

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Estudio de la dinámica lateral de una bicicleta. Análisis de estabilidad.

Autor: Manuel Troncoso García

Tutor: Joaquín Ojeda Granja

**Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Estudio de la dinámica lateral de una bicicleta. Análisis de estabilidad.

Autor:

Manuel Troncoso García

Tutor:

Joaquín Ojeda Granja

Profesor Contratado Doctor

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Grado: Estudio de la dinámica lateral de una bicicleta. Análisis de estabilidad.

Autor: Manuel Troncoso García

Tutor: Joaquín Ojeda Granja

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal,

Fecha:

Agradecimientos

A mi familia, que siempre ha depositado en mí toda su confianza y me ha dado todas las herramientas para conseguir llegar hasta este punto.

A mis amigos, tanto los que ya estaban como los que se han ido uniendo durante el transcurso de esta carrera, y que han sido un apoyo indispensable en los momentos más difíciles.

A las personas que ya no están, pero que han sido fundamentales en el transcurso de mi vida, y sin las que hubiera sido imposible estar escribiendo estas palabras.

Y, por último y en especial, a mi madre. La mujer que me lo ha dado todo y que sigue dándomelo cada día. Si hay algo de lo que no me pueda sentir más orgulloso es de que hayas podido verme llegar a ser ingeniero.

Manuel Troncoso García

Sevilla, 2020

Resumen

Cualquier persona que haya practicado el ciclismo sabe que si, en estático, inclina pocos ángulos la bicicleta hacia un lado y no tiene apoyos, caerá al suelo. Pero también sabe que, si comienza a pedalear, a una determinada velocidad, podrá inclinar la bicicleta ese mismo ángulo y el resultado será completamente distinto; trazará una curva sin que se produzca la caída.

Resulta interesante estudiar el proceso mecánico que dé respuesta a este hecho, y para ello, se ha realizado este trabajo, cuyo objetivo principal será estudiar la estabilidad de un modelo de bicicleta a distintas velocidades.

Se parte del modelo de bicicleta 'Whipple', formado por cuatro elementos: dos ruedas, alineadas y unidas mediante un cuadro trasero, y el manillar o eje de dirección delantero. Posteriormente, se ha establecido un sistema de 7 coordenadas para describir la posición y orientación de los cuatro sólidos que conforman el modelo. Estas son; la posición del punto de contacto de la rueda trasera con el suelo, el ángulo de guiñada del cuadro trasero con respecto al eje principal, el ángulo de vuelco de la bicicleta con respecto al suelo, el ángulo de giro o dirección del manillar, y los ángulos de giro de la rueda trasera y delantera. A partir de estos datos, se ha desarrollado de forma teórica la cinemática y dinámica del modelo, llegando así a obtener las ecuaciones del movimiento, y el procedimiento para la linealización de dichas ecuaciones del movimiento, lo que servirá para realizar el análisis de estabilidad.

A continuación, mediante el programa *Matlab*, se ha particularizado el procedimiento descrito de forma teórica para un modelo de bicicleta del departamento de Ingeniería Mecánica. A través de una combinación de cálculos simbólicos y numéricos, se ha conseguido realizar el análisis de estabilidad de la bicicleta a distintas velocidades.

Por último, se compararán los resultados obtenidos numéricamente con los obtenidos mediante una simulación experimental real, a modo de validación de resultados del análisis de estabilidad.

Al final del trabajo se incluyen los códigos de programación a partir de los cuales se han obtenido los resultados.

Abstract

How to ride a bike it is something instinctive for most of the people, but not everyone knows the dynamic aspects which made your ride stable or unstable. This paper has been developed to find an answer to this.

Based on the 'Whipple' bicycle model, it has been established the coordinates who define this model, and, after that, it has been studied the kinematics and dynamics aspects of the model. Those are: the position of the four rigid bodies, velocities and accelerations, as so the restrictions of the model and the equation of motion of the bicycle. Also, it has been described the procedure to linearised the equation of motion, which is necessary to the stability analysis.

Next, the equation of motion has been linearised and implemented in *Matlab*, particularising to a model of University of Seville's Mechanic Engineering Department. Through a combination of symbolic and numeric calculations, it has been developed the numerical stability analysis for different forward velocities.

Finally, those results have been compared with the results of a real experimental simulation, in order to validate the stability analysis.

Índice

Agradecimientos	7
Resumen	9
Abstract	11
Índice	13
Índice de figuras, tablas y gráficas	15
1 Introducción	17
2 Descripción del modelo	23
2.1 <i>Elementos</i>	23
2.2 <i>Parámetros</i>	24
2.3 <i>Configuración dimensional</i>	25
3 Cinemática	27
3.1 <i>Coordenadas del Sistema</i>	27
3.2 <i>Orientación y velocidad angular</i>	28
3.3 <i>Posición y velocidad de traslación</i>	30
3.4 <i>Restricciones</i>	32
3.5 <i>Aceleraciones angulares y de traslación</i>	33
4 Dinámica	35
4.1 <i>Ecuaciones de Newton-Euler de la bicicleta</i>	35
4.2 <i>Fuerzas del modelo</i>	36
4.3 <i>Ecuaciones del movimiento</i>	40
4.4 <i>Separación de coordenadas</i>	40
5 Análisis de estabilidad	43
5.1 <i>Ecuaciones del movimiento linealizadas</i>	43
5.2 <i>Método de análisis mediante autovalores y autovectores</i>	44
5.3 <i>Implementación en Matlab</i>	45
5.4 <i>Análisis de resultados</i>	48
5.5 <i>Simulación dinámica</i>	52
6 Conclusión	57
Anexo	59
Referencias	73

Índice de figuras, tablas y gráficas

Ilustración 1 – Bicicleta ‘Draisiana’. Fuente: Wikipedia, Draisine or Laufmaschine	17
Ilustración 2 – Bicicleta MacMillan. Fuente: Wikipedia, MacMillan Bicycle	18
Ilustración 3 – Bicicleta Michaux. Fuente: Wikipedia, Pierre Michaux	19
Ilustración 4 – Bicicleta de rueda alta. Fuente: Wikipedia, Historical bicycles	19
Ilustración 5 – Bicicleta segura ‘Rover’. Fuente: Science Museum Group, Rover ‘Safety’ bicycle	20
Ilustración 6 – Bicicletas actuales. Fuente: Google Images	21
Ilustración 7 - Esquema del modelo de bicicleta a estudiar [1]	24
Ilustración 8 - Esquema de coordenadas que definen el modelo [1]	28
Ilustración 9 - Bicicleta en posición arbitraria	31
Ilustración 10 - Modelo de bicicleta del departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación de la Universidad de Sevilla. Fuente: Cinemática de la bicicleta	45
Ilustración 11 - Modo Bamboleo o ‘Capsize’ en motocicletas. Fuente: Motorcycle Dynamics	49
Ilustración 12 - Bicicleta instrumentada en el laboratorio de ingeniería mecánica de la Universidad de Delft. [7]	53
Gráfica 1 – Autovalores en función de la velocidad de avance	50
Gráfica 2 – Comparación de de autovalores obtenidos de forma numérica y experimental en función de la velocidad de avance de la bicicleta. Fuente: [7]	54
Tabla 1 – Parámetros del modelo a particularizar	46
Tabla 2 – Autovalores característicos a las distintas velocidades de avance	52

1 INTRODUCCIÓN

Breve historia de la bicicleta

La historia de lo que hoy conocemos comúnmente como bicicleta se remonta al año 1817, en Alemania. Fue allí donde del barón alemán Karl Christian Ludwig Drais von Sauerbronn mostró lo que él mismo denominó 'Máquina Andante' (en alemán, 'Laufmaschine'), el primer vehículo de dos ruedas conocido.

La también conocida como 'Draisiana' en honor a su inventor Karl Drais, consta de dos ruedas alineadas, unidas mediante un marco de madera, con una pequeña montura donde descansa el conductor. Además, incorpora una vara de madera unida a la rueda delantera, que proporciona la dirección deseada al vehículo, el cual se impulsa mediante el empuje alternativo de un pie y otro.

A partir de entonces, este tipo de vehículos empezó a desarrollarse rápidamente y se le atribuyó la denominación de velocípedos.



Ilustración 1 – Bicicleta 'Draisiana'. Fuente: Wikipedia, Draisine or Laufmaschine

Algo más de dos décadas después, en 1839, apareció la primera bicicleta con pedales. Estos estaban conectados a la rueda trasera mediante un mecanismo de biela-manivela, lo que generaba la propulsión de la bicicleta. Este invento es atribuido al escocés Kirkpatrick Macmillan, aunque nunca patentó su modelo y propició que fuera copiado y comercializado por otros que, durante años, se atribuyeron su éxito.

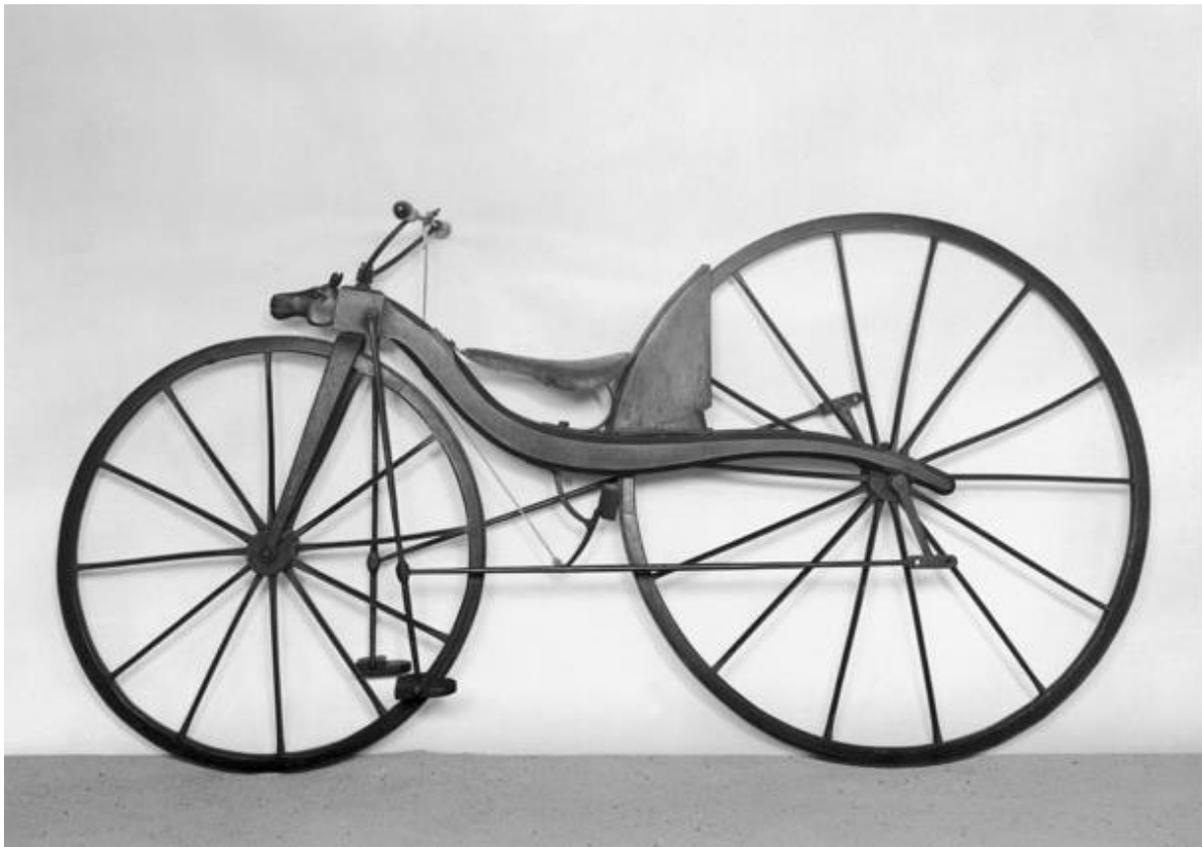


Ilustración 2 – Bicicleta MacMillan. Fuente: Wikipedia, MacMillan Bicycle

Durante la década de 1860, en Francia, se continuó con el desarrollo de este modelo de velocípedo a pedales, y fue Pierre Michaux quien comenzó con la producción industrial. No obstante, el modelo era muy pesado debido a su rígido cuadro y sus ruedas de hierro, tanto que en Inglaterra se ganó el sobrenombre de 'Boneshaker' (cacharro).



Ilustración 3 – Bicicleta Michaux. Fuente: Wikipedia, Pierre Michaux

Ya en 1870, el inventor inglés James Starley consiguió desarrollar el modelo hacia uno menos pesado y más veloz, muy característico por tener la rueda delantera un tamaño mucho mayor que la trasera. Este modelo, llamado 'Bicicleta de rueda alta', llevaba los pedales acoplados directamente a la rueda delantera, y consiguió obtener un gran éxito. No obstante, la gran altura en la que se situaba el ciclista provocaba unos riesgos que obligaban a limitar la velocidad de la bicicleta.



Ilustración 4 – Bicicleta de rueda alta. Fuente: Wikipedia, Historical bicycles

Con el objetivo de encontrar un modelo que permitiera un manejo y conducción con menos riesgos que los que entrañaba la 'Bicicleta de rueda alta', aparecieron muchos sistemas y avances técnicos entre 1880 y 1890. No obstante, el sistema que marcó el punto de inflexión llegó en 1885 de la mano de John Kemp Starley. Su bicicleta, conocida como 'Rover', fue el primer modelo exitoso de lo que también se llamaría 'Bicicleta Segura'.

Este modelo consiguió reducir el tamaño de la rueda delantera, e incorporó en los pedales un sistema de engranajes con transmisión por cadena a la rueda trasera. Se provocó así un mayor control de la velocidad de la bicicleta, al mismo tiempo que proporcionaba una gran seguridad al ciclista. La 'Bicicleta Segura' obtuvo tanto éxito que su modelo se globalizó rápidamente e, incluso en la actualidad, las bicicletas siguen un modelo muy similar a este.



Ilustración 5 – Bicicleta segura 'Rover'. Fuente: Science Museum Group, Rover 'Safety' bicycle

Desde entonces, los modelos se han ido especializando según el objetivo, encontrando en el mercado bicicletas de carretera, de montaña, de paseo, bicicletas plegables, etc. Pero, como se ha comentado, todas con un modelo prácticamente idéntico al que data de hace 135 años.



Ilustración 6 – Bicicletas actuales. Fuente: Google Images

Bicicleta Whipple

Tras la aparición de la ‘Bicicleta segura’, Francis John Welsh Whipple, un matemático y meteorólogo inglés, desarrolló en 1899 mientras estudiaba en Cambridge una tesis sobre la dinámica de la bicicleta. En dicha tesis [2], mediante el estudio de las ecuaciones dinámicas de los sólidos rígidos, Whipple demostró que las bicicletas, a un determinado rango de velocidades, eran auto estables. Además, para ello se sirvió de un modelo peculiar.

Dicho modelo, formado por cuatro sólidos y el suelo, es el que hoy día conocemos como ‘Modelo de Bicicleta Whipple’, y que ha servido como base para una gran cantidad de estudios posteriores a cerca de la cinemática y dinámica de la bicicleta.

Uno de estos estudios [1], es la referencia a partir de la cual se lleva a cabo este trabajo.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo en el que está basado el trabajo puede describirse mediante tres grupos; los elementos que lo componen, los parámetros prefijados que facilitarán el estudio dinámico de dicho modelo y su configuración dimensional. A continuación, se detallan en profundidad cada uno de estos grupos.

2.1 Elementos

El modelo de bicicleta 'Whipple' está constituido por cuatro elementos o sólidos, lateralmente simétricos e idealmente articulados. Estos son:

- Rueda trasera, **R**.
- Cuadro trasero, **B**. Incluye el cuerpo del ciclista.
- Ensamblaje delantero, **H**. Formado por el cuadro delantero de la bicicleta y el manillar.
- Rueda delantera, **F**.

Las ruedas son axisimétricas y tienen contacto ideal de "punta de cuchilla" con el suelo. Los cuadros B y H, por su parte, tienen simetría lateral en forma y distribución de masas. No obstante, un modelo que respeta esas simetrías permite ruedas no planas, es decir, con grosor. Se va a permitir tal grosor en las propiedades de inercia.

En ningún caso se tiene en cuenta el movimiento del ciclista en relación con el cuadro trasero, ni especificaciones estructurales más técnicas como amortiguamiento, fricción en articulaciones o modelos de neumáticos.

El contacto de los neumáticos con el suelo se modelará como punto de rodadura sin deslizamiento entre el suelo y la rueda. Los ejes de la rodadura sin deslizamiento son ortogonales a los planos de simetría de las ruedas, y se sitúan en el centro de estas.

Tal y como se refleja en el artículo de referencia de este trabajo, el modelo con el cual se trabaja incluye todas las características bien definidas del sólido rígido, pero se omiten un gran número de términos que requerirían modelos definidos de forma mucho más sutil y concreta. [1]

2.2 Parámetros

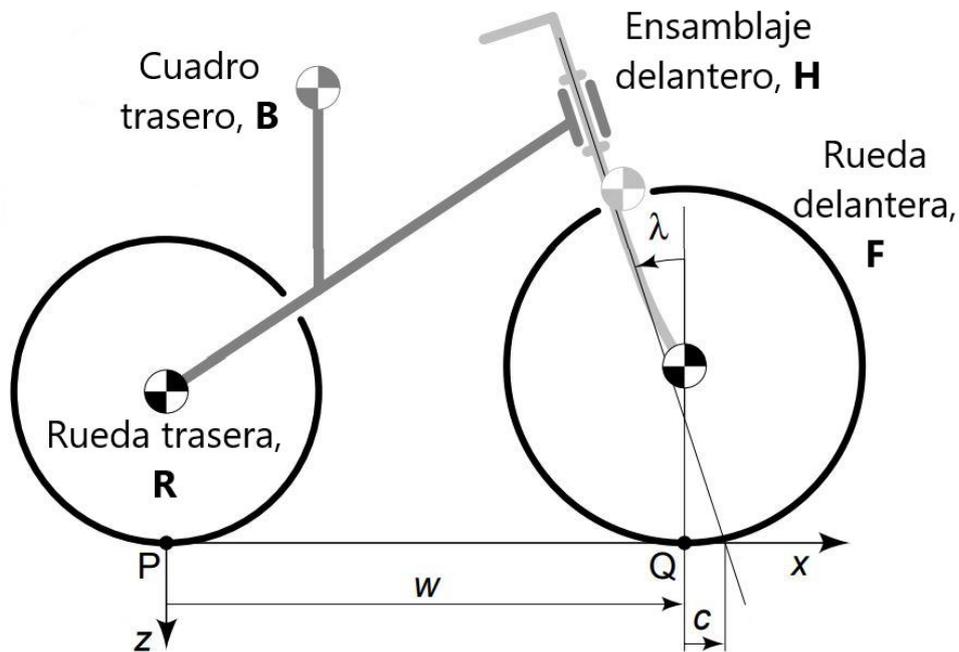


Ilustración 7 - Esquema del modelo de bicicleta a estudiar [1]

En la *Ilustración 7*, se muestran los parámetros de diseño que definirán el modelo en estudio. Para cada uno de los cuatro sólidos de la bicicleta, la localización de su centro de masa está expresada con respecto a las coordenadas x y z mostradas en la figura, y tomando como punto de referencia el punto de contacto de la rueda trasera con el suelo, P . Como se muestra, la dirección positiva del eje x es la que apunta hacia la rueda delantera, la del eje z es la que apunta hacia el suelo o hacia abajo, y la dirección positiva del eje y será saliendo del papel hacia el lector.

El modelo estudiado estará definido por un total de 25 parámetros, tal cual se puede observar en el artículo de referencia. [1].

Rueda trasera R

Se llamará R^R al radio de la rueda trasera, con centro de gravedad en el centro de esta, y masa m^R . El momento de inercia sobre su eje vendrá determinado por I_{Ryy} , mientras el momento de inercia sobre cualquier diámetro en el plano xz es I_{Rxx} . Como se dijo anteriormente, las ruedas no tienen que ser necesariamente planas, por lo que las inercias positivas son permitidas siempre que $I_{Ryy} \leq 2I_{Rxx}$.

Cuadro trasero B

Conectado al eje trasero de la bicicleta se encuentran la rueda R y el cuadro trasero B. Este cuadro trasero tiene masa m^B , y su centro de masa está localizado en el punto $(x_B, 0, z_B < 0)$. El momento de inercia del cuadro trasero viene dado por:

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{B_{xx}} & 0 & I_{B_{xz}} \\ 0 & I_{B_{yy}} & 0 \\ I_{B_{xz}} & 0 & I_{B_{zz}} \end{bmatrix}$$

Ensamblaje delantero H

El ensamblaje delantero (cuadro delantero y manillar) tiene masa m^H , y su centro de masa está localizado en el punto $(x_H, 0, z_H < 0)$. El momento de inercia del cuadro trasero viene dado por:

$$I_H = \begin{bmatrix} I_{H_{xx}} & 0 & I_{H_{xz}} \\ 0 & I_{H_{yy}} & 0 \\ I_{H_{xz}} & 0 & I_{H_{zz}} \end{bmatrix}$$

Rueda delantera F

El centro de gravedad de esta rueda también se encuentra en su centro. Su radio viene determinado por R^F , y su masa será m^F . Al igual que la rueda trasera, los momentos de inercia de la rueda delantera tendrán que cumplir que $I_{F_{yy}} \leq 2I_{F_{xx}}$. No obstante, los parámetros de la rueda delantera pueden ser distintos que los de la rueda trasera, de forma que es posible estudiar la importancia del momento angular de cada rueda independientemente.

Otros parámetros destacables de este modelo son la posición del punto de contacto de la rueda delantera con el suelo, Q, situado a una distancia w del punto de contacto de la rueda trasera P. Este punto Q se sitúa a una distancia c de la intersección del eje del manillar con el suelo, cuya dirección viene marcada por el ángulo λ , positivo según se muestra en la *Ilustración 7*.

Dos parámetros que no están definidos son la gravedad g y la velocidad nominal de avance v .

2.3 Configuración dimensional

Se parte de los 6 grados de libertad (3 de rotación y 3 de traslación) por cada sólido, sumando un total de 24 grados de libertad. Extrayendo 5 grados de libertad por cada una de las 3 articulaciones, y uno más por cada contacto de rueda con el suelo, llegamos a una configuración del sistema con 7 coordenadas, que nos permitirá el estudio dinámico que se busca. Estas coordenadas se describirán a continuación en la descripción de la cinemática del modelo.

3 CINEMÁTICA

En este apartado se definirán las diferentes coordenadas que se han seleccionado con el objetivo de tener el menor número de restricciones posibles, así como cada posición, velocidad y aceleración que componen la cinemática del modelo.

3.1 Coordenadas del Sistema

En la *Ilustración 8* están representados el conjunto de 7 coordenadas que configuran el sistema. Estas son:

1. Las coordenadas x_P e y_P , que definen la posición del punto de contacto de la rueda trasera con el suelo, P , con respecto al sistema global de referencia con origen en el punto O .
2. El ángulo de guiñada ψ que forma el eje x_{i1} del sistema de referencia del cuadro trasero con respecto a la coordenada X del sistema de referencia global.
3. El ángulo de vuelco o cabeceo ϕ de la bicicleta, formado por el eje z_{i1} y el eje z_{i2} . El ángulo de vuelco y el ángulo de guiñada determinan la orientación del plano que contiene al cuadro trasero de la bicicleta.
4. El ángulo de dirección δ , que se corresponde con el giro del eje x_4 del sistema de referencia del manillar con respecto al eje x_3 del sistema de referencia del cuadro trasero.
5. El ángulo de rodadura de la rueda trasera θ_R alrededor del eje y_2 del sistema de referencia de dicha rueda, y el de la rueda delantera θ_F alrededor del eje y_5 del sistema de referencia de la rueda delantera.

De esta forma, el vector de coordenadas quedaría definido como sigue:

$$\mathbf{q} = [x_P \ y_P \ \psi \ \phi \ \delta \ \theta_R \ \theta_F]^T \quad (3.1)$$

En la *Ilustración 8* también se puede apreciar la dirección en la que dichas coordenadas son positivas.

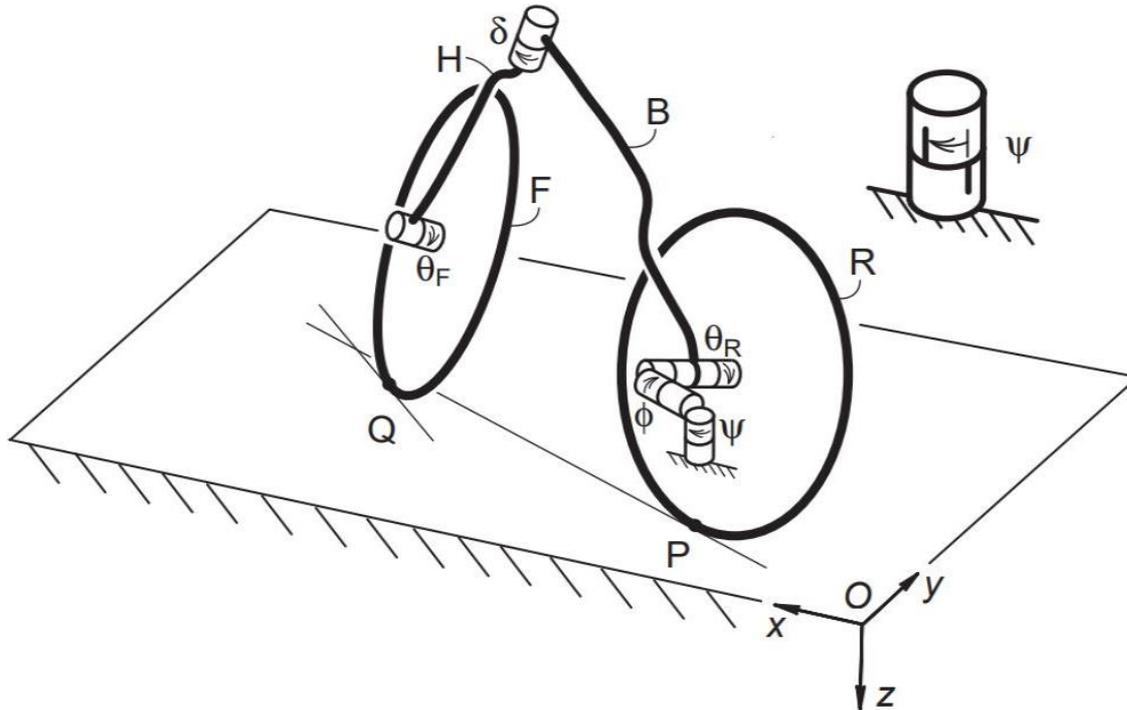


Ilustración 8 - Esquema de coordenadas que definen el modelo [1]

3.2 Orientación y velocidad angular

A partir de las coordenadas descritas en el punto anterior, es posible determinar con precisión la posición y orientación de todos los sólidos del sistema con respecto al sistema global de coordenadas.

Se pueden calcular las distintas matrices de rotación de los sistemas de referencia con respecto al sistema global como sigue:

$$\begin{aligned}
 A_{i1} &= A_{\psi} \\
 A_{i2} &= A_{\psi} * A_{\phi} = A_3 \\
 A_2 &= A_{\psi} * A_{\phi} * A_{\theta_R} \\
 A_4 &= A_{\psi} * A_{\phi} * A_{\delta} \\
 A_5 &= A_{\psi} * A_{\phi} * A_{\delta} * A_{\theta_F}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Donde:

$$A_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) \\ 0 & \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix},$$

$$A_{\delta} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\text{sen}(\delta) & 0 \\ \text{sen}(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\theta_R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & 0 & \text{sen}(\theta_R) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_R) & 0 & \cos(\theta_R) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$A_{\theta_F} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_F) & 0 & \text{sen}(\theta_F) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_F) & 0 & \cos(\theta_F) \end{bmatrix}$$

La velocidad angular de la rueda trasera en coordenadas globales viene dada por:

$$\omega_R = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\phi} i^{i1} + \dot{\theta}_R j^{i2} \quad (3.4)$$

Donde \mathbf{k} , i^{i1} y j^{i2} se corresponden con las componentes de los unitarios Z , x_{i1} e y_{i1} con respecto al sistema de referencia global. Estos vectores unitarios están representados en las distintas matrices de rotación, por lo que pueden obtenerse desarrollando los productos de las matrices dados en la ecuación (3.2). Para la rueda trasera:

$$\mathbf{k} = [A^1]_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i^{i1} = [A^{i1}]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \text{sen}(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j^{i2} = [A^{i2}]_2 = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\psi)\cos(\phi) \\ \cos(\psi)\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Otra forma de expresar la velocidad angular es agrupando estos vectores unitarios en una única matriz, quedando para la rueda trasera como:

$$\omega_R = G^R \dot{\mathbf{q}} \quad (3.6)$$

Donde la matriz G^R tiene la siguiente forma:

$$G^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(\psi) & 0 & -\text{sen}(\psi)\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\psi) & 0 & \cos(\psi)\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Con el objetivo de facilitar cálculos posteriores, es adecuado obtener la velocidad angular en coordenadas locales. Para el caso de la rueda trasera, la velocidad angular en el sistema local de referencia $\langle x_R y_R z_R \rangle$ viene dada por:

$$\bar{\omega}_R = \dot{\psi} \bar{\mathbf{k}} + \dot{\phi} \bar{i}^{i1} + \dot{\theta}_R \bar{j}^{i2} \quad (3.8)$$

Donde \bar{k} , \bar{i}^{i1} y \bar{j}^{i2} se corresponden con las componentes de los unitarios Z , x_{i1} e y_{i1} con respecto al sistema de referencia $\langle x_R y_R z_R \rangle$. Estos vectores se obtienen fácilmente a partir de las propiedades de ortogonalidad de las matrices de giro y de la composición de rotaciones como sigue:

$$\bar{k} = [(A^2)^T]_3 = \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta_R) \\ \operatorname{sen}(\phi) \\ \cos(\phi) \cos(\theta_R) \end{bmatrix}, \quad \bar{i}^{i1} = [(A_\phi * A_{\theta_R})^T]_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) \\ \operatorname{sen}(\theta_R) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\bar{j}^{i2} = [(A_{\theta_R})^T]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agrupando de nuevo los vectores en una única matriz, se puede expresar la velocidad angular en coordenadas locales como:

$$\bar{\omega}_R = \bar{G}^R \dot{q} \quad (3.10)$$

Siendo la matriz \bar{G}^R :

$$\bar{G}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta_R) & \cos(\theta_R) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(\phi) & \operatorname{sen}(\theta_R) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) \cos(\theta_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

De la misma forma que para la rueda trasera, se puede obtener la velocidad angular global y local para cada uno de los siguientes sólidos que forman la bicicleta.

$$\omega_i = G^i \dot{q}, \quad \bar{\omega}_i = \bar{G}^i \dot{q}, \quad i = R, B, H, F \quad (3.12)$$

3.3 Posición y velocidad de traslación

A continuación, se describe la obtención de la posición del centro de gravedad de cada uno de los sólidos de la bicicleta, partiendo por la rueda trasera:

$$r_R = r_P + A_{i2} \bar{r}_R^{i2} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\ \cos(\psi) \operatorname{sen}(\phi) \\ -\cos(\phi) \end{bmatrix} R^R \quad (3.13)$$

donde $\bar{r}_R^{i2} = [0 \ 0 \ -R^R]^T$ es la posición del centro de gravedad de la rueda trasera en el segundo sistema intermedio de referencia. Siguiendo la misma teoría, pueden obtenerse la posición del resto de sólidos como:

$$\begin{aligned}
r_B &= r_R + A_3 \bar{r}_B^3, & \bar{r}_B^3 &= [x_B \ 0 \ (-z_B + R^R)]^T \\
r_H &= r_B + A_4 \bar{r}_H^4, & \bar{r}_H^4 &= [(x_H - x_B) \ 0 \ (-z_H + z_B)]^T \\
r_F &= r_H + \bar{r}_F^4, & \bar{r}_F^4 &= [|HF| \cos(\lambda) \ 0 \ (-|HF| \cos(\lambda))]^T, \\
HF &= [(w - x_H) \ 0 \ (z_H - R^F)]^T
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

donde \bar{r}_B^3 representa el vector que va desde el centro de la rueda trasera al centro de gravedad del sólido B en el sistema de referencia del cuadro trasero, \bar{r}_H^4 representa el vector que va desde B hasta el centro de gravedad del manillar, H, y \bar{r}_F^4 el vector que va desde H hasta el centro de la rueda delantera en el sistema de referencia del manillar.

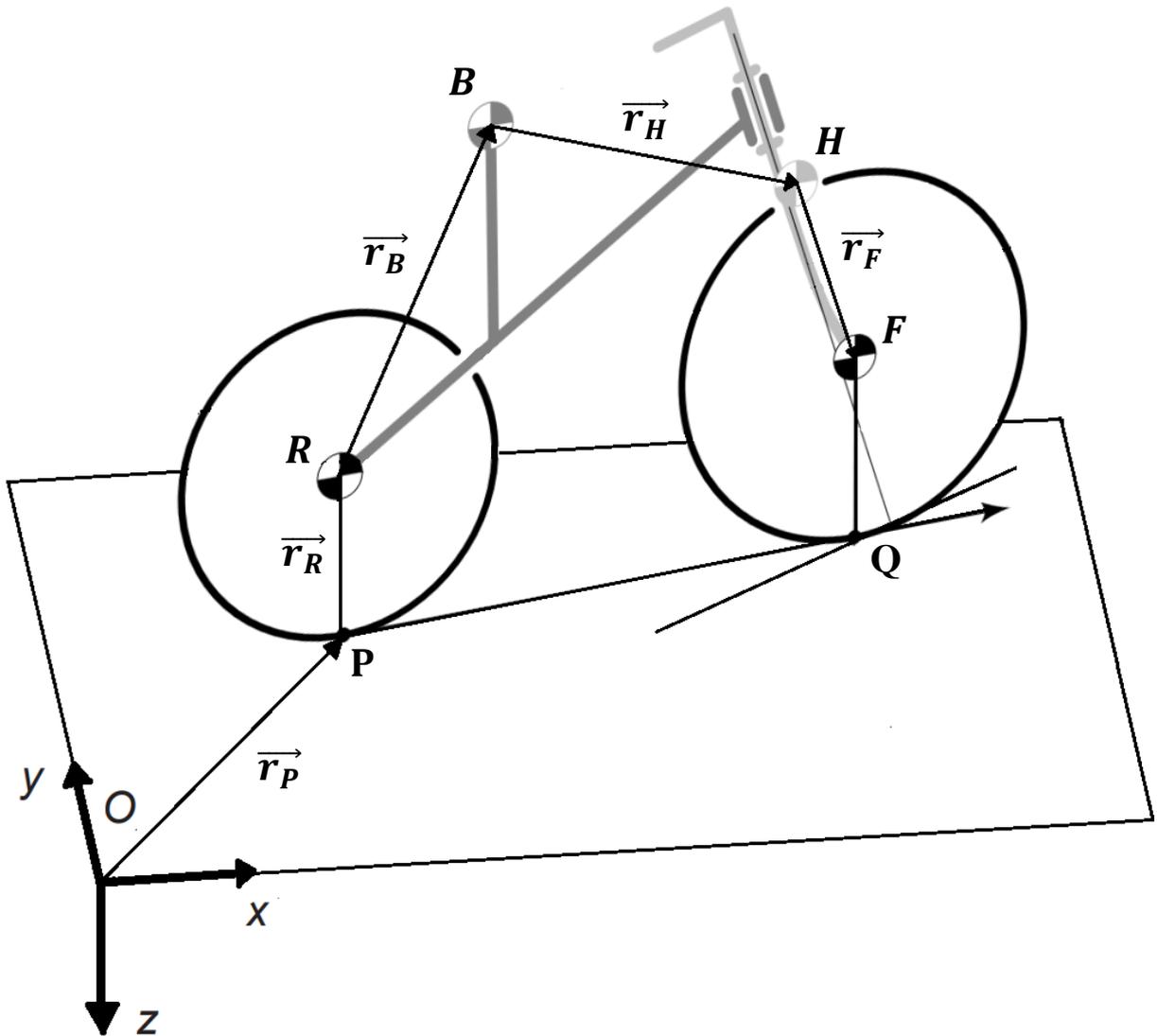


Ilustración 9 - Bicicleta en posición arbitraria

La velocidad de traslación del centro de la rueda trasera, por su parte, se obtiene derivando su posición respecto al tiempo:

$$v_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\psi} - \text{sen}(\psi)\cos(\phi)\dot{\phi} \\ -\text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\psi} + \cos(\psi)\cos(\phi)\dot{\phi} \\ \text{sen}(\phi)\dot{\phi} \end{bmatrix} R^R = H^R \dot{q} \quad (3.15)$$

donde H^R es la matriz jacobiana de la posición r_R con respecto a las coordenadas del sistema.

$$H^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -R^R \cos(\psi)\text{sen}(\phi) & -R^R \text{sen}(\psi)\cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -R^R \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi) & R^R \cos(\psi)\cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^R \text{sen}(\phi) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial r_R}{\partial q} \quad (3.16)$$

Al igual que para la rueda trasera, puede obtenerse la velocidad de traslación del resto de sólidos así:

$$v_i = H^i \dot{q}, \quad H^i = \frac{\partial r_i}{\partial q}, \quad i = R, B, H, F \quad (3.17)$$

3.4 Restricciones

Como se ha comentado, debido a la selección de coordenadas que se ha establecido, nuestro sistema tendrá el mínimo número de ecuaciones de restricción posibles. Estas restricciones serán un conjunto de restricciones no holónomas, correspondientes a la rodadura sin deslizamiento de las ruedas de la bicicleta.

Las ecuaciones de restricción serán 4, dos ecuaciones por cada rueda, y garantizan que la velocidad en el punto de contacto de la rueda con el suelo es igual a cero. Por tanto, para la rueda trasera, estas ecuaciones de restricción pueden obtenerse como:

$$v_P = v_R + \omega_R \wedge r_{RP}, \quad r_{RP} = A^{i2} [0 \ 0 \ R^R]^T$$

Donde:

$$v_P = \begin{bmatrix} \dot{x}_P + R^R \cos(\psi)\dot{\theta}_R \\ \dot{y}_P + R^R \text{sen}(\psi)\dot{\theta}_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Como sabemos que, por la restricción de rodadura sin deslizamiento, $v_P = 0$, las ecuaciones de restricción $C^R(q, \dot{q}) = 0$ serán:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_P + R^R \cos(\psi) \dot{\theta}_R &= 0 \\ \dot{y}_P + R^R \text{sen}(\psi) \dot{\theta}_R &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Estas pueden escribirse de forma matricial como:

$$B^R(q) \dot{q} = 0, \quad B^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R^R \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & R^R \text{sen}(\psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

La matriz B^R también puede obtenerse como:

$$B^R = \frac{\partial C^R(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

Para la obtención de las dos ecuaciones de restricción restantes se sigue el mismo proceso.

$$\left. \begin{aligned} v_Q = 0 &\rightarrow \left. \begin{aligned} v_{Q_x} &= 0 \\ v_{Q_y} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow C^F(q, \dot{q}) = 0 \\ B^F &= \frac{\partial C^F(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \rightarrow B^F(q) \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones de restricción vendrán determinadas por:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C^R(q, \dot{q}) \\ C^F(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

3.5 Aceleraciones angulares y de traslación

La aceleración angular de cada sólido se obtiene derivando con respecto al tiempo las expresiones que aparecen en la ecuación (3.12)

$$\alpha_i = G^i \ddot{q} + g^i \dot{q}, \quad \bar{\alpha}_i = \bar{G}^i \ddot{q} + \bar{g}^i \dot{q} \quad (3.21)$$

Donde:

$$g^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial q}, \quad \overline{g^i} = \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial q}, \quad i = R, B, H, F \quad (3.22)$$

Siguiendo el mismo procedimiento con las expresiones de la (3.17) se obtienen las aceleraciones de traslación:

$$a_i = H^i \ddot{q} + h^i \dot{q}, \quad h^i = \frac{\partial (H^i \dot{q})}{\partial q}, \quad i = R, B, H, F \quad (3.23)$$

Además, a partir de las relaciones cinemáticas vistas en los apartados 3.21 y 3.23, el vector de aceleraciones puede definirse como:

$$\begin{bmatrix} \alpha^B \\ \vdots \\ \alpha^F \\ \alpha^B \\ \vdots \\ \alpha^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^B \\ \vdots \\ H^F \\ G^B \\ \vdots \\ G^F \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} h^B \\ \vdots \\ h^F \\ g^B \\ \vdots \\ g^F \end{bmatrix} \dot{q} = L\ddot{q} + l\dot{q} \quad (4.4)$$

Utilizando las nuevas expresiones, se pueden reescribir las ecuaciones como:

$$\widehat{M}(L\ddot{q} + l\dot{q}) = \widehat{Q} + \widehat{Q}_v \quad (4.5)$$

Resulta conveniente escribir estas ecuaciones en función de las coordenadas del modelo, q . Para ello, bastaría con pre multiplicar la ecuación (4.5) por la matriz L^T y reagrupar los términos:

$$M\ddot{q} = Q + Q_v \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) representa las ecuaciones de Newton-Euler en función de el vector de coordenadas q , donde:

$$M = L^T \widehat{M} L, \quad Q = L^T \widehat{Q}, \quad Q_v = L^T (\widehat{Q}_v - \widehat{M}l\dot{q})$$

4.2 Fuerzas del modelo

En las ecuaciones de Newton-Euler (4.6), se observa el término Q , correspondiente a las fuerzas generalizadas del modelo. Este vector contiene las fuerzas aplicadas y las fuerzas de reacción generalizadas.

$$Q = Q_{ap} + Q_{reacc} \quad (4.7)$$

Fuerzas aplicadas

Dentro de las fuerzas aplicadas generalizadas del modelo, se encuentra la fuerza debida a la gravedad y la fuerza debida a la acción del ciclista durante el manejo de la bicicleta, de forma que:

$$Q_{ap} = Q_{grav} + Q_{acción} \quad (4.8)$$

Para la obtención de dichas fuerzas se aplicará el principio de las potencias virtuales, según el cual, la potencia virtual (o par) de una fuerza está definida por el producto escalar del vector de fuerza generalizada por el vector de velocidades virtuales. Este principio puede extenderse al caso de sólidos rígidos [5] como se muestra a continuación.

- Fuerza generalizada gravitatoria

Cada uno de los cuatro sólidos del modelo tiene un peso, que no es más que un vector aplicado en su centro de gravedad con dirección Z positiva.

$$F_{grav}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m^i g \end{bmatrix}, \quad i = R, B, H, F \quad (4.9)$$

La potencia virtual debida a dicha fuerza vendrá determinada por:

$$\dot{W}_{grav}^* = \sum_{i=R}^F (v_i^*)^T F_{grav}^i \quad (4.10)$$

Donde la velocidad virtual puede obtenerse como:

$$v_i^* = H^i \dot{q}^* \quad (4.11)$$

De forma que:

$$\dot{W}_{grav}^* = (\dot{q}^*)^T \sum_{i=R}^F H^{iT} F_{grav}^i \quad (4.12)$$

Finalmente, el vector de fuerza generalizada gravitatoria es:

$$Q_{grav} = \sum_{i=R}^F H^{iT} F_{grav}^i \quad (4.13)$$

- Fuerza generalizada de acción

En base al artículo referencia de este trabajo [1], con el objetivo de marcar alguna referencia numérica, se van a despreciar todos los términos de fuerzas generalizadas excepto la fuerza gravitatoria, que se ha mostrado anteriormente.

Además de la fuerza gravitatoria, vamos a considerar una distribución de fuerzas que actúan en diferentes puntos de la bicicleta, F_i . Esta distribución de fuerzas va a permitir la obtención de 3 fuerzas generalizadas, escribiendo la potencia virtual que asocia dicha distribución de fuerzas con una distribución de perturbaciones aleatorias de velocidad.

$$P = \sum F_i \Delta v_i \quad (4.14)$$

Las fuerzas o pares generalizados serán combinaciones lineales de las componentes de las distintas fuerzas aplicadas F_i . Estos pares son:

- El par de propulsión, T_{θ_R} , que actúa como un momento en la rueda trasera.
- El par de inclinación, T_{ϕ} . Cualquier fuerza que actúe de forma perpendicular contra el cuadro trasero y en el punto de contacto trasero influirá sólo a este par. Una fuerza lateral, como el viento, contribuirá principalmente al par de inclinación.
- El par de dirección, T_{δ} . En un modelo simplificado, este par equivaldría al giro del ciclista sobre el manillar. Las fuerzas laterales pueden influir de diferente forma dependiendo de su proyección.

La potencia virtual asociada a cada uno de estos pares se calcula como:

$$\dot{W}_{accion}^* = (\overline{\omega}_B^*)^T \begin{bmatrix} T_{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (\overline{\omega}_H^*)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{\delta} \end{bmatrix} + (\overline{\omega}_R^*)^T \begin{bmatrix} 0 \\ T_{\theta_R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Como la velocidad angular es:

$$\overline{\omega}_i = \overline{G}^i \dot{q}^* \quad (4.16)$$

La potencia puede reescribirse como:

$$\dot{W}_{accion}^* = (\dot{q}^*)^T \left(\overline{G}^B{}^T \begin{bmatrix} T_\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overline{G}^H{}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_\delta \end{bmatrix} + \overline{G}^R{}^T \begin{bmatrix} 0 \\ T_{\theta_R} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.17)$$

Y, por tanto, se puede deducir y simplificar el vector de fuerza generalizada de acción como:

$$Q_{accion} = T_\phi \overline{G}^B(1,:){}^T + T_\delta \overline{G}^H(3,:){}^T + T_{\theta_R} \overline{G}^R(2,:){}^T \quad (4.18)$$

Este vector puede escribirse de forma más compacta como una multiplicación de dos vectores:

$$Q_{accion} = [\overline{G}^B(1,:){}^T \quad \overline{G}^H(3,:){}^T \quad \overline{G}^R(2,:){}^T] \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \\ T_{\theta_R} \end{bmatrix} = S T \quad (4.19)$$

Donde T es el vector que contiene los 3 pares de acción del ciclista y S las filas de las matrices \overline{G}^i .

Fuerzas de reacción

Las fuerzas de reacción en un sistema sujeto a restricciones no holónomas, como es el caso de nuestro modelo, se calculan como sigue:

$$Q_{reacc} = C_q^T \lambda \quad (4.20)$$

donde la matriz C_q es la matriz jacobiana de las restricciones con respecto al vector de velocidades generalizadas.

$$C_q = \frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \quad (4.21)$$

4.3 Ecuaciones del movimiento

Conociendo ya todos los términos correspondientes a las fuerzas del modelo Q , podemos reescribir las ecuaciones de Newton-Euler, que se corresponden con las ecuaciones del movimiento de la bicicleta en forma de ecuaciones diferenciales algebraicas:

$$M\ddot{q} + C_q^T \lambda = Q_{grav} + Q_{acción} + Q_v$$

Y de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & D^T \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{grav} + Q_{acción} + Q_v \\ -\dot{D}\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.4 Separación de coordenadas

Se han obtenido las ecuaciones del movimiento de la bicicleta en forma de ecuaciones algebraicas diferenciales (DAE) y, en este apartado, se busca reescribirlas en forma de ecuaciones ordinarias diferenciales (ODE), en función de las coordenadas independientes del sistema.

Para la elección de las coordenadas independientes, partimos del sistema con una configuración de 7 coordenadas, como se vio en el apartado 2.3. Además, el sistema tiene 4 restricciones no holónomas de rodadura sin deslizamiento, las cuales también se mostraron con anterioridad (Apartado 3.4). Por tanto, tenemos un sistema con tres grados de libertad: el ángulo de cabeceo ϕ , el ángulo de dirección δ y el ángulo de rotación de la rueda trasera θ_R .

Sin embargo, se sabe que el ángulo de rotación de la rueda trasera determinará la velocidad de avance de la bicicleta, ya que es provocado por la acción del ciclista. Por tanto, y suponiendo una velocidad de avance constante, se puede aceptar que:

$$v = \dot{\theta}_R R^R \quad \longrightarrow \quad \theta_R - \frac{v}{R^R} t = 0 \quad (4.23)$$

De esta forma, añadiendo la nueva restricción puede eliminarse uno de los tres grados de libertad (el correspondiente a la variable θ_R). Resultará un sistema formado por 7 coordenadas y 5 ecuaciones de restricción (4 restricciones no holónomas de rodadura sin deslizamiento y una restricción holónoma de movilidad) y, por tanto, con 2 grados de libertad.

La selección de coordenadas independientes quedará tal que:

$$q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_d \end{bmatrix}, \quad q_i = \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \end{bmatrix}, \quad q_d = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ \psi \\ \theta_R \\ \theta_F \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Mediante el 'Método generalizado de partición de coordenadas' [5] se obtendrá el sistema ODE que se busca. Para ello, se deriva con respecto al tiempo las ecuaciones de restricción del sistema y se obtiene un sistema de ecuaciones con respecto a las coordenadas del sistema así:

$$C_q \dot{q} = -C_t \quad (4.25)$$

donde C_q representa la matriz jacobiana de las restricciones (incluyendo la restricción de movilidad). Y separando las coordenadas:

$$C_{q_i} \dot{q}_i + C_{q_d} \dot{q}_d = -C_t \quad (4.26)$$

Despejando las velocidades dependientes:

$$\dot{q}_d = -C_{q_d}^{-1} (C_{q_i} \dot{q}_i + C_t) \quad (4.27)$$

Por tanto, el vector de velocidades puede escribirse en función de las coordenadas independientes como:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -C_{q_d}^{-1} C_{q_i} \end{bmatrix} \dot{q}_i + \begin{bmatrix} I \\ -C_{q_d}^{-1} C_t \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Siendo I la matriz identidad con dimensión 2×2 . Estas ecuaciones pueden escribirse de forma más compacta como:

$$\dot{q} = N \dot{q}_i + O, \quad N = \begin{bmatrix} I \\ -C_{q_d}^{-1} C_{q_i} \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} I \\ -C_{q_d}^{-1} C_t \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Derivando la ecuación (4.28) con respecto al tiempo:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{O}} \quad (4.30)$$

E introduciendo $\ddot{\mathbf{q}}$ en la ecuación de movimiento (4.22):

$$\mathbf{M}(\mathbf{N}\ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{O}}) + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{acción} + \mathbf{Q}_v \quad (4.31)$$

Y pre multiplicando por la matriz \mathbf{N} :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{N}^T \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}^T (\mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{acción} + \mathbf{Q}_v) - \mathbf{N}^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{O}}) \quad (4.32)$$

De forma más compacta:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{N}^T \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_i$$

Y como se sabe que el producto de $\mathbf{N}^T \mathbf{C}_q^T$ va a ser igual a cero, la ecuación (4.31) se reduce a:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i) \quad (4.33)$$

Donde

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N}, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{N}^T (\mathbf{Q}_{grav} + \mathbf{Q}_{acción} + \mathbf{Q}_v - \mathbf{M}(\dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{O}}))$$

La ecuación (4.33) representa el conjunto mínimo de ecuaciones ordinarias diferenciales (ODE) en función de las coordenadas independientes.

5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

5.1 Ecuaciones del movimiento linealizadas

Hasta ahora, todo lo que se ha mostrado en los apartados anteriores no es más que el proceso mediante el cual obtenemos las ecuaciones (4.32), las cuales definen el movimiento de la bicicleta en función de los dos parámetros independientes.

La importancia de este conjunto mínimo de ecuaciones ordinarias diferenciales es que, siguiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos en el entorno de un movimiento de la bicicleta constante, se pueden combinar linealmente para obtener un conjunto equivalente de ecuaciones linealizadas.

Por tanto, se sabe que una solución para las ecuaciones del movimiento puede obtenerse con un avance recto ($\delta = 0$), en posición vertical ($\phi = 0$) y velocidad de avance constante ($v = -\dot{\theta}_R R^R$). El resto de las coordenadas pueden considerarse 'ignorables' y tomar valor nulo para la linealización [1]. Por tanto, consideraremos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \dot{\mathbf{q}} &= [v \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -v/R^R \ -v/R^F]^T \\ \ddot{\mathbf{q}} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

Además, se sabe que los sistemas mecánicos obtienen las ecuaciones linealizadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (5.1)$$

Donde las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} se obtienen como:

$$\mathbf{M} = M_i|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{lin}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(-Q_i) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{lin}, \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_{lin}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(-Q_i) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{lin}, \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_{lin}}$$

5.2 Método de análisis mediante autovalores y autovectores

Llegados a este punto, se tiene todo lo necesario para realizar el análisis de estabilidad de la bicicleta. La herramienta principal utilizada para la discusión de la estabilidad de un sistema linealizado de ecuaciones es el análisis de autovalores y autovectores. Esto es así ya que, los autovalores, están relacionados con la caracterización dinámica del sistema independientemente de las ecuaciones utilizadas para describir dicho sistema. [6].

Por tanto, podemos escribir las ecuaciones linealizadas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

De forma compacta:

$$\dot{y} = Ay$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Realizando el problema de autovalores y autovectores a la matriz A , como se ha comentado anteriormente, se podrá discutir la estabilidad del sistema de ecuaciones del movimiento linealizado.

Los autovalores se obtendrán de la siguiente forma:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (5.4)$$

Donde λ serán los autovalores que se corresponden con las frecuencias y amortiguamientos de la bicicleta. Por otra parte, los autovectores se obtienen así:

$$[A - \lambda_i I]\Phi_i = 0 \quad (5.5)$$

Siendo Φ_i los autovectores que representan los modos de vibración de la bicicleta.

Los parámetros que definen este modelo son los que se muestran en la siguiente tabla:

$v = \text{Variable}$	$I_{2x} = 0.0603 \text{ kg m}^2$
$R_T = 0.3 \text{ m}$	$I_{2y} = 0.12 \text{ kg m}^2$
$R_D = 0.35 \text{ m}$	$I_{3x} = 9.2 \text{ kg m}^2$
$x_3 = 0.47117 \text{ m}$	$I_{3y} = 11 \text{ kg m}^2$
$z_3 = 0.47749 \text{ m}$	$I_{3z} = 2.8 \text{ kg m}^2$
$x_4 = 0.97965 \text{ m}$	$I_{3zx} = (-2.4) \text{ kg m}^2$
$z_4 = 0.1014 \text{ m}$	$I_{4x} = 0.05892 \text{ kg m}^2$
$x_5 = 0.006 \text{ m}$	$I_{4y} = 0.06 \text{ kg m}^2$
$z_5 = -0.37 \text{ m}$	$I_{4z} = 0.00708 \text{ kg m}^2$
$m_2 = 2 \text{ kg}$	$I_{4xy} = 0 \text{ kg m}^2$
$m_3 = 85 \text{ kg}$	$I_{4xz} = 0.00756 \text{ kg m}^2$
$m_4 = 4 \text{ kg}$	$I_{4yz} = 0 \text{ kg m}^2$
$m_5 = 3 \text{ kg}$	$I_{5x} = 0.1405 \text{ kg m}^2$
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$I_{5y} = 0.28 \text{ kg m}^2$

Tabla 1 – Parámetros del modelo a particularizar

Donde v es la velocidad de avance de la rueda trasera, R_T y R_D los radios de la rueda delantera y trasera respectivamente, $\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ son las coordenadas locales del centro de gravedad de cada solido i , m_i su respectiva masa, e $I_{i,eje}$ es el momento de inercia de cada respectivo eje.

A partir de este modelo, se ha desarrollado el cálculo simbólico tanto de la cinemática (Apartado 3) como de la dinámica del sistema (Apartado 4), hasta llegar a conseguir las ecuaciones del movimiento que se muestran en el apartado 4.22.

La única diferencia entre un modelo y otro es que, en este caso, en lugar de utilizar los parámetros geométricos λ , \mathbf{c} y \mathbf{w} (Apartado 2.2), se añade una nueva coordenada no generalizada, ξ . Esta coordenada no es más que un parámetro que facilita la localización del punto de contacto de la rueda delantera y su tangente en ese punto, de forma que se obtendrá fácilmente la restricción de contacto de la rueda delantera. Por tanto, a las restricciones que se muestran en la ecuación (3.20) se le añade esta restricción de contacto que se obtiene como sigue:

En primer lugar, se define la posición de un punto cualquiera de la rueda delantera y la dirección de la tangente a la rueda delantera en el punto de contacto

$$\bar{r}_Q = \begin{bmatrix} R_D \cos(\xi) \\ 0 \\ -R_D \sin(\xi) \end{bmatrix}, \quad \bar{t}_Q = \frac{\partial \bar{r}_Q}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -R_D \sin(\xi) \\ 0 \\ -R_D \cos(\xi) \end{bmatrix}, \quad \xi \in [0, 2\pi] \quad (5.7)$$

Siendo la posición absoluta

$$r_Q(q, \xi) = r_{G5} + A_5 \bar{r}_Q, \quad t_Q(q, \xi) = A_5 \bar{t}_Q, \quad \xi \in [0, 2\pi] \quad (5.8)$$

Y la restricción, al ser de contacto con el suelo, se caracterizará por el valor 0 en la componente Z de dichos vectores de posición absoluta, tal que:

$$\begin{aligned} [r_Q(q, \xi)]_Z &= 0 \\ [t_Q(q, \xi)]_Z &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Añadiendo esta nueva restricción, y siguiendo con el procedimiento desarrollado, pueden obtenerse las ecuaciones del movimiento del sistema.

Llegados a este punto, se consideró más oportuno realizar el resto del desarrollo mediante cálculos numéricos, puesto que los cálculos en simbólico generan problemas a la hora de invertir la matriz de restricciones, es decir, a partir de la ecuación (4.29) del desarrollo del trabajo.

Por tanto, se procede con la separación de coordenadas hasta la ecuación (4.33) del desarrollo, y se lleva a cabo la linealización para cada velocidad en un rango de velocidades entre el reposo ($v = 0$) y una velocidad $v = 10 \text{ m/s}$. Esta linealización, como se comentó anteriormente, se realiza en torno a la posición de equilibrio vertical de la bicicleta que, particularizando para este modelo concreto de bicicleta, vendrá determinada por $\theta = 0$ (avance recto) y $\gamma = 0$ (posición vertical). Si definimos el resto de las coordenadas como se hizo en el Apartado 5.1:

$$\begin{aligned} q &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \beta_{est} \ 0 \ 0 \ \xi_{est}]^T \\ \dot{q} &= [v \ 0 \ 0 \ 0 \ v/R^T \ 0 \ 0 \ v/R^T \ -v/R^D]^T \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\ddot{q} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Siendo β_{est} y ξ_{est} valores obtenidos al resolver las ecuaciones de restricción de contacto para cada velocidad.

Tal como se vio anteriormente, las ecuaciones linealizadas del sistema vendrán definidas por la ecuación (5.1), y se obtendrá un valor de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{K} y \mathbf{C} para cada valor de velocidad de avance. Siendo los valores, por ejemplo, para la velocidad $v = 10 \text{ m/s}$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 81.6037 & -2.7130 \\ -2.7130 & 0.3436 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.7941 & -7.6228 \\ 0.0319 & 0.3158 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.0000 & -337.7218 \\ 8.8111 & 19.9468 \end{bmatrix}$$

Por último, mediante la función *eig* propia de Matlab, se podrán obtener los autovalores y autovectores a partir de los cuales se puede realizar el análisis de estabilidad.

$$[\Phi \lambda] = \text{eig}(A)$$

Siendo A la matriz que se obtiene mediante la ecuación (5.3):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

Se obtiene un sistema de 4 orden, el cual devolverá cuatro autovalores. Cada uno de estos autovalores se asocian a una característica específica que marca la estabilidad de la bicicleta, y que será objeto de estudio en el siguiente apartado del trabajo.

En el *Anexo* de este trabajo se encuentran los distintos códigos de Matlab a partir de los cuales se ha conseguido estudiar la estabilidad de la bicicleta.

5.4 Análisis de resultados

Como se ha visto, se obtendrán una serie de autovalores los cuales se asocian a modos característicos de la estabilidad. Se sabe que, a velocidades suficientemente altas, los modos más significativos de la estabilidad son el vuelco o bamboleo ('capsize') y la curvatura o zigzagueo ('weave'). Además, se mostrará un tercer modo característico asociado a la rodadura de la bicicleta ('castering'). [1]

Bamboleo o 'Capsize'

El modo conocido como bamboleo de la bicicleta se corresponde con un autovalor real dominado por la inclinación del vehículo, sin tener en cuenta la oscilación de este, en forma de vibración o cabeceo de la rueda. A medida que la velocidad se incrementa en curva, la dirección de la bicicleta (controlada por la orientación de la rueda delantera) aumenta hacia el ángulo de inclinación, que a su vez también aumenta proporcionalmente. A una velocidad concreta, denominada como 'capsize speed', el movimiento de vuelco se mantiene constante, es decir, ni aumenta ni disminuye el vuelco. Si se sigue incrementando la velocidad el sistema es cada vez más inestable y, llegados al límite de inclinación del vehículo, la dirección de la rueda cambia repentinamente hacia la opuesta, provocando la caída de la bicicleta. En la siguiente ilustración, se muestra de forma gráfica ese modo en una motocicleta.

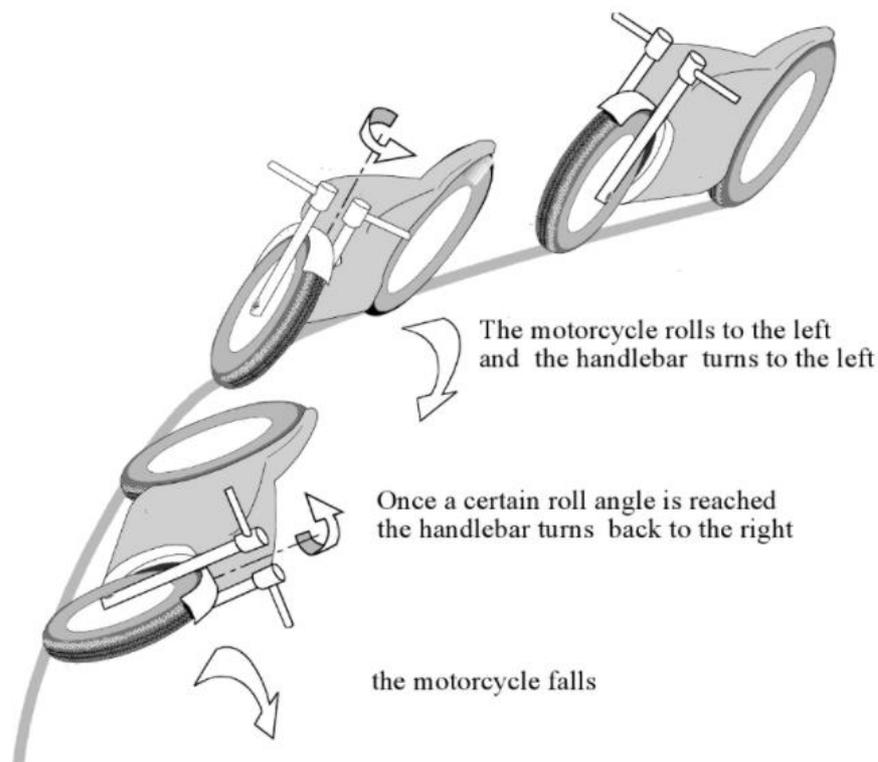


Ilustración 11 - Modo Bamboleo o 'Capsize' en motocicletas. Fuente: Motorcycle Dynamics

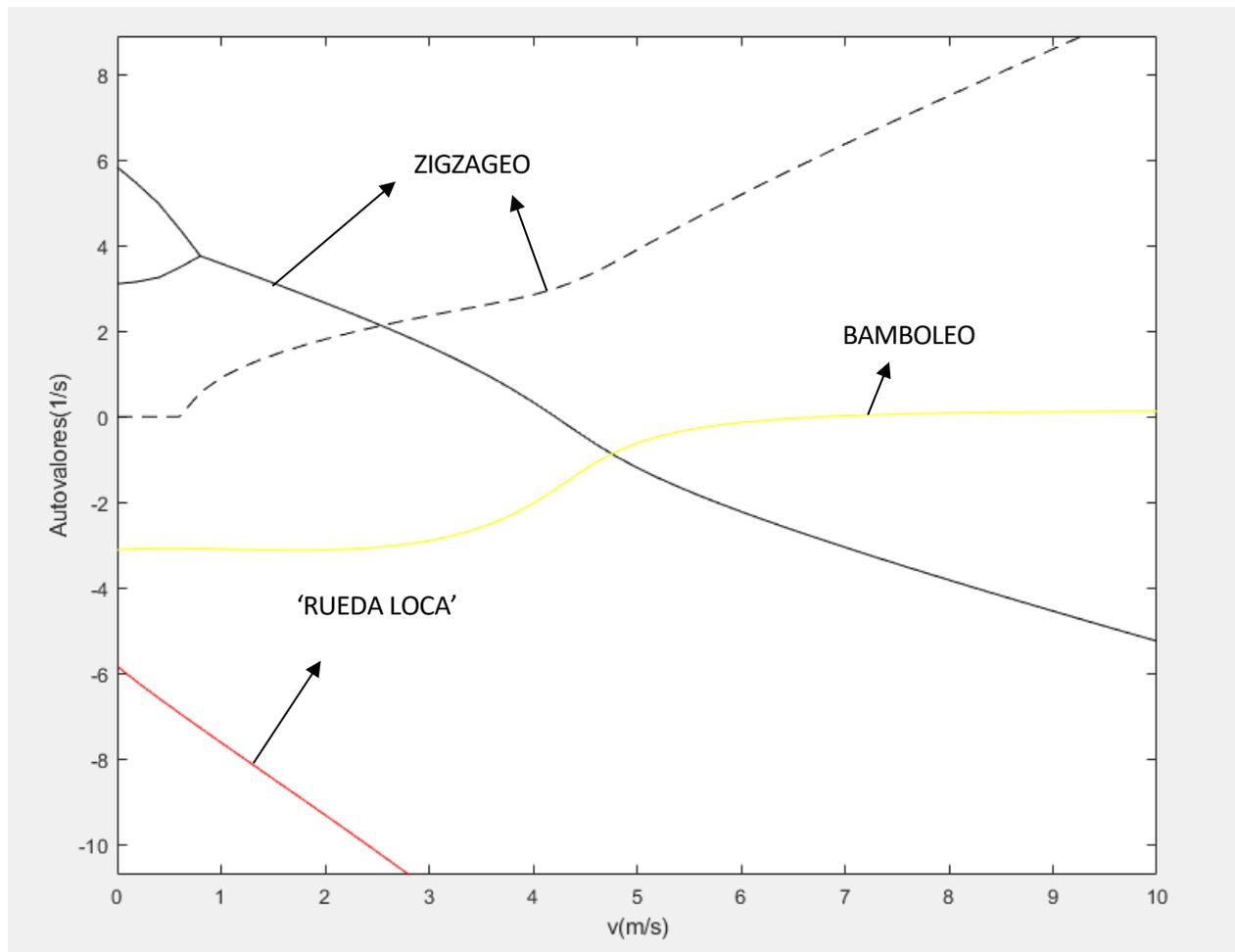
Zigzagueno o 'Weave'

El segundo modo característico hace referencia a un movimiento puramente oscilatorio provocado por el manillar, en el que la bicicleta se inclina y gira hacia un lado u otro. Tanto la inclinación como la dirección se ven afectadas de tal forma que, la bicicleta, gira hacia la dirección marcada por el manillar con un desfase debido a su inclinación, que le permite volver fácilmente a la posición vertical. Este modo es característico por la mayor inestabilidad (mayores oscilaciones) del manillar a velocidades bajas. Al igual que en el anterior modo, existe una velocidad concreta (velocidad de zigzagueno) a la que el movimiento oscilatorio ni aumenta ni decae.

Rodadura arbitraria o 'Castering'

Este tercer modo se asocia a la dirección de la rueda en su contacto frontal con el suelo, la cual busca seguir la trayectoria marcada por el ángulo de dirección. El modo de rodadura arbitraria se puede observar fácilmente en las ruedas frontales o 'ruedas locas' de un carrito de la compra.

A continuación, en la siguiente gráfica, se muestra la evolución de los autovalores en el rango de velocidades estudiado:



Gráfica 1 – Autovalores en función de la velocidad de avance

Se observa que, para velocidades próximas a cero (entre 0 y 0.6 m/s), los cuatro autovalores son reales. Hay dos autovalores positivos y dos autovalores negativos (dos pares cuyo valor es el mismo, pero con signo opuesto). Los autovalores positivos se corresponden con el movimiento de vuelco de la bicicleta, mientras que los negativos se asocian al movimiento de recuperación opuesto al vuelco, asimilándose la dinámica del movimiento de la bicicleta a un péndulo invertido. En este tramo, la bicicleta es inestable.

A partir de una velocidad $v = 0.7 \text{ m/s}$ aproximadamente, el sistema pasa a tener 2 autovalores reales y negativos, y dos autovalores complejos con parte real positiva, asociados a dos autovectores o modos de vibración complejos. En este tramo de velocidades, la bicicleta sigue siendo inestable, pero muestra un comportamiento oscilatorio debido a la aparición del zigzagueo con los pares conjugados complejos.

La velocidad de zigzagueo (en inglés, 'weave speed') se alcanza a una velocidad aproximada de $v_w = 4.3 \text{ m/s}$, de forma que la parte real de los autovalores complejos pasa a ser negativa. Por otro lado, la velocidad de bamboleo ('capsize speed') se alcanza a una velocidad aproximada de $v_c = 6 \text{ m/s}$, a partir de la cual se favorece a la inestabilidad del sistema. Por tanto, y como se observa en la, la bicicleta es totalmente auto estable a un rango de velocidades entre 4.3 y 6.8 m/s .

Por último, a partir de una velocidad de 6.8 m/s aproximadamente, vuelven a aparecer autovalores positivos que hacen que el sistema se vuelva inestable.

A pesar de que, según los resultados, el sistema se convierte inestable a partir de una velocidad de 6.8 m/s , la experiencia nos hace saber que, a velocidades altas, esto no es cierto. La respuesta a esto es que, aun siendo positivo el valor del modo que crea la inestabilidad analítica del sistema, este es muy próximo a cero. Esto provoca que el ciclista tenga tiempo suficiente para estabilizar el sistema aplicando las fuerzas necesarias, las cuales no se han tenido en cuenta para el desarrollo del trabajo. [3].

A partir de los resultados obtenidos en Matlab, se puede completar la siguiente tabla con los autovalores característicos a las distintas velocidades entre 0 y 10 m/s . Se puede observar fácilmente que los valores obtenidos son muy similares a los que aparecen en el artículo de referencia [2].

v (m/s)	$Re(\lambda_{wave})$	$Im(\lambda_{weave})$	$\lambda_{capsize}$	$\lambda_{castering}$
0	-	-	-3.1100	-5.8401
1	3.5824	0.9130	-3.0977	-7.6229
2	2.6622	1.8115	-3.1187	-9.3173
3	1.6440	2.3630	-2.8985	-11.0568
4	0.3423	2.8508	-2.0304	-12.8773
5	-1.1911	3.9028	-0.6145	-14.7821
6	-2.2185	5.1922	-0.1359	-16.7616
7	-3.0545	6.3792	0.0215	-18.8029
8	-3.8190	7.5065	0.0860	-20.8941
9	-4.5456	8.6000	0.1142	-23.0250
10	-5.2481	9.6729	0.1261	-25.1875

Tabla 2 – Autovalores característicos a las distintas velocidades de avance

5.5 Simulación dinámica

Para finalizar, resulta interesante comparar los resultados obtenidos mediante el cálculo analítico de la estabilidad de la bicicleta, con los resultados obtenidos en una simulación dinámica real. Para ello, y por la imposibilidad de realizar de forma autónoma dichos ensayos, se utilizarán los resultados obtenidos en un ensayo realizado por 3 investigadores en la Universidad de Delft [8].

El sistema experimental que se utilizó en dichos ensayos consta de una bicicleta instrumentada con el siguiente equipo de medida:

- Unos sensores, que medirán tanto el ángulo de vuelco, el ángulo de guiñada, la dirección y la rotación de la rueda trasera.
- Un ordenador portátil, conectado mediante USB y que se encargará de recolectar los datos registrados.

Tal y como se modeló para el estudio analítico, para la simulación tampoco se consideró al ciclista.

Como se puede observar en la *Ilustración 8*, se incorporaron a la bicicleta unos ‘ruedines’ que impedirán que la bicicleta caiga por completo en condiciones de inestabilidad.



Ilustración 12 - Bicicleta instrumentada en el laboratorio de ingeniería mecánica de la Universidad de Delft. [7]

Inicialmente, la bicicleta es empujada de forma manual y, tras esto, comienzan a recopilarse los datos de medidas mientras el sistema se mueve de forma libre por el suelo. A partir de estas medidas, mediante ajuste de curvas, los investigadores obtuvieron los distintos autovalores, los cuales se comparan con resultados analíticos obtenidos a través de las ecuaciones del movimiento del sistema.

Procedimiento del ensayo

La simulación se realizó con un total de 76 recorridos de la bicicleta, los cuales siguieron los tres mismos pasos:

- 1) Se aplicaba una alta velocidad a la bicicleta y, posteriormente, se forzaba una perturbación lateral mediante el golpeo del cuadro trasero.
- 2) Se dejaba que hiciera un recorrido de forma libre.
- 3) Se reducía la velocidad hasta la parada.

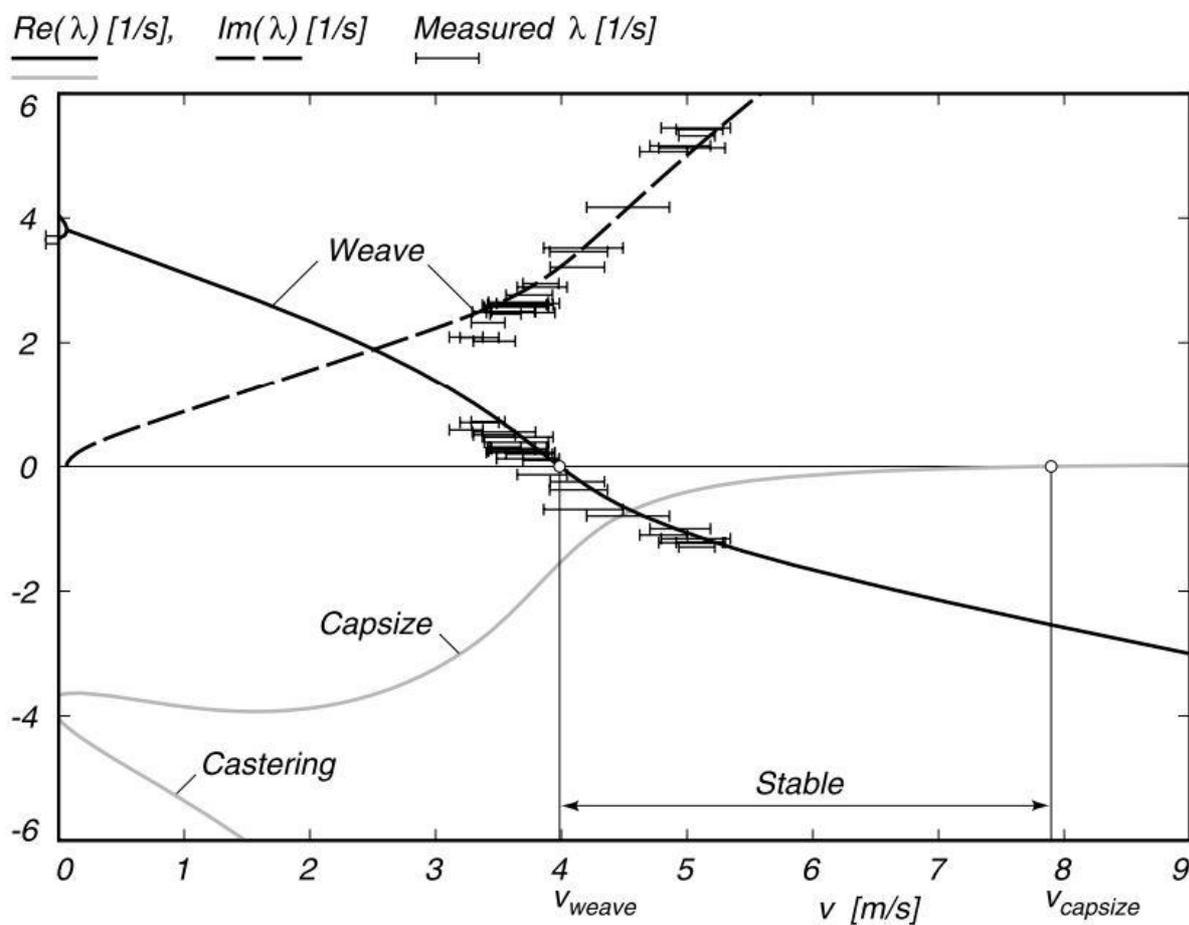
A velocidades por debajo del rango de velocidad estable no fue necesaria ningún tipo de perturbación externa. Por otro lado, los recorridos a velocidad estable mostraron como la bicicleta era capaz de realizar tramos en posición vertical sin ningún problema dinámico hasta forzar la perturbación.

La mayoría de los ensayos se hicieron a velocidades de transición entre el modo de zigzag estable

e inestable, realizándose únicamente 10 ensayos a velocidades mayores de 6 m/s, y 8 a velocidades de alrededor de 2 m/s. A velocidades menores de esta última, la bicicleta es tan inestable que se pueden medir muy pocos datos. Para cada uno de los ensayos realizados, los datos fueron inspeccionados mediante Matlab.

Discusión de resultados

En la siguiente gráfica se representan los datos obtenidos mediante la simulación de los investigadores frente a los datos estudiados analíticamente en el artículo de referencia, los cuales, como se ha visto anteriormente, son prácticamente idénticos que los obtenidos mediante la programación en Matlab.



Gráfica 2 – Comparación de de autovalores obtenidos de forma numérica y experimental en función de la velocidad de avance de la bicicleta. Fuente: [7]

En el primer rango de velocidades (entre 0 y 3 m/s), como se ha comentado, es muy difícil hacer una comparación debido a la poca cantidad de datos obtenidos a tan baja velocidad en comparación con el periodo del modo de zigzag.

A velocidades alrededor de 3 m/s , los datos obtenidos por ambos métodos son muy similares. La transición entre el modo inestable y el modo estable del sistema se refleja muy bien mediante esta comparativa.

Por tanto, se puede afirmar que los resultados obtenidos mediante el estudio de estabilidad a partir de la linealización de las ecuaciones del movimiento pueden validarse a partir de una simulación como la mostrada, obteniendo una buena concordancia entre ambos métodos.

Además, indica que, al no ser exactamente el mismo modelo de bicicleta para ambos estudios, tanto el comportamiento del neumático, el cuadro y el manillar no son importantes para la dinámica lateral de la bicicleta en un rango de velocidades entre 0 y 6 m/s . [7]

6 CONCLUSIÓN

En este trabajo se han detallado tanto los elementos, como los parámetros necesarios para la descripción completa de un modelo mecánico.

Además, se ha llevado a cabo el estudio cinemático, incluyendo la selección del mínimo número posible de coordenadas, así como el cálculo de posiciones, velocidades y aceleraciones. Para completar la cinemática, se han detallado las distintas ecuaciones de restricción del sistema.

Posteriormente, se ha proseguido con el análisis del proceso dinámico completo, que conlleva como resultado la ecuación del movimiento del sistema. Esta ecuación del movimiento, inicialmente en forma de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE), se ha transformado en un sistema de ecuaciones diferencial ordinario (ODE) mediante el método de la separación de variables, lo que sería útil posteriormente.

Tras esto, se ha procedido a linealizar las ecuaciones del movimiento para el posterior estudio de la estabilidad del sistema a través del análisis de autovalores de dichas ecuaciones linealizadas.

Mediante el programa Matlab, se ha particularizado todo el procedimiento teórico (previamente explicado) para el modelo de bicicleta del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sevilla. Así, se ha extraído la evolución de dichos autovalores a distintas velocidades, y se han representado gráficamente, viéndose así claramente los diferentes estados de estabilidad por los que pasa la bicicleta a diferentes velocidades. Cabe destacar que el rango de velocidades a las que la bicicleta es estable aumentaría significativamente si se tuviese en cuenta la acción del ciclista.

Por último, como método de validación de las conclusiones obtenidas mediante el análisis de las ecuaciones linealizadas, se ha descrito el ensayo de una simulación real del comportamiento dinámico de una bicicleta a diferentes velocidades, realizada por otros investigadores en la Universidad de Delft, y se han comparado dichos resultados con los obtenidos con anterioridad.

En este anexo se muestran los diferentes archivos y funciones de Matlab que se han desarrollado para la elaboración de este trabajo. Nada de esto hubiera sido posible sin los distintos archivos de referencia [3] [8] [9], así como todo el material e investigaciones de la cátedra de José Luis Escalona Franco, profesor de la asignatura Cinemática y Dinámica de Máquinas del autor de este trabajo.

Parametros.m

```
function Param=Parametros
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% ASIGNACION DE PARAMETROS %%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
t=0;  
V=5;  
Rt=0.3;  
Rd=0.35;  
x3=0.47116953168011;  
z3=0.47749269357378;  
x4=0.97965198323966;  
z4=0.10140015648217;  
x5=0.006;  
z5=-0.37;  
m2=2;  
m3=85;  
m4=4;  
m5=3;  
I2x=0.0603;  
I2y=0.12;  
I3x=9.2;  
I3y=11;  
I3z=2.8;  
I3zx=(-2.4);  
I4x=0.05892;  
I4y=0.06;  
I4z=0.00708;  
I4xy=0;  
I4xz=0.00756;  
I4yz=0;  
I5x=0.1405;  
I5y=0.28;  
g=9.81;  
C_aero=0.5;
```

```

Param(1)=t;
Param(2)=V;
Param(3)=Rt;
Param(4)=Rd;
Param(5)=x3;
Param(6)=z3;
Param(7)=x4;
Param(8)=z4;
Param(9)=x5;
Param(10)=z5;
Param(11)=m2;
Param(12)=m3;
Param(13)=m4;
Param(14)=m5;
Param(15)=I2x;
Param(16)=I2y;
Param(17)=I3x;
Param(18)=I3y;
Param(19)=I3z;
Param(20)=I3zx;
Param(21)=I4x;
Param(22)=I4y;
Param(23)=I4z;
Param(24)=I4xy;
Param(25)=I4xz;
Param(26)=I4yz;
Param(27)=I5x;
Param(28)=I5y;
Param(29)=g;
Param(30)=C_aero;

```

Bicicleta_simb.m

```

%%%%%%%%%% DEFINICION DE VARIABLES SIMBOLICAS %%%%%%%%%%
clear variables
clc

%Definicion coordenadas%
syms xc yc phi theta psi beta gamma epsilon xi real
syms dxc dyc dphi dtheta dpsi dbeta dgamma depsilon dxi real

q=[xc yc phi theta psi beta gamma epsilon xi]';
dq=[dxc dyc dphi dtheta dpsi dbeta dgamma depsilon dxi]';

%Definición constantes%
syms Rt Rd x3 z3 x4 z4 x5 z5 real
syms m2 m3 m4 m5 g cv real
syms I2x I2y real
syms I3x I3y I3z I3zx real
syms I4x I4y I4z I4xz real
syms I5x I5y real
syms Mdir Mpedal Mvuel real
syms V t real

%Tensores de inercia

```

```

I2(1,:) = [I2x 0 0 ];
I2(2,:) = [ 0 I2y 0 ];
I2(3,:) = [ 0 0 I2x];
I3(1,:) = [I3x 0 I3zx];
I3(2,:) = [ 0 I3y 0 ];
I3(3,:) = [I3zx 0 I3z];
I4(1,:) = [I4x 0 I4xz];
I4(2,:) = [ 0 I4y 0 ];
I4(3,:) = [I4xz 0 I4z];
I5(1,:) = [I5x 0 0 ];
I5(2,:) = [ 0 I5y 0 ];
I5(3,:) = [ 0 0 I5x];

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% CINEMATICA %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

%MATRICES DE ROTACION SIMPLE

```

A_phi(1,:) = [cos(phi) -sin(phi) 0];
A_phi(2,:) = [sin(phi) cos(phi) 0];
A_phi(3,:) = [0 0 1];

```

```

A_theta(2,:) = [0 cos(theta) -sin(theta)];
A_theta(3,:) = [0 sin(theta) cos(theta)];
A_theta(1,:) = [1 0 0];

```

```

A_psi(1,:) = [cos(psi) 0 sin(psi)];
A_psi(2,:) = [0 1 0];
A_psi(3,:) = [-sin(psi) 0 cos(psi)];

```

```

A_beta(1,:) = [cos(beta) 0 sin(beta)];
A_beta(2,:) = [0 1 0];
A_beta(3,:) = [-sin(beta) 0 cos(beta)];

```

```

A_gamma(1,:) = [cos(gamma) -sin(gamma) 0];
A_gamma(2,:) = [sin(gamma) cos(gamma) 0];
A_gamma(3,:) = [0 0 1];

```

```

A_epsilon(1,:) = [cos(epsilon) 0 sin(epsilon)];
A_epsilon(2,:) = [0 1 0];
A_epsilon(3,:) = [-sin(epsilon) 0 cos(epsilon)];

```

%MATRICES DE ROTACION DE LOS SISTEMAS DE REFERENCIA DE LOS SOLIDOS E INTERMEDIOS

```

A1=A_phi;
A2=A_phi*A_theta;
A2=A2*A_psi;
A3=A2*A_beta;
A4=A3*A_gamma;
A5=A4*A_epsilon;

```

```

i=[1;0;0];
j=[0;1;0];
k=[0;0;1];

```

%MATRICES PARA EL CALCULO DE VELOCIDADES ANGULARES

```
G2g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [Ai2*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G3g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G4g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [A3*k] [0;0;0] [0;0;0]];
G5g=[[0;0;0] [0;0;0] k [Ai1*i] [0;0;0] [Ai2*j] [A3*k] [A4*j] [0;0;0]];
```

```
G2l=[[0;0;0] [0;0;0] [A2'*k] [(A_theta*A_psi)'*i] [A_psi'*j] [0;0;0] [0;0;0]
[0;0;0] [0;0;0]];
G3l=[[0;0;0] [0;0;0] [A3'*k] [(A_theta*A_beta)'*i] [0;0;0] [A_beta'*j]
[0;0;0] [0;0;0] [0;0;0]];
G4l=[[0;0;0] [0;0;0] [A4'*k] [(A_theta*A_beta*A_gamma)'*i] [0;0;0]
[(A_beta*A_gamma)'*j] [A_gamma'*k] [0;0;0] [0;0;0]];
G5l=[[0;0;0] [0;0;0] [A5'*k] [(A_theta*A_beta*A_gamma*A_epsilon)'*i] [0;0;0]
[(A_beta*A_gamma*A_epsilon)'*j] [(A_gamma*A_epsilon)'*k] [A_epsilon'*j]
[0;0;0]];
```

%POSICIONES DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD EN LOCALES

```
rG2=[0 0 Rt]';
rG3=[x3 0 z3]';
rG4=[x4 0 z4]';
rG5=[x5 0 z5]';
```

%POSICIONES DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD EN GLOBALES

```
RG2=[xc yc 0]'+Ai2*rG2;
RG3=RG2+A3*rG3;
RG4=RG2+A3*rG4;
RG5=RG4+A4*rG5;
```

%MATRICES PARA EL CALCULO DE VELOCIDADES GLOBALES DE LOS CDG

```
H2=jacobian(RG2,q);
H3=jacobian(RG3,q);
H4=jacobian(RG4,q);
H5=jacobian(RG5,q);
```

%VELOCIDADES GLOBALES DE LOS CDG

```
VG2=H2*dq;
VG3=H3*dq;
VG4=H4*dq;
VG5=H5*dq;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%RESTRICCIONES%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

%Restricciones de contacto rueda delantera

```
RD=RG5+A5*[Rd*cos(xi);0;-Rd*sin(xi)];
RD=simplify(RD);
```

```
tD=diff(RD,xi);
tD=simplify(tD);
```

```

CCon=[RD(3) tD(3)]';
CqCon=simplify(jacobian(CCon,q));
CtCon(1:2,1)=[0 0]';
dCqCondq=simplify(jacobian(CqCon*dq,q)*dq);

%Restriccion de movilidad

CMov=psi-(V/Rt)*t;
CqMov=[0 0 0 0 1 0 0 0 0];
CtMov=-(V/Rt);
dCqMovdq=simplify(jacobian(CqMov*dq,q)*dq);

%Agrupamos las restricciones holonomas

C=[CCon' CMov']';
Cq=[CqCon' CqMov']';
Ct=[CtCon' CtMov']';
dCqdq=[dCqCondq' dCqMovdq']';

%Restricciones de rodadura sin deslizamiento

w2=G2g*dq;
rG2C=Ai2*[0 0 -Rt]';
VC=VG2+cross(w2,rG2C);
VC=simplify(VC);

w5=G5g*dq;
rD=A5*[Rd*cos(xi) 0 -Rd*sin(xi)]';
VD=VG5+cross(w5,rD);
VD=simplify(VD);

CRod=[VC(1) VC(2) VD(1) VD(2)]';
B=simplify(jacobian(CRod,dq));
dBdq=simplify(jacobian(B*dq,q)*dq);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%ECUACIONES DEL MOVIMIENTO%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

J2=(G21)'*I2*G21;
J3=(G31)'*I3*G31;

J4=(G41)'*I4*G41;
J5=(G51)'*I5*G51;

%Matriz de masa
M=simplify(m2*(H2)'*H2+J2+m3*(H3)'*H3+J3+m4*(H4)'*H4+J4+m5*(H5)'*H5+J5);

Mdq=M*dq;

%Energia cinetica
T=simplify(0.5*dq'*M*dq);

%Fuerzas de inercia cuadraticas en velocidad
Qv=simplify(-jacobian(Mdq,q)*dq+(jacobian(T,q))');

P2=[0; 0; -m2*g];

```

```

P3=[0; 0; -m3*g];
P4=[0; 0; -m4*g];
P5=[0; 0; -m5*g];

%Fuerzas de gravedad
Qgrav=H2'*P2+H3'*P3+H4'*P4+H5'*P5;

save M.mat M -mat;
save Qv.mat Qv -mat;
save Qgrav.mat Qgrav -mat;

save C.mat C -mat;
save Cq.mat Cq -mat;
save Ct.mat Ct -mat;
save dCqdq.mat dCqdq -mat;

save B.mat B -mat;
save dBdq.mat dBdq -mat;

```

Bicicleta_num.m

```

clear,clc

Param=Parametros;

%CALCULO DE ECUACIONES LINEALIZADAS Y ESTABILIDAD

if(1)

Vel=0:0.2:10;

for i=1:length(Vel)

V=Vel(i);

Param(2)=V;

[Mest,Cest,Kest]=linealiza_matrices(Param)

nind=2;

AA=zeros(2*nind);
AA(1:nind,nind+1:2*nind)=eye(nind);
AA(nind+1:2*nind,1:nind)=-Mest\Kest;
AA(nind+1:2*nind,nind+1:2*nind)=-Mest\Cest;
[Fi,Nu]=eig(AA);

TodosNu(:,i)=diag(Nu);
end

end

```

```

j=1;
for i=1:length(Vel)
    if Vel(i)<=1
        lams2(j)=real(TodosNu(1,i));
        Imweave(j)=imag(TodosNu(1,i));
        weave(j)=real(TodosNu(2,i));
        cap(j)=real(TodosNu(4,i));
        cas(j)=real(TodosNu(3,i));
        j=j+1;
    else if Vel(i)<=4.2
        lams2(j)=real(TodosNu(3,i));
        Imweave(j)=imag(TodosNu(3,i));
        weave(j)=real(TodosNu(4,i));
        cap(j)=real(TodosNu(2,i));
        cas(j)=real(TodosNu(1,i));
        j=j+1;
    else if Vel(i)<=4.8
        lams2(j)=real(TodosNu(1,i));
        Imweave(j)=imag(TodosNu(1,i));
        weave(j)=real(TodosNu(2,i));
        cap(j)=real(TodosNu(3,i));
        cas(j)=real(TodosNu(4,i));
        j=j+1;

        else
            lams2(j)=real(TodosNu(2,i));
            Imweave(j)=imag(TodosNu(2,i));
            weave(j)=real(TodosNu(3,i));
            cap(j)=real(TodosNu(1,i));
            cas(j)=real(TodosNu(4,i));
            j=j+1;
        end
    end
end
end

end

plot(Vel,lams2,'k',Vel,weave,'k',Vel,Imweave,'--k',Vel, cap,'y',Vel, cas,'r')
xlabel('v(m/s)')
ylabel('Autovalores(1/s)')

```

linealiza_matrices.m

```

function [Mest,Cest,Kest]=linealiza_matrices(Param)

%COORDENADAS INDEPENDIENTES

theta=0;
gamma=0;

dtheta=0;
dgamma=0;

```

```

ddtheta=0;
ddgamma=0;

qind=[theta gamma]';
dqind=[dtheta dgamma]';
ddqind=[ddtheta ddgamma]';

%COORDENADAS IGNORABLES

xc=0;
yc=0;
phi=0;
epsilon=0;

q_ign=[xc yc phi epsilon];

Ec=EcMov_Bicicleta(qind,dqind,ddqind,q_ign,Param);

incr=10^(-6);

for i=1:length(qind)
    qind(i)=qind(i)+incr;
    theta=qind(1);
    gamma=qind(2);
    Ec2=EcMov_Bicicleta(qind,dqind,ddqind,q_ign,Param);
    Kest(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    qind(i)=qind(i)-incr;
    theta=qind(1);
    gamma=qind(2);
end

for i=1:length(qind)
    dqind(i)=dqind(i)+incr;
    dtheta=dqind(1);
    dgamma=dqind(2);
    Ec2=EcMov_Bicicleta(qind,dqind,ddqind,q_ign,Param);
    Cest(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    dqind(i)=dqind(i)-incr;
    dtheta=dqind(1);
    dgamma=dqind(2);
end

for i=1:length(qind)
    ddqind(i)=ddqind(i)+incr;
    ddtheta=ddqind(1);
    ddgamma=ddqind(2);
    Ec2=EcMov_Bicicleta(qind,dqind,ddqind,q_ign,Param);
    Mest(:,i)=(Ec2-Ec)/incr;
    ddqind(i)=ddqind(i)-incr;
    ddtheta=ddqind(1);
    ddgamma=ddqind(2);
end

```

EcMov_Bicicleta.m

```
function Ec=EcMov_Bicicleta(qind,dqind,ddqind,q_ign,Param)

xc=q_ign(1);
yc=q_ign(2);
phi=q_ign(3);
epsilon=q_ign(4);

theta=qind(1);
gamma=qind(2);

dtheta=dqind(1);
dgamma=dqind(2);

q=zeros(9,1);
dq=zeros(9,1);

q(1)=xc;
q(2)=yc;
q(3)=phi;
q(4)=theta;
q(7)=gamma;
q(8)=epsilon;

%Calcula las coordenadas dependientes

%Estimación inicial
psi=0;
beta=2*pi-(pi/10);
xi=pi/2;

qdep0=[psi beta xi]';
qdep=fsolve(@coord_dep,qdep0,optimset('jacobian','on'),q,dq,Param);
q(5)=qdep(1); %psi
q(6)=qdep(2); %beta
q(9)=qdep(3); %xi

%Calcula las velocidades dependientes

[C Cq Ct dCqdq B dBdq]=calcula_restricciones(q,dq,Param);

D=[Cq' B']';
d=[-Ct' zeros(1,4)]';
Ddep=[D(:,1) D(:,2) D(:,3) D(:,5) D(:,6) D(:,8) D(:,9)];
Dind=[D(:,4) D(:,7)];
dqdep=Ddep\(-Dind*[dtheta dgamma]'+d);

dxc=dqdep(1);
dyc=dqdep(2);
dphi=dqdep(3);
dpsi=dqdep(4);
dbeta=dqdep(5);
depsilon=dqdep(6);
dxi=dqdep(7);

dq(1)=dxc;
dq(2)=dyc;
dq(3)=dphi;
dq(4)=dtheta;
```

```

dq(5)=dpsi;
dq(6)=dbeta;
dq(7)=dgamma;
dq(8)=depsilon;
dq(9)=dxi;

%Calcula los términos de las ecuaciones del movimiento

[C Cq Ct dCqdq B dBdq]= calcula_restricciones(q,dq,Param);

N(1:2,1:2)=eye(2);
N(3:9,1:2)=-Ddep\Dind;

dDdq=[dCqdq' dBdq']';

O(1:2,1)=zeros(2,1);
O(3:9,1)=-Ddep\dDdq;

[M Qv Qgrav]= calcula_MQ(q,dq,Param);

orden=[4 7 1 2 3 5 6 8 9];

%Reordena matrices y vectores

for i=1:length(orden)
    Qgrav2(i,1)=Qgrav(orden(i));
    Qv2(i,1)=Qv(orden(i));
    for j=1:length(orden)
        M2(i,j)=M(orden(i),orden(j));
    end
end

Mi=N'*M2*N;
Qi=N'*(Qv2+Qgrav2-M2*O);

Ec=Mi*ddqind-Qi;

```

calcula_restricciones.m

```

function [C Cq Ct dCqdq B dBdq]=calcula_restricciones(q,dq,Param)

xc=q(1);
yc=q(2);
phi=q(3);
theta=q(4);
psi=q(5);
beta=q(6);
gamma=q(7);
epsilon=q(8);
xi=q(9);

dxc=dq(1);
dyc=dq(2);
dphi=dq(3);
dtheta=dq(4);
dpsi=dq(5);
dbeta=dq(6);
dgamma=dq(7);

```

```

depsilon=dq(8);
dxi=dq(9);

t=Param(1);
V=Param(2);
Rt=Param(3);
Rd=Param(4);
x3=Param(5);
z3=Param(6);
x4=Param(7);
z4=Param(8);
x5=Param(9);
z5=Param(10);
m2=Param(11);
m3=Param(12);
m4=Param(13);
m5=Param(14);
I2x=Param(15);
I2y=Param(16);
I3x=Param(17);
I3y=Param(18);
I3z=Param(19);
I3zx=Param(20);
I4x=Param(21);
I4y=Param(22);
I4z=Param(23);
I4xy=Param(24);
I4xz=Param(25);
I4yz=Param(26);
I5x=Param(27);
I5y=Param(28);
g=Param(29);

load C.mat;
load Cq.mat;
load Ct.mat;
load dCqdq.mat;
load B.mat;
load dBdq.mat;

C=eval(C);
Cq=eval(Cq);
Ct=eval(Ct);
dCqdq=eval(dCqdq);
B=eval(B);
dBdq=eval(dBdq);

```

coord_dep.m

```
function [C,Cqdep]=coord_dep(qdep,q,dq,Param)

q(5)=qdep(1); %psi
q(6)=qdep(2); %bet
q(9)=qdep(3); %xi

[C Cq Ct dCqdq B dBdq]=calcula_restricciones(q,dq,Param);

Cqdep=[Cq(:,5) Cq(:,6) Cq(:,9)];
```

calcula_MQ.m

```
function [M,Qv,Qgrav]=calcula_MQ(q,dq,Param)

xc=q(1);
yc=q(2);
phi=q(3);
theta=q(4);
psi=q(5);
beta=q(6);
gamma=q(7);
epsilon=q(8);
xi=q(9);

dxc=dq(1);
dyc=dq(2);
dphi=dq(3);
dtheta=dq(4);
dpsi=dq(5);
dbeta=dq(6);
dgamma=dq(7);
depsilon=dq(8);
dxi=dq(9);

t=Param(1);
V=Param(2);
Rt=Param(3);
Rd=Param(4);
x3=Param(5);
z3=Param(6);
x4=Param(7);
z4=Param(8);
x5=Param(9);
z5=Param(10);
m2=Param(11);
m3=Param(12);
m4=Param(13);
m5=Param(14);
I2x=Param(15);
I2y=Param(16);
I3x=Param(17);
I3y=Param(18);
I3z=Param(19);
I3zx=Param(20);
I4x=Param(21);
I4y=Param(22);
I4z=Param(23);
```

```
I4xy=Param(24);  
I4xz=Param(25);  
I4yz=Param(26);  
I5x=Param(27);  
I5y=Param(28);  
g=Param(29);  
  
load M.mat;  
load Qv.mat;  
load Qgrav.mat;  
  
M=eval(M);  
Qv=eval(Qv);  
Qgrav=eval(Qgrav);
```


REFERENCIAS

- [1] Meijaard J.P., Papadopoulos J.M., Ruina A. and Schwab A.L., «Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review». Proc. R. Soc. Lond. A, Math. 463, 1955–1982 (2007)
- [2] Whipple F.J.W., «The stability of the motion of a bicycle». Q. J. Pure Appl. Math. 30, 312–348 (1899)
- [3] Escalona J.L., Recuero A.M., «A bicycle model for education in multibody dynamics and realtime interactive simulation». Multibody Syst. Dyn. 27(3), 383–402 (2012)
- [4] Shabana A.A., «Computational Dynamics». John Wiley & Sons (1994)
- [5] Shabana A.A., «Dynamics of Multibody Systems». 3rd edn. Cambridge University Press, Cambridge (2005)
- [6] Karnopp D., «Vehicle Stability». Marcel Dekker, New York (2004)
- [7] Kooijman J.D.G., Schwab A.L., Meijaard J.P., «Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle». Multibody Syst. Dyn 13, 115-132 (2008)
- [8] Escalona Franco, J.L. Cinemática de la bicicleta. Universidad de Sevilla (2009)
- [9] Escalona Franco, J.L. Dinámica de la bicicleta. Universidad de Sevilla (2009)

