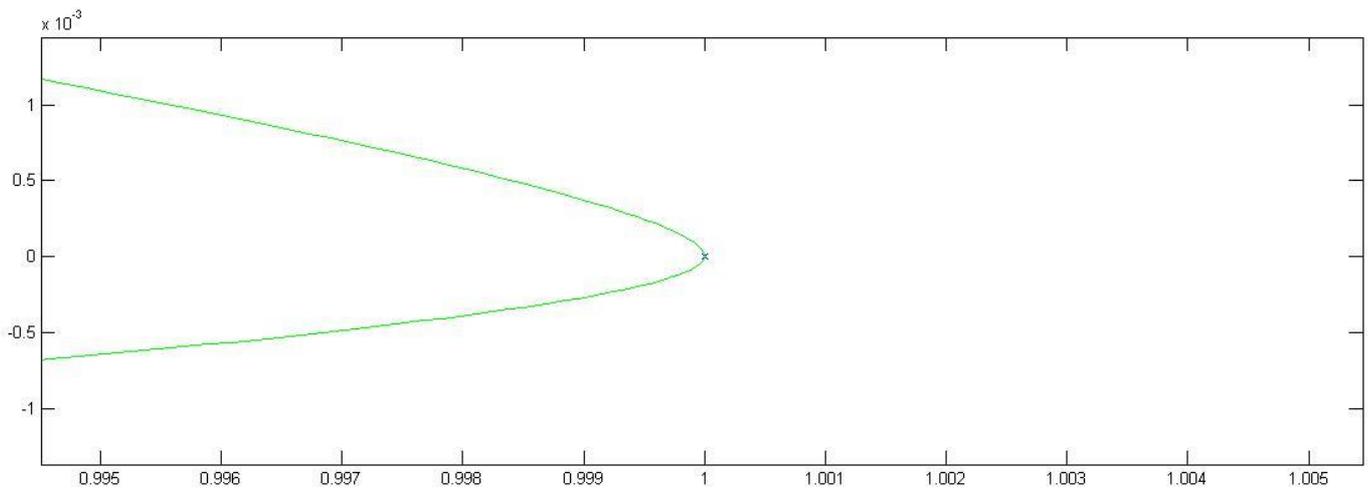


Figura 6-5. Borde de ataque para el método Bezier-Simple

6.1.3 Conclusiones del Método 1

Aunque la curva no reproduce la geometría original con absoluta fidelidad, este método tiene la ventaja de poder funcionar con pocos puntos, lo cual supondría un gran ahorro de tiempo en el programa de optimización. Además, si fuera necesaria una mayor precisión, podría incrementarse el número de puntos de control, aumentando así la fidelidad del perfil generado respecto de la geometría original.

6.2 Método 2: Perfil generado completamente por curvas Spline

Un segundo método para generar el perfil puede ser el uso de Spline Cúbicos, curvas de ajuste que generan polinomios que pasan por los puntos especificados. Esto supone una gran ventaja ya que, dada la curva de referencia, es posible realizar una interpolación para sacar tantos puntos de la superficie como se requieran. Así, generados N puntos del perfil estándar, la curva Spline pasará exactamente por ellos lo que implica un error nulo en todo el perfil.

Sigue quedando sin embargo el problema de los bordes de ataque y estela, que no están definidos unívocamente. Para cerrarlos, se propone usar curvas de Bezier según se detalló en el capítulo 5, de modo que se usarán los puntos generados por estas curvas para generar el Spline. Es preciso comentar por qué no se ha mantenido en los bordes de ataque y estela la propia curva de Bezier y, en su lugar, esta sólo se ha tomado como referencia para generar un Spline. La razón por la que se ha hecho así es porque nos interesa un borde muy sensible a los cambios en la posición de cada uno de los puntos que lo definen para ver si se comporta mejor que la alternativa presentada anteriormente, de modo que se usarán puntos de esta misma curva de Bezier pero integrados en el Spline, aumentando así la sensibilidad al cambio de su posición de cada punto individual.

Por último, cabe destacar que el Spline está definido para curvas polinómicas, es decir, funciones. Esto implica que para cada valor de “x” no puede existir más de un valor en “y”. Esto en general no supone un problema, pero en los bordes de ataque y estela, cuando la curvatura es mayor que 0° , la curva retrocede ligeramente en “x” antes de recorrerla posteriormente en el sentido positivo. Esto generará un polinomio problemático e incompatible con nuestro propósito como puede observarse en las proximidades del borde de ataque en la Figura 6-6:

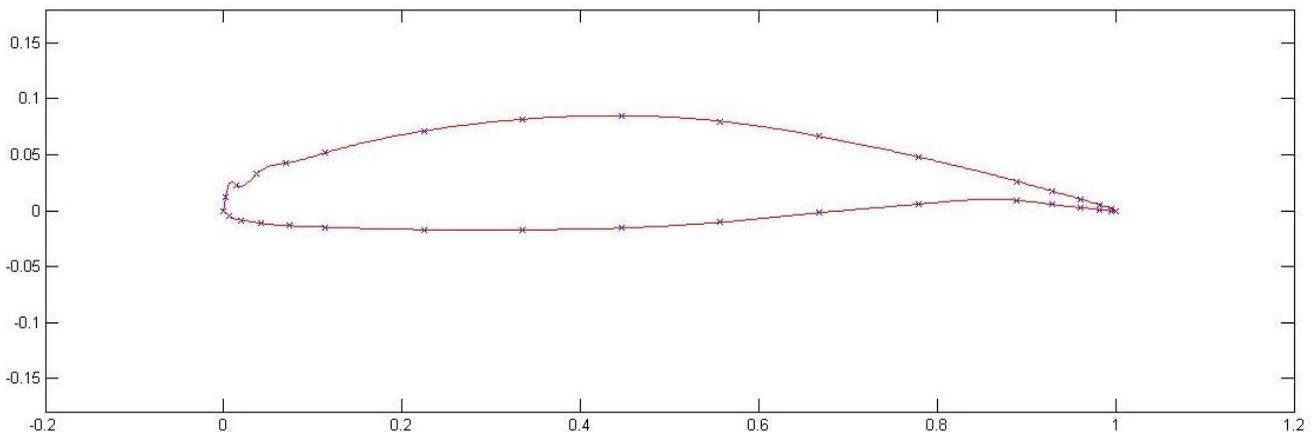


Figura 6-6. Borde de ataque problemático en el método de Spline Cúbico

6.2.1 Método 2, opción 1: Bordes de ataque y estela con pendiente vertical

Se propone como primera solución suponer que la pendiente de la curva en ambos extremos es vertical, asegurando así en cualquier caso que el perfil se generará sin problemas. Con esta hipótesis, el perfil resultante es el mostrado en las siguientes figuras:

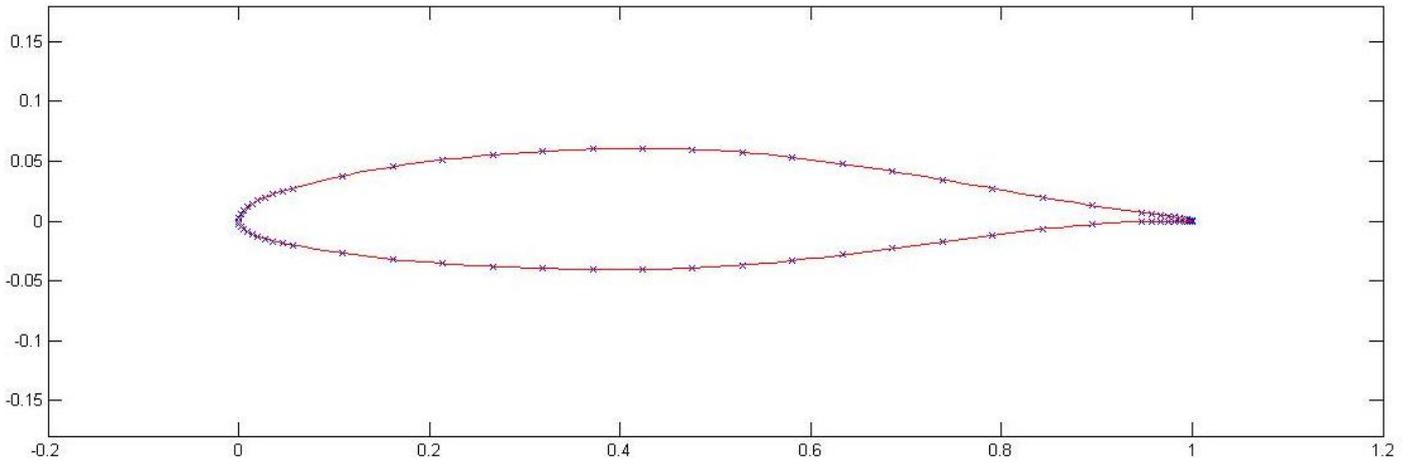


Figura 6-8. Bordos de ataque y estela solucionados con pendientes verticales

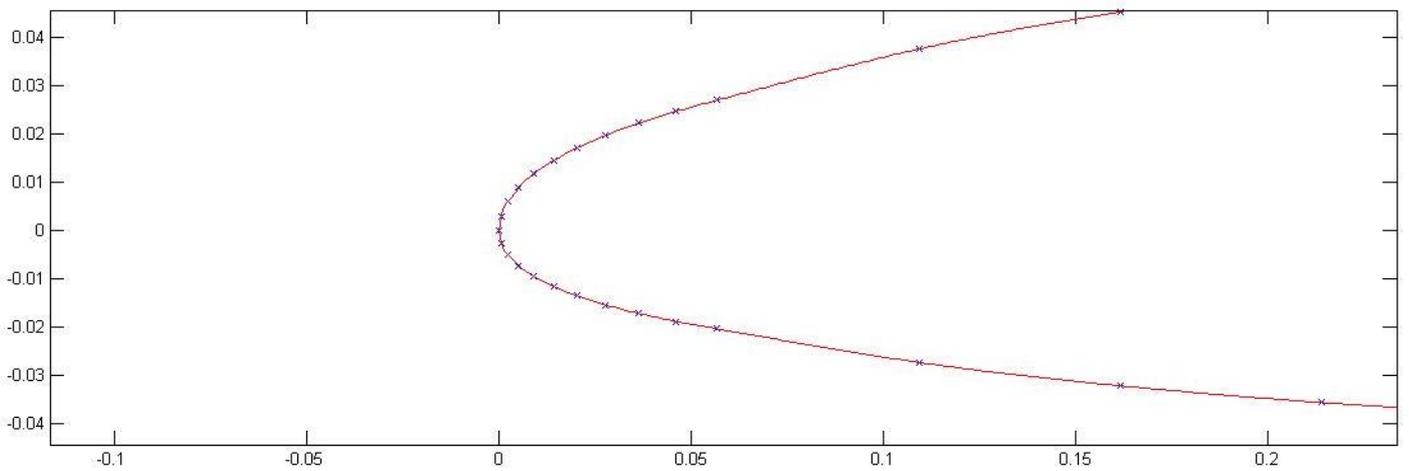


Figura 6-7. Detalle del borde de ataque con pendiente vertical

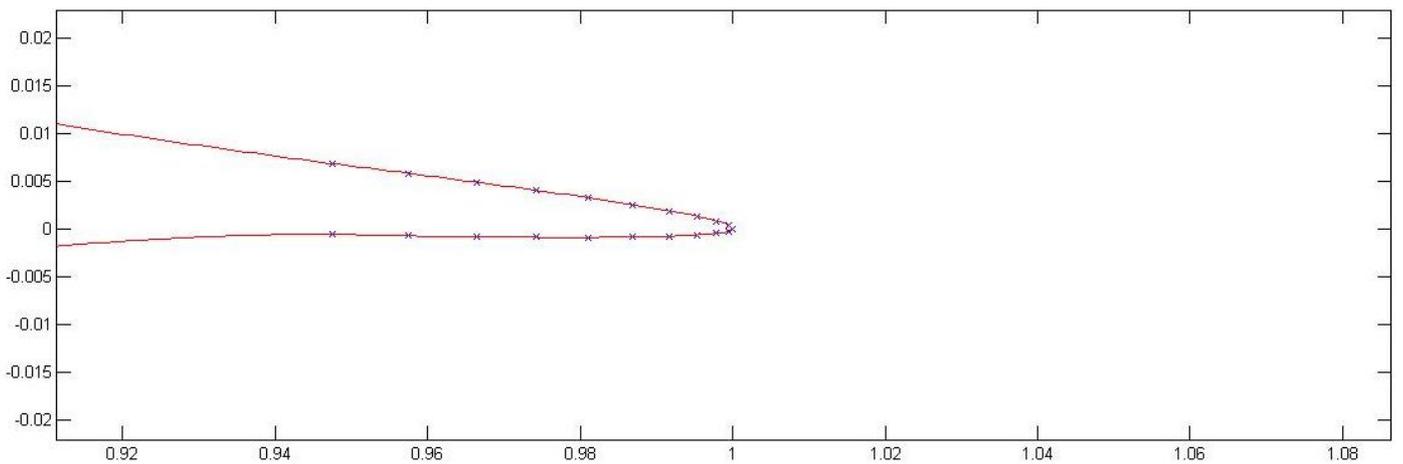


Figura 6-9. Detalle del borde de estela con pendiente vertical

En la Figura 6-7, se aprecia que, aunque el resultado mejora, la curva no es del todo suave en la unión entre los bordes de ataque y estela y las superficies de las caras de presión y succión. Por ello, es necesario un número mayor de puntos en los extremos para que estos sean correctos. Además, de esta manera se consigue una mayor precisión en las zonas más críticas del perfil. Se comprobó que 60 puntos para cada borde generan curvas lo

suficientemente suaves. No obstante, aunque a priori parece que este método funciona, si se aumenta la curvatura del álabe progresivamente se llega a situaciones en las que ésta pendiente vertical resulta en una discontinuidad en las derivadas en el borde de ataque, como se muestra en la Figura 6-10. Es por ello que tampoco parece una buena solución.

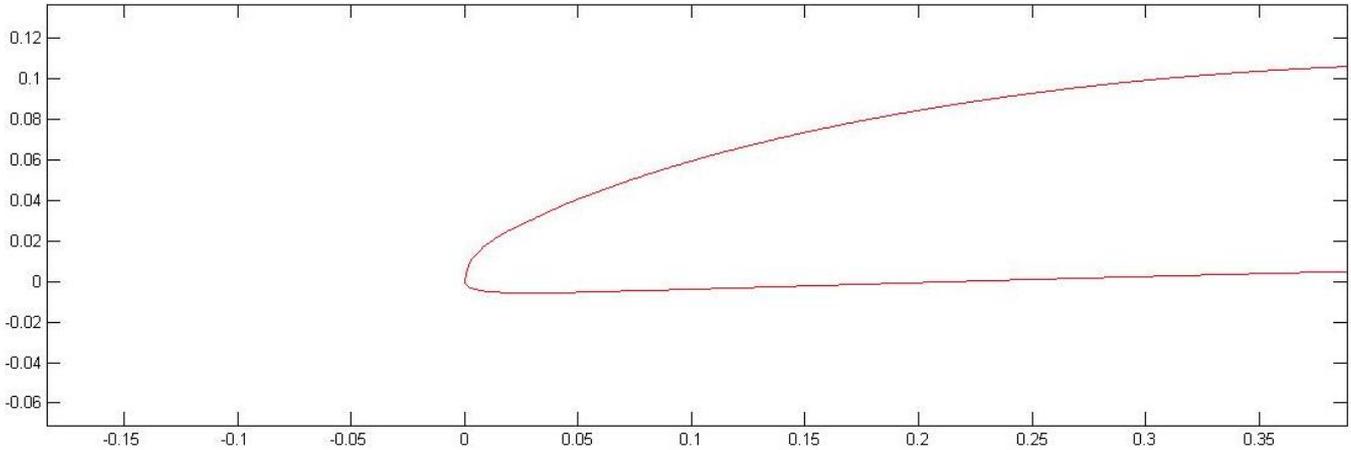


Figura 6-10. Discontinuidad en la primera derivada cuando la curvatura es elevada para el caso de pendiente vertical

6.2.2 Método 2, opción 2: Cambio de variable

Otra idea para solucionar el problema pasa por reordenar los vectores para que las coordenadas “x” sean siempre crecientes, estableciendo que el nuevo borde de ataque se sitúa en el punto de “x” mínima, para ello se realizará un cambio de variable y se reordenarán los vectores, con lo que el problema de las coordenadas “x” decrecientes debería desaparecer.

Este problema aparece porque el punto de control de la curva de Bezier se ha calculado con la intersección de dos pendientes, siendo una de ellas la perpendicular a la línea media. Así, cuando la curvatura del álabe es 0° , la pendiente es vertical, pero al ir aumentando progresivamente dicho ángulo de curvatura, la pendiente se acerca más a ser horizontal, lo que conlleva que el punto de control se sitúe en posiciones negativas de las “x”, y con él, la curva resultado.

Sin embargo, al programar esta solución se obtiene el siguiente resultado para una curvatura de 20° :

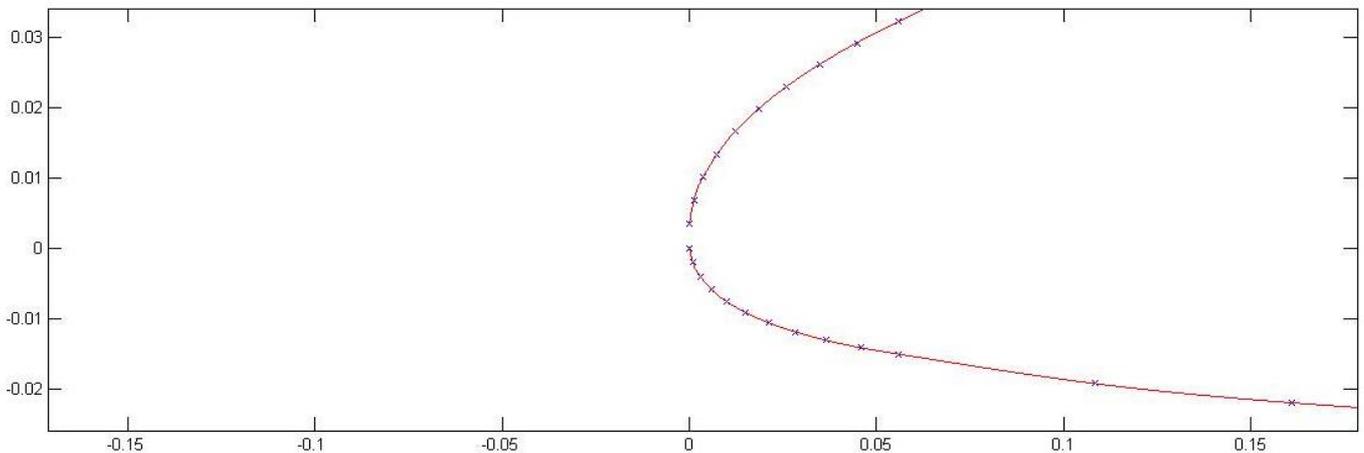


Figura 6-11. Problema de continuidad con la solución del cambio de variable

Si ampliamos en la discontinuidad (ver Figura 6-12), podemos llegar a ver qué está ocurriendo:

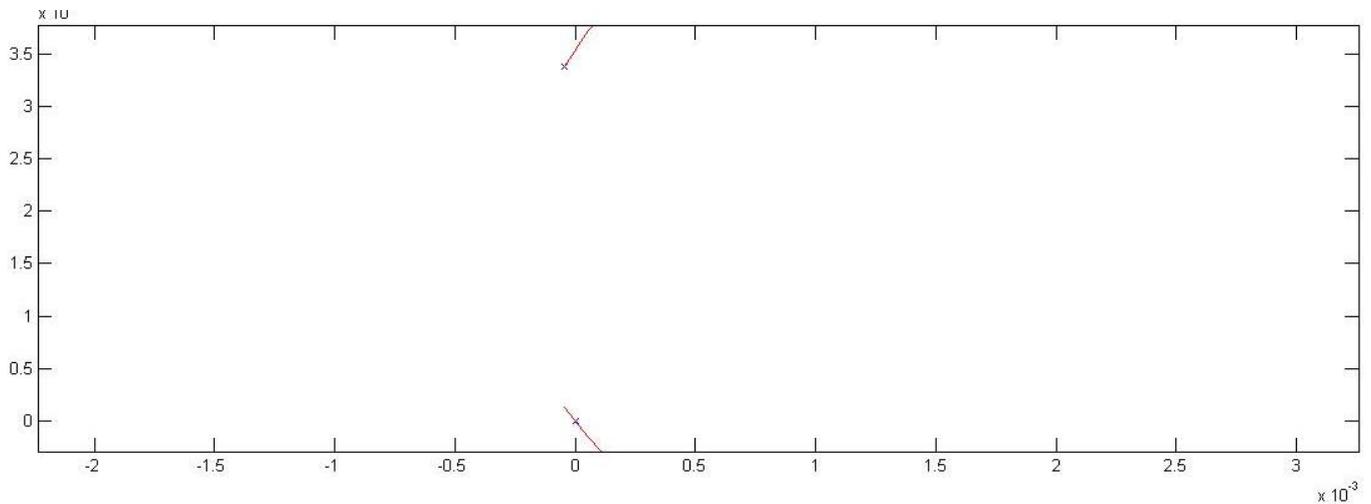


Figura 6-12. Detalle de pendientes para el problema de pendientes

La “x” mínima de los puntos que hemos calculado a partir de la geometría de referencia no coincide con el punto de “x” mínima real, lo que se aprecia en que la curva tiene una pendiente distinta de la vertical. Esto sucede porque los puntos de control en éste método se han calculado mediante una interpolación, lo que supone que la posición de los mismos dependa en parte del número de puntos calculados. Así, el hecho de que aparezca un punto de control justo en la coordenada en la que la pendiente es vertical se convierte en una tarea complicada, teniendo en cuenta además que no se puede ampliar el número de puntos de las curvas Spline tanto como se quiere ya que el coste computacional aumentaría considerablemente.

Por ello, se concluye que el método no es válido con carácter general ya que para que esto funcione debe darse la casualidad de que el punto de “x” mínima real y el calculado coincidan.

Llegados a este punto, y puesto que el número de puntos de control en los bordes de ataque y estela debe ser elevado para obtener una buena solución, se decide que las pendientes de ambos puntos sean aproximadamente igual y se fuerza la coincidencia entre ambas. El resultado, como se muestra en la Figura 6-13, resulta satisfactorio.

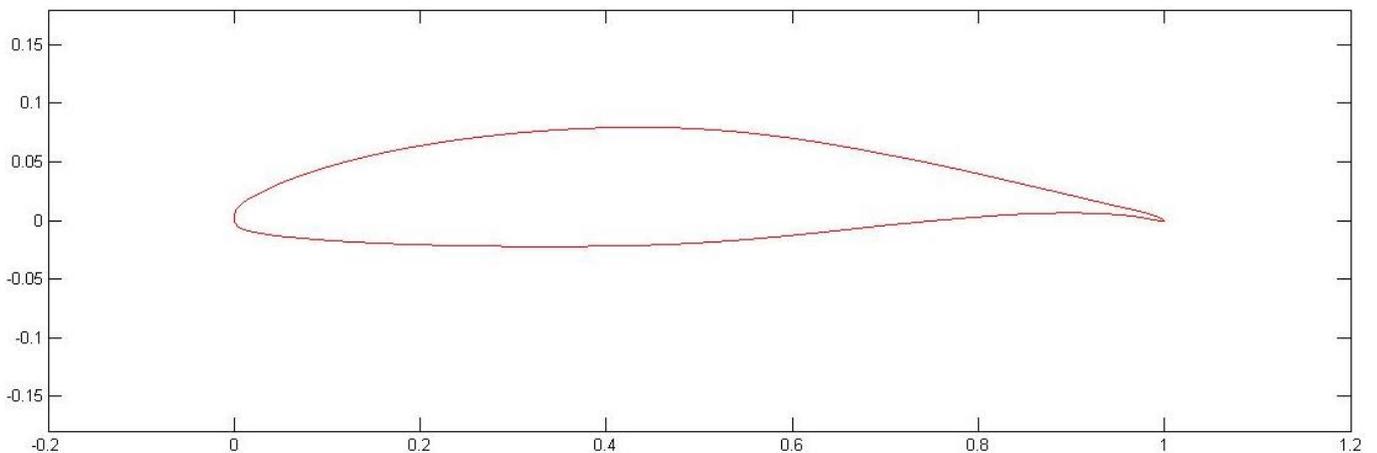


Figura 6-13. Resultado final de Spline cúbico tras solucionar el problema de continuidad

Como se puede observar en la Figura 6-14, el borde que resulta en estos casos es mucho más suave que en el caso anterior. Por tanto, en el Método 2, esta es la mejor solución.

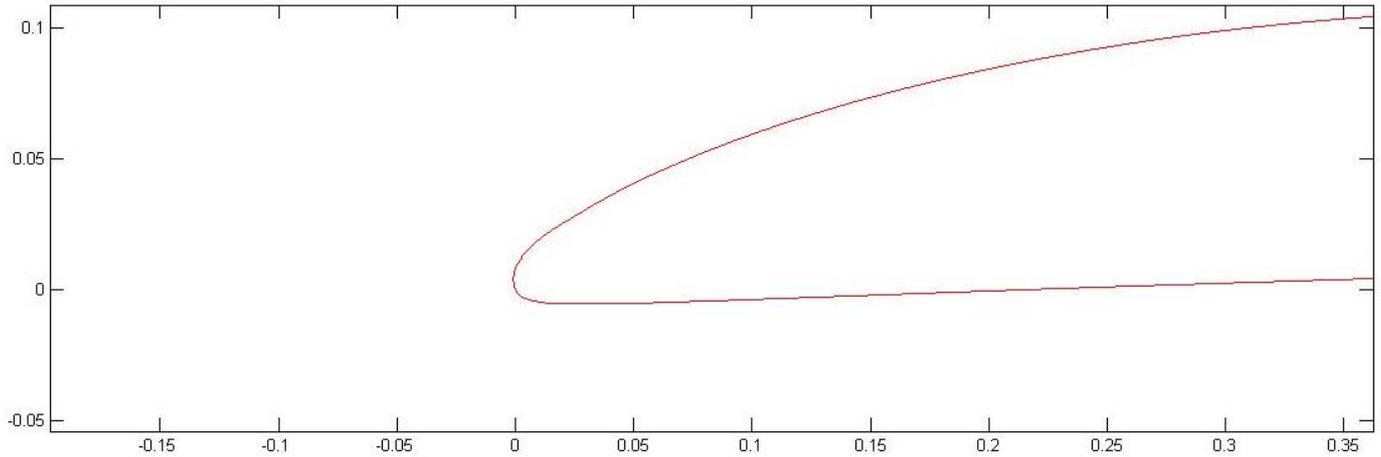


Figura 6-14. Mejora del borde de ataque con respecto a las pendientes verticales

6.2.3 Conclusiones del Método 2

Cabe destacar que a pesar de la elevada precisión de este método, en cuanto a la fidelidad a la geometría del perfil de referencia, la carga computacional del futuro programa de optimización es mucho mayor que en el Método 1 debido al elevado número de puntos necesarios en los bordes de ataque y estela del perfil. En este sentido, es preciso preguntarse cómo de importante es que el error sea mínimo si el objetivo es llegar a perfiles distintos de los estandarizados, y si realmente compensa la carga computacional. Es decir, dado que el objetivo del proceso de optimización es disponer de una geometría original que luego será modificada a fin de mejorar las prestaciones del perfil, quizás no sea crítico que dicho perfil inicial no coincida plenamente con el de referencia. Asimismo, debemos preguntarnos si la sensibilidad es realmente un aspecto tan fundamental, dada la forma suave de los perfiles.

Tras pensar en ello, se llega a la conclusión de que las zonas que necesitan sensibilidad y precisión probablemente sean los bordes, mientras que el resto de las caras de succión y de presión en general tendrán una forma bastante suave. De este razonamiento nace la idea de generar un perfil que tenga los bordes dibujados por curvas Spline y el resto de ambas caras con curvas de Bezier (Método 3).

6.3 Método 3: Bordes mediante Spline y caras de succión y presión mediante Bezier

Son destacables varios aspectos de esta aproximación. En primer lugar, los bordes tendrán error mínimo en los puntos por los que se haga pasar al Spline, de modo que el error se concentrará en las caras de succión y presión que son las que se generarán con curvas de Bezier. Por otro lado, el uso de las curvas de Bezier ahorrará coste computacional, garantizando además unas caras de geometría suave. Por último, sería de esperar que esta curva quedase comprendida entre las generadas con el Método 1 y la generada con el Método 2. Esto será debido a la imposición de que la zona de los bordes tenga el mismo error que el Spline, no así el resto de las caras, mientras que en el primer caso el error existía a lo largo de todo el perfil.

También es interesante resaltar que la sensibilidad de los puntos en la zona de la curva de Bezier es ahora mayor que en el primer caso ya que existen menos puntos por cara. De modo que, si uno de estos puntos se mueve, atraerá más la curva hacia sí, en comparación con el primer método.

En cuanto a los puntos de unión entre ambos tipos de curvas, es evidente que se trata de puntos singulares donde pueden darse discontinuidades en las sucesivas derivadas. Intentar resolver este problema de forma general resulta demasiado complejo para los objetivos de este trabajo. Además, dado que el objetivo final es la creación de un programa que optimice estos perfiles mediante el desplazamiento de los puntos del mismo, en principio

el programa final debería desechar las posiciones para las cuales se generen discontinuidades, ya que conducirían a un peor comportamiento aerodinámico del perfil.

Dicho todo esto, las metodologías seguidas para generar tanto las geometrías de cada sección del perfil han sido expuestas con anterioridad por lo que sólo queda ver el resultado:

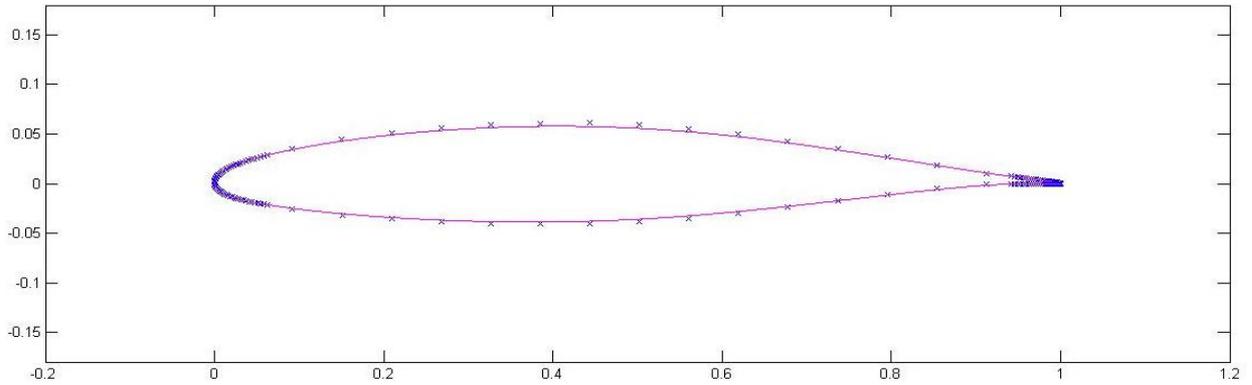


Figura 6-15. Perfil compuesto por bordes generados con Spline Cúbico y caras con curvas de Bezier

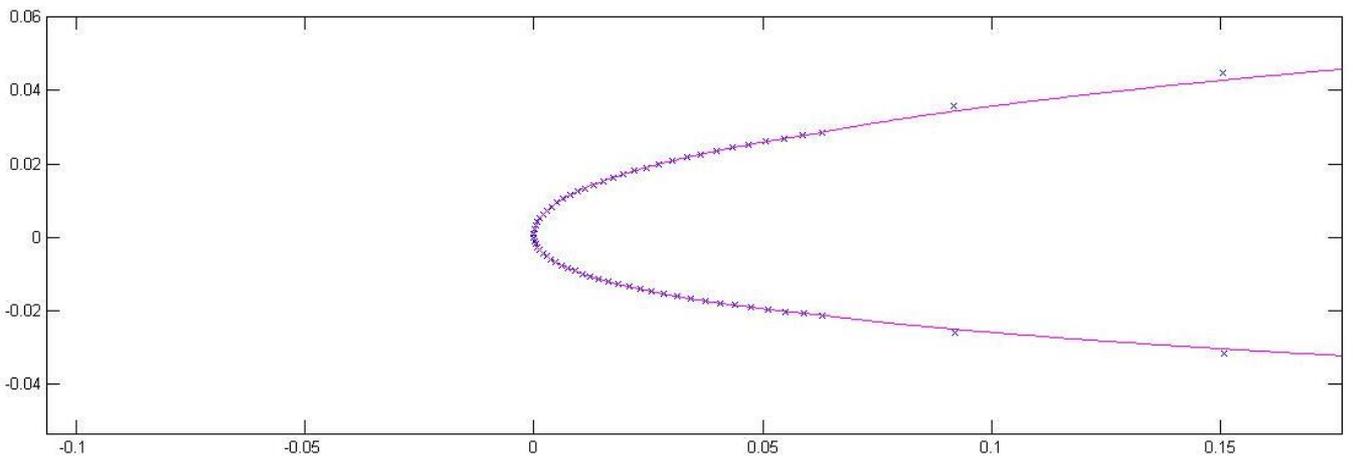


Figura 6-16. Detalle del borde de ataque para el método Spline-Bezier

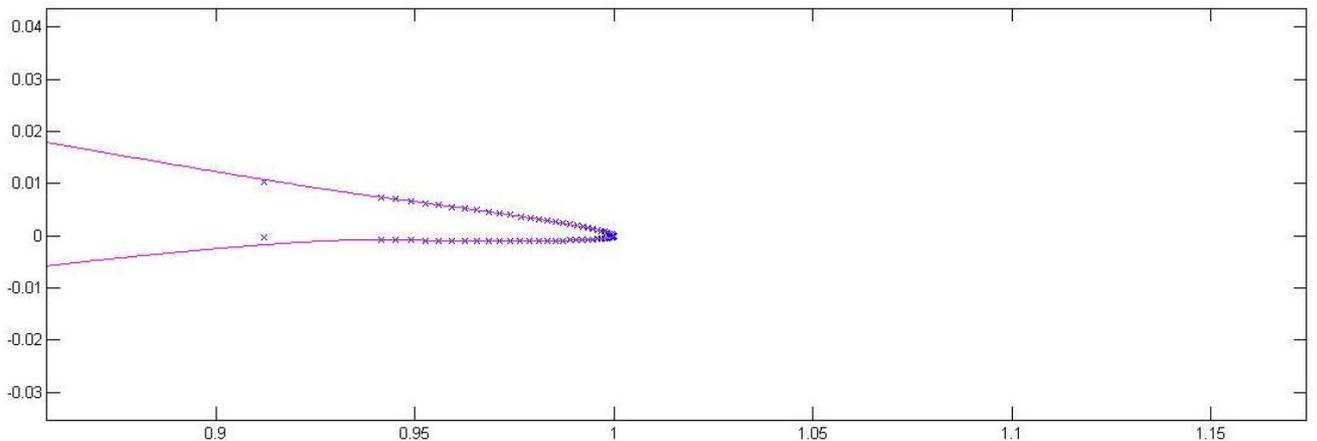


Figura 6-17. Detalle del borde de estela para el método Spline-Bezier

Como se puede observar, los bordes son iguales a los del caso del Spline ya que la curva pasa por los puntos

calculados mientras que, en la parte de central del perfil, la curva se aleja de los puntos de control de la curva de Bezier. En las figuras parece que el número de puntos es el mismo que en el caso anterior pero en realidad podemos elegir los puntos que queramos para las caras de presión y succión, manteniendo así la precisión en los bordes como se ve en el siguiente ejemplo.

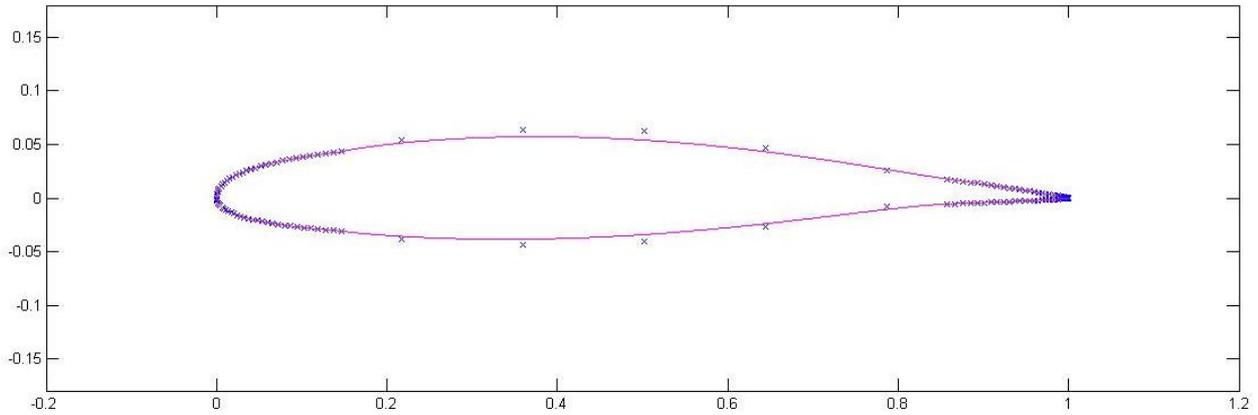


Figura 6-18. Perfil generado mediante menos puntos de control para el método Spline-Bezier

6.3.1 Conclusiones del Método 3

Este método supone una mejora respecto al anterior ya que los bordes tienen error nulo y las curvas de Bezier que resultan en este método para las caras de presión y succión son considerablemente mejores que las del Método 1. A pesar de ello, persiste el problema del excesivo número de puntos en los bordes debido a las curvas Spline y los puntos de unión entre las curvas de distinto tipo pueden dar problemas de continuidad. Por ello tampoco se puede asegurar que sea el mejor método.

6.4 Método 4: Bordes mediante curvas de Bezier y Caras de succión y presión mediante curvas de Bezier diferenciadas

Parece que con las tres curvas anteriores se ha cubierto todo el abanico de posibilidades. A pesar de ello, parece merecer la pena estudiar este último método, ya que en principio debería generar una curva muy suave a partir de relativamente pocos puntos de control, respetando el cierre de las curvas asociadas a las caras de presión y succión mediante curvas de Bezier.

Se trata por tanto de generar los bordes y las caras a partir de curvas de Bezier independientes, siendo el nexo entre ambas el punto donde acaban los bordes del perfil. La curva que definirá los bordes será la curva de Bezier usada para cerrar la geometría de referencia en un principio, lo que garantizará de por sí que ambos bordes tengan error nulo ya que se ha establecido que la referencia será esa misma curva. En otras palabras, el cierre de las geometrías de referencia definidas por la distribución de espesores, el cual no queda definido en el perfil original, se ha basado en la primera parte de este trabajo en el uso de curvas de Bezier por lo que la utilización de las mismas en este apartado da lugar a la misma geometría original y por tanto tiene error nulo. En cuanto al resto de las caras, el error deberá ser el mismo que en el caso del perfil generado a partir de curvas Spline y Bezier combinadas, debido a que los puntos de control serán exactamente iguales.

Por tanto, el perfil consta de un borde con error nulo, definido solo a partir de tres puntos, y unas caras con un error menor al primer caso, donde solo utilizábamos una curva de Bezier por cara. En este método también son puntos singulares aquellos en los que confluyen las curvas de Bezier, pudiendo aparecer irregularidades pero, por el mismo motivo que en el caso anterior, este problema se debería solucionar con la implementación del optimizador.

Por último, es interesante destacar que dichos puntos de unión entre las curvas de Bezier son puntos por los que la curva tiene que pasar obligatoriamente ya que son los extremos de las mismas. De este modo, cuando a lo

largo del proceso de optimización se desplacen estos puntos buscando una geometría con mejor comportamiento, la sensibilidad de la curva que define la superficie al movimiento de cada punto será máxima.

El resultado de aplicar este método se muestra a continuación:

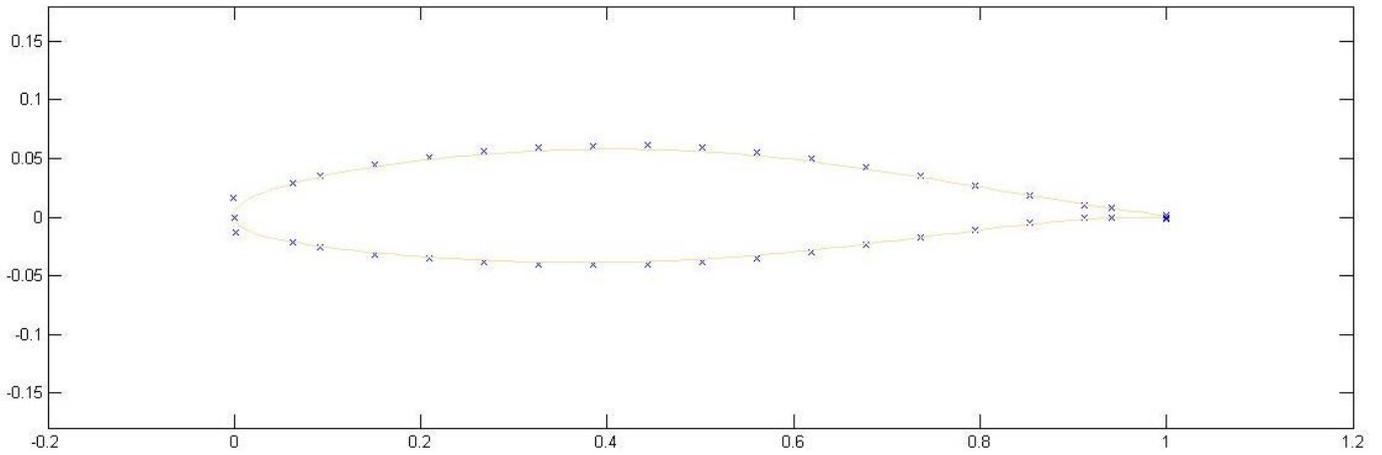


Figura 6-19. Perfil generado mediando tres curvas de Bezier diferentes por cada cara

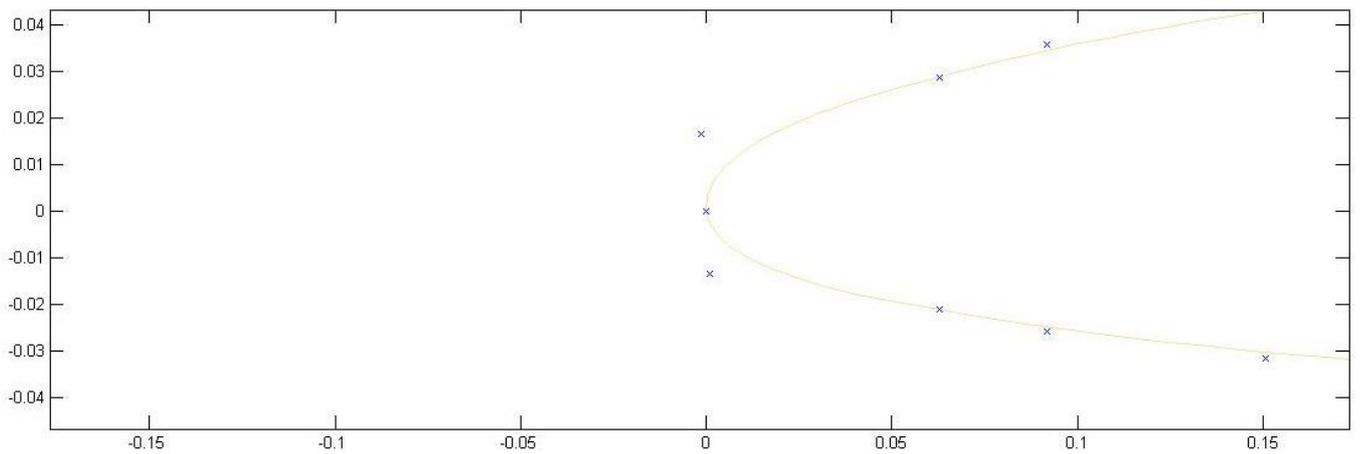


Figura 6-20. Detalle del borde de ataque para el método de Bezier Múltiple

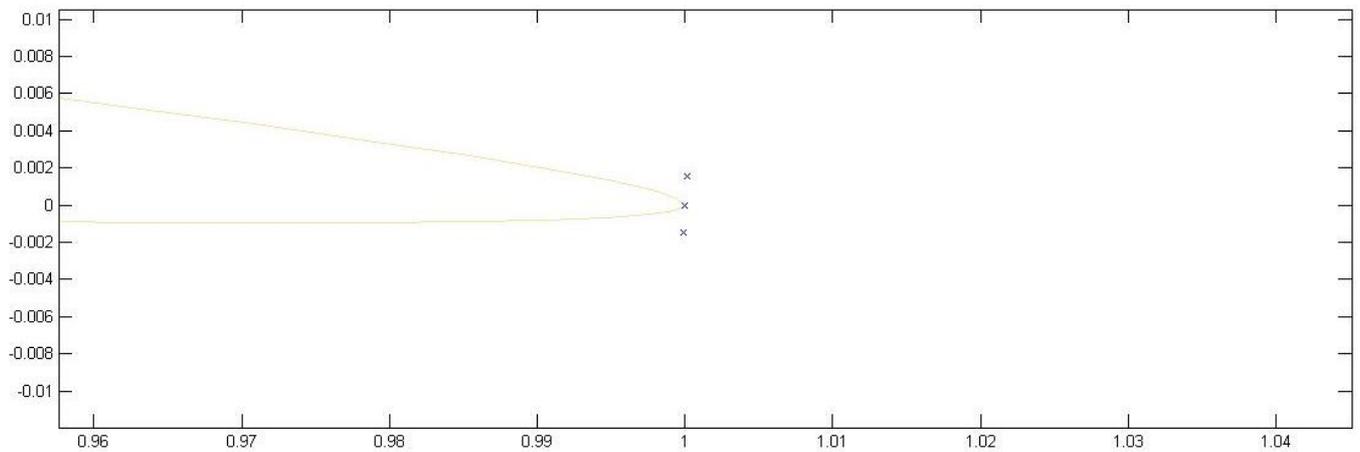


Figura 6-21. Detalle del borde de estela para el método de Bezier Múltiple

Parametrizado el perfil según estos cuatro métodos, en el siguiente apartado vamos a comparar la bondad de cada uno de ellos.

6.4.1 Conclusiones del Método 4

A la vista de los resultados mostrados para el Método 4, se comprueba que se ha conseguido:

- Unos bordes de ataque y estela con error nulo y muy pocos puntos de control.
- Unas caras con la misma precisión que en el método anterior y con pocos puntos de control.

Aunque seguimos teniendo el posible problema de los puntos de unión de las curvas, este método parece un buen candidato a ser el mejor de los cuatro propuestos. Esto se pondrá a prueba en el siguiente capítulo.

7 CUANTIFICACIÓN DEL ERROR

Una vez construido el álabo mediante los diferentes métodos, se procederá a comprobar cómo se comporta cada uno. Para ello, se estudiará el tiempo de computación (del proceso de generación de la geometría) y el error de cada uno con respecto a la curva original y se elegirá la mejor estimación en base a los resultados.

Para dicha elección, se tomarán en consideración tres posibles indicadores:

- Sesgo: Se define el sesgo como la diferencia entre la esperanza del estimador y el valor real de lo estimado. Es una medida de la exactitud del estimador. Se dice que un estimador es insesgado cuando el sesgo es igual a cero.

$$Sesgo(Y, \hat{Y}) = E(\hat{Y}) - Y \quad (7-1)$$

- Varianza: Es una medida de la desviación del estimador. Es una medida de la precisión.

$$Var(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 \quad (7-2)$$

- Error Cuadrático Medio (ECM): Agrupa los conceptos de Sesgo y Varianza, y se define como la Varianza más el cuadrado del Sesgo.

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i^2 - Y_i^2) = Var(\hat{Y}) + [Sesgo(Y, \hat{Y})]^2 \quad (7-3)$$

Para la elección del mejor método de aproximación, no es suficiente escoger aquel que tenga mayor exactitud, sino que también debe presentar una buena precisión. Por tanto, parece que el indicador más apropiado es el ECM.

Además, como método de corroboración, y debido a su sencillez, vamos a comparar también el área encerrada por las curvas estimadoras (una por método) frente al área encerrada por la curva real (definición del perfil mediante distribución de espesores en torno a la línea media).

7.1 Elección de los puntos a comparar

El primer paso es conseguir puntos que se puedan comparar. Sin embargo, por la forma en que hemos diseñado los métodos, no todos los puntos están situados sobre las mismas verticales de la línea media en cada una de las curvas, de modo que no tendría sentido comparar directamente las coordenadas de los puntos como medida de la bondad de la estimación. Por ello, en primer lugar, para calcular el error, se tratará de conseguir puntos situados en las mismas verticales de forma que las coordenadas sean comparables entre sí.

Para conseguirlo, se dividirá en primer lugar la cuerda en “n” partes, por ejemplo 10. En este caso, los puntos se situarán sobre la cuerda en $[0, 0.1, 0.2, 0.3 \dots 1] * c$ (donde c es la longitud de la cuerda). Así pues, por ejemplo para el punto $0.1 * c$, se buscará qué punto es el que está inmediatamente por encima y cuál lo está por debajo.

Para hallar estos puntos, se creará un bucle que encuentre la primera coordenada en “x” que se pase de $0.1*c$, y se tomará esa y la anterior para interpolar. Una vez obtenido el primer punto, pasaremos al siguiente ($0.2*c$) y repetiremos el proceso. En nuestro ejemplo, cuando el punto que buscado sea el 0.9 deberemos detenernos ya que los puntos inicial y final siempre serán (0,0) y (1,0).

Repitiendo este proceso para las cuatro curvas se obtendrán los puntos buscados. Es importante resaltar no obstante que se pierde algo de fidelidad a la curva estimada debido a las interpolaciones realizadas de modo que cabe esperar algún pequeño desajuste entre curvas que a priori deberían ser iguales.

Para comparar las curvas, se tomará como modelo la generada exclusivamente a partir de la distribución de espesores proporcionada por la referencia [2] tal y como se explicó en el apartado de “Generación del Perfil”. Para estudiar cómo varía el error se dividirá la cuerda en 100 puntos (0, 0.01, 0.02... 1), de modo que se asegure una precisión lo suficientemente buena como para confiar en los resultados.

7.2 Comprobación del cálculo del área

MATLAB integra un comando para calcular el área encerrada por una función. Sin embargo, no se dispone de ninguna función continua que genere las coordenadas “y” a partir de unas “x” dadas, sino más bien de una nube de puntos de la que se quiere calcular el área que encierra. Por ello, se recurrirá a la propia definición de integral para calcularla.

Así, vamos a sumar rectángulos, de modo que el método será tanto más preciso cuantos más rectángulos se consideren. Para construirlos, es necesario definir la base y la altura: la base será la diferencia de las coordenadas “x” de dos puntos consecutivos. Por su parte, para estimar la altura se promediará el valor de las dos coordenadas “y” correspondientes, tanto hacia arriba como hacia abajo para conseguir el área del perfil completo. Este procedimiento se muestra en la siguiente ecuación:

$$A = (x_2 - x_1) \left[\frac{(y_2^{sup} + y_2^{inf}) + (y_1^{sup} + y_1^{inf})}{2} \right] \quad (7-4)$$

Para comprobar si esta aproximación es correcta, se comparará el resultado con la medición del área encerrada por la curva según el programa AUTOCAD. En este, podemos insertar una nube de puntos y definirla como una Polilínea para luego medir distintas propiedades, entre ellas el área. Para hacer esta comprobación, se cogió aleatoriamente el método de las curvas de Bezier con los siguientes parámetros de entrada:

- Curvatura = 10°
- Calado = 30°
- Solidez = 2
- Puntos de control = 100
- Precisión = 100

Con las premisas anteriores, se comprobó que el resultado de ambos programas fue prácticamente el mismo: un área de $0.0646 u^2$. Con lo que queda comprobado que los métodos convergen con una precisión dada.

7.3 Combinatoria de parámetros

En este apartado se abordará la comparación de las geometrías generadas a partir de diferentes parámetros de entrada. Para ello, se establecerá un caso sencillo que será el punto de partida a partir del cual se harán variaciones posteriormente. Dichas variaciones consistirán en modificaciones de los parámetros de entrada individualmente, para comprobar cómo afectan al resultado final en cada uno de los métodos.

Por último, se estudiarán algunos casos con variaciones un poco más bruscas para comprobar si el programa soporta éste tipo de condiciones sin presentar irregularidades.

7.3.1 Establecimiento del perfil inicial

Así pues, para comenzar se establecerá un caso típico para luego ir variando cada parámetro de entrada de forma independiente y ver cómo afecta al resultado. Los parámetros de entrada se han elegido de forma que resulte un perfil lo suficientemente sencillo:

- Como se trata de álabes de compresor, la curvatura debe ser leve para evitar problemas de desprendimiento, de modo que escogeremos 10° .
- Para el calado vamos a suponer un caso inicial de 0° , de manera que el fluido entraría de forma perpendicular a la cascada.
- En cuanto a la solidez, tomaremos un valor inicial de 1.
- El número de puntos de control inicial será 10, de manera que el tiempo de computación sea bajo.
- Por el mismo motivo, el número de puntos de las curvas generadas será de 100.

7.3.2 Variaciones moderadas de cada parámetro

Una vez estudiado este caso, se cambiará el valor de cada parámetro como se indica a continuación y se comprobará cómo influye su variación. Hay que destacar aquí que aunque ciertos valores sean poco verosímiles para álabes de compresor, lo que se busca es comprobar el buen funcionamiento de la herramienta en un rango amplio de los parámetros:

- Variar curvatura 10° arriba y abajo.
- Variar el calado 10° arriba y abajo.
- Mitad y doble de solidez.
- 20, 50 y 100 puntos de control.
- 200, 500 y 1000 puntos.

Los resultados para la variación de parámetros son los que se muestran a continuación:

7.3.2.1 Variaciones en la curvatura

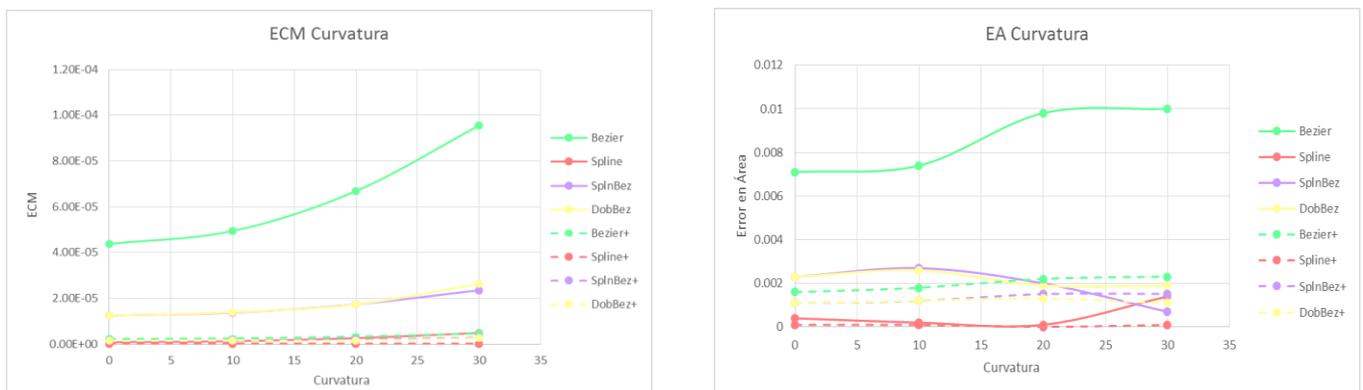


Figura 7-1. Variación del error en función de la curvatura

En la figura anterior se puede observar que el error crece de forma cuadrática con la curvatura. Aquí se ha hecho un estudio de un rango de ángulos excesivamente amplio para álabes de compresores, pero en el peor de los casos estudiados (30° para el Método de Bezier), se observa incluso que el ECM es del orden de 10^{-4} , lo que nos garantiza que en el rango estudiado el programa se comportará correctamente.

También puede llamar la atención la gráfica que compara las áreas de cada método. En ella vemos que cada curva (Bezier, Spline, Spline-Bezier y Bezier Múltiple) se comporta de una manera diferente. Se llegó a la conclusión de que esto se debe a la forma en que se han calculado las áreas, es decir, a través de rectángulos. Como ya se ha indicado, estas curvas se generaron con tan solo 10 puntos de control, lo que hace que la precisión sea pobre, pudiendo dar lugar a una situación como la mostrada.

Para comprobar que este es el caso, se volvieron a dibujar ambas gráficas con 40 puntos de control en vez de 10. Estas líneas se han representado en línea discontinua y están marcadas en la leyenda con el símbolo “+”. Como se puede apreciar, ahora el comportamiento es mucho más regular, y levemente creciente.

El hecho de que la tendencia de una curva y otra sea diferente no es motivo de alarma, ya que en el método del área, al ser un valor absoluto, pueden estar compensadas unas discrepancias por exceso con otras por defecto.

7.3.2.2 Variaciones en el ángulo de calado

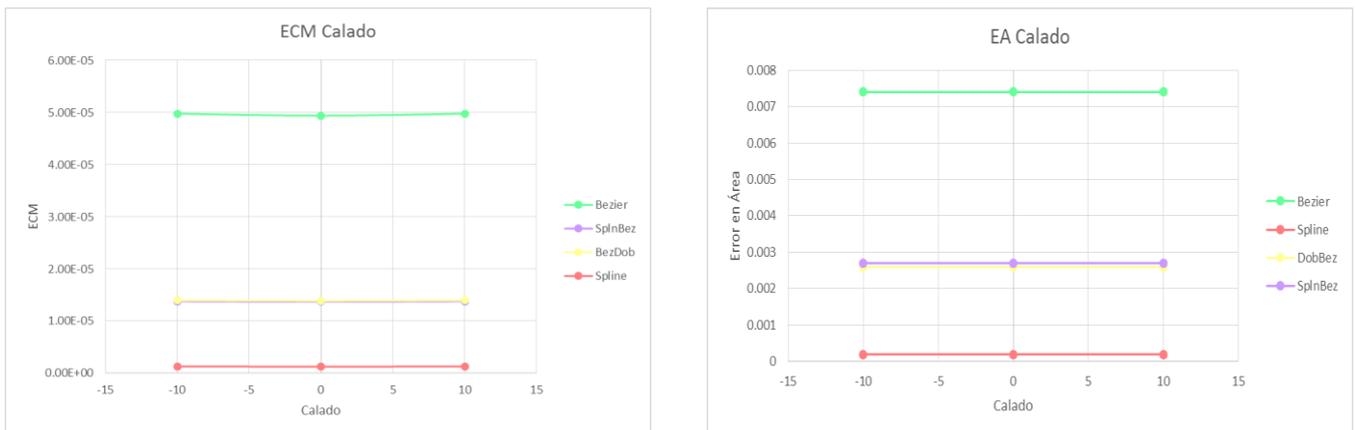


Figura 7-2. Variación del error en función del ángulo de calado

Aquí se muestra la influencia del ángulo de calado en el ECM y el error de áreas (EA). Como se aprecia, el error permanece constante en cada método, siendo, en cuanto a error, el Método de Bezier el que peor se comporta y el Método de Spline el que mejor. Cabe esperar un comportamiento de estas características, ya que el ángulo de calado es un parámetro referente a las cascadas, y no a la geometría del álabe, de modo que su influencia debería ser nula.

7.3.2.3 Variaciones en la solidez

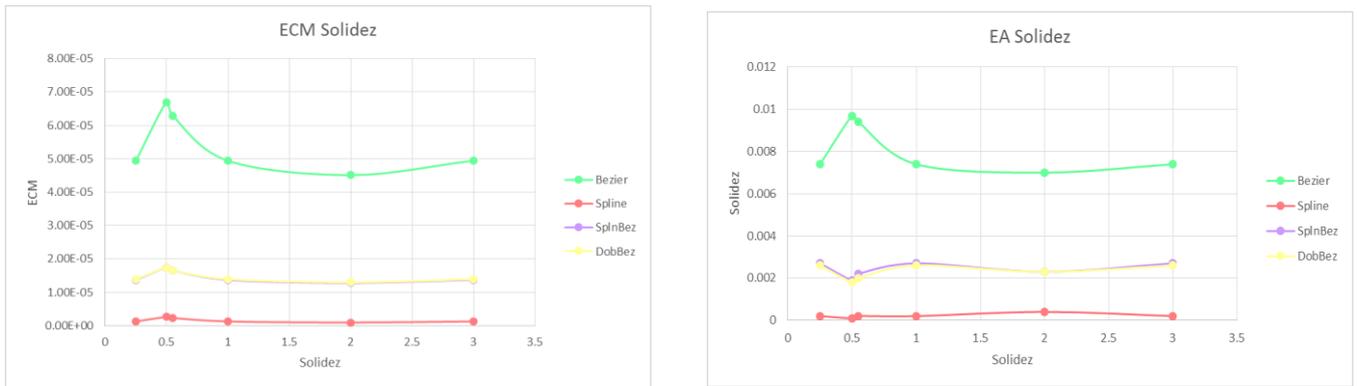


Figura 7-3. Variación del error en función de la solidez

Este caso es parecido al anterior, pues la solidez se trata de un parámetro característico de las cascadas. No obstante parece que esta vez sí existe una relación entre este parámetro y el error calculado. Tras reflexionar al respecto se llegó a la conclusión de que se debe a la definición del coeficiente de sustentación:

$$C_L = 2 * (s/c) * \cos(\alpha_m) * (\tan(\alpha'_1) - \tan(\alpha'_2))$$

Como podemos ver, al utilizar esta expresión sí que introducimos cierta dependencia. Cabe destacar, sin embargo, que las gráficas son prácticamente constantes exceptuando el punto de solidez $\sigma = 0,5$. En primer lugar se pensó que esto puede deberse a la forma de la expresión utilizada, ya que dada una cuerda unitaria, los dos primeros términos se cancelan.

Para comprobar que esto fuese así, se representó también el punto $\sigma = 0,55$, y se comprobó que su ubicación es más cercana al pico reflejado en la gráfica que al resto de la misma, de modo que más que una discontinuidad numérica, se trata de una propiedad de esta expresión, que alcanza un valor máximo cuando la solidez vale 0,5. En cualquier caso, vemos que el ECM de este punto sigue siendo del orden de 10^{-5} , y por tanto es asumible.

7.3.2.4 Variación en el número de puntos de control

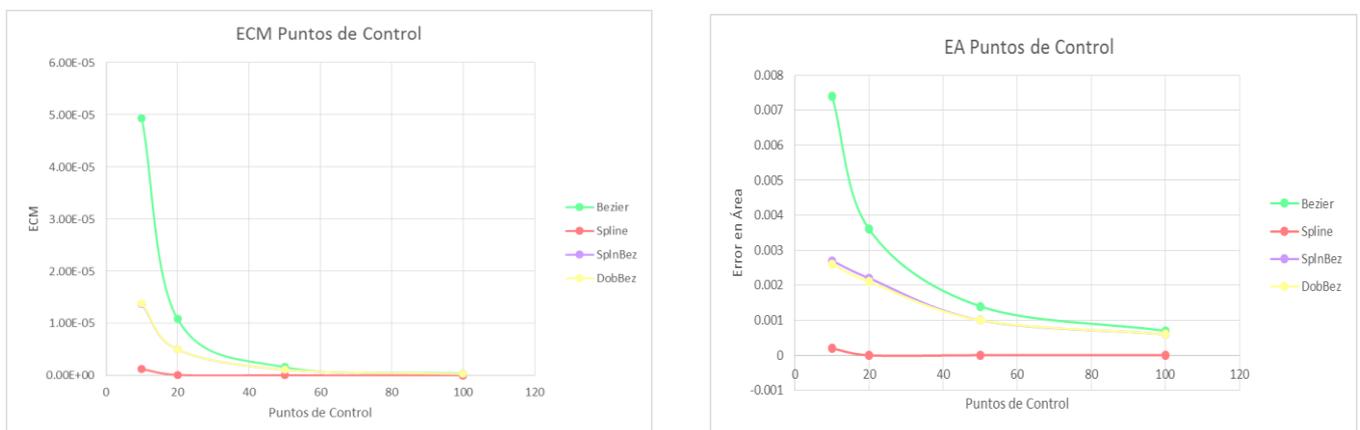


Figura 7-4. Variación del error en función del número de puntos de control

Visiblemente se trata del parámetro de mayor influencia en el error de todos los métodos, los cuales se observa que convergen a 0 para un número de puntos infinitos (asintóticamente).

Ya con 20 puntos de control el ECM de todos los métodos desciende por debajo de 10^{-5} , y a partir de 30-40 puntos se puede considerar que todos los métodos dan una precisión parecida. Una vez más, se ha de resaltar que los bordes generados mediante Spline tienen 120 puntos más, lo que pensar que los métodos de Bezier para un número de puntos de control superior a 30 son mucho más rentables.

7.3.2.5 Variación en los puntos de precisión

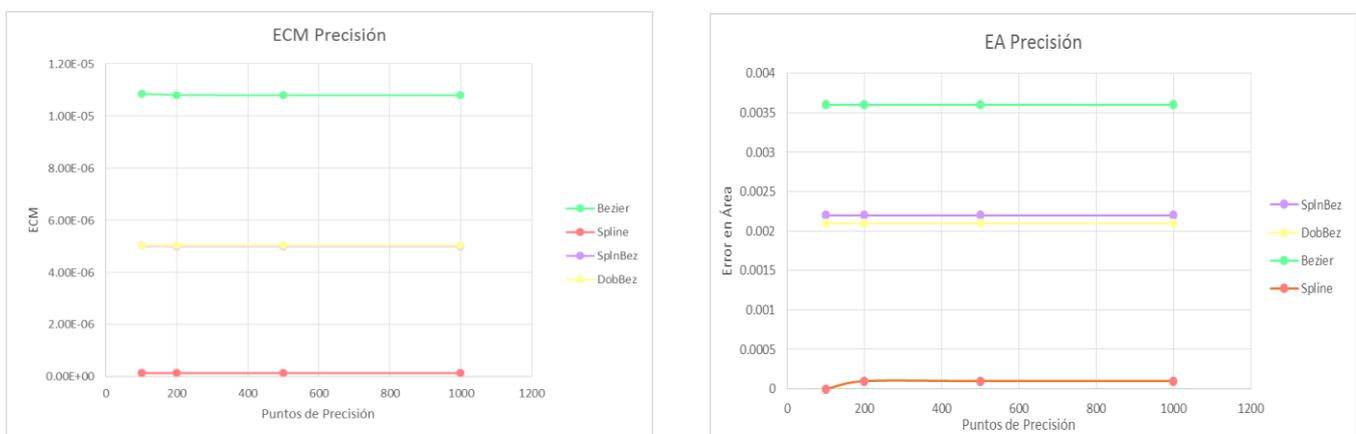


Figura 7-5. Variación del error en función del número de puntos de precisión

Por último, se presenta en estas gráficas la variación del error con el número de puntos de precisión, que como puede verse, puede considerarse despreciable.

Como se demostrará a más abajo en este mismo apartado (véase Apartado 7.3.4), el número de puntos de precisión especificado no aumenta significativamente el tiempo de computación requerido por el programa, de modo que a priori podemos elegir el número deseado de los mismos. Este tipo de puntos no repercute en la precisión de del método, pero sí en lo fina que será la malla creada por el programa ANSYS. Además, a la hora de generar la malla en este programa, sí que tiene importancia el número de puntos de precisión en el tiempo de computación. Por este motivo, aunque no se ha comprobado en éste TFG, sería interesante en el futuro estudiar el tiempo de computación de la malla con diferente número de puntos de precisión.

De las gráficas resultantes mostradas a continuación se pueden destacar varios aspectos:

- El error aumenta con la curvatura, aparentemente de forma cuadrática, aunque los valores de curvatura en álabes de compresor no son tan grandes como para que esto resulte un problema.
- Parece que el ángulo de calado no afecta a la precisión de la herramienta.
- El error se ve afectado por la solidez sólo en el caso de $\sigma = 0,5$, aunque incluso en dicho caso sigue siendo lo suficientemente pequeño.
- El número de puntos de control es la variable que más afecta a la precisión, siendo 0 prácticamente para todos los métodos cuando se utilizan 30-40 puntos o más. Aquí tenemos que recordar que, por lo comentado en el apartado anterior, los métodos que utilizan Spline cúbicos tienen 60 puntos más en cada borde (120 en total).

En general, es relevante comentar que el método que más error tiene es el Bezier simple, con gran diferencia. Le siguen el método de Bezier múltiple y la combinación Spline-Bezier respectivamente.

Como conclusión, tal y como cabía esperar, se comprueba que el método más preciso es el que utiliza exclusivamente el Spline cúbico aunque queda por comprobar su tiempo de computación.

7.3.3 Estudio de los casos con valores extremos de los parámetros de entrada

Como casos extremos, serán objeto de estudio los mostrados a continuación:

- Curvatura= 60, Calado=50, Solidez=5, P. de Control= 30, P. de Precisión= 200.
- Curvatura= 60, Calado=15, Solidez=2, P. de Control= 50, P. de Precisión= 1000.
- Curvatura= 10, Calado=70, Solidez=2, P. de Control= 30, P. de Precisión= 200.

Los resultados se reflejan en las siguientes tablas, donde las sucesivas columnas indican:

- ECM de la cara de succión (ECM Sup).
- ECM de la cara de presión (ECM Inf).
- ECM Total (ECM Tot).
- Área encerrada por la curva (Áreas).
- Error en Área con respecto a la referencia (EA).
- Error Medio de los puntos calculados (EM).

60/50/5/30/200	ECM Sup	ECM Inf	ECM Tot	Áreas	EA	EM
Bezier	1.47E-05	3.93E-06	1.86E-05	0.1421	0.0052	3.62E-05
Spline	2.58E-07	2.98E-08	2.88E-07	0.1474	0.0001	2.96E-05
Spline-Bezier	8.57E-06	1.26E-06	9.83E-06	0.144	0.0033	3.21E-05
Bezier Doble	8.36E-06	1.24E-06	9.61E-06	0.1441	0.0032	2.68E-05
Referencia				0.1473		

Tabla 7-1. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (1)

60/15/2/50/1000	ECM Sup	ECM Inf	ECM Tot	Áreas	EA	EM
Bezier	2.64E-06	5.08E-07	3.14E-06	0.087	0.0019	1.22E-05
Spline	7.42E-08	9.51E-09	8.37E-08	0.089	1E-04	6.72E-06
Spline-Bezier	1.91E-06	2.29E-07	2.14E-06	0.0876	0.0013	7.24E-06
Bezier Doble	1.89E-06	2.36E-07	2.13E-06	0.0876	0.0013	5.15E-06
Referencia				0.0889		

Tabla 7-2. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (2)

10/70/2/30/200	ECM Sup	ECM Inf	ECM Tot	Áreas	EA	EM
Bezier	1.19E-05	2.82E-06	1.48E-05	0.1223	0.0045	2.93E-05
Spline	2.49E-07	2.25E-08	2.71E-07	0.1269	0.0001	2.36E-05
Spline-Bezier	7.09E-06	8.04E-07	7.89E-06	0.124	0.0028	2.56E-05
Bezier Doble	6.94E-06	7.87E-07	7.73E-06	0.124	0.0028	2.14E-05
Referencia				0.1268		

Tabla 7-3. Comportamiento de la herramienta para variaciones bruscas de los parámetros de entrada (3)

Como podemos observar, el comportamiento de la herramienta es bueno incluso para valores extremos de los parámetros de entrada, con un error del orden de $10^{-5} u$, un valor que da garantías respecto de la versatilidad de la misma. A pesar de ello, no podemos tomar una decisión en base a sólo estos datos, de modo que vamos a estudiar otro parámetro muy importante, el ratio “Precisión-Tiempo de computación”.

7.3.4 Relación Precisión-Tiempo de computación

A continuación se muestra la relación entre la precisión obtenida y el tiempo de computación necesario para generar la geometría del perfil, en función del número de puntos de control y del número de puntos de precisión.

P.Control/P.Precisión	20/200	20/500	20/1000	50/200	50/500	50/1000
Bezier [s]	7.81E-02	1.09E-01	1.09E-01	0.1563	0.1406	2.19E-01
Spline [s]	4.69E-02	4.69E-02	4.69E-02	0.0938	0.0781	9.38E-02
Spline-Bezier [s]	4.69E-02	4.69E-02	6.25E-02	0.0781	0.0781	1.09E-01
Bezier Doble [s]	4.69E-02	4.69E-02	6.25E-02	0.0781	0.0938	1.25E-01

Tabla 7-4. Evolución del tiempo de computación para diferente número de puntos de control y precisión

Como se aprecia en esta tabla, el método del Spline es también el más rápido. Esto se debe a que no necesita calcular los puntos de control correspondientes a las caras de succión y presión, tan sólo en los bordes. En cuanto a los tres restantes, se puede afirmar que el tiempo de computación es aproximadamente similar.

7.3.5 Conclusión

Todo indica que el método más apropiado es el uso del Spline Cúbico. A pesar de ello, no se debe perder de vista que este método trabaja con muchos más puntos (60 más por cada borde) de manera que, si se ha dicho que 40 puntos de control dan un error prácticamente nulo, el método de Spline Cúbico está trabajando con 120 puntos más, es decir 160 puntos. Esta cantidad resulta inasumible para un optimizador de modo que, aunque este método no sea del todo descartable, es necesario buscar una alternativa con mejores prestaciones:

- Para el caso de la combinación Spline-Bezier se presenta el mismo problema, ya que los bordes se generan igual que en el caso del Spline Cúbico, aunque es cierto que el número de puntos de cada cara es menor debido a las curvas de Bezier.
- En cuanto a los métodos que usan solo curvas de Bezier, el número de puntos de control en ambos es el mismo. Sin embargo, el método del Bezier múltiple consigue un menor error, en menos tiempo de computación y cuenta además con 4 puntos de máxima sensibilidad al cambio de posición de cara al optimizador.

Para tomar la decisión de qué método es el más adecuado, y visto el resultado de esta sección, conviene hacer un estudio de la sensibilidad al cambio de posición de los puntos que definen la geometría del perfil ya que el optimizador opera variando su posición.

8 ESTUDIO DE SENSIBILIDAD

En este estudio de sensibilidad se analizará el comportamiento del programa y sus resultados al variar de forma manual los puntos de control hacia arriba y hacia abajo respecto de su posición original (cambio de coordenada “y”). Esta forma de proceder se aplicará a los cuatro métodos estudiados. Es decir:

- Método 1. Bezier-Simple: En este método todos los puntos son igual de sensibles, de modo que se variarán un par de puntos (uno cerca del borde de ataque y otro a la mitad del perfil) y se comprobará cómo cambia el perfil.
- Spline: Al igual que en el Bezier-Simple, los puntos son igual de sensibles pero en este método los bordes tienen una mayor densidad de puntos de control. Es interesante por tanto ver qué ocurre tanto en alguno de los bordes como en el resto del álabe.
- Bezier-Spline: Por el mismo motivo que en el método Spline, se observará qué ocurre cuando tocamos los puntos del borde. Al mismo tiempo, se modificará la posición de los puntos de unión de ambas curvas, en los que se esperan discontinuidades en las derivadas.
- Bezier Múltiple: Es un caso similar al Spline-Bezier, tanto en la parte central de las caras como en los puntos singulares. En ambos se espera un comportamiento similar con el método anterior. Lo verdaderamente interesante de este caso es la variación de los puntos que definen el borde ya que este está formado por una curva independiente.

Para establecer un criterio homogéneo en cuanto a cómo variar los puntos en cada método, se multiplicará por dos cada ordenada que variemos y veremos cómo se modifica la superficie del perfil al hacerlo, para diferenciar los puntos de control originales con los modificados se dibujarán los primeros con “x” rojas y los segundos con “x” azules. Además, para facilitar la comparación de los perfiles se dibujará el original en color negro y el modificado en su color respectivo acorde al asignado en el resto del trabajo.

8.1 Método 1: Bezier

En este caso, se aumentó la coordenada “y” del punto que define el borde de ataque y se disminuyó la de otro punto de la cara de presión. Se puede observar que, en efecto, el perfil se ve modificado globalmente debido a las implicaciones de usar curvas de Bezier.

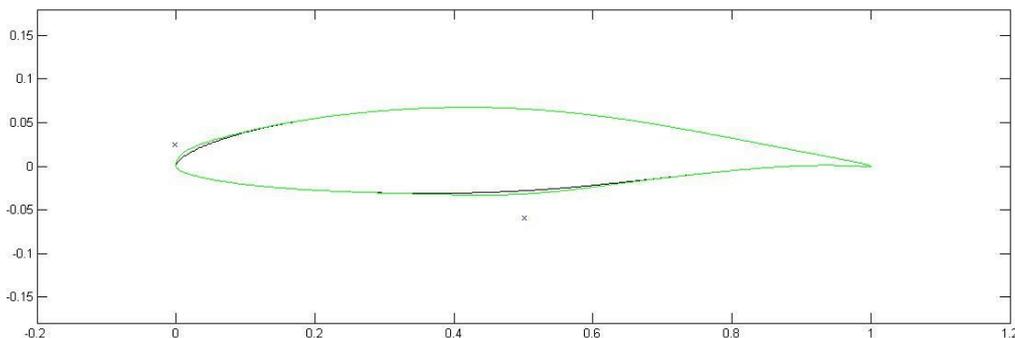


Figura 8-1. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Bezier Simple

Una ventaja de éste método es que se garantiza que no aparezcan discontinuidades de modo que siempre conseguimos un perfil suave. Por otro lado, también es destacable que es muy complicado hacer variaciones locales del perfil porque la modificación de las coordenadas de un punto se extienden a puntos de la curva alejados de aquel por la propia naturaleza de las curvas de Bezier.

8.2 Método 2: Spline

En el caso del Spline, se espera que la deformación del perfil sea local ya que la curva está definida de manera que pase por todos los puntos que la componen. Esto se aprecia en la figura inferior en la que se han modificado varios puntos del perfil original:

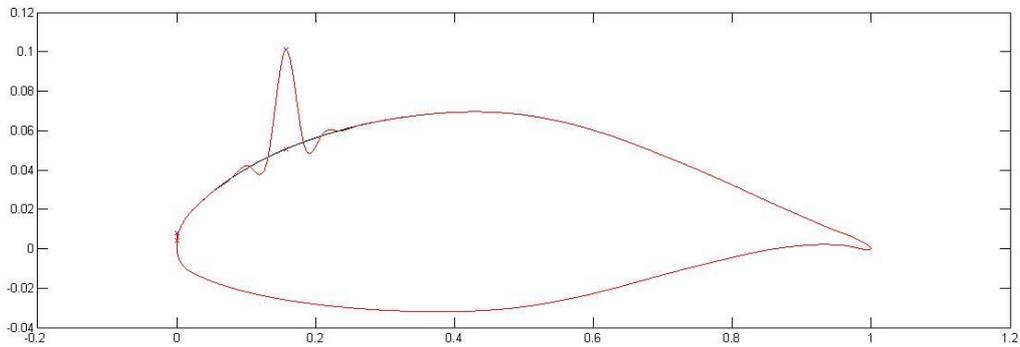


Figura 8-2. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Spline Cúbico

Como vemos en la Figura 8-2, la deformación de la parte central de las caras es estrictamente local. En el caso del borde de ataque, en el que el número de puntos que definen el perfil es mucho mayor, se comprueba que la modificación de la superficie del perfil también queda limitada a una zona muy reducida del mismo:

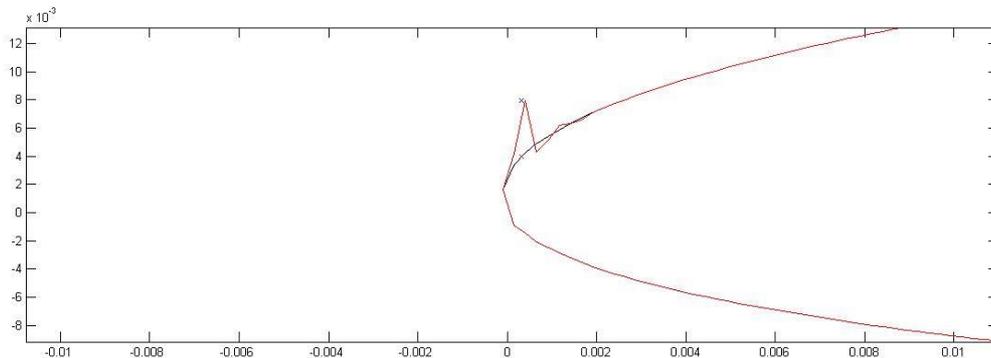


Figura 8-3. Detalle del borde de ataque tras cambiar varios puntos para Spline

No obstante lo mostrado en la Figura 8-2, se puede comprobar que cuando la modificación es más leve (como es de esperar) la propagación de la modificación de la geometría a puntos alejados de aquel cuyas coordenadas se alteran es mucho menor. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 8-4.

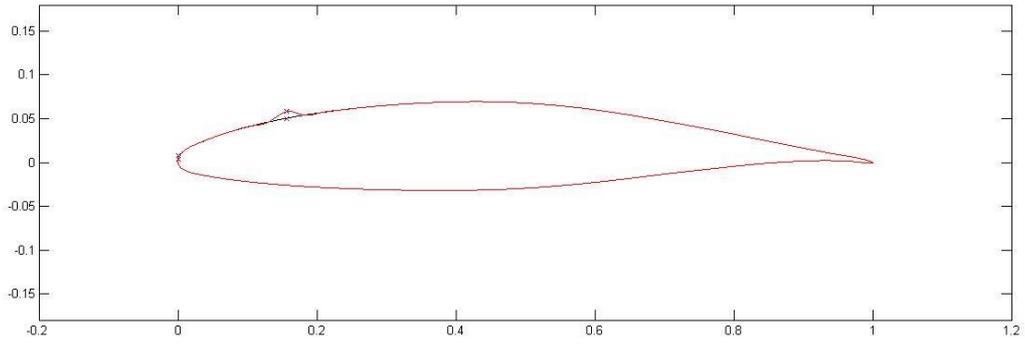


Figura 8-4. Deformación más leve para el método Spline

8.3 Método 3: Spline-Bezier

En el caso de la combinación Spline-Bezier, se puede observar en las figuras siguientes que los puntos se comportan como en sus respectivos métodos. Sin embargo, aparece un nuevo tipo de punto: el punto de unión entre ambas curvas, que es un punto por el que la curva deberá pasar obligatoriamente.

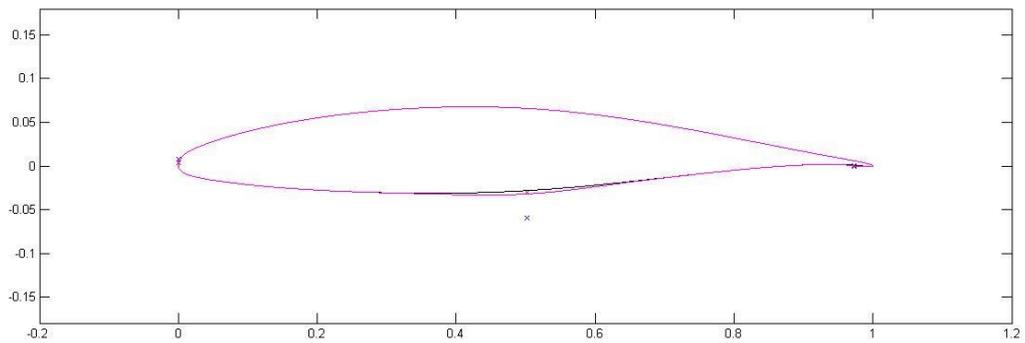


Figura 8-5. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Spline-Bezier

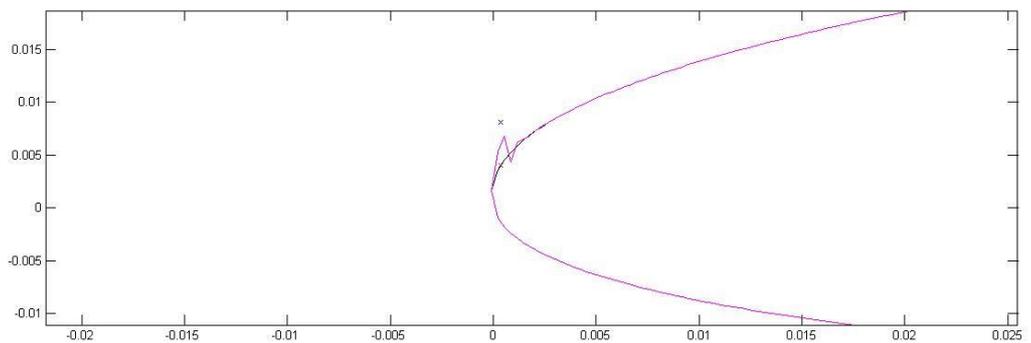


Figura 8-6. Detalle del borde de ataque tras cambiar varios puntos para Spline-Bezier

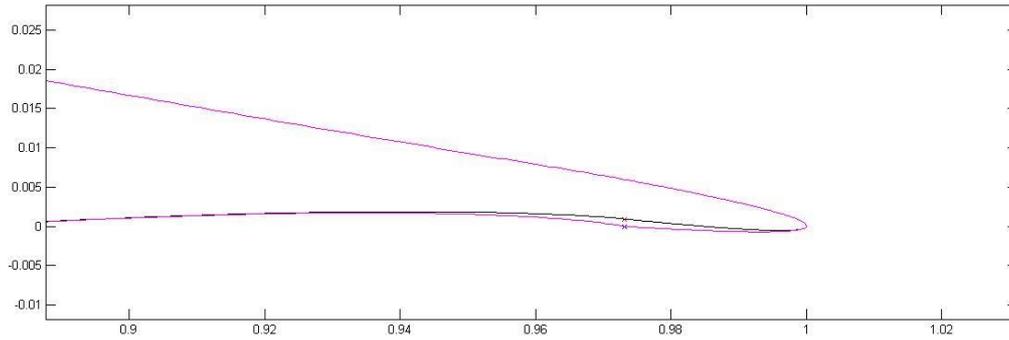


Figura 8-7. Detalle del borde de estela tras cambiar varios puntos para Spline-Bezier

Vemos que la modificación del punto de unión entre el borde de estela y la cara de presión genera una discontinuidad en la primera derivada de forma que el optimizador deberá mover los puntos de su alrededor para conseguir una evolución suave.

8.4 Método 4: Bezier Doble

En este caso, las curvas de los bordes son independientes del resto del álabe, por eso la sensibilidad del borde es más localizada y mayor que en el caso del Bezier simple.

En el caso de la cara de presión, la deformación es más generalizada por los motivos comentados. En el punto de unión de ambas curvas de Bezier, ocurre lo mismo que en el caso anterior: se generan discontinuidades en las derivadas de modo que el optimizador tendrá que buscar por sí mismo una buena solución.

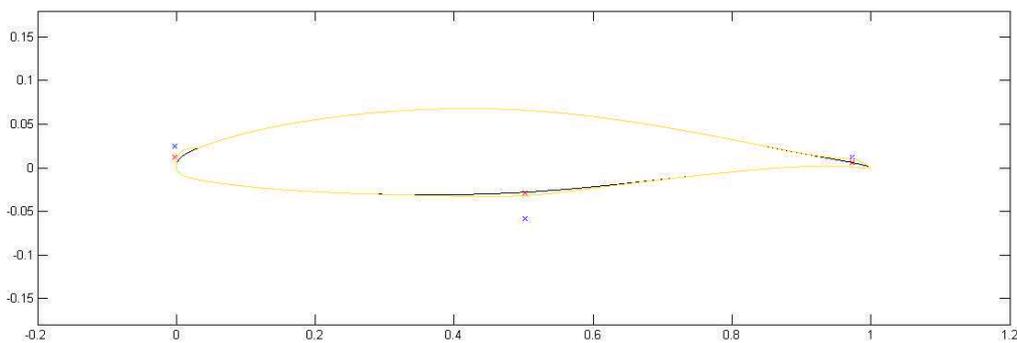


Figura 8-8. Comparación del perfil inicial y tras cambiar varios puntos para el método de Bezier Múltiple

8.5 Conclusión

Visto el comportamiento de las curvas tras la variación de las coordenadas de sus puntos de control, se ha concluido que los métodos que utilizan la interpolación mediante Spline Cúbico, pese a su gran precisión y rapidez en cuanto a tiempo de computación, no resultan válidos debido a su mal comportamiento en este apartado: las deformaciones resultantes en los bordes no son compatibles con un buen comportamiento del perfil

pues se generan aristas pronunciadas y cambios de geometría muy bruscos localmente, y su elevado número de puntos haría que la convergencia del método se dilatase demasiado en el tiempo.

Por su parte los métodos que usan únicamente curvas de Bezier muestran un mejor comportamiento, con deformaciones globales que ayuden a que las variaciones no lleven a resultados repentinamente peores con respecto a su configuración anterior. En este sentido, el Método 4 parece presentar mayores ventajas frente al Método 1 ya que la sensibilidad de sus puntos es mucho mayor, el error de la curva resultado es visiblemente mejor y permite deformaciones locales.

Por todo esto, se considera que el Método 4 es el mejor candidato para su implementación en la herramienta de optimización de geometrías.

9 MALLADO

Una vez se ha conseguido generar el perfil mediante los distintos métodos, el siguiente paso es crear una malla del mismo, con el fin de ensayarlo utilizando un programa de CFD. En este caso, vamos a usar la herramienta de ICEM integrada en el programa ANSYS.

Para crear las mallas, se tomó como base el Proyecto Fin de Carrera de José María Rodríguez Muñoz (Referencia [3]), en el que ya se programó el mallado para los perfiles NACA65010. En dicho trabajo, se eligió estudiar el comportamiento del flujo a su paso por una cascada de álabes así como en las zonas anterior y posterior de la misma, a fin de representar correctamente el comportamiento aerodinámico de los álabes.

Debido a la simetría existentes en las cascadas, se decidió ensayar un sólo ábabe y aplicar condiciones de contorno de tipo “contorno periódico” en los planos de simetría de la zona media del canal entre álabes sucesivos.

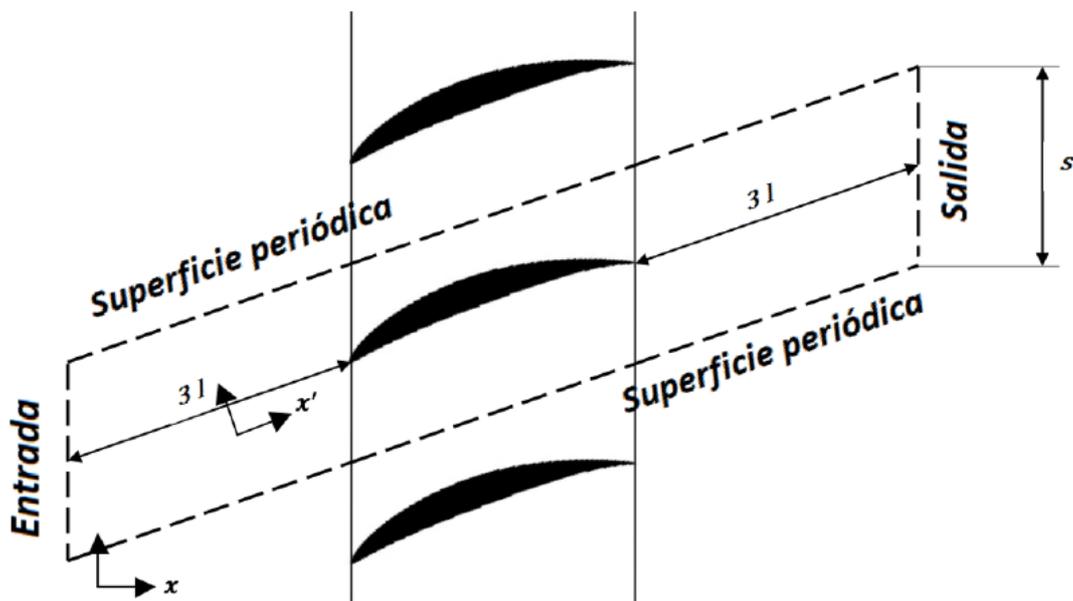


Figura 9-1. Volumen de control elegido para el mallado

Tras esta simplificación, el volumen de control resultante incluye al ábabe y una longitud de tres cuerdas aguas arriba y aguas debajo de la cascada, en dirección del ángulo de flujo. Además, la región está inclinada según el ángulo de calado, lo que permite que la cuerda del ábabe sea paralela a la dirección x' , que es la que se usará como dirección x para generar la malla.

Por otro lado, es importante destacar que la precisión no es igual de importante en todo el volumen de control, sino que las zonas más próximas al ábabe precisan una mayor precisión puesto que es en esta zona donde se ubica la capa límite, que determina las pérdidas de energía del flujo que transcurre por la cascada. Conforme nos alejamos de esta región de baja velocidad próxima a la pared de los álabes, la influencia de la capa límite es cada vez menor, haciendo posible utilizar un mallado menos refinado que disminuya el tiempo de computación. Por este motivo, se utilizarán dos tipos diferentes de mallado: el mallado no estructurado para las zonas alejadas del perfil, que genera elementos triangulares aleatorios, y el mallado estructurado para las zonas más críticas, las regiones 9, 10, 11, 12 de la Figura 9-2. El resto de zonas se generarán con malla no estructurada:

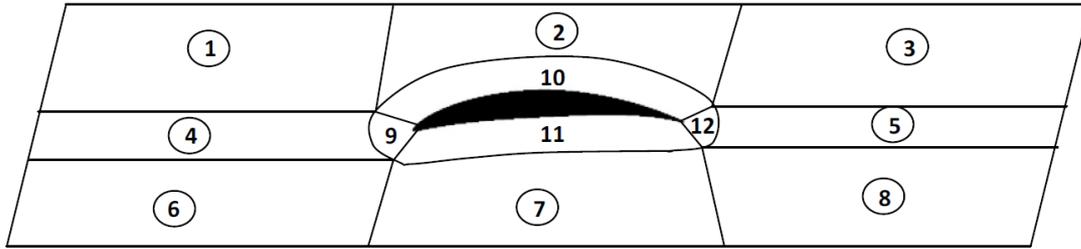


Figura 9-2. División del volumen de control para separar los dos tipos de mado

El archivo de texto que usa el programa ANSYS para realizar el mado comienza recogiendo las coordenadas del perfil en una matriz de resultados. Adaptar esta matriz a los vectores de las parametrizaciones aquí presentadas fue un primer paso para adaptar el código.

Otro paso necesario es escoger los límites que separarán las zonas del mado estructurado, es decir, los puntos que delimitarán las zonas 9 y 12. En nuestro caso, hemos elegido los puntos del perfil situados al 2% y al 98% de la longitud de la cuerda. Para un mayor detalle, consultar el PFC de José María Rodríguez Muñoz. (Referencia [3])

A continuación se muestra un ejemplo de la malla resultante utilizando estos criterios:

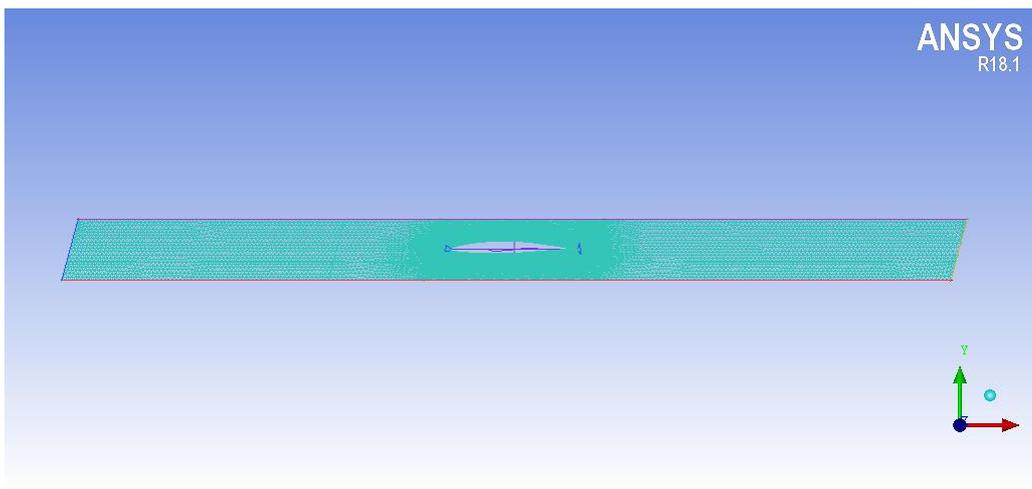


Figura 9-3. Vista general del mado final

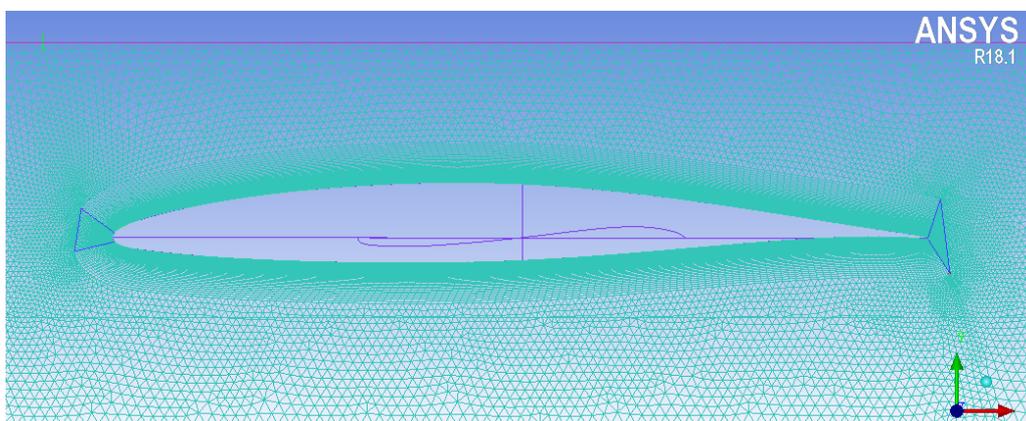


Figura 9-4. Detalle del mado final del perfil

10 INTERFAZ DE USUARIO

Para facilitar el uso del programa se ha creado una interfaz donde el usuario del mismo puede dar directamente los datos de entrada y ver los de salida.

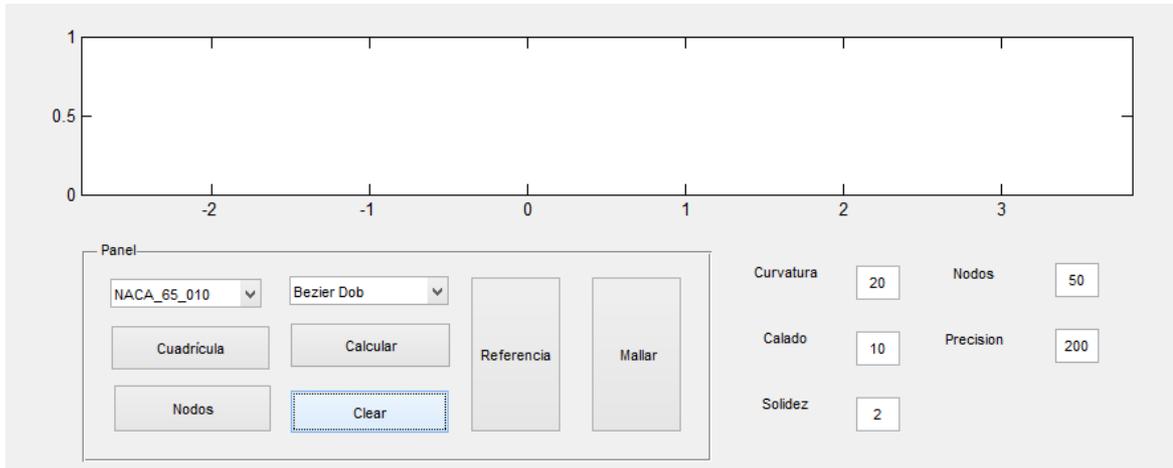


Figura 10-1. Vista de la Interfaz de usuario

La función que realiza cada uno de los botones del panel es la siguiente:

- Desplegable superior-izquierda: Selección del tipo de perfil (Figura 10-2).
- Desplegable superior-central: Selección del método de parametrización (Figura 10-3).
- Botón Cuadrícula: Muestra la gráfica dividida con ayuda de una cuadrícula (Figura 10-6).
- Botón Calcular: Muestra la curva resultado (Figura 10-4).
- Botón Nodos: Muestra los puntos de control calculados para la generación del perfil (Figura 10-7).
- Botón Clear: Elimina todos los datos mostrados en el área gráfica.
- Botón Referencia: Muestra el perfil estándar generado a partir de las tablas de distribución de espesores de las series normalizadas originales (Figura 10-5).
- Botón Mallar: Ordena la creación del fichero necesario para el proceso de mallado que más tarde requerirá la herramienta ICEM.
- Panel de entrada: Se especifican los parámetros de entrada para la generación del perfil.

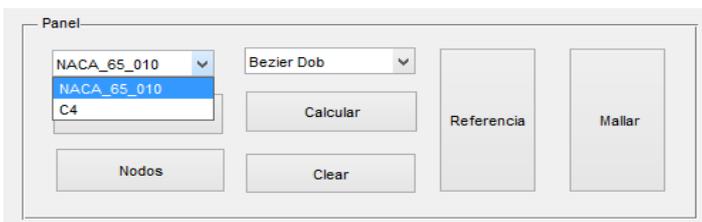


Figura 10-3. Panel desplegable 1

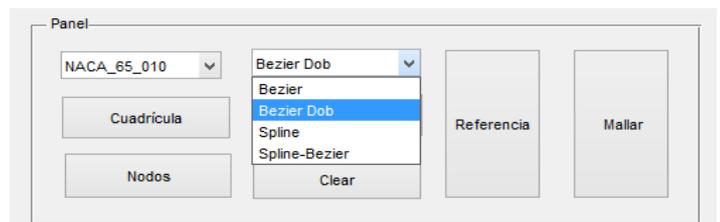


Figura 10-2. Panel desplegable 2

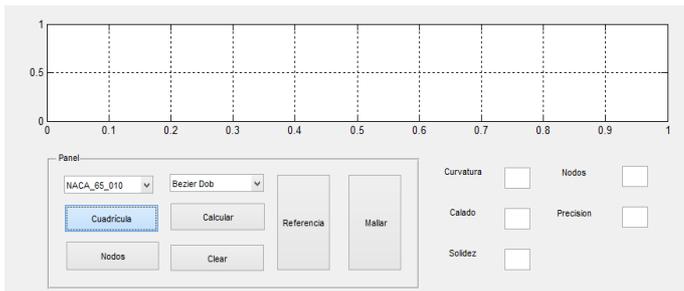


Figura 10-6. Cuadrícula

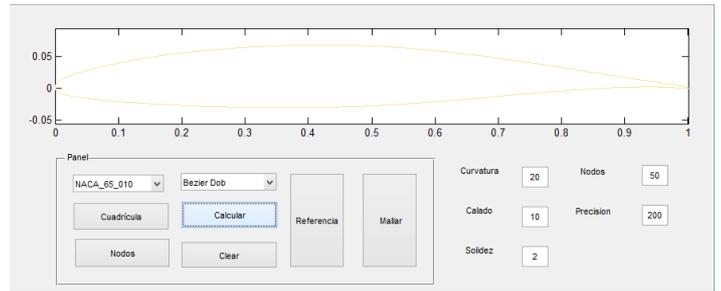


Figura 10-4. Interfaz de usuario mostrando el resultado

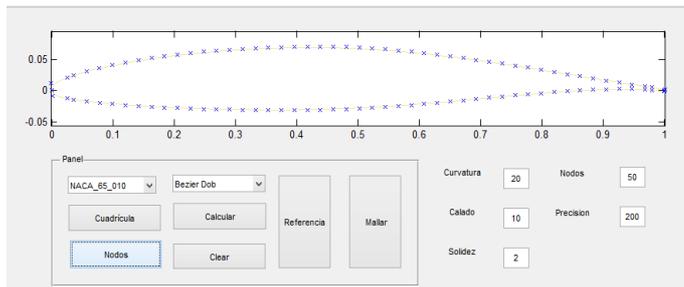


Figura 10-7. Puntos de control

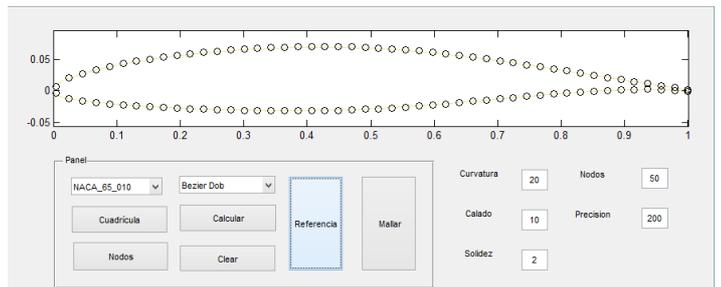


Figura 10-5. Interfaz de usuario mostrando el perfil calculado con las tablas de la Referencia

11 CONCLUSIÓN Y POSIBLES MEJORAS

Tras el estudio realizado en este TFG se llegó a la conclusión de que el método más adecuado para realizar la parametrización de la geometría del perfil, de cara a una futura implementación en un algoritmo de optimización, es el Método 4: Bezier-Múltiple. Los motivos son los siguientes:

- Necesita un número reducido de puntos de control lo que permitirá a la herramienta de optimización encontrar una solución más rápidamente que con cualquiera de los otros métodos (a excepción del Método 1 que cuenta con el mismo número de puntos de control).
- Proporciona una geometría suave, con infinita derivabilidad, garantizada por las curvas de Bezier.
- El error con respecto a la curva proporcionada por las tablas de distribución de espesores de las series normalizadas originales es considerablemente bajo, del orden de $10^{-4}u$.
- Los bordes son generados a partir de curvas independientes tanto en su parte superior como inferior, lo que posibilita que la geometría resultante llegue a formas poco usuales, aunque esto no se espera debido a que se trata de álabes de compresor.
- La modificación de las coordenadas verticales de los puntos de unión de las diferentes curvas de Bezier ocasionan cambios importantes en la superficie del perfil. No obstante, aunque se generen discontinuidades en la mayoría de los casos, también permiten, en general, un mejor modelado del perfil.

Pese a esta conclusión, y debido al buen comportamiento del Método 2 (Spline-Cúbico), se ha considerado que una mejora de los métodos estudiados es posible. Se propone así hacer un estudio del comportamiento de los Spline Akima: un tipo de Spline Cúbico que también genera curvas infinitamente derivables pero que calcula los coeficientes del polinomio utilizando sólo los puntos de las proximidades del punto modificado. Esto puede llevar a mejores resultados que los Splines Cúbicos empleados en este trabajo en lo que se refiere a la suavidad de la curva y la influencia en la misma de variaciones en las coordenadas de sus puntos de control, como se muestra en la Figura 11-1.

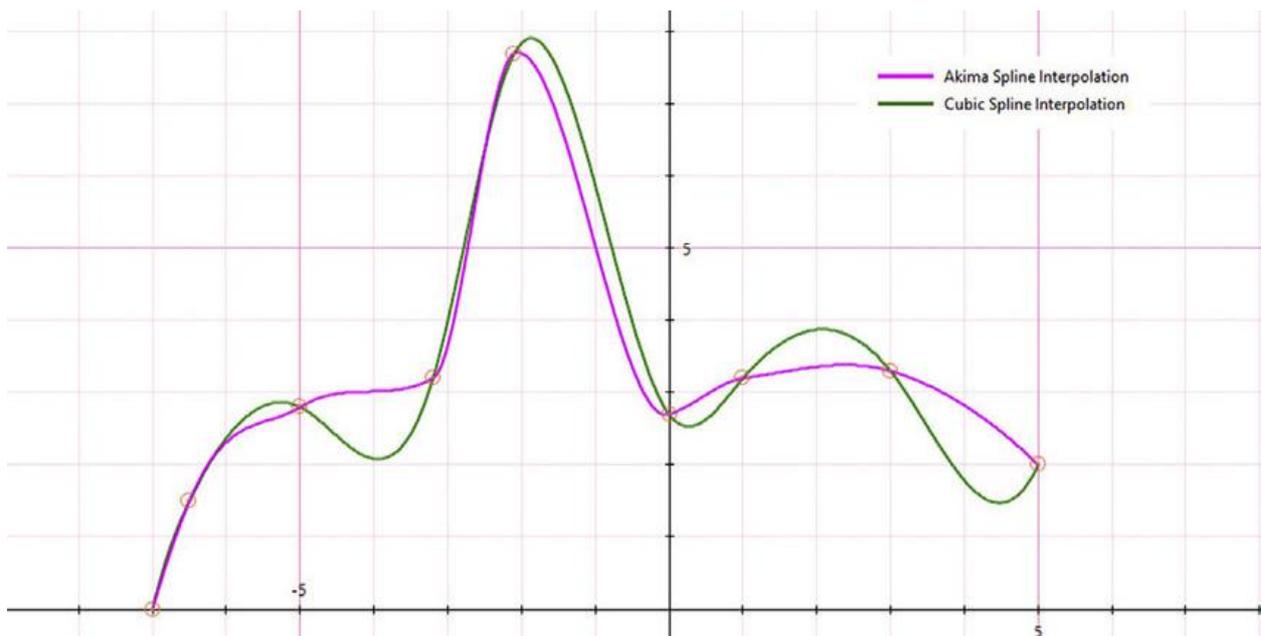


Figura 11-1. Comparación de las interpolaciones con Spline Cúbico y Spline Akima. Referencia [10]

Por otra parte, la continuación de este trabajo será, naturalmente, la creación del programa de optimización. Este

deberá recoger los puntos de control utilizados para la generación de la curva y variar sus coordenadas hasta encontrar el óptimo. Para discernir entre una solución buena o mala tendremos que ensayar virtualmente el perfil en el programa de CFD a partir de malla generada con los puntos de la curva, distintos a los de control.

En caso de que el método escogido como el mejor no lo fuera llegado el momento de la optimización, siempre se podrá utilizar cualquiera de los otros métodos aquí comentados, ya que el programa se ha ideado para que su validez sea común a todos los métodos. Esta decisión se deja abierta a quién prosiga con la elaboración de dicho programa de optimización.

REFERENCIAS

- [1] B. TARVER, «DEVELOPMENT OF TURBINES FOR USE IN OSCILATING WATER COLUMNS,» 2013.
- [2] H. Abbot, Alabert E. Von Doenhoff, «Summary of Airfoil Data,» *Reprot No. 824*, vol. 2, nº 13, 1945.
- [3] N.A. Cumpsty, COMPRESSOR AERODYNAMICS.
- [4] Yin Song, Chun-Wei Gu & Yao-Bing Xiao, «Numerical and Theoretical Investigations Concerning the Continuous-Surface-Curvature Effect in Compressor Blades,» 2014.
- [5] José María Rodríguez Muñoz, «Estudio Numérico de los límites de difusión en Cascadas de Álabes de Compresor NACA65». *PFC*.
- [6] Tomás Sánchez Lencero, Antonio Muñoz Blanco, Francisco José Jiménez-Espadafor Aguilar, Turbomáquinas Térmicas, Sevilla: ETSI, 2004.
- [7] A. Johnsen & Robert O. Bullock, «AERODYNAMIC DESIGN OF AXIAL-FLOW COMPRESSORS,» NASA, 1965.
- [8] M. Schobeiri, Turbomachinery Flow Physics, Springer, 2005.
- [9] Wikipedia, «Curvas de Bezier,». Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_B%C3%A9zier.
- [10] «https://www.researchgate.net/figure/Picture-illustrating-the-Akima-spline-interpolation-method_fig3_263968185,».

