Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Juegos cooperativos e índices de poder aplicados a la política.

Autor: Carlos Ruiz Contreras
Tutor: Manuel Ordóñez
Inmaculada Ventura Molina

Dpto. Matemática Aplicada II Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2023

Proyecto Fin de Carrera

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Teoría de juegos aplicado a la política

Autor:

Carlos Ruiz Contreras

Tutores:

Manuel Ordóñez Sánchez
Inmaculada Ventura Molina

Dpto. de Matemática Aplicada II Escuela Técnica
Superior de IngenieríaUniversidad de Sevilla
Sevilla, 2023

Trabajo Fin de Grado: Teoría de Juegos aplicado a la política
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Autor: Carlos Ruiz Contreras

Tutores: Manuel Ordóñez Sánchez

Inmaculada Ventura Molina

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguiente smiembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2023

El Secretario del Tribunal

Dedicatoria: Este trabajo va dedicado a mi familia por motivarme a cursar la Ingeniería y apoyarme en todo momento.

También me gustaría agradecer a mis compañeros que han acabado convirtiéndose en mis amigos. Y por supuesto a mis tutores, por su ayuda cuando la he necesitado.

RESUMEN

En este trabajo hemos realizado una pequeña introducción a la Teoría de Juegos y en particular a los juegos cooperativos enfocados a la política. También presentamos una serie de índices de poder con la finalidad de aplicar la Teoría de Juegos a la política actual española en sus dos últimas legislaturas.
Estudiaremos las posibles coaliciones y cuánto poder posee cada partido, tanto en el Senado como en el Congreso. Valoraremos si los índices de poder son un buen indicativo para analizar la actualidad política y para augurar posibles tendencias futuras de gobernabilidad.

ABSTRACT

For this paper we have introduced game theory and in particular cooperative games focused on politics. We have also introduced a series of power indices in order to focus game theory on current Spanish politics in the last two legislatures.
We will study the possible coalitions and how much power each party has in both the Senate and the Congress. We will assess whether power index are a good indicator to analyze the current political situation and to predict possible future trends in governability.

ÍNDICE

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

1 TEORÍA DE JUEGOS

1. Introducción a la teoría de juegos.

La teoría de juegos es un campo fascinante y multidisciplinario que se ocupa del estudio matemático de las decisiones estratégicas en situaciones interactivas. Se basa en la premisa de que las acciones de un individuo afectan y son afectadas por las acciones de otros. La teoría de juegos proporciona un marco conceptual y analítico para comprender y predecir el comportamiento estratégico en una amplia gama de contextos, desde la economía y la política hasta la biología y la psicología.

La historia de la teoría de juegos se remonta a los trabajos pioneros del matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern en la década de 1940. Su libro "Theory of Games and Economic Behavior" (Teoría de juegos y comportamiento económico) sentó las bases de esta disciplina. Desde entonces, la teoría de juegos ha experimentado un crecimiento exponencial y ha influido en diversas áreas de estudio.

Ilustración 1: El matemático John Von Neumann

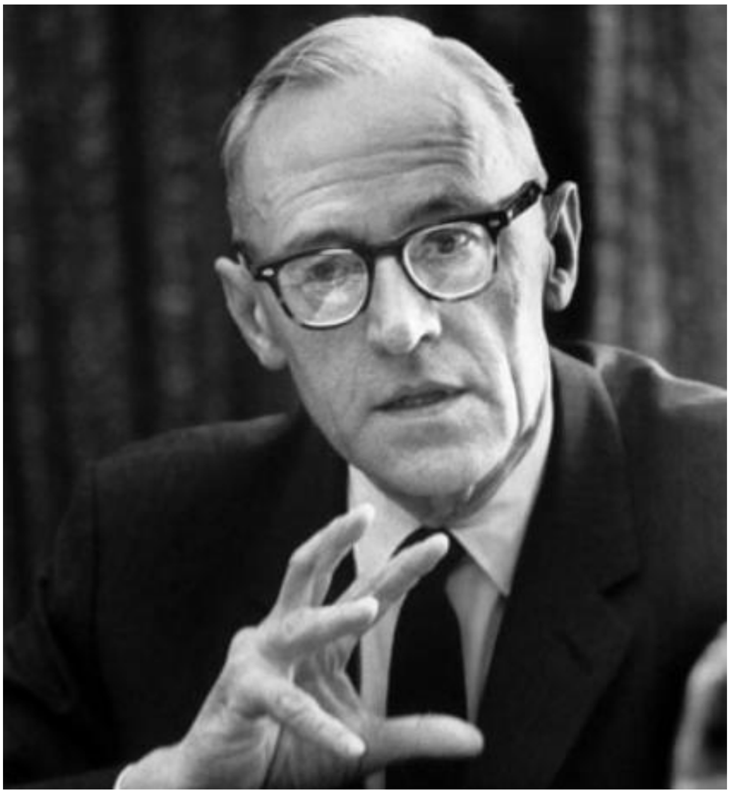
Ilustración 2: El economista Oskar Morgenstern

En esencia, la teoría de juegos trata de modelar las interacciones estratégicas entre agentes racionales. Estos agentes pueden ser individuos, empresas, países o cualquier entidad que tome decisiones con el objetivo de maximizar sus propios beneficios. Cada agente tiene un conjunto de opciones disponibles y debe considerar las acciones posibles de los demás agentes para tomar decisiones óptimas.

Un elemento fundamental en la teoría de juegos es el concepto de juego, que representa la estructura formal de una interacción estratégica. Un juego consta de jugadores, acciones, estrategias y pagos asociados. Los jugadores son los agentes que participan en el juego, las acciones son las elecciones que pueden tomar y las estrategias son los planes de acción que siguen a lo largo del juego. Los pagos representan las recompensas o costos asociados a las diferentes combinaciones de acciones de los jugadores.

Los juegos pueden clasificarse en diferentes categorías según sus características. Por ejemplo, un juego puede ser de suma cero, donde los pagos totales de los jugadores siempre suman cero, lo que implica que los beneficios de un jugador son exactamente las pérdidas de los demás. Por otro lado, un juego puede ser de suma no cero, donde los pagos totales pueden ser positivos o negativos. Además, los juegos pueden ser cooperativos o no cooperativos. En los juegos cooperativos, los jugadores pueden formar coaliciones y negociar acuerdos, mientras que en los juegos no cooperativos los jugadores actúan de manera independiente y no pueden realizar acuerdos vinculantes.

Uno de los conceptos más importantes es el equilibrio de Nash, propuesto por John Nash. John Nash fue un matemático y economista estadounidense nacido en 1928 y fallecido en 2015 que fue el pionero en trabajar en la teoría de juegos. Es conocido por sus contribuciones al campo de las matemáticas y la economía. Su trabajo en la teoría de juegos fue reconocido con el Premio Nobel de Economía en 1994, compartido con dos economistas, por su impacto en la comprensión de los fenómenos económicos y sociales. Además, Nash fue un importante contribuyente en el campo de las matemáticas, particularmente en el área de las ecuaciones diferenciales parciales. Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias en la que ningún jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente. Es decir, dado que los demás jugadores están siguiendo sus estrategias, ningún jugador puede obtener un beneficio mayor cambiando su estrategia individualmente. Los equilibrios de Nash son puntos de referencia importantes en la teoría de juegos y se utilizan para analizar y predecir el comportamiento estratégico en diferentes situaciones.

Además del equilibrio de Nash, la teoría de juegos también se ocupa de otros conceptos como los juegos repetidos, los juegos evolutivos y los juegos de información imperfecta. Los juegos repetidos son aquellos en los que una interacción estratégica se repite a lo largo del tiempo, lo que permite a los jugadores tomar decisiones basadas en el comportamiento pasado de los demás. Los juegos evolutivos se enfocan en la evolución de las estrategias en una población de agentes y cómo las estrategias exitosas se propagan a lo largo del tiempo. Los juegos de información imperfecta abordan situaciones en las que los jugadores tienen información limitada sobre las acciones o preferencias de los demás.

En resumen, la teoría de juegos es un campo apasionante que analiza las interacciones estratégicas entre agentes racionales. Proporciona un marco conceptual y analítico para entender y predecir el comportamiento en una amplia gama de situaciones, desde la economía y la política hasta la biología y la psicología. Con conceptos clave como el equilibrio de Nash y herramientas matemáticas sofisticadas, la teoría de juegos sigue siendo una herramienta poderosa para el análisis estratégico y la toma de decisiones en un mundo complejo e interconectado.

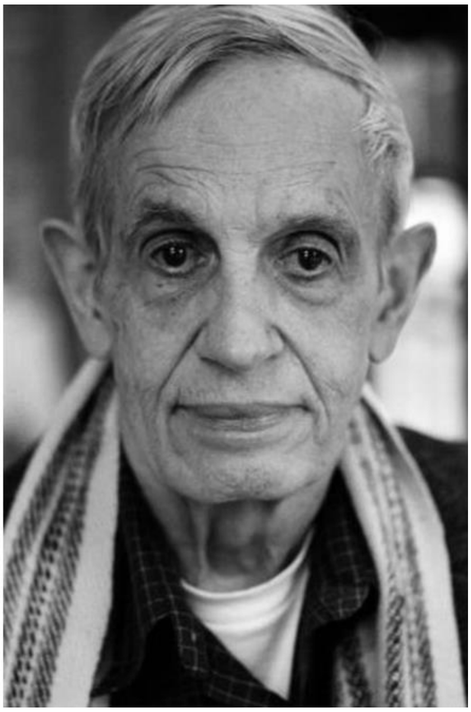

Ilustración 3:El matemático estadounidense John Nash

1.1 Juegos Cooperativos

Para nuestro trabajo vamos a centrarnos en los juegos cooperativos. Los juegos cooperativos son una categoría de juegos en la teoría de juegos donde los jugadores tienen la capacidad de formar coaliciones y colaborar entre sí para lograr objetivos comunes. A diferencia de los juegos no cooperativos, donde los jugadores actúan de manera independiente y no pueden realizar acuerdos vinculantes, en los juegos cooperativos los jugadores pueden negociar, hacer promesas y establecer acuerdos para maximizar sus beneficios conjuntos.

La formación de coaliciones puede ayudar a los jugadores a alcanzar resultados más favorables en comparación con el caso en el que actúan de manera individual. Al colaborar, los jugadores pueden compartir recursos, conocimientos y habilidades para superar obstáculos y maximizar sus ganancias conjuntas.

Uno de los conceptos clave en los juegos cooperativos es la solución de juego cooperativo. La solución de un juego cooperativo busca determinar qué coaliciones se formarán y cómo se distribuirán los beneficios entre los miembros de la coalición. Una solución ampliamente utilizada en los juegos cooperativos es el concepto de juego característico, donde se asigna un valor numérico a cada coalición posible para representar su valor o utilidad. Este valor se distribuye entre los miembros de la coalición de acuerdo con algún criterio de distribución.

Una solución de un juego cooperativo muy conocida es la denominada "solución de Shapley". Propuesta por el matemático Lloyd Shapley, esta solución asigna un valor a cada jugador que representa su contribución marginal al éxito de la coalición. La solución de Shapley es justa en el sentido de que premia a los jugadores de acuerdo con su aporte y no permite que un jugador sea explotado por los demás.

Además de la solución de Shapley, existen otros conceptos y métodos para analizar y resolver juegos cooperativos. Por ejemplo, el concepto de núcleo se refiere a un conjunto de asignaciones de pago donde ningún subconjunto de jugadores puede obtener un pago mayor al desviarse. El núcleo es una solución estable en el sentido de que no hay incentivos para que los jugadores abandonen la coalición y formen otra.

Los juegos cooperativos han sido ampliamente estudiados y aplicados en diversos campos. En economía, se utilizan para analizar situaciones en las que los agentes pueden colaborar para alcanzar una asignación eficiente de recursos. En política, los juegos cooperativos ayudan a entender cómo se forman coaliciones y cómo se negocian los acuerdos entre diferentes actores. En biología, se emplean para estudiar el comportamiento cooperativo en la evolución de las especies.

Una aplicación importante de los juegos cooperativos es la teoría de la negociación. La teoría de la negociación se basa en los principios de los juegos cooperativos para analizar cómo las partes pueden alcanzar acuerdos óptimos a través de la negociación. La teoría de juegos cooperativos proporciona un marco analítico para entender el proceso de negociación y desarrollar estrategias eficaces para obtener resultados mutuamente beneficiosos.

En resumen, los juegos cooperativos son una categoría de juegos en la teoría de juegos donde los jugadores pueden formar coaliciones y colaborar entre sí. Estos juegos implican la negociación y la formación de acuerdos para lograr objetivos comunes y maximizar los beneficios conjuntos. Los conceptos y soluciones en los juegos cooperativos, como la solución de Shapley y el núcleo, proporcionan herramientas para analizar y resolver problemas de cooperación en diferentes campos, desde la economía y la política hasta la biología y la teoría de la negociación. Los juegos cooperativos ofrecen un enfoque poderoso para comprender cómo la cooperación y la colaboración pueden llevar a resultados más favorables que las acciones individuales.

1.1.1 Juegos cooperativos en la política

En el ámbito político, los juegos cooperativos son una herramienta valiosa para analizar cómo los actores políticos pueden formar coaliciones y negociar acuerdos en busca de objetivos comunes. Los juegos cooperativos en política se centran en el estudio de las interacciones estratégicas entre partidos políticos, grupos de interés, gobiernos y otras entidades políticas.

En los juegos cooperativos aplicados a la política, los jugadores buscan alcanzar acuerdos y formar coaliciones para obtener beneficios políticos, promover sus intereses y lograr resultados favorables. Estos juegos pueden analizar diversas situaciones, como la formación de coaliciones gubernamentales, la negociación de políticas públicas, las alianzas electorales y la resolución de conflictos políticos.

Uno de los aspectos clave de los juegos cooperativos en política es la formación de coaliciones. Los partidos y otros actores políticos pueden unirse en coaliciones para aumentar su influencia y lograr objetivos compartidos. La formación de coaliciones puede ser especialmente relevante en sistemas multipartidistas, donde es necesario establecer alianzas para formar gobiernos estables y alcanzar mayorías parlamentarias.

La teoría de juegos cooperativos en política ofrece un marco analítico para entender cómo se forman y mantienen las coaliciones políticas. Se pueden utilizar diferentes soluciones de juego cooperativo para analizar la distribución del poder y los beneficios dentro de una coalición, por ejemplo, Banzhaf, Shapley-Shubick, etc.

2 LOS ÍNDICES DE PODER COMO ARGUMENTOS DE ANÁLISIS POLÍTICO.

2. Introducción

La teoría de índices de poder tiene como objetivo medir el poder político de los votantes en un sistema de votación también denominado juego simple de votación.
El poder de voto se basa en la probabilidad de que un voto dado sea decisivo en un conjunto de votantes de diferentes tamaños, (Gelman et al. 2004).
Las primeras propuestas de índices fueron el índice Penrose-Banzhaf (Penrose, 1946, Banzhaf, 1956) y el índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954). Ambos utilizan como factor fundamental de valoración la medida en que un votante es decisivo en la toma de una decisión. Posteriormente, se introducen los índices basados en la idea de la coalición ganadora minimal, índices de Deegan-Packel (Deegan y Packel, 1978) y Holler-Packel (Holler y Packel, 1983).

2.1. Juegos de votación

Un sistema o juego simple de votación consta de un conjunto de votantes y unas reglas de votación que permiten decidir si una propuesta es aceptada o rechazada. El conjunto de votantes (jugadores) se puede representar como un conjunto $N = \{1,2, \dots, n\}$ donde cada elemento es un votante. Cualquier subconjunto de N, llamado coalición representa a un conjunto de votantes. Si llamamos 2^N al conjunto de todos los subconjuntos de N observamos que, dada una propuesta, hay coaliciones que permiten su aprobación y coaliciones que no. Las que la permiten se llaman ganadoras y se denotan por W. Este conjunto no es vació porque el total N siempre está.

Definimos un *juego simple de votación* como un par (N, W) formado por N jugadores y el conjunto de coaliciones ganadoras W compuesto por una familia de subconjuntos de N que verifica las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin W$
2. $N \in W$
3. Si $S \in W$ y $S \subset T$ entonces $T \in W$

Por otro lado, denominamos conjunto de *coaliciones ganadoras minimales* al conjunto $W^m = \{S \in W : T \subset S \Rightarrow T \notin W\}$, esto es, coaliciones donde todos los jugadores son necesarios.

Existe un tipo de juego conocido como *juego de votación ponderada*, donde a cada jugador se le otorga una cierta cantidad de votos y la toma de decisiones involucra una cantidad total de votos o cuota de aprobación. Estos juegos son muy habituales en el mundo real.

En este tipo de juego una coalición es ganadora si la suma de los votos de los elementos de la coalición supera la cuota y se representa por $v = [q : v_1, v_2, \dots, v_p]$ donde v_i son los votos del jugador i y q la cuota.

Un *índice de poder* sobre juegos de votación de n elementos es una función $f: N \to \mathbb{R}^+$ que a cada jugador le asigna un número real positivo que es el poder del jugador y verifica la propiedad de la eficiencia, es decir, $\sum_{i=1}^{n} f(i) = 1$.

Una herramienta auxiliar que usan algunos índices de poder para ayudar a cuantifican el poder de un jugador es el número de *swings* de un jugador. Un swing para un jugador i es una coalición S perdedora de manera que $S \cup i$ es ganadora. Denotamos al número de swings de un jugador por η_i.

2.2. Propiedades de los índices de poder sobre juegos de votación ponderado.

Dado un juego de votación ponderado $v = [q : v_1, v_2, \dots, v_p]$, un índice de poder debe verificar

- Si $v_i > v_j$ para todo j$\in N \backslash i$ entonces $\eta_i \geq \eta_j$. Es decir, a mayor número de votos, mayor poder.

- Si dos jugadores tienen el mismo número de votos, entonces tienen el mismo poder.

Por otro lado, hay que tener en cuenta los requisitos para la formación de coaliciones. En general, se permiten todas las coaliciones posibles, aunque el poder viene determinado por las ganadoras.

2.3. Índices de poder más conocidos.

La capacidad de evaluar el poder de un voto ha influido decisivamente en la configuración de los sistemas de votación para los procesos de elección.

Existen diversas reglas de votación y cálculo de índices de poder que se han usado y se usan en organismos nacionales e internacionales: el Consejo de la Unión Europea, el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas, etc.

Nosotros usaremos en este trabajo cuatro índices muy conocidos para juegos de votación en el parlamento, estos son: Penrose-Banzhaf, Shapley-Shubik, Deegan-Packel y Johnston.

A continuación, presentamos estos cuatro índices.

2.3.1 Índice de Poder de Johnston.

El índice de poder de Johnston se basa en la idea de la *deserción crítica* de una coalición ganadora. Esto es, si $\boldsymbol{C}$ es una coalición ganadora, la deserción del jugador $\boldsymbol{i}$ es crítica si la coalición $\boldsymbol{C} \backslash \{\boldsymbol{i}\}$ deja de ser ganadora.

Definición 1: Supongamos que $\boldsymbol{p}$ es un jugador en un sistema de votación sí-no. Sean $\boldsymbol{C_i}, \dots, \boldsymbol{C_j}$ las coaliciones ganadoras para las cuales la deserción de $\boldsymbol{p}$ es crítica. Si $\boldsymbol{n_i}$, $\boldsymbol{i = 1}, \dots, \boldsymbol{j}$ es el número de jugadores cuya deserción de $\boldsymbol{C_i}$ es crítica, se define ***el poder de Johnston total de p***, y se denota por ***TJP(p),*** como

$$\boldsymbol{TJP(p) = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_j}}$$

Definición 2: Supongamos que $\boldsymbol{p_1}$ es un jugador en un sistema de votación sí-no y que los otros jugadores se denotan por $\boldsymbol{p_2, p_3, \ldots, p_n}$. Entonces **el índice de Johnston de** $\boldsymbol{p_1}$, denotado aquí por $\boldsymbol{JI(p_1)}$, es el número dado por

$$\boldsymbol{JI(p_1) = \frac{TJP(p_1)}{TJP(p_1) + \cdots + TJP(p_n)}}$$

Ejemplo 1: Supongamos que tenemos tres personas con un número de votos $\boldsymbol{p_1}$, 49 votos $\boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$con solo un voto. 50 votos es la cuota. Por lo tanto, las coaliciones ganadoras serán:

$$\boldsymbol{C_1 = \{p_1, p_2\}}$$
$$\boldsymbol{C_2 = \{p_1, p_3\}}$$

$$\boldsymbol{TJP(p_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$$
$$\boldsymbol{TJP(p_2) = \frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{TJP(p_3) = \frac{1}{2}}$$

y

$$\boldsymbol{JI(p_1) = \frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{JI(p_2) = \frac{1}{4}}$$
$$\boldsymbol{JI(p_3) = \frac{1}{4}}$$

2.3.2 El índice de poder de Deegan-Packel

El índice de Deegan-Packel considera el conjunto de coaliciones ganadoras mínimales donde la formación de dichas coaliciones es equiprobable.

Sus supuestos son:

- Todo miembro de una coalición ganadora minimal es decisivo para el valor de la coalición. Dicho valor expresa el poder del jugador en la coalición.

- Un jugador no esencial de una coalición no influye en el carácter ganador de la misma, y, por lo tanto, su poder es nulo.

- Los miembros no esenciales de las coaliciones no tienen incentivos a votar.

- Las coaliciones ganadoras minimales se caracterizan porque todos los miembros son esenciales a la misma.

Este índice de poder no verifica la monotonía en el sentido expuesto en las propiedades razonables de un índice de poder, pero bajo ciertas modificaciones, que no expondremos aquí, se acepta actualmente como un índice de poder a nivel de los demás.

Definición 3: Supongamos que **p** es uno de los votantes en un sistema de votación sí-no. Sean $\boldsymbol{C_1}, \dots, \boldsymbol{C_j}$ las coaliciones ganadoras mínimas a las que $\boldsymbol{p}$ pertenece. Sea $\boldsymbol{n_i}$, el número de votantes en $\boldsymbol{C_i}$, $i = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{n}$. La ***potencia total de Deegan-Packel de $\boldsymbol{p}$***, denotada aquí por **TDPP ($\boldsymbol{p}$)**, es

$$\boldsymbol{TDPP}(\boldsymbol{p}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n_j}}$$

Definición 4: Supongamos que $\boldsymbol{p_1}$ es un votante en un sistema de votación sí-no y que los demás votantes se denotan por $\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}, \dots, \boldsymbol{p_n}$. Entonces el **índice Deegan-Packel de $\boldsymbol{p_1}$**, denotado aquí por **DPI ($\boldsymbol{p_1}$)**, es el número dado por

$$DPI(p_1) = \frac{TDPP(p_1)}{TDPP(p_1) + \cdots + TDPP(p_n)}$$

Ejemplo 2: Supongamos otra vez que tenemos tres personas las cuales tienen: $\boldsymbol{p_1}$ con 49 votos, p_2 y p_3 tiene solo un voto. Siendo necesarios 50 votos. Las coaliciones ganadoras mínimas son:

$$\boldsymbol{C_2} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}\}$$
$$\boldsymbol{C_3} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_3}\}$$

Al calcular la potencia total de Deegan-Packel, p_1 recibe una contribución de cada una de las dos coaliciones ganadoras mínimas, mientras que p_2 y p_3 reciben cada una dicha contribución de solo una de las dos coaliciones ganadoras mínimas. De este modo:

$$\boldsymbol{TDPP}(\boldsymbol{p_1}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

$$TDPP(p_2) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$TDPP(p_3) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y

$$DPI(p_1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$DPI(p_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$DPI(p_3) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Observamos que ambos índices dan el mismo resultado, pero es debido a la simplicidad del ejemplo.

2.3.3 Índices de Poder de Penrose-Banzhaf y Sahpley-Shubik

Ambos se basan en el concepto de swing y en el conjunto de coaliciones ganadoras.

Definición 5: Se denomina ***valor de Banzhaf*** (**BS**$_i$) de un votante **i** al número de swings del jugador **i**, denotado por $\boldsymbol{\eta_i}$. El ***poder de Penrose-Banzhaf*** del jugador **i** es $\boldsymbol{BP_i = \frac{\eta_i}{2^{n-1}}}$. Y ***el índice de poder normalizado de Penrose-Banzhaf del jugador i*** es $\boldsymbol{IBP_i = \frac{\eta_i}{\sum_{j=1}^{n} BP_j}}$.

El índice de poder de Penrose-Banzhaf normalizado determina la probabilidad de que un jugador sea decisivo en una coalición ganadora. Se asume que todas las coaliciones son posibles e igualmente probables.

Definición 6: Denominamos ***índice de poder de Shapley-Shubik*** (**SSI**$_i$) de un jugador **i** a

$$SSI_i = \sum_{S \in W} \frac{(n - |S|)!\,(|S| - 1)!}{n!}$$

donde ***i*** es decisivo en la coalición **S**, esto es, si ***i*** modifica su voto la coalición deja de ser ganadora.

Al igual que el índice anterior, está normalizado. Este índice representa la fracción de órdenes de votación para los cuales el jugador *i* resulta decisivo.

Ambos índices se basan en cuantificar el grado en que un jugador resulta decisivo y sus valores no tienen por qué coincidir. La elección de uno u otro se atribuye, en general, a los supuestos sobre el comportamiento de los jugadores, si estos actúan de forma completamente independiente se debería utilizar el índice Penrose-Banzhaf, en otro caso sería aconsejable el índice de Shapley-Shubik.

Veamos un ejemplo más amplio que los vistos hasta ahora para ilustrar el índice de Penrose-Banzhaf.

Ejemplo 3. Consideremos el siguiente juego de ponderación en un Ayuntamiento ficticio con 4 partidos A, B, C y D.

$$v = [\ 17; 13{,}12{,}6{,}2]$$

Calculamos, para hallar el índice de poder de Banzhaf normalizado, el peso y el valor de cada coalición.

Coalición	w(S)	v(S)
∅	0	0
{1}	13	0
{2}	12	0
{3}	6	0
{4}	2	0
{12}	25	1
{13}	19	1
{14}	15	0
{23}	18	1
{24}	14	0
{34}	8	0
{123}	31	1
{124}	27	1
{134}	21	1
{234}	20	1
{1234}	33	1

Ilustración 4: Peso y valor de cada coalición

Swings para cada jugador

Jugador	Coaliciones	swings
{1}	{2},{3},{24},{34}	4
{2}	{1},{3},{14},{34}	4
{3}	{1},{2},{14},{24}	4
{4}	∅	0

Ilustración 5: Swings para cada jugador

El número total de swings son 12 y el índice de poder de Banzhaf normalizado es

$$IBP = (1/3,\ 1/3{,}1/3{,}0).$$

El mismo ejemplo para Shapley-Shubik

$$SSI_i = \sum_{S \in W} \frac{(n-s)!\,(s-1)!}{n!}$$

$$SSI_1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} = SSI_2 = SSI_3$$

$$SSI_4 = 0$$

En este caso ambos índices coinciden.

3. APLICACIÓN DE LOS ÍNDICES DE PODER.

En capítulos anteriores hemos presentado los juegos simples y los índices de poder, en este capítulo nos centraremos en el cálculo de estos índices en situaciones en los que haya un gran número de jugadores. Analizaremos la distribución de poder en las Cortes Generales españolas entre los partidos políticos que obtuvieron representación en las legislaturas, 2016-2020, 2020-2024. Aunque la última no ha acabado queremos contrastar la evolución del poder de los distintos partidos.

A continuación, se realiza una breve introducción sobre las Cortes Generales. “Las Cortes Generales representan al pueblo español y están formadas por el Congreso de los Diputados y el Senado” C.E, Art.66.1. Las Cortes Generales es el nombre oficial del Parlamento español compuesto por estas dos Cámaras.

La Constitución española contiene disposiciones comunes para las dos Cámaras que componen las Cortes Generales y disposiciones específicas para cada una de ellas. Estas Cámaras ostentan el Poder Legislativo. A ellas les corresponde aprobar los presupuestos, controlar la acción del Gobierno y las demás competencias que le atribuye la Constitución. Revisamos brevemente estas dos Cámaras.

El Congreso de los Diputados es una de las dos Cámaras que conforman las Cortes Generales, a la que la Constitución ha reservado una serie de importantes funciones y facultades. El Congreso autoriza la formación del Gobierno, puede provocar su cese, conoce en primer lugar la tramitación de los proyectos legislativos y de los presupuestos y debe confirmar o rechazar las enmiendas o vetos del Senado sobre estos textos legislativos.

El Congreso de los Diputados está compuesto por 350 diputados. La distribución de diputados por provincias se hace de la siguiente manera: A cada una de las cincuenta provincias le corresponde un mínimo inicial de dos diputados. Las ciudades de Ceuta y Melilla eligen un diputado cada una. Los restantes 248 diputados se reparten entre las cincuenta provincias en proporción a su población. Todos los diputados son elegidos por sufragio universal, libre, igual, directo y secreto. Los partidos políticos presentan sus candidatos en listas cerradas y bloqueadas. La Ilustración 7 nos muestra la distribución de los asientos de los diputados en el Congreso.

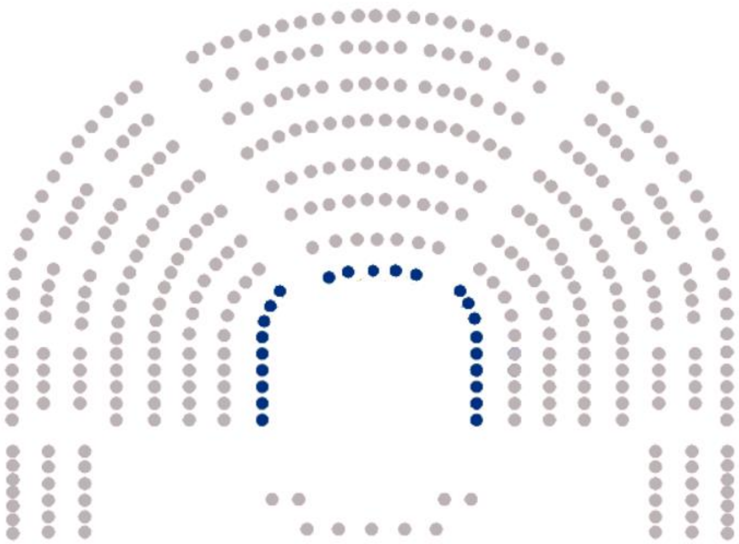

Ilustración 6: distribución de los 350 asientos en el Congreso de los Diputados.

El Senado es, según definición de la propia Constitución Española, la Cámara de representación territorial. Entre sus funciones se encuentra, su intervención en la aprobación de las leyes, su intervención en la autorización para concluir Tratados internacionales y en la aprobación de los Presupuestos Generales del Estado, el control político al Gobierno, la información y el estudio e investigación en cuestiones de interés general.

A diferencia de lo que ocurre en el Congreso, el número de senadores no es fijo. Puede variar al alza o a la baja al cambiar el número de habitantes de las distintas Comunidades Autónomas. La variación del número de senadores se produce al principio de cada Legislatura (tras la celebración de elecciones generales) y se toma como referencia el censo de población publicado el 1 de enero del año en que se celebran las elecciones. Durante las Legislaturas estudiadas han ido variando. En la actualidad el número de Senadores es de 266, de los cuales 208 son electos y 58 designados por las Asambleas Legislativas de las Comunidades Autónomas.

El Senado cuenta, atendiendo a su procedencia, con dos tipos de senadores. Los 208 senadores elegidos por sufragio universal, libre, igual directo y secreto de la manera siguiente:

- En cada provincia peninsular, se eligen 4 senadores
- En Gran Canaria, Tenerife, se eligen 3
- En Ceuta y Melilla, 2
- En Las Islas Baleares, 2.

A diferencia del Congreso, en el que se vota a un partido mediante listas cerradas, en el Senado se vota a la persona, al candidato, eligiendo 3, 2 ó 1 candidato de entre los que figuren en la papeleta única que hay para el Senado.

3.1 Cortes Generales Legislatura 2016-2020

3.1.1 Congreso de los diputados

El 26 de junio de 2016 se celebraron las elecciones generales en España. El Congreso de los Diputados en esta legislatura quedaba representado por un juego de mayoría ponderada, que indica la distribución de los 350 escaños entre los 12 grupos parlamentarios que obtuvieron representación. La composición era la siguiente (Ilustración 6).

PARTIDOS	DISPUTADOS	% DE VOTOS
PP	137	33'03
PSOE	85	22'66
PODEMOS-IU-EQUO	45	13'37
C´s	32	13'05
ECP	12	3'55
PODEMOS-COMPROMÍS	9	2'74
ERC-CATSÍ	9	2'63
CDC	8	2'01
PODEMOS-EN MAREA-EU	5	1'44
EAJ-PNV	5	1'20
EH BILDU	2	0'77
CCa-PNC	1	0'33

Ilustración 7: Resultados congreso de los diputados 2016 (Fuente: Ministerio del Interior).

En la Ilustración 8 se presentan los resultados de la tabla anterior en un diagrama de sectores y mediante un diagrama de barras. En la tabla de la Ilustración 9 se muestra también, la cantidad de votos totales.

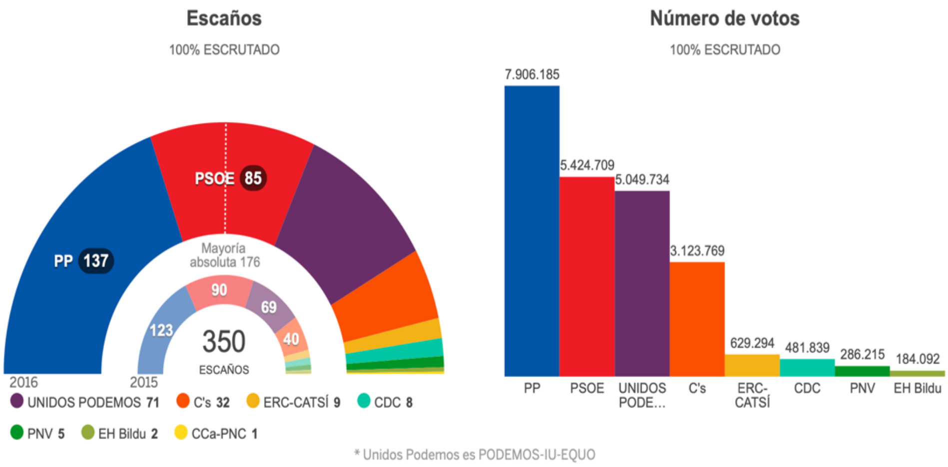

Ilustración 8: Gráfico resultados Congreso 2016

VOTOS POR PARTIDOS EN TOTAL ESPAÑA			
PARTIDO	ESCAÑOS	VOTOS	%
PP	137	7.906.185	33,03 %
PSOE	85	5.424.709	22,66 %
UNIDOS PODEMOS	71	5.049.734	21,1 %
C's	32	3.123.769	13,05 %
ERC-CATSÍ	9	629.294	2,63 %
CDC	8	481.839	2,01 %
PNV	5	286.215	1,2 %
EH Bildu	2	184.092	0,77 %
CCa-PNC	1	78.080	0,33 %

Ilustración 9: Tabla resultados Congreso 2016

El juego de mayoría ponderada que representa al Congreso de los Diputados en las elecciones de 2016 es el siguiente:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{176}; \mathbf{137}, \mathbf{85}, \mathbf{45}, \mathbf{32}, \mathbf{12}, \mathbf{9}, \mathbf{9}, \mathbf{8}, \mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{1}]$$

Usando los datos anteriores, vamos a calcular los índices de poder de cada partido.

En la siguiente tabla (Ilustración 10), "BPI" significa el índice de poder de Banzhaf, el número de coaliciones ganadoras en que un partido con el peso indicado emite un voto crítico.

"BPI%" significa el porcentaje de poder que el modelo Banzhaf dice que tiene cada partido con el peso indicado.

"PBPI" es la probabilidad de que un partido con el peso indicado emita un voto crítico, bajo el supuesto de que cada uno de los demás partidos lanza una moneda para decidir si vota "sí" o "no".

"SSPI" es el índice de poder de Shapley-Shubik, el porcentaje de permutaciones de votos en las que un partido con el peso indicado es fundamental.

La cuota del sistema es 176.

Peso	Multiplicidad	BPI	BPI%	PBPI	SSPI
PP-137	1	1.58E+03	48.352%	77.344%	48.434%
PSOE-85	1	464	14.164%	22.656%	15.354%
PODEMOS- IU-EQUO-45	1	464	14.164%	22.656%	15.354%
C’S-32	1	440	13.431%	21.484%	11.768%
ECP-12	1	68	2.076%	3.320%	1.869%
PODEMOS- COMPROMÍS / ERC-CATSÍ -9	2	56	1.709%	2.734%	1.623%
PODEMOS-EN MAREA-EU-8	1	48	1.465%	2.344%	1.450%
EAJ-PNV-5	2	36	1.099%	1.758%	0.902%
EH-BILDU-2	1	12	0.366%	0.586%	0.361%
CC-PNC	1	6	0.18%	0.29%	0.18%

Ilustración 10: Cálculo de los resultados del Congreso 2016

El vencedor de las elecciones fue el Partido Popular liderado por el presidente en funciones Mariano Rajoy, cuyas candidaturas obtuvieron en el Congreso de los Diputados una mayoría simple de 137 escaños (14 más que en diciembre de 2015) y un 33,01 % de los votos, seguido del Partido Socialista Obrero Español de Pedro Sánchez, que obtuvo el 22,63 % de los votos, lo que se tradujo en 85 diputados (5 menos que en la anterior legislatura).

Unidas Podemos, coalición electoral formada por Podemos, Izquierda Unida, Equo y otros ocho partidos menores de izquierda liderada por Pablo Iglesias y Alberto Garzón, obtuvo 59 diputados (en 2015 Podemos obtuvo 10 congresistas menos) y el 16,86% de los votos, que sumado a las coaliciones autonómicas En Comú Podem-Guanyem el Canvi (que revalidó sus 12 parlamentarios, 3,55 % de los votos), Compromís-Podemos-EUPV (9, con el 2,74 %) y En Marea, que perdió un diputado con respecto a 2015 (5, con 1,44 %), todas ellas vinculadas a Podemos y otras formaciones de izquierda, dieron un total de 71 diputados y el 21,15 % de los votos.

Ciudadanos-Partido de la Ciudadanía, con Albert Rivera al frente, obtuvo 32 diputados, perdiendo ocho de ellos (un 13,06 % de los votos).

El resto de los grupos parlamentarios quedó configurado por Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya Sí (9, 2,63 %), Convergència Democràtica de Catalunya (8, 2,01 %), el Partido Nacionalista Vasco (5, 1,19 %), Euskal Herria Bildu (2, 0,77 %) y Coalición Canaria-Partido Nacionalista Canario (1, 0,33 %).

A continuación, calculamos, además de Banzhaf y Shapley-Shubik, los índices de Johnston y Deegan-Packel. Sin embargo, lo haremos con coaliciones de partidos que es como realmente está dispuesto el parlamento. Volveremos a calcular los de Banzhaf y Shapley-Shubik para compararlos. Así tendremos unas coaliciones, que son significativas para el poder, que serán, PP-CIUDADANOS, PSOE-PODEMOS , EPC, PNV-EAJ, EH-BILDU, CN-PNC. Por supuesto, ellos podrán aliarse en segundas opciones con otros partidos.

Ahora el juego ponderado es: $\mathbf{U} = [\mathbf{176}; \mathbf{159}, \mathbf{156}, \mathbf{12}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{1}]$.

Coaliciones minimales ganadoras	Coaliciones minimales ganadoras por jugador
C1={P 1, **P 2**}	1->{C1,C2}
C2={P 1, **P 3**, **P 4**}	2->{C1,C3}
C3={P 2, **P 3**, **P 4**, **P 5**, **P 6**}	3,4->{C2,C3}; 5,6->C3

Ilustración 11: Posibles coaliciones minimales ganadoras elecciones 2016.

Índice de Deegan-Packel

$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{12}}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{1}) = 0{,}33$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{2}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$	$\boldsymbol{DPI}(2) = 0{,}26$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{3}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{3}) = 0{,}16$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{4}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{4}) = 0{,}16$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{5}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{5}) = 0{,}06$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{6}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{6}) = 0{,}06$
TOTAL=	**13/12+16/15+11/10=3,25**

Ilustración 12: Índice de Deegan-Packel legislatura 2016.

Calculamos el índice de **Johnston**:

Coaliciones ganadoras	**Coaliciones ganadoras críticas por jugador**
C1={P 1, **P 2**}	1->{C1,C2}
C2={P 1, **P 2**, P 3}	2->{C1,C3}
C3={P 1, **P 2**, P 4}	3,4->{C2,C3}; 5,6->C3
C4={P 1, **P 2**, P 5}	
C5={P 1, **P 2**, P 6}	
C6={ P 1, **P 3**, **P 4**}	
C7={P1, P2, P3, P4**}**	

Ilustración 13: Coaliciones ganadoras críticas por jugador legislatura 2016.

Para cualesquiera de los cuatro índices, el primer bloque de coalición ostenta todo el poder.

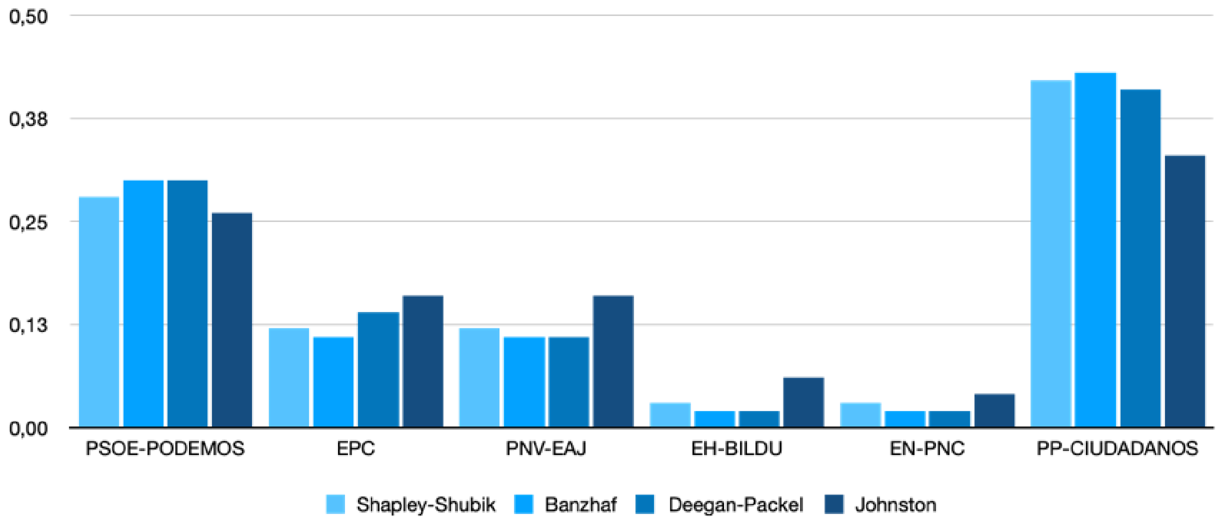

Ilustración 14: Gráficas de índices de poder en coalición

Tabla de índices de poder en coalición

	Shapley-Shubik	**Banzhaf**	**Deegan-Packel**	**Johnston**
PP-CIUDADANOS	0,42	0,43	0,41	0,33
PSOE-PODEMOS	0,28	0,30	0,30	0,26
EPC	0,12	0,11	0,14	0,16
PNV-EAJ	0,12	0,11	0,11	0,16
EH-BILDU	0,03	0,02	0,02	0,06
EN-PNC	0,03	0,02	0,02	0,04

Ilustración 15: Tabla de índices de poder en coalición

3.1.3 Senado

A continuación, representamos el Senado. En esta legislatura, el Senado estaba ente formado por 208 senadores, donde la cuota que define la mayoría absoluta es 105.

Su juego asociado es $\mathbf{U} = [\mathbf{134}; \mathbf{149}, \mathbf{62}, \mathbf{20}, \mathbf{12}, \mathbf{6}, \mathbf{6}]$.

En el Senado, el Partido Popular mantuvo la mayoría absoluta al conseguir 130 escaños (7 menos que en 2015). El PSOE perdió 4 senadores pasando de 47 en 2015 a 43 en 2016, seguido de Esquerra Republicana de Catalunya-Catalunya (10) y después Unidos Podemos con (8) y el Partido Nacionalista Vasco (6), vea la Ilustración 17. Como podemos observar en la tabla al tener el Partido Popular mayoría absoluta se convierte en un jugador dictador en el sentido anteriormente definido y sus índices lo muestran.

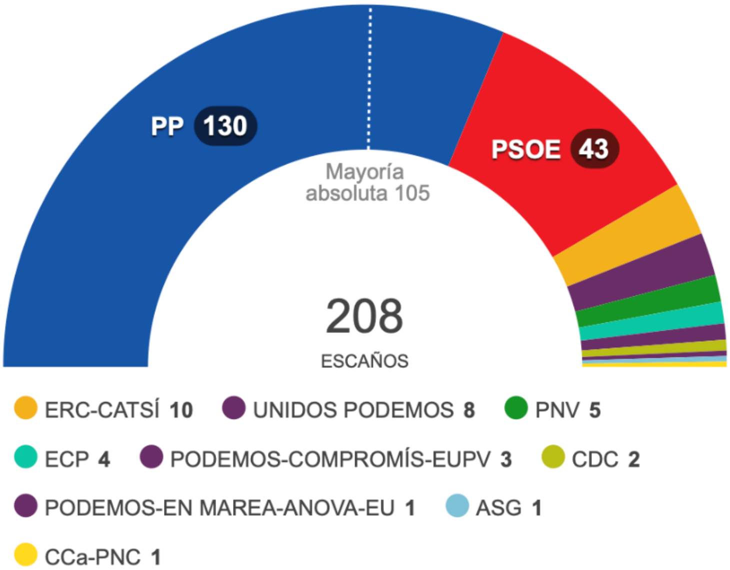

Ilustración 16: Muestra mediante gráfico resultados Senado 2016.

VOTOS POR SENADORES EN TOTAL ESPAÑA			
PARTIDO	SENADORES	VOTOS	%
PP	130	-	- %
PSOE	43	-	- %
ERC-CATSÍ	10	-	- %
UNIDOS PODEMOS	8	-	- %
PNV	5	-	- %
ECP	4	-	- %
PODEMOS-COMPROMÍS-EUPV	3	-	- %
CDC	2	-	- %
PODEMOS-EN MAREA-ANOVA-EU	1	-	- %
ASG	1	-	- %
CCa-PNC	1	-	- %

Ilustración 17: Muestra mediante tabla los resultados Senado 2016

Asociados a los datos anteriores, los correspondientes índices de poder son

Peso	**Multiplicidad**	**BPI**	**BPI%**	**PBPI**	**SSPI**
PP-130	1	32	100.000%	100.000%	100.000%

Ilustración 18: Resultados índices de poder

El resto está a cero.

No calculamos más índices aquí porque seguirán dando un poder total PP con el Banzhaf y Shapley-Shubik.

3.2 Legislatura actual

3.2.1 Congreso de los Diputados

El Congreso de los Diputados en esta legislatura quedaba representado por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 350 escaños entre los 16 grupos parlamentario que obtuvieron representación. La composición es la siguiente (Ilustración 20).

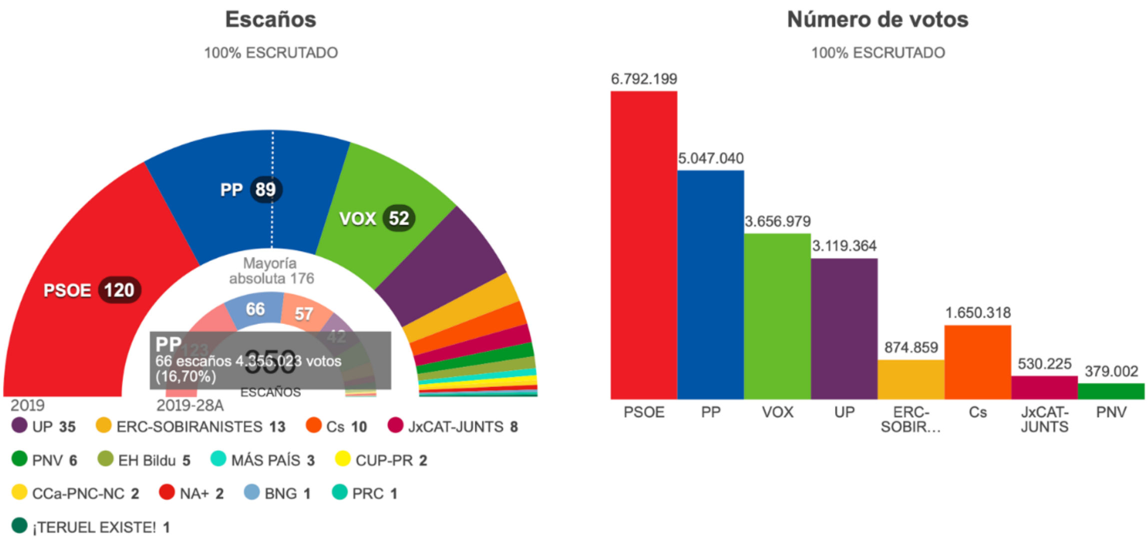

Ilustración 19: Muestra los Resultados Congreso Legislatura actual

El juego ponderado será:

$$\boldsymbol{U} = [\mathbf{176}; \mathbf{120}, \mathbf{89}, \mathbf{52}, \mathbf{35}, \mathbf{13}, \mathbf{10}, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{5}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$$

Comenzamos calculando los índices de Banzhaf normalizado y el de Shapley-Shubik.

Para el cálculo de los índices de Johnston y Deegan-Packel haremos El índice de Johnston se calcula tomando la raíz cuadrada del producto del número de votos que tiene un votante y el número de votos que necesita para ser aprobado. En este caso, el índice de Johnston para cada votante es:

El índice Deegan-Packel se calcula tomando el número de coaliciones ganadoras de las que forma parte un votante y dividiéndolo por el número total de coaliciones ganadoras. En este caso, el índice de Deegan-Packel para cada votante es:

VOTOS POR PARTIDOS EN TOTAL ESPAÑA			
PARTIDO	ESCAÑOS	VOTOS	%
PSOE	120	6.792.199	28,25 %
PP	89	5.047.040	20,99 %
VOX	52	3.656.979	15,21 %
PODEMOS-IU	35	3.119.364	12,97 %
ERC-SOBIRANISTES	13	874.859	3,64 %
Cs	10	1.650.318	6,86 %
JxCAT-JUNTS	8	530.225	2,21 %
PNV	6	379.002	1,58 %
EH Bildu	5	277.621	1,15 %
MÁS PAÍS	3	559.110	2,33 %
CUP-PR	2	246.971	1,03 %
CCa-PNC-NC	2	124.289	0,52 %

Ilustración 20: Tabla resultados Congreso legislatura actual

A continuación, calculamos los índices de poder de cada partido:

PESO	Mult.	BPI	BPI%	PBPI	SSPI
PSOE-120	1	1.4E+03	40.149%	68.262%	40.967%
PP-89	1	650	18.667%	31.738%	20.505%
VOX-52	1	642	18.438%	31.348%	18.990%
PODEMOS-IU-35	1	382	10.971%	18.652%	9.149%
ERC-SOBIRANISTES-13	1	112	3.217%	5.469%	2.803%
CS-10	1	82	2.355%	4.004%	2.053%
JXCAT-JUNTS-8	1	66	1.895%	3.223%	1.656%
PNV-6	1	52	1.493%	2.539%	1.335%
EH-BILDU-5	1	42	1.206%	2.051%	1.133%
MÁS PAIS-3	1	24	0.689%	1.172%	0.581%
CUP-PR-2	1	16	0.460%	0.781%	0.415%
CCA-PNC-NC-2	1	16	0.460%	0.781%	0.415%

Ilustración 21: Muestra el cálculo de los índices de poder del Congreso legislatura actual

El vencedor de las elecciones fue el PSOE liderado por Pedro Sánchez, aunque obtuvo 120 escaños no fue suficiente para gobernar en solitario ya que no alcanzó la mayoría absoluta. Por lo tanto, se tuvo que formar el primer gobierno de coalición en España desde la Segunda República. Este gobierno se formó con la unión del PSOE y Podemos, siendo Pablo Iglesias miembro de Podemos el vicepresidente del gobierno.

Vamos, al igual que antes a calcular índices de poder del gobierno en coalición con los cuatro índices. Ahora entra un partido nuevo VOX que se alía con PP y Ciudadanos.

Calculamos ahora los índices de Johnston, Deegan-Packel, Shapley-Shubik y Banzhaf para el nuevo juego de coaliciones. Este juego es

- PSOE+PODEMOS+ERC+PNV+EH-BILDU=179
- PP+VOX+CIUDADANOS=151
- JUNS PER CAT+CUP=10
- MAS PAIS=3
- COALICIÓN CANARIA=2

Para este juego tanto Banzhaf como Shapley-Shubik dan poder total a la coalición 1. Sin embargo, por separado esto es impensable, la hemos calculado más arriba. Es decir, el gobierno actual es gobierno debido a las fuerte coaliciones formadas con PODEMOS+ERC+PNV+EH-BILDU. Más aún, pueden permitirse que alguna propuesta no sea aprobada por algunas de las pequeñas coaliciones y sin embargo salga. El peligro de las coaliciones pequeñas es la falta de estabilidad y de poder frente a su gran aliado en posicionales encontradas.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{176}; \mathbf{179}, \mathbf{151}, \mathbf{10}, \mathbf{3}, \mathbf{2}]$$

Coaliciones minimales ganadoras	**Coaliciones minimales ganadoras por jugador**
C1={P 1}	1->{C1 }, 2,3,4,5,6 no tienen .

Ilustración 22: Muestra las coaliciones minimales ganadoras por jugador legislatura actual

Índice de Deegan-Packel

$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{1}) = 1$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{2}) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{DPI}(2) = 0$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{3}) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{3}) = 0$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{4}) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{4}) = 0$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{5}) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{5}) = 0$
$\boldsymbol{TDPP}(\mathbf{6}) = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{DPI}(\mathbf{6}) = 0$
TOTAL=1	

Ilustración 23: Muestra el Índice Deegan-Packel congreso legislatura actual

Seguimos con el índice de Johnston.

Coaliciones ganadoras con jugador crítico (LOS JUGADORES EN NEGRITA SON CRITICOS)
Esta son del tipo C=(P1,S) con S cualquier subconjunto de {P2,P3,P4,P5}.

Coaliciones ganadoras donde los jugadores son necesarios.			
JUGADORES	**COALICIONES**	$\boldsymbol{TJP}(\boldsymbol{p})$	$\boldsymbol{TJI}(\boldsymbol{p})$
Jugador 1	16 de 32	4*0.5+6*0.33+4*0.25+1*0.2=5.2	1
Jugador 2	0	0	0
Jugador 3	0	0	0
Jugador 4	0	0	0
Jugador 5	0	0	0
Jugador 5	0	0	0

Ilustración 24: Muestra las coaliciones ganadoras donde los jugadores son necesarios legislatura actual

Banzhaf y Shapley-Shubik son:

$$\beta(N, v) = (1,0,0,0,0,)$$

$$SS(N, v) = (1,0,0,0,0)$$

El poder de la primera coalición es total, sin dejar margen al resto.

3.2.2 Senado

A continuación, representamos el Senado. El Senado en esta legislatura está actualmente formado por 208 senadores, donde la cuota que define la mayoría absoluta es 105. El Senado queda representado de la siguiente forma.

Partido	Escaños	%Escaños
PSOE	93	44,71
PP	83	39,9
ERC-SOBIRANISTES	11	5,28
PNV	9	4,33
JxCAT-JUNTS	3	1,44
NA+	3	1,44
VOX	2	0,96
TERUEL EXISTE	2	0,96
EH Bildu	1	0,48
ASG	1	0,48

Ilustración 25: Muestra el porcentaje de escaños Senado legislatura actual

El juego es $\mathbf{U} = [\mathbf{134}; \mathbf{93}, \mathbf{83}, \mathbf{11}, \mathbf{9}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}]$.

En esta legislatura el PSOE retoma la delantera en el Senado, pero a muy pocos escaños del PP (Ilustración 27). Calculamos los índices de poder para ver realmente la diferencia.

Ilustración 26: Gráfico Resultados Senado Legislatura Actual

VOTOS POR SENADORES EN TOTAL ESPAÑA			
PARTIDO	SENADORES	VOTOS	%
PSOE	93	19.481.846	- %
PP	83	17.072.271	- %
ERC-SOBIRANISTES	11	3.040.779	- %
PNV	9	1.152.440	- %
JxCAT-JUNTS	3	1.689.482	- %
NA+	3	309.357	- %
VOX	2	3.229.631	- %
¡TERUEL EXISTE!	2	57.340	- %
EH Bildu	1	842.993	- %
ASG	1	3.628	- %

Ilustración 27. Muestra los resultados Senado legislatura actual

PESO	**Mult.**	**BPI**	**BPI%**	PBPI	SSPI
PSOE-93	1	0,55	55%	54%	40.967%
PP-83	1	0.45	45%	46%	38.505%

Ilustración 28: Muestra el cálculo de los índices Senado legislatura actual

Como puede comprobarse no hay apenas diferencia de poder en cualquiera de los índices. Las diferencias que se pueden apreciar en las tablas son apenas significativas a nivel real. Las cuestiones deben ser del tipo pacto o si/abstención.

4. CONCLUSIONES

Observamos que, en la legislatura de 2016, VOX no había aparecido en escena, luego el bloque de derechas en el congreso eran el Partido Popular con un poder del 44% y Ciudadanos con un poder del 11%. PSOE y la coalición UP-IU tenían un poder idéntico de 15,30%. Aunque aquí, el Partido Popular se podría decir que estaba sólo ya que Ciudadanos no era del todo afín a él si tenía el suficiente poder para gobernar en solitario, aunque a pesar de esto no hizo reformas suficientemente adecuadas y que eran necesarias sobre todo en Educación.

Para la siguiente legislatura, el desgaste y los casos de corrupción principalmente aunaron partidos de izquierda y extrema izquierda que se dispusieron a aliarse con el PSOE para ganar una moción de censura contra el Partido Popular. Aquí, Ciudadanos pierde poder ante su falta de firmeza en el cumplimiento de su programa y VOX empieza a aflorar como un movimiento que aúna el descontento del votante de la derecha, algunas reminiscencias del pasado y un cierto parapeto ante el empuje de la izquierda.

El poder conjunto del PP-VOX y C's es de aproximadamente el 40% y de la izquierda de 49% aunque este fluctúa debido a las demandas de las distintas facciones de IU-Podemos. Esto hace que los partidos independentistas tanto vascos como catalanes entren en escena y aunque su poder es escaso a veces son bisagra en asuntos de importancia nacional. A estos se contraponen o se unen según les convenga también partidos como PNV, Coalición Canaria, etc.

Actualmente el poder del PSOE y de sus partidos coalicionados tienen un índice de poder de 100% por ello no es necesario hacer más cálculos al respecto.

En definitiva, los índices de poder son una buena herramienta para analizar la actualidad política y para augurar posibles tendencias futuras de gobernabilidad.

5. REFERENCIAS

1. Algaba, E., Bilbao, J. M., López Vázquez, J. J., & Fernández García, J. R. (2001). El índice de poder de Banzhaf en la Unión Europea ampliada.
2. Amer, R., Carreras, F., & Magaña, A. (2008). Aplicaciones de los juegos cooperativos al contexto empresarial. Intangible capital, 4(2), 102-142.
3. Amer, R., Carreras, F., & Magaña, A. (2003). Juegos Simples e Índices de Poder de Shapley-Shubik. Revista de Estudios Politécnico.
4. Arrese, J. M. B. El poder de las naciones y sus ciudadanos en la Unión Europea.
5. Banzhaf, J.F. (1965). Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. Rutgers Law Review, 19, 317–343.
6. Bräuninger, T. König, T (2005). Indices of Power IOP 2.0 [computer program].
7. Konstanz: University of Konstanz. Disponible en [http://www.tbraeuninger.del/IOP.html] Carreras, F., Magaña, A., Amer. (2001). Teoría de Juegos. Editorial UPC.
8. Carreras Serra, F., Pacios, M. A., & Jurado, I. G. (1993). Estudio coalicionar de los parlamentos autonómicos españoles de régimen común. Revista de Estudios Políticos, (82), 159-176.
9. Deegan, J. & Packel, E.W. (1978). A new index of power for simple n-person games. International Journal of Game Theory, 7, 113–123.
10. Gelman, A.; Katz, J. N. & Bafumi, J. (2004). Standard voting Power Indexes do not work: An empirical analysis. British Journal of Political Science, 34 (4), 657–674.
11. Holler, M. J. & Packel, E.W. (1983). Power, Luck and the Right Index. Journal of Economics, 43 (1), 21–29.
12. Magaña Nieto, A. (1996). Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas. Universitat Politècnica de Catalunya.
13. Mas-Colell, A. (1988). Algunos comentarios sobre la teoría cooperativa de los juegos. Cuadernos Económicos, 40, 143-161.
14. Meijide, J. A., Méndez, B. C., Rueda, A. G., & Freire, S. L. El Valor de Shapley de un juego modificado en entornos de estructura coalicionar.
15. Meijide, J. M. A. (2002). Contribuciones a la teoría del valor en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos. Universidad de Santiago de Compostela.
16. Penrose, L.S. (1946). The elemenatary statistics of majority voting. Journal of the Royal Statistical Society, 109, 53–57.
17. Perez, J., Jimeno, J.L, Cerdá, E. (2013). Teoría de Juegos. Editorial Pearson Education.

18. Shapley, L.S. & Shubik (1954). A Method for evaluating the distribution of power in a commitee system. Amercian Political Science Review, 48, 787–792.
19. Vitoriano, B. (2007). Teoría de la decisión: decisión con incertidumbre, decisión multicriterio y teoría de juegos. Universidad Complutense de Madrid, 3-104.
20. Von Neumann, J., Morgensten, O. (1944). Game Theory and Economic Behaviour. Tercera Edición. Princeton: Princenton University Press
21. https://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_de_Nash
22. https://www.eleconomista.com.mx/opinion/El-legado-de-John-Nash-la-teoria-de-juegos-20150525-0003.html
23. Gráficos y Tablas resultados Congreso y Senado ambas legislaturas: https://resultados.elpais.com/elecciones/generales.html