

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería de Tecnologías Industriales

Modelado y Estudio Cinemático y Dinámico de un Robot Omnidireccional de 4 Ruedas Mecanum

Autor: Julio Coveñas Pérez

Tutor: Daniel García Vallejo

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2025



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Modelado y Estudio Cinemático y Dinámico de un Robot Omnidireccional de 4 Ruedas Mecanum

Autor:
Julio Coveñas Pérez

Tutor:
Daniel García Vallejo
Profesor titular

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2025

Trabajo Fin de Grado: Modelado y Estudio Cinemático y Dinámico de un Robot Omnidireccional de 4 Ruedas Mecanum

Autor: Julio Coveñas Pérez

Tutor: Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2025

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me han acompañado y apoyado a lo largo de este camino.

En primer lugar, a mi familia, por ser mi pilar fundamental. Gracias por su paciencia y su constante apoyo en cada etapa de mi formación. Su confianza en mí ha sido una fuente inagotable de motivación y fortaleza para seguir adelante, incluso en los momentos más desafiantes.

A mis amigos, quienes han estado a mi lado brindándome su compañía, ánimos y consejos. Gracias por los momentos de distracción que hicieron más llevaderos los días de esfuerzo y dedicación. Su apoyo ha sido clave para culminar este trabajo con éxito.

Resumen

La robótica ha experimentado avances significativos en las últimas décadas, dando lugar a la concepción y desarrollo de robots cada vez más especializados y versátiles. Entre estos, los robots equipados con ruedas omnidireccionales, y en particular aquellos que incorporan ruedas Mecanum, han emergido como soluciones excepcionales para desafíos de movilidad. La capacidad única de estas ruedas para permitir movimientos multidireccionales sin necesidad de cambiar la orientación del robot ha despertado un creciente interés en diversos campos de aplicación.

Sin embargo, la complejidad inherente de estas ruedas ha generado un vacío de información detallada sobre su cinemática y dinámica. La motivación para emprender este Trabajo de Fin de Grado surge precisamente de la escasez de información disponible al respecto. Por lo que un estudio profundo y detallado de simulación cinemática y dinámica de estos robots sería de gran interés para entender mejor su funcionamiento.

Abstract

Robotics has experienced significant advancements in recent decades, leading to the conception and development of increasingly specialized and versatile robots. Among these, robots equipped with omnidirectional wheels, particularly those incorporating Mecanum wheels, have emerged as exceptional solutions to mobility challenges. The unique ability of these wheels to enable multidirectional movement without requiring the robot to change its orientation has sparked growing interest in various fields of application.

However, the inherent complexity of these wheels has resulted in a lack of detailed information regarding their kinematics and dynamics. The motivation for undertaking this Final Degree Project arises precisely from the scarcity of available information on the subject. Therefore, a thorough and detailed study of the kinematic and dynamic simulation of these robots would be of great interest to better understand their operation.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice de Figuras	xvii
Notación	xix
1 Introducción	1
1.1 <i>Robot Omnidireccional</i>	1
1.2 <i>Rueda Omnidireccional</i>	2
1.2.1 Rueda omnidireccional universal simple	2
1.2.2 Rueda omnidireccional universal doble	3
1.2.3 Rueda esférica	3
1.2.4 Rueda mecanum	4
2 Fundamentos Teóricos	7
2.1.1 Posición y orientación de los sólidos	7
2.1.2 Velocidades generalizadas	7
2.1.3 Aceleraciones generalizadas	8
2.2 <i>Dinámica de sistemas multicuerpo</i>	9
2.2.1 Ecuaciones de Newton-Euler para sólidos rígidos	9
2.2.2 Ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo	11
3 Modelo Robot Mecanum	13
3.1 <i>Introducción</i>	13
3.2 <i>Suposiciones</i>	13
3.3 <i>Modelo Mecanum</i>	13
3.3.1 Cinemática Mecanum	13
3.3.2 Dinámica Mecanum	21
4 Simulación Cinemática y Dinámica	23
4.1 <i>Introducción</i>	23
4.2 <i>Simulación Cinemática</i>	23
4.2.1 Problema de velocidad	23
4.2.2 Problema de posición	23
4.2.3 Problema de aceleración	24
4.3 <i>Simulación Dinámica Inversa</i>	24
4.3.1 Caso 1 en dinámica inversa. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación	25
4.3.2 Caso 2 en dinámica inversa. Desplazamiento a 45 grados con respecto al eje X sin cambio de orientación	30
4.3.3 Caso 3 en dinámica inversa. Cambio de orientación en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas	35
4.4 <i>Simulación Dinámica Directa</i>	42

4.4.1	Caso 1 en dinámica directa. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación	42
4.4.2	Caso 2 en dinámica directa. Desplazamiento 45 grados y un cambio de orientación en sentido horario simultáneamente	45
5	Conclusiones	52
	Referencias	54
	Anexo. Códigos de MATLAB	56

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Sistema omnidireccional con ruedas mecanum	1
Figura 1-2. Rueda omnidireccional universal simple	2
Figura 1-3. Rueda omnidireccional universal doble	3
Figura 1-4. Rueda esférica	4
Figura 1-5. Rueda mecanum	5
Figura 1-6. Vehículo con 4 ruedas mecanum	5
Figura 1-7. Movimientos de un vehículo con ruedas mecanum	6
Figura 3-1. Configuración típica mecanum	14
Figura 3-2. Tipos de configuración mecanum	14
Figura 3-3. Modelo del vehículo con ruedas mecanum	16
Figura 3-4. Parámetros geométricos del vehículo mecanum (Perfil)	16
Figura 3-5. Parámetros geométricos del vehículo mecanum (Planta)	17
Figura 3-6. Parámetros geométricos rueda mecanum	17
Figura 4-1. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación	25
Figura 4-2. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica inversa	25
Figura 4-3. X_{G2} en caso 1 dinámica inversa	26
Figura 4-4. ψ_2 en caso 1 dinámica inversa	26
Figura 4-5. $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ en caso 1 dinámica inversa	27
Figura 4-6. $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6$ en caso 1 dinámica inversa	27
Figura 4-7. $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6$ en caso 1 dinámica inversa	28
Figura 4-8. M_y^3 en caso 1 dinámica inversa	28
Figura 4-9. M_y^4 en caso 1 dinámica inversa	29
Figura 4-10. M_y^5 en caso 1 dinámica inversa	29
Figura 4-11. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación	30
Figura 4-12. Trayectoria del chasis en caso 2 dinámica inversa	30
Figura 4-13. ψ_2 en caso 2 dinámica inversa	31
Figura 4-14. θ_3 y θ_6 en caso 2 dinámica inversa	31
Figura 4-15. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación	32
Figura 4-16. θ_4 y θ_5 en caso 2 dinámica inversa	32
Figura 4-17. $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_5$ en caso 2 dinámica inversa	32
Figura 4-18. $\ddot{\theta}_4$ y $\ddot{\theta}_5$ en caso 2 dinámica inversa	33
Figura 4-19. M_y^3 en caso 2 dinámica inversa	33
Figura 4-20. M_y^4 en caso 2 dinámica inversa	34

Figura 4-21. M_y^5 en caso 2 dinámica inversa	34
Figura 4-22. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas	35
Figura 4-23. X_{G2} en caso 3 dinámica inversa	35
Figura 4-24. Y_{G2} en caso 3 dinámica inversa	36
Figura 4-25. ψ_2 en caso 3 dinámica inversa	36
Figura 4-26. θ_3 y θ_5 en caso 3 dinámica inversa	37
Figura 4-27. θ_4 y θ_6 en caso 3 dinámica inversa	37
Figura 4-28. $\dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_5$ en caso 3 dinámica inversa	38
Figura 4-29. $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_6$ en caso 3 dinámica inversa	38
Figura 4-30. $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_5$ en caso 3 dinámica inversa	39
Figura 4-31. $\ddot{\theta}_4$ y $\ddot{\theta}_6$ en caso 3 dinámica inversa	39
Figura 4-32. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas	40
Figura 4-33. M_y^3 en caso 3 dinámica inversa	40
Figura 4-34. M_y^4 en caso 3 dinámica inversa	41
Figura 4-35. M_y^5 en caso 3 dinámica inversa	41
Figura 4-36. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación	42
Figura 4-37. M_y^3 en caso 1 dinámica inversa	43
Figura 4-38. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica inversa	43
Figura 4-39. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica directa	44
Figura 4-40. Velocidad angular de las ruedas en caso 1 dinámica directa	44
Figura 4-41. M_y^3 , M_y^4 , M_y^5 y M_y^6 en caso 1 dinámica directa	45
Figura 4-42. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación	45
Figura 4-43. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas	45
Figura 4-44. Trayectoria del chasis en caso 2 dinámica directa	46
Figura 4-45. X_{G2} en caso 2 dinámica directa	47
Figura 4-46. Y_{G2} en caso 2 dinámica directa	47
Figura 4-47. ψ_2 en caso 2 dinámica directa	48
Figura 4-48. Velocidad del chasis en caso 2 dinámica directa	48
Figura 4-49. Velocidad angular de las ruedas en caso 2 dinámica directa	49
Figura 4-50. M_y^3 , M_y^4 , M_y^5 y M_y^6 en caso 2 dinámica directa	49
Figura 4-51. Energía cinética del sistema en caso 2 dinámica directa	50

sen	Función seno
cos	Función coseno
H	Jacobiano del vector posición respecto a las coordenadas generalizadas
h	Jacobiano del vector velocidad respecto a las coordenadas generalizadas
G	Jacobiano del vector velocidad angular con respecto a las velocidades generalizadas
g	Jacobiano del vector velocidad angular respecto a las coordenadas generalizadas

1 INTRODUCCIÓN

Las ruedas Mecanum fueron concebidas por el ingeniero sueco Bengt Ilon en la década de 1970 y su patente fue vendida en la década de 1980 a la Marina de los EE. UU. para su utilización en el transporte de artículos alrededor de los barcos, pero no fue hasta el año 1997 que se empezó a implementar esta tecnología en otros sectores y empresas.

En la actualidad, los robots con ruedas omnidireccionales se utilizan en entornos tan diversos como la industria, la logística, la medicina y la investigación, entre otros. Su capacidad para desplazarse lateralmente, girar alrededor de su propio eje y maniobrar con precisión en espacios reducidos los convierte en herramientas valiosas para tareas que requieren movimientos ágiles y flexibles. Un subconjunto de estas ruedas omnidireccionales, conocidas como ruedas Mecanum, ha ganado popularidad debido a su diseño innovador que permite una maniobrabilidad aún mayor, aunque hay que tener en cuenta que este tipo de ruedas tienen muchas piezas móviles y proporcionan menos tracción si se comparan con unas ruedas convencionales.

1.1 Robot Omnidireccional

Los robots omnidireccionales son vehículos capaces de desplazarse en todas las direcciones del plano desde un punto arbitrario del sistema de coordenadas sin necesidad de realizar giros previos al desplazamiento y llegando a su ubicación final con la orientación deseada. En otras palabras, tienen la capacidad de ejecutar cualquier movimiento tanto de rotación como de traslación en el plano.

Para que un robot sea considerado omnidireccional, se requiere un mínimo de tres ruedas. Por lo tanto, no podemos utilizar ruedas convencionales; en su lugar, necesitamos emplear las llamadas ruedas omnidireccionales, que posibilitan este tipo de movimientos.



Figura 1-1. Sistema omnidireccional con ruedas mecanum [8]

1.2 Rueda Omnidireccional

Las ruedas especiales utilizadas en estos robots están diseñadas para proporcionar tracción activa en una dirección mientras permiten una traslación pasiva en otra, lo que resulta en una mayor flexibilidad de movimiento. Entre los diferentes tipos de ruedas se incluyen las ruedas universales, las ruedas Mecanum y las ruedas esféricas.

1.2.1 Rueda omnidireccional universal simple

Las ruedas omnidireccionales simples poseen una rueda principal que conforma la estructura y que genera un movimiento de avance igual que una rueda tradicional y en la periferia de esta se colocan un conjunto de rodillos que producen movimientos laterales de la rueda y que presentan una cierta curvatura para hacer la interferencia entre los rodillos y el suelo más suave y evitar rebotes durante el movimiento de avance.

Este tipo de ruedas cuentan con 3 grados de libertad que son: el giro sobre el propio eje de la rueda, rotación alrededor del eje vertical y el desplazamiento lateral. Para este desplazamiento lateral se necesita la acción combinada de las velocidades de las demás ruedas del robot.



Figura 1-2. Rueda omnidireccional universal simple. [8]

Entre sus características más notables destacan:

1. Capacidad de carga limitada: Debido a que los rodillos se encuentran en la periferia de la rueda, estos soportan todo el peso de la carga, limitando su capacidad.
2. Estas ruedas poseen tres grados de libertad permitiendo realizar movimientos en cualquier dirección sin necesidad de maniobras previas.
3. Baja fricción: La fricción que se genera con el suelo es debida únicamente al rodillo que en ese momento se encuentre en contacto con la superficie.
4. Gran sensibilidad a la superficie de contacto: Al desplazarse lateralmente el rodillo se comportará de manera similar a una rueda tradicional y al encontrar irregularidades en el suelo, como pueden ser baches, ondulaciones del terreno o imperfecciones, sólo podrán ser sorteados si la altura máxima de este escalón es inferior al radio del rodillo.

1.2.2 Rueda omnidireccional universal doble

Las ruedas omnidireccionales dobles son una variante de las simples en donde se introduce una fila adicional de rodillos alternados en la periferia de la rueda principal.



Figura 1-3. Rueda omnidireccional universal doble. [8]

Este tipo de ruedas posee características similares a las ruedas simples, pero incorporan ciertas ventajas:

1. Al aumentar las filas de rodillos, se aumentan los puntos de contacto entre los rodillos y la superficie lo que incrementa tanto el ancho de la rueda como su capacidad de carga.
2. Al aumentar el ancho de la rueda se genera mayor estabilidad del sistema.
3. Cuando hay una única fila de rodillos, se produce un espacio entre los rodillos que genera vibraciones indeseadas. Al emplear ruedas dobles se asegura el contacto constante y directo con la superficie.

1.2.3 Rueda esférica

La rueda esférica no establece restricciones directas sobre su movimiento. En este caso, el eje de rotación de la rueda puede orientarse en cualquier dirección deseada. Una manera de lograr esta libertad de movimiento es mediante el uso de un anillo activo impulsado por un motor y una caja de cambios, que transfieren potencia a la bola a través de los rodillos y la fricción, permitiendo su giro instantáneo en cualquier dirección.



Figura 1-4. Rueda esférica. [8]

Debido a la complejidad de su construcción, las ruedas de bola rara vez se utilizan como ruedas motrices en la práctica. Además, tienen una capacidad de carga limitada debido al punto de contacto, y la superficie de la esfera puede contaminarse al rodar sobre suelo sucio, lo que dificulta superar las condiciones irregulares del terreno. Las ruedas esféricas se utilizan más comúnmente como ruedas pasivas, conocidas como ruedas caster o locas.

1.2.4 Rueda mecanum

Las ruedas mecanum presentan un diseño único parecido al de las ruedas universales simples vistas anteriormente, sin embargo, el eje de rotación de los rodillos que hay en la periferia de la rueda principal se encuentra normalmente a una orientación de 45 grados con respecto al eje de rotación de la rueda.

Esta disposición permite una fuerza de fricción en el punto de contacto que se puede dividir en dos direcciones, una a lo largo del eje del rodillo representada en la figura 1-5 con el color morado y otra tangencial a él, representado con el color amarillo. Como el rodillo es libre de girar a lo largo de su eje, la componente tangencial de la fuerza (amarilla) será muy pequeña, sin embargo, en la componente axial (morada) habrá muy buena transferencia de fuerza.

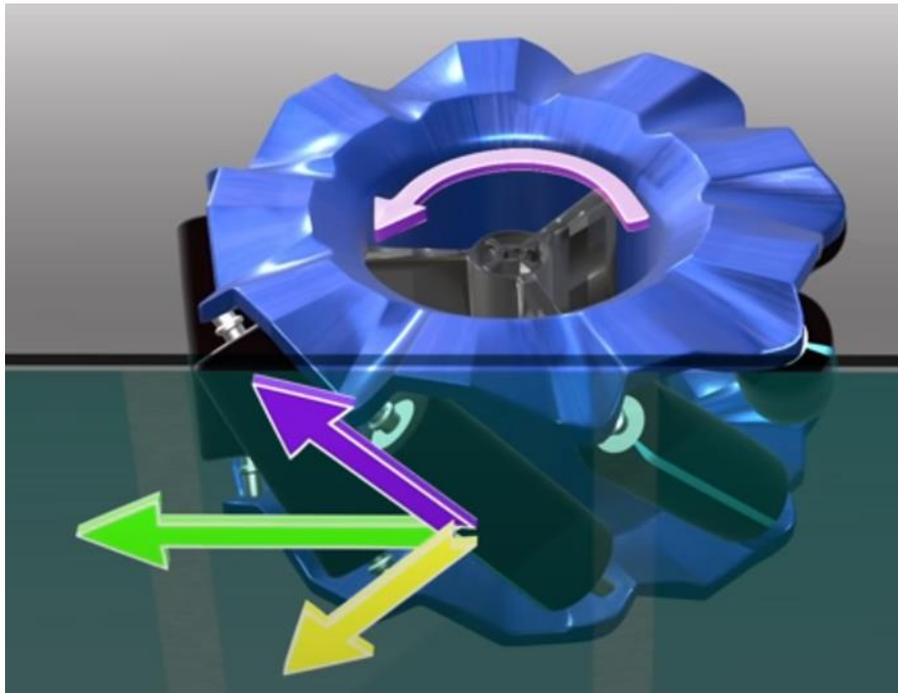


Figura 1-5. Rueda mecanum. Referencia [9]

En pocas palabras, la rueda mecanum, aunque gira como una rueda normal, produce una fuerza de fricción o fuerza motriz en un ángulo de 45 grados.

Las ruedas mecanum se emplean para una configuración de robot de 4 ruedas similar a un vehículo tradicional, con la diferencia de que el eje delantero permanece fijo.

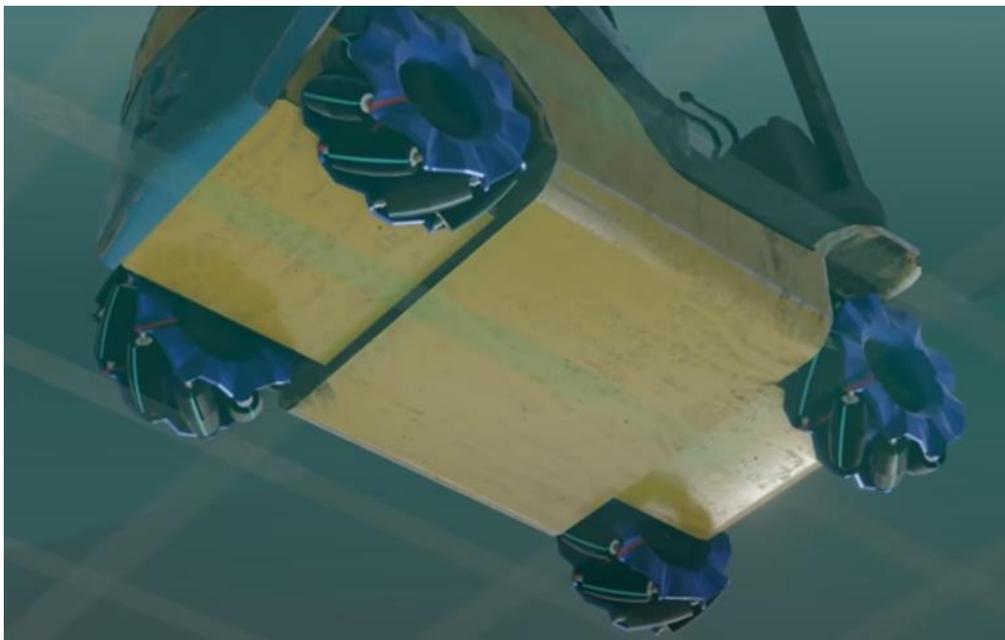


Figura 1-6. Vehículo con 4 ruedas mecanum. Referencia [9]

Controlando de manera independiente cada una de las ruedas, se obtienen desplazamientos y giros en cualquier dirección superponiendo las fuerzas de fricción que se observan en la figura 1-7.

A continuación, se observan algunos de esos desplazamientos y giros en función del control de las ruedas.

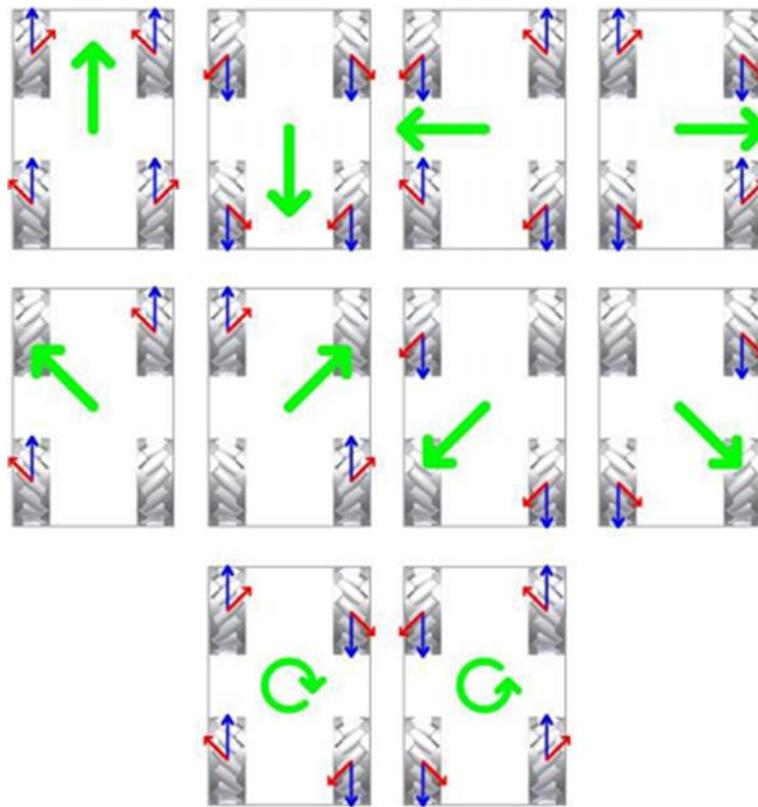


Figura 1-7. Movimientos de un vehículo con ruedas mecanum. Referencia [11]

La flecha azul indica el giro de la rueda, la flecha roja indica la fuerza de fricción y la verde indica el desplazamiento o giro real del robot. Como se puede observar no se ha tenido en cuenta la componente de la fuerza tangencial del rodillo ya que esta sólo produciría el giro del rodillo sobre su propio eje y no generaría el movimiento del robot.

Presentan características similares a las ruedas universales siendo la principal diferencia que las ruedas mecanum mantienen constante el radio de la rueda gracias a la disposición de los rodillos y que se cincelan para darles forma curva y hacer que la interacción entre el suelo y los rodillos sea más suave. Por ello, las ruedas simples generan más vibraciones. Sin embargo, las ruedas mecanum presentan una desventaja con respecto a la fuerza que ejerce al robot para su desplazamiento ya que sólo una parte de la componente de la fuerza se emplea para desplazar el robot, la otra componente se emplea para hacer girar el rodillo sobre su propio eje lo que conlleva una disminución de la velocidad máxima que puede llegar a alcanzar el robot.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo se presentan y explican algunos conceptos fundamentales que serán utilizados a lo largo del presente trabajo, cuya comprensión es esencial para una adecuada interpretación del contenido. Parte de la información ha sido extraída de las obras de José Luis Escalona [6] y [7].

2.1.1 Posición y orientación de los sólidos

En cinemática se define un sistema de coordenadas global, fijo en el espacio, que sirve como referencia. A cada sólido se le asocia un sistema de coordenadas que se denomina local. La posición y orientación de dicho sistema local frente al global es lo que permite describir el movimiento del sólido. El vector de coordenadas q contiene las variables que permiten describir esa posición y orientación siendo conocidos los parámetros geométricos.

Para conocer el vector posición de un punto del sistema en coordenadas globales de referencia se utilizará la siguiente expresión:

$$\text{Posición de P: } r_p^i = r^i + A^i \bar{u}_p^i$$

Donde r^i es el vector que va desde el origen del sistema de referencia global hasta el origen del sistema de referencia del sólido i en el sistema de referencia global, A^i es la matriz de orientación asociada al sólido i y \bar{u}_p^i es el vector que va desde el origen del sistema de referencia del sólido i hasta el punto P del sistema de referencia local del sólido i .

2.1.2 Velocidades generalizadas

Derivando la expresión antes obtenida se puede obtener la velocidad, y derivando esta, la aceleración.

Otra forma de calcular las velocidades es mediante el uso de los jacobianos del vector posición de los sólidos, esto es:

$$V^i = H^i \dot{q}$$

Donde H^i es el jacobiano del vector posición r^i con respecto a las coordenadas generalizadas q . H^i , tiene dimensiones de $3 \times n$, siendo n el número de coordenadas del sistema y puede depender de q y de los parámetros geométricos.

A partir de las matrices de orientación se pueden calcular las velocidades angulares y aceleraciones angulares de cada uno de los sólidos de la siguiente forma:

$$\tilde{\omega}^i = \dot{A}^i A^{iT}$$

$$\tilde{\omega}_i = A^{iT} \dot{A}^i$$

Donde $\tilde{\omega}_i$ y $\tilde{\omega}^i$ son las matrices antisimétricas de la velocidad angular del sólido i en el sistema de referencia global y en el local del sólido i , respectivamente.

$$\tilde{\omega}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^i & \omega_y^i \\ \omega_z^i & 0 & -\omega_x^i \\ -\omega_y^i & \omega_x^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\omega}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega}_z^i & \bar{\omega}_y^i \\ \bar{\omega}_z^i & 0 & -\bar{\omega}_x^i \\ -\bar{\omega}_y^i & \bar{\omega}_x^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega^i = [\omega_x^i \quad \omega_y^i \quad \omega_z^i]^T$$

$$\bar{\omega}^i = [\bar{\omega}_x^i \quad \bar{\omega}_y^i \quad \bar{\omega}_z^i]^T$$

La razón de calcular también las componentes de las velocidades angulares en el sistema de referencia local de los sólidos se debe a que reducen significativamente las ecuaciones de equilibrio en dinámica (Ecuaciones Newton-Euler).

Para la cinemática de sólidos rígidos, se sabe que el vector de velocidades angulares es una función lineal de las velocidades generalizadas, de manera que se pueden escribir de la forma:

$$\omega^i = [\omega_x^i \quad \omega_y^i \quad \omega_z^i]^T = G^i \dot{q}$$

$$\bar{\omega}^i = [\bar{\omega}_x^i \quad \bar{\omega}_y^i \quad \bar{\omega}_z^i]^T = \bar{G}^i \dot{q}$$

Donde G^i y \bar{G}^i , son el jacobiano de la velocidad angular en el sistema de referencia global y local del sólido i respectivamente, y por tanto, serán matrices de dimensiones $3 \times n$, siendo n el número de coordenadas del sistema:

$$G^i = \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}}$$

$$\bar{G}^i = \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial \dot{q}}$$

2.1.3 Aceleraciones generalizadas

Derivando las expresiones de velocidad generalizada y velocidad angular generalizada con respecto al tiempo, se pueden obtener la aceleración y aceleración angular generalizadas.

Empleando el uso de los jacobianos obtenemos que la aceleración y aceleración angular en globales y locales se pueden expresar como:

$$a^i = H^i \ddot{q} + \dot{H}^i \dot{q}$$

$$\alpha^i = G^i \ddot{q} + \dot{G}^i \dot{q}$$

$$\bar{\alpha}^i = \bar{G}^i \ddot{q} + \dot{\bar{G}}^i \dot{q}$$

La derivada temporal de las matrices jacobianas se calcula de la siguiente manera:

$$\dot{H}^i = \frac{\partial H^i}{\partial q} \dot{q} = h^i$$

$$\dot{G}^i = \frac{\partial G^i}{\partial q} \dot{q} = g^i$$

$$\dot{\bar{G}}^i = \frac{\partial \bar{G}^i}{\partial q} \dot{q} = \bar{g}^i$$

Donde h^i , g^i y \bar{g}^i son las matrices jacobianas de dimensiones $3 \times n$ correspondientes a la velocidad, velocidad

angular global y velocidad angular local del sólido I con respecto a las coordenadas q .

En resumen, una vez se han definido las expresiones de posición y orientación de los sistemas de referencia de los sólidos con respecto al sistema de referencia global, las ecuaciones anteriores representan un procedimiento sistemático para determinar las velocidades y aceleraciones de traslación y angular en función de q , \dot{q} y \ddot{q} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^i &= H^i \dot{q} \\ \boldsymbol{\omega}^i &= G^i \dot{q} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^i &= \bar{G}^i \dot{q} \\ \mathbf{a}^i &= H^i \ddot{q} + h^i \dot{q} \\ \boldsymbol{\alpha}^i &= G^i \ddot{q} + g^i \dot{q} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i &= \bar{G}^i \ddot{q} + \bar{g}^i \dot{q} \end{aligned}$$

2.2 Dinámica de sistemas multicuerpo

2.2.1 Ecuaciones de Newton-Euler para sólidos rígidos

Las ecuaciones de Newton-Euler son las que gobiernan el movimiento de los sólidos rígidos. Las ecuaciones de Newton se deducen de su segunda ley y rigen la traslación del sólido, mientras que las ecuaciones de la rotación del sólido vienen determinadas por el Teorema de Euler. Estos son dos conjuntos de ecuaciones vectoriales conocidos como ecuaciones de Newton-Euler.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_j \mathbf{F}_j \\ \bar{\mathbf{M}} &= \sum_k \bar{\mathbf{M}}_k + \sum_j \bar{u}_j \times \bar{\mathbf{F}}_j \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Newton-Euler dan lugar a 6 ecuaciones escalares cuando se proyectan en un sistema de referencia. Es habitual proyectar la ecuación de Newton en el sistema de referencia fijo y la de Euler en el sistema de referencia móvil. Esta última opción es debida a la conveniencia de proyectar la derivada del momento cinético en el sistema de referencia móvil.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \mathbf{a}_G \\ \bar{\mathbf{M}} &= \bar{I}_G \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{I}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden expresarse de manera más compacta de la forma:

$$\begin{bmatrix} m \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{I}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{I}_G \bar{\boldsymbol{\omega}}) \end{bmatrix}$$

Donde $\mathbf{1}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad.

Supongamos un sistema multicuerpo formado por nb sólidos rígidos. Para cada uno de ellos se puede plantear 6 ecuaciones escalares de Newton-Euler. En este caso, para el sólido i , se pondrían de la forma:

$$\begin{bmatrix} m^i \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{I}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^i \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^i \\ \bar{\mathbf{M}}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\bar{\boldsymbol{\omega}}^i \times (\bar{I}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}^i) \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, nb$$

Si agrupamos las 6 ecuaciones de Newton-Euler para los nb sólidos rígidos en un gran sistema de ecuaciones se llega a:

$$\begin{bmatrix} m^2 \mathbf{1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & m^{nb} \mathbf{1} & & \\ & & & \bar{I}^2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \bar{I}^{nb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_G^{nb} \\ \bar{\alpha}_G^2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_G^{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{nb} \\ \bar{M}^2 \\ \vdots \\ \bar{M}^{nb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{\omega}^2 \chi(\bar{I}^2 \bar{\omega}^2) \\ \vdots \\ -\bar{\omega}^{nb} \chi(\bar{I}^{nb} \bar{\omega}^{nb}) \end{bmatrix}$$

Se trata de un sistema de $6 \times nb$ ecuaciones que se puede escribir de forma compacta como:

$$\hat{M} \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{Q}}_v$$

Donde:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} m^2 \mathbf{1} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & & \\ 0 & 0 & m^{nb} \mathbf{1} & & & \\ & & & \bar{I}^2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \bar{I}^{nb} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_G^{nb} \\ \bar{\alpha}_G^2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_G^{nb} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{nb} \\ \bar{M}^2 \\ \vdots \\ \bar{M}^{nb} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{\omega}^2 \chi(\bar{I}^2 \bar{\omega}^2) \\ \vdots \\ -\bar{\omega}^{nb} \chi(\bar{I}^{nb} \bar{\omega}^{nb}) \end{bmatrix}$$

La matriz de masa de Newton-Euler \hat{M} incluye como bloques en su diagonal la masa de los sólidos y sus matrices de inercia locales para cada sólido, por lo que sus dimensiones son de $6nb \times 6nb$, el vector de aceleraciones de Newton-Euler, $\hat{\mathbf{a}}$, agrupa las aceleraciones de traslación y angulares de los sólidos, el vector de fuerzas generalizadas de Newton-Euler $\hat{\mathbf{Q}}$ incluye la suma de fuerzas y pares en cada sólido, y el vector de pares giroscópicos generalizado, por lo que tendrá dimensiones de $6nb \times 1$ y $\hat{\mathbf{Q}}_v$ agrupa los pares giroscópicos (debidos a la derivada del tensor de inercia), es conocido comúnmente como término de Coriolis. Estas ecuaciones, aunque contienen la información sobre la dinámica del sistema multicuerpo, esto es, explican cómo responde ante la acción de un conjunto de fuerzas y pares, no pueden considerarse las ecuaciones del movimiento del sistema. El motivo es que estas ecuaciones no están escritas en términos de las coordenadas generalizadas q y sus derivadas \dot{q} y \ddot{q} . Para expresar estas ecuaciones en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas, se utilizarán las ecuaciones cinemáticas con jacobianos. Así pues, el vector de aceleraciones quedará descrito de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_G^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_G^{nb} \\ \bar{\alpha}_G^2 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_G^{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{nb} \\ \bar{\mathbf{G}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{G}}^{nb} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}^{nb} \\ \bar{\mathbf{g}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{g}}^{nb} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{l}\dot{\mathbf{q}}$$

La matriz \mathbf{L} es una matriz de transformación de velocidades que transforma las velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ en velocidades de traslación de los centros de gravedad y velocidades angulares de los sólidos. Junto con la matriz \mathbf{l} , que es la derivada de \mathbf{L} , permite calcular las aceleraciones de traslación de los centros de gravedad y aceleraciones angulares de los sólidos a partir de $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$.

La nueva estructura de las ecuaciones será:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_v$$

Donde:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \hat{\mathbf{M}} \mathbf{L}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}^T \hat{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{L}^T (\hat{\mathbf{Q}}_v - \hat{\mathbf{M}} \mathbf{l} \dot{\mathbf{q}})$$

Las dimensiones de las matrices \mathbf{L} y \mathbf{l} son de $6n \times n$. Por lo que la matriz \mathbf{M} será de dimensiones $n \times n$ y las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{Q}_v , de dimensiones $n \times 1$.

A su vez, la matriz de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} se puede dividir en dos tipos:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{app} + \mathbf{Q}_{reac}$$

Estas son las fuerzas aplicadas generalizadas y las fuerzas de reacción generalizadas respectivamente.

Las fuerzas aplicadas pueden ser calculadas en función de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y del tiempo:

$$\mathbf{Q}_{app}(q, \dot{q}, t)$$

Y entre estas se encuentran:

- 1) Fuerzas gravitatorias.
- 2) Fuerzas debidas a resortes, amortiguadores o elementos de suspensión.
- 3) Fuerzas aplicadas por actuadores o fuerzas de control.
- 4) Fuerzas aerodinámicas.
- 5) Fuerzas electromagnéticas.

Sin embargo, las fuerzas de reacción no pueden calcularse como una función de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas o del tiempo. Dichas pueden obtenerse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

2.2.2 Ecuaciones del movimiento de un sistema multicuerpo

Las ecuaciones de equilibrio tienen que ser aumentadas con las ecuaciones de restricción para obtener las ecuaciones de movimiento.

Cada mecanismo en movimiento conlleva una serie de ecuaciones de restricción, con una fuerza de reacción asociada a cada una de ellas. Las ecuaciones de restricción pueden ser holónomas o no holónomas, según dependan de las derivadas de las coordenadas o no. En el caso de estudio, un robot omnidireccional con 4 ruedas mecanum, solo existirán ecuaciones de restricción no holónomas, por tanto, se explicará el caso de las ecuaciones de movimiento en el que tengamos solo este tipo de restricciones.

$$\mathbf{Q}_{reacc}^{nh} = -\mathbf{B}^{nhT} \lambda^{nh}$$

Donde:

La matriz \mathbf{B}^{nh} es el jacobiano de las restricciones no holónomas con respecto a las velocidades generalizadas y tiene unas dimensiones de $m \times n$, siendo m el número de restricciones, en este caso no holónomas.

La matriz $\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz de los multiplicadores de Lagrange, que representan la fuerza que hay que ejercer para que se cumpla esa ecuación de restricción, pero en sentido contrario, es decir $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{F}$, siendo \mathbf{F} la fuerza comentada anteriormente.

Con esto, las ecuaciones de movimiento para un sistema multicuerpo están dadas por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{app} + \mathbf{Q}_v$$

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Y pueden reorganizarse de manera matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{app} + \mathbf{Q}_v \\ -\dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

3 MODELO ROBOT MECANUM

3.1 Introducción

Los modelos de movimiento describen la cinemática y dinámica del robot. Al analizar el modelo cinemático, nos centramos en la mecánica del movimiento del robot sin tener en cuenta las causas subyacentes, como las fuerzas o los torques. Este modelo describe la disposición del robot en su espacio de trabajo, así como las relaciones entre sus parámetros geométricos y las limitaciones impuestas en sus trayectorias. El modelo cinemático proporciona información sobre las velocidades del sistema.

Por otro lado, los modelos dinámicos se centran en el movimiento del sistema considerando las fuerzas que actúan sobre él. Estos modelos abarcan la física del movimiento, utilizando conceptos como fuerzas, energías, masas, inercia y parámetros de velocidad.

3.2 Suposiciones

Es importante definir una serie de suposiciones para definir correctamente el modelo. Estas son:

- 1) La estructura de todos los elementos, incluidos ruedas y rodillos, es rígida para poder aplicar las ecuaciones vistas anteriormente, las cuales son válidas para sólidos rígidos.
- 2) El plano de la rueda es vertical.
- 3) El rango de movimiento está contenido en un plano 2D, ignorando las irregularidades del terreno.
- 4) El rodillo rueda sin deslizar, conforme ha esto, se pueden aplicar restricciones de rodadura sin deslizamiento.
- 5) Existe un único punto de contacto entre el rodillo y el terreno y este se encuentra ubicado en la vertical del centro de la rueda.

3.3 Modelo Mecanum

3.3.1 Cinemática Mecanum

El modelo utilizado en el presente documento es un modelo simplificado de un robot omnidireccional de 4 ruedas mecanum debido a la complejidad que presentan las ruedas mecanum.

Dado el elevado número de partes móviles que conforman cada rueda, que presentan típicamente entre 8 y 12 rodillos, tener que lidiar con el contacto-separación de cada rodillo, la redundancia de restricciones debido a momentos en los que existiría el contacto con el terreno de un rodillo y del siguiente, y de que este tipo de

rodillos presentan una geometría específica que no se corresponde a funciones analíticas dado que no son cilindros perfectos, se hace inviable un análisis completo del sistema incluyendo los rodillos de las ruedas.

Dado que el giro de los rodillos es un giro pasivo e incontrolable porque los actuadores están ubicados en las ruedas, no se analizará la dinámica del rodillo, aunque sí se tendrá en cuenta, evidentemente, el movimiento que producen a la hora de resolver el problema cinemático.

Para el diseño de un vehículo que utiliza ruedas mecanum se deben colocar dos ruedas mecanum iguales emparejadas diagonalmente opuestas, para las dos ruedas restantes se utiliza ruedas mecanum con orientación exactamente opuesta. Estas ruedas se denominan ruedas zurdas (L) y ruedas diestras (R), en donde el ángulo de inclinación de los rodillos estará a 45 grados en las ruedas zurdas y para las ruedas diestras a -45 grados con respecto al plano de la rueda como se observa en la siguiente figura.

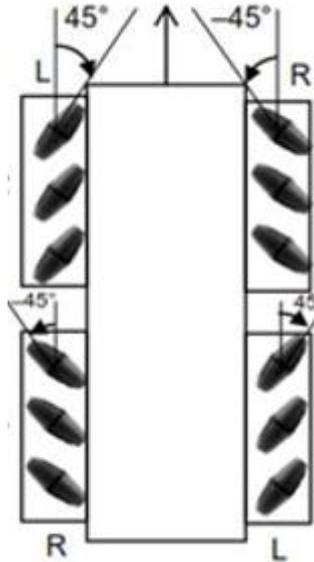


Figura 3-1. Configuración típica mecanum. Referencia [10]

Con este planteamiento se pueden obtener dos tipos de configuraciones, como se evidencia en la figura 3-2, y además, se puede observar que no se puede obtener la nueva orientación simplemente girando la rueda antigua, deben ser fabricadas de forma diferente.

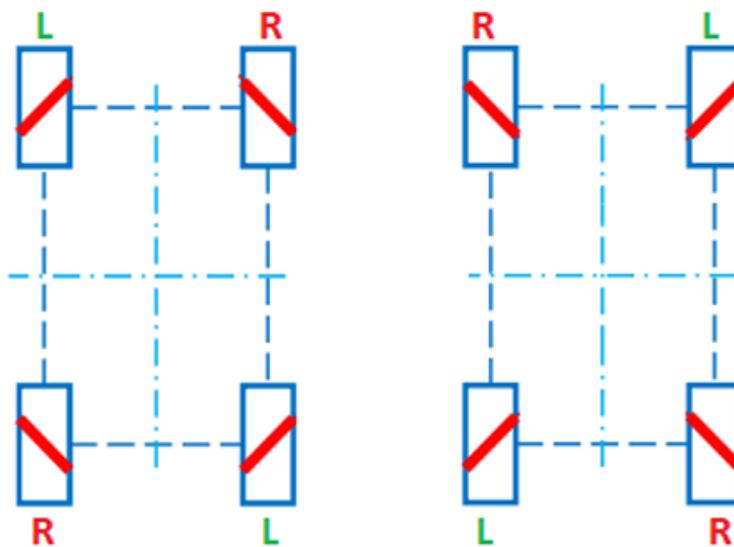


Figura 3-2. Tipos de configuración mecanum. Referencia [10]

Para el presente proyecto se ha escogido de manera arbitraria la configuración de la izquierda de la Figura 3-2, es decir, el de la Figura 3-1.

El modelo del vehículo incluye 5 sólidos móviles enumerados del 2 al 6. Los sólidos y coordenadas usados para definir la posición y orientación de los mismos son:

- 1) Sólido 2: Chasis. La posición absoluta del sistema de referencia se describe mediante las coordenadas X_{G2} , Y_{G2} y el ángulo de orientación ψ_2 comúnmente denominado ángulo de guiñada en cinemática de vehículos.
- 2) Sólidos 3, 4, 5, 6: Ruedas motrices izquierda y derecha delanteras e izquierda y derecha traseras respectivamente. Los ángulos θ_3 , θ_4 , θ_5 , θ_6 representan los ángulos de rodadura de las ruedas motrices.

De acuerdo con HENDZEL y RYKAŁA [3], adicionalmente, y solo para calcular la velocidad del punto de contacto de la rueda con el terreno a la hora de hallar las restricciones no holónomas, se tendrá en cuenta un sólido adicional por cada rueda. Este sólido será un rodillo ficticio que está en contacto con el terreno. Como se verá más adelante, de las ocho ecuaciones de restricción no holónomas que existen, se despeja la velocidad angular del rodillo de la ecuación de restricción en el eje x, y esta se introduce en la respectiva ecuación de restricción en el eje y. De este modo, el número de ecuaciones de restricción en el sistema se reduce de 8 a 4, y se eliminan explícitamente las 4 velocidades generalizadas asociadas al rodillo. Esto permite que el giro del rodillo no aparezca de forma explícita en las ecuaciones. Así, el modelo tendrá 7 coordenadas generalizadas y 4 ecuaciones de restricción, lo que da lugar a 3 grados de libertad. Estos rodillos serán: Sólido 7, 8, 9, 10. Los ángulos θ_7 , θ_8 , θ_9 , θ_{10} describen los ángulos de giro de los rodillos de las ruedas izquierda y derecha delanteras e izquierda y derecha traseras respectivamente.

El conjunto de coordenadas utilizado para la descripción del vehículo es:

$$\mathbf{q} = [X_{G2} \ Y_{G2} \ \psi_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]$$

Aunque para el cálculo de las velocidades de los puntos de contacto se utilizarán también θ_7 , θ_8 , θ_9 , θ_{10} , antes mencionados.

En las siguientes figuras se muestran los parámetros geométricos que deben definirse para completar el modelo cinemático. El conjunto de parámetros es:

$$\mathbf{p} = [R \ r \ l_x \ l_y \ l_z \ \gamma]$$

Estos parámetros, para el modelo de estudio tendrán los siguientes valores:

$$R = 0,045 \text{ m}; \quad r = 0,005 \text{ m}; \quad l_x = 0,08 \text{ m}; \quad l_y = 0,08 \text{ m}; \quad l_z = 0,04 \text{ m}; \quad \gamma = 45^\circ$$

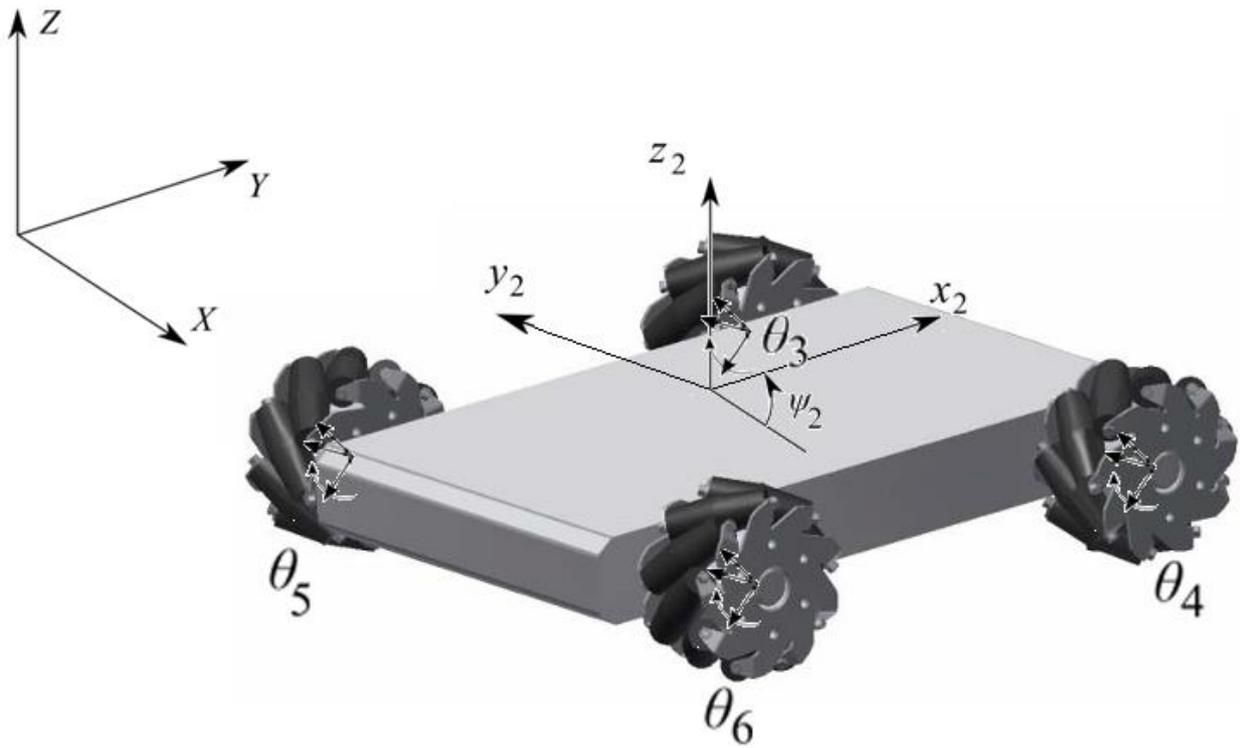


Figura 3-3. Modelo del vehículo con ruedas mecanum

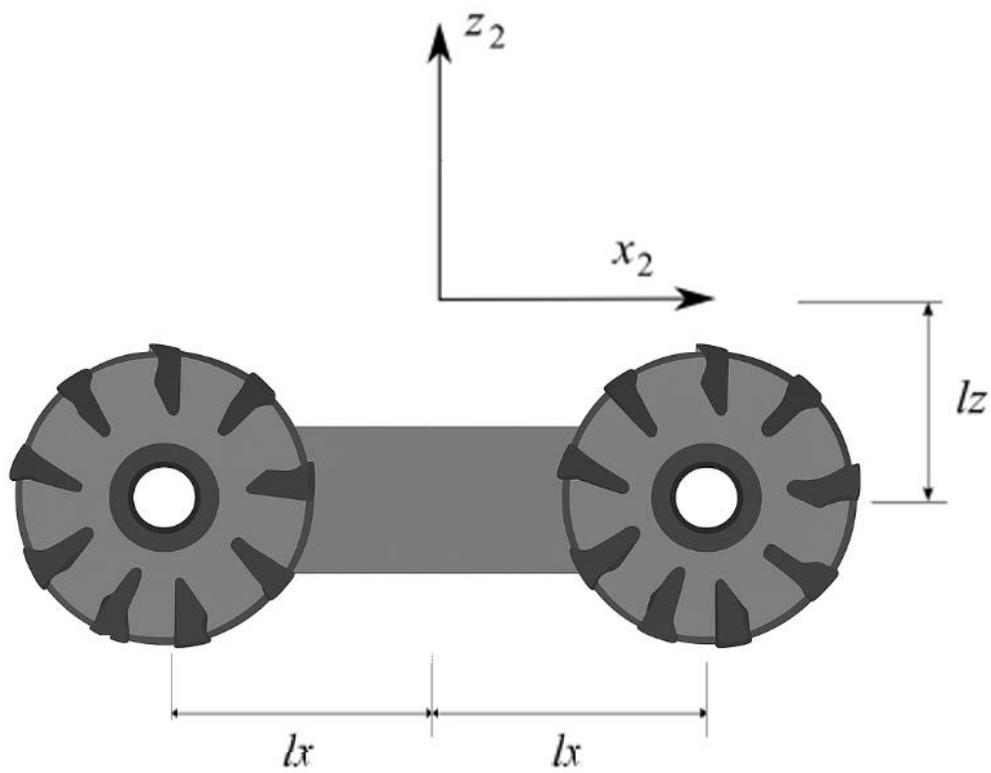


Figura 3-4. Parámetros geométricos del vehículo mecanum (Perfil)

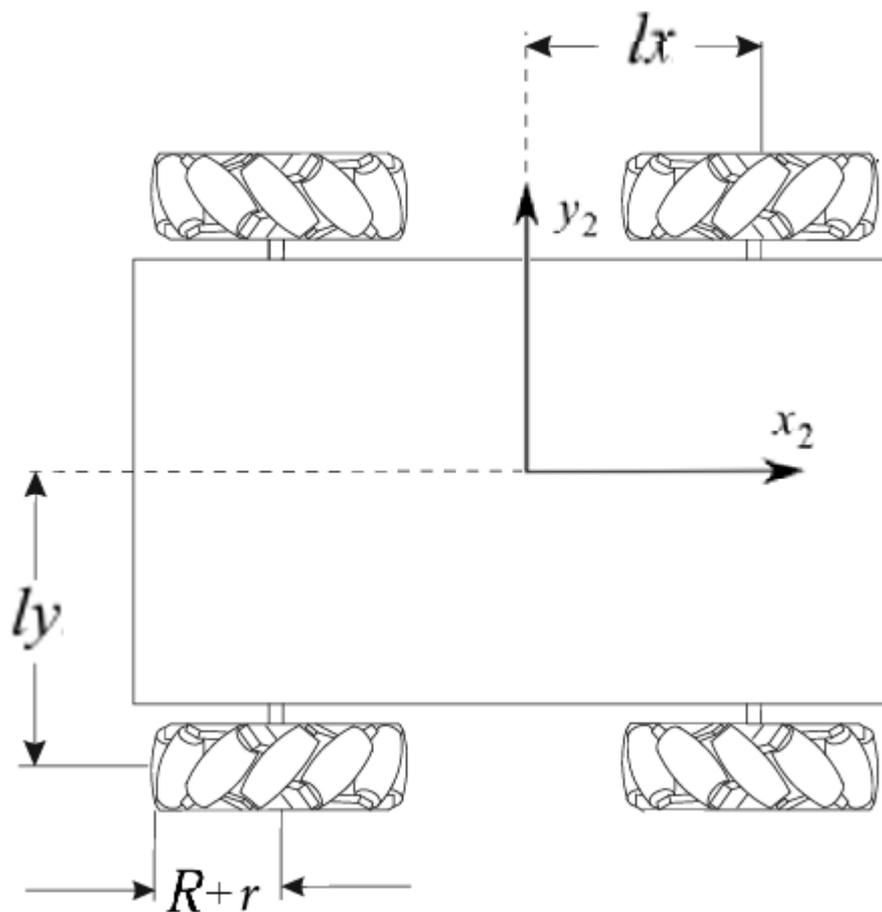


Figura 3-5. Parámetros geométricos del vehículo mecanum (Planta)

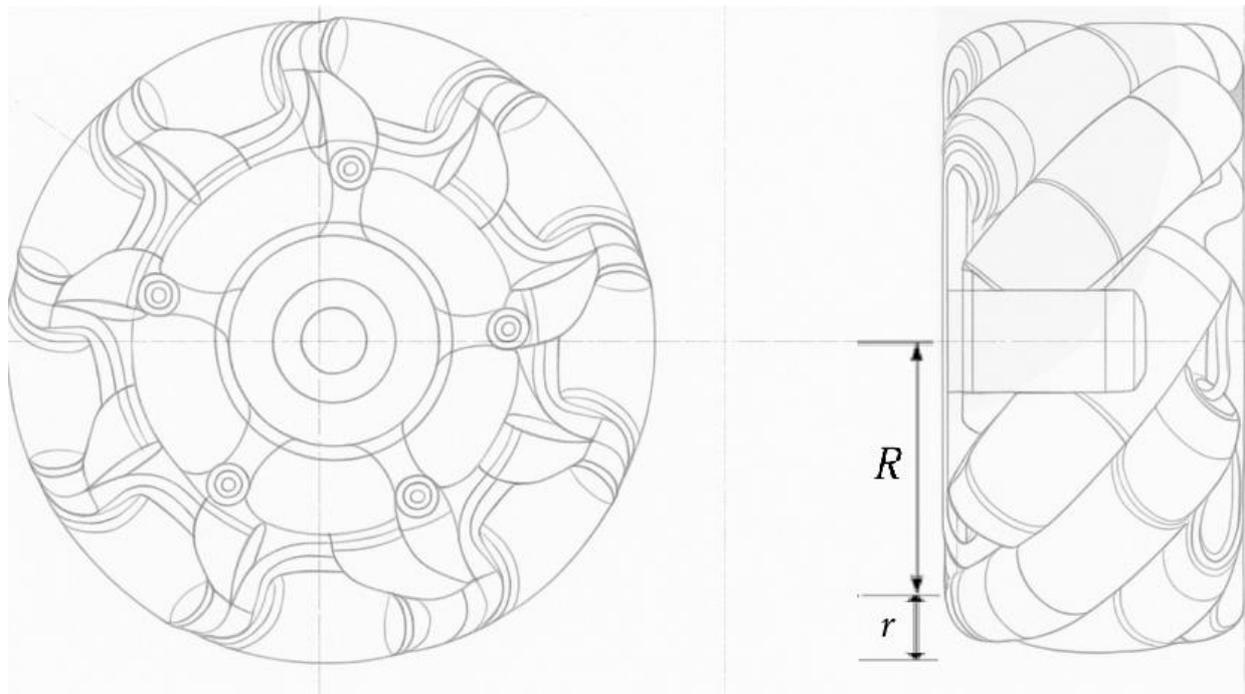


Figura 3-6. Parámetros geométricos rueda mecanum

Las matrices de orientación de los sistemas de referencia de los sólidos pueden obtenerse como una función de

las coordenadas q de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A_{\psi_2} \\
 A^3 &= A_{\psi_2} A_{\theta_3} \\
 A^4 &= A_{\psi_2} A_{\theta_4} \\
 A^5 &= A_{\psi_2} A_{\theta_5} \\
 A^6 &= A_{\psi_2} A_{\theta_6} \\
 A^7 &= A_{\psi_2} A_{\gamma_{7y10}} A_{\theta_7} \\
 A^8 &= A_{\psi_2} A_{\gamma_{8y9}} A_{\theta_8} \\
 A^9 &= A_{\psi_2} A_{\gamma_{8y9}} A_{\theta_9} \\
 A^{10} &= A_{\psi_2} A_{\gamma_{7y10}} A_{\theta_{10}}
 \end{aligned}$$

Las matrices de orientación asociadas están dadas por:

$$\begin{aligned}
 A_{\psi_2} &= \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & -\operatorname{sen} \psi_2 & 0 \\ \operatorname{sen} \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_{\theta_3} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \operatorname{sen} \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\
 A_{\theta_4} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & \operatorname{sen} \theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 \end{bmatrix} \\
 A_{\theta_5} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \operatorname{sen} \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \end{bmatrix} \\
 A_{\theta_6} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & 0 & \operatorname{sen} \theta_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta_6 & 0 & \cos \theta_6 \end{bmatrix} \\
 A_{\gamma_{7y10}} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\operatorname{sen} \gamma & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_{\gamma_{8y9}} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & \operatorname{sen} \gamma & 0 \\ -\operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Los vectores posición del origen de los sistemas de referencia de los sólidos pueden obtenerse como una función de las coordenadas q y los parámetros geométricos p de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= [X_{G2} \ Y_{G2} \ lz + R + r] \\
 r^3 &= r^2 + A^2 \bar{u}^3 \\
 r^4 &= r^2 + A^2 \bar{u}^4 \\
 r^5 &= r^2 + A^2 \bar{u}^5
 \end{aligned}$$

$$r^6 = r^2 + A^2 \bar{u}^6$$

Donde \bar{u}^3 , \bar{u}^4 , \bar{u}^5 y \bar{u}^6 son los vectores de posición del origen de los sistemas de referencia de los sólidos 3, 4, 5 y 6 con respecto al sólido 2, proyectados en el sistema de referencia del sólido 2.

Estos vectores de posición local son funciones de los parámetros geométricos p y están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{u}^3 &= [lx \ ly \ -lz]^T \\ \bar{u}^4 &= [lx \ -ly \ -lz]^T \\ \bar{u}^5 &= [-lx \ ly \ -lz]^T \\ \bar{u}^6 &= [-lx \ -ly \ -lz]^T\end{aligned}$$

Se asume que las ruedas del vehículo ruedan sin deslizamiento. Esto se implementa en el modelo mediante restricciones no holónomas, que garantizan que la velocidad en los puntos de contacto **P**, **Q**, **S** y **T** de las ruedas 3, 4, 5 y 6 respectivamente, sea cero.

La velocidad del punto de contacto, en función de las coordenadas del sistema q y de las velocidades \dot{q} , está dada por:

$$\begin{aligned}V_P^7 &= V^3 + \omega^3 \times A^2 \bar{U}_P + \omega^7 \times A^2 A_{\gamma_{7y10}} \bar{u}_P \\ V_Q^8 &= V^4 + \omega^4 \times A^2 \bar{U}_Q + \omega^8 \times A^2 A_{\gamma_{8y9}} \bar{u}_Q \\ V_S^9 &= V^5 + \omega^5 \times A^2 \bar{U}_S + \omega^9 \times A^2 A_{\gamma_{8y9}} \bar{u}_S \\ V_T^{10} &= V^6 + \omega^6 \times A^2 \bar{U}_T + \omega^{10} \times A^2 A_{\gamma_{7y10}} \bar{u}_T\end{aligned}$$

Donde los vectores de posición local están dados por:

$$\begin{aligned}\bar{U}_P &= [0 \ 0 \ -R - r] \\ \bar{U}_Q &= [0 \ 0 \ -R - r] \\ \bar{U}_S &= [0 \ 0 \ -R - r] \\ \bar{U}_T &= [0 \ 0 \ -R - r] \\ \bar{u}_P &= [0 \ 0 \ -r] \\ \bar{u}_Q &= [0 \ 0 \ -r] \\ \bar{u}_S &= [0 \ 0 \ -r] \\ \bar{u}_T &= [0 \ 0 \ -r]\end{aligned}$$

El cálculo simbólico de estas velocidades se realiza en el archivo de Matlab adjuntado en los anexos. A partir del resultado, se puede observar que la componente Z (componente normal) de estas velocidades es nula, mientras que las componentes X e Y (componentes tangenciales) no lo son.

Las ecuaciones de restricción no holónomas se obtienen al igualar a cero estas componentes tangenciales de la velocidad en los puntos de contacto. En este caso, el modelo del vehículo estaría sujeto a ocho restricciones no holónomas.

Si las velocidades de los puntos de contacto se proyectan en el sistema de referencia del sólido 2, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{V}_P^7 &= A^{2T} V_P^7 \\ \bar{V}_Q^8 &= A^{2T} V_Q^8 \\ \bar{V}_S^9 &= A^{2T} V_S^9 \\ \bar{V}_T^{10} &= A^{2T} V_T^{10}\end{aligned}$$

Las expresiones resultantes para las velocidades de los puntos de contacto de las ruedas son:

$$\begin{aligned}\bar{V}_P^7 &= \begin{bmatrix} \dot{X}_{G2} \cos\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \sen\psi_2 - l\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_3 - r\dot{\theta}_7 \cos\gamma \\ -\dot{X}_{G2} \sen\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \cos\psi_2 + l\dot{\psi}_2 - r\dot{\theta}_7 \sen\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{V}_Q^8 &= \begin{bmatrix} \dot{X}_{G2} \cos\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \sen\psi_2 + l\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_4 - r\dot{\theta}_8 \cos\gamma \\ -\dot{X}_{G2} \sen\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \cos\psi_2 + l\dot{\psi}_2 + r\dot{\theta}_8 \sen\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{V}_S^9 &= \begin{bmatrix} \dot{X}_{G2} \cos\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \sen\psi_2 - l\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_5 - r\dot{\theta}_9 \cos\gamma \\ -\dot{X}_{G2} \sen\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \cos\psi_2 - l\dot{\psi}_2 + r\dot{\theta}_9 \sen\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{V}_T^{10} &= \begin{bmatrix} \dot{X}_{G2} \cos\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \sen\psi_2 + l\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_6 - r\dot{\theta}_{10} \cos\gamma \\ -\dot{X}_{G2} \sen\psi_2 + \dot{Y}_{G2} \cos\psi_2 - l\dot{\psi}_2 - r\dot{\theta}_{10} \sen\gamma \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Las ocho restricciones no holónomas están dadas por:

$$[\bar{V}_P^7]_X = 0$$

$$[\bar{V}_P^7]_Y = 0$$

$$[\bar{V}_Q^8]_X = 0$$

$$[\bar{V}_Q^8]_Y = 0$$

$$[\bar{V}_S^9]_X = 0$$

$$[\bar{V}_S^9]_Y = 0$$

$$[\bar{V}_T^{10}]_X = 0$$

$$[\bar{V}_T^{10}]_Y = 0$$

Como se comentó anteriormente la complejidad del análisis de los rodillos hace que sea inviable un análisis del mismo. Por lo tanto, se despejarán las velocidades angulares que aparecen en las ecuaciones de restricción de la proyección en el eje X y se introducirá en su respectiva ecuación de restricción en Y, obteniendo así 4 ecuaciones de restricción y eliminando de manera explícita las coordenadas asociadas al giro del rodillo.

Las ecuaciones de restricción simplificadas, sabiendo que el parámetro $\gamma = 45$ *grados*, quedan finalmente de la forma:

$$-\dot{X}_{G2} (\cos\psi_2 + \sen\psi_2) + \dot{Y}_{G2} (\cos\psi_2 - \sen\psi_2) + (lx + ly)\dot{\psi}_2 + (R+r)\dot{\theta}_3 = 0$$

$$\dot{X}_{G2} (\cos\psi_2 - \sen\psi_2) + \dot{Y}_{G2} (\cos\psi_2 + \sen\psi_2) + (lx + ly)\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_4 = 0$$

$$\dot{X}_{G2} (\cos\psi_2 - \sen\psi_2) + \dot{Y}_{G2} (\cos\psi_2 + \sen\psi_2) - (lx + ly)\dot{\psi}_2 - (R+r)\dot{\theta}_5 = 0$$

$$-\dot{X}_{G2} (\cos\psi_2 + \sen\psi_2) + \dot{Y}_{G2} (\cos\psi_2 - \sen\psi_2) - (lx + ly)\dot{\psi}_2 + (R+r)\dot{\theta}_6 = 0$$

Aplicando el jacobiano de las restricciones no holónomas con respecto a las velocidades generalizadas se obtiene la matriz \mathbf{B} que se muestra a continuación:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -(\cos\psi_2 + \sen\psi_2) & \cos\psi_2 - \sen\psi_2 & lx + ly & R + r & 0 & 0 & 0 \\ \cos\psi_2 - \sen\psi_2 & \cos\psi_2 + \sen\psi_2 & lx + ly & 0 & -(R + r) & 0 & 0 \\ \cos\psi_2 - \sen\psi_2 & \cos\psi_2 + \sen\psi_2 & -(lx + ly) & 0 & 0 & -(R + r) & 0 \\ -(\cos\psi_2 + \sen\psi_2) & \cos\psi_2 - \sen\psi_2 & -(lx + ly) & 0 & 0 & 0 & R + r \end{bmatrix}$$

El modelo del vehículo utiliza $n = 7$ coordenadas, sujetas a $m = 4$ restricciones. Por lo tanto, el modelo tiene: $g = n - m = 3$ grados de libertad.

3.3.2 Dinámica Mecanum

Al tener 5 sólidos, la matriz de masa \hat{M} , tendrá dimensiones de 30x30. Para su formación, se utilizarán las masas de los distintos sólidos, $m^2 = 0,7 \text{ Kg}$, $m^3 = m^4 = m^5 = m^6 = 0,15 \text{ Kg}$ y los tensores de inercia en el sistema de referencia local de cada sólido, $\bar{I}^2 = \begin{bmatrix} 0,0015 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,002 \end{bmatrix}$, $\bar{I}^3 = \bar{I}^4 = \bar{I}^5 = \bar{I}^6 = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}$

Respecto a las fuerzas aplicadas al sistema, se consideran la fuerza gravitatoria de cada uno de los sólidos y los pares aplicados por los actuadores de las ruedas que en el caso de la simulación de dinámica inversa serán desconocidos, y en el caso de dinámica directa, estos serán impuestos. La matriz \hat{Q}_{app} , contendrá las fuerzas aplicadas en el sistema de referencia global y los momentos aplicados en coordenadas locales:

$$F^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m^i g \end{bmatrix}, \quad i = 2,3,4,5,6$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M^i = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{mot}^i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 3,4,5,6$$

$$\hat{Q}_{app} = [F^2 \quad F^3 \quad F^4 \quad F^5 \quad F^6 \quad M^2 \quad M^3 \quad M^4 \quad M^5 \quad M^6]$$

El último término que hace falta para resolver el problema dinámico se conoce como término de coriolis y se calcula mediante los tensores de inercia y la velocidad angular de cada uno de los sólidos en sus respectivas coordenadas locales:

$$F_v^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 2,3,4,5,6$$

$$M_v^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{\omega}^i x(\bar{I}^i \bar{\omega}^i) \end{bmatrix}, \quad i = 3,4,5,6$$

$$\hat{Q}_v = [F_v^2 \quad F_v^3 \quad F_v^4 \quad F_v^5 \quad F_v^6 \quad M_v^2 \quad M_v^3 \quad M_v^4 \quad M_v^5 \quad M_v^6]$$

Aplicando la multiplicación y premultiplicación por las matrices L y l mostrada en el "Capítulo 2. Fundamentos teóricos" del presente documento, se llega a las matrices M , Q_{app} , Q_v .

Con todo esto, la ecuación de movimiento del sistema queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} M_{7x7} & B_{7x4}^T \\ B_{4x7} & 0_{4x4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{7x1} \\ \lambda_{4x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{app7x1} + Q_{v7x1} \\ -\dot{B}_{4x7} \dot{q}_{7x1} \end{bmatrix}$$

Donde se han incluido las dimensiones de las matrices como subíndices de las mismas.

Obtenidas las ecuaciones de Newton-Euler se procede a integrarlas para obtener las coordenadas del sistema y los multiplicadores de Lagrange a lo largo del tiempo.

4 SIMULACIÓN CINEMÁTICA Y DINÁMICA

4.1 Introducción

En el siguiente capítulo, se procede a estudiar la simulación cinemática y dinámica del sistema, donde se realizan dos tipos de simulaciones dinámicas: Una simulación de dinámica directa donde se aplican distintos pares a las ruedas motrices y se analiza la evolución de las coordenadas con respecto al tiempo, es decir, cómo se mueve el vehículo al aplicarle esos pares, y una simulación dinámica inversa en la cual se imponen las variaciones de tres coordenadas generalizadas con respecto al tiempo (dado que ese número son los grados de libertad del sistema), obteniendo así el resto de coordenadas generalizadas a lo largo del tiempo y las acciones que producen ese movimiento.

4.2 Simulación Cinemática

4.2.1 Problema de velocidad

Como se muestra en el capítulo anterior, el sistema de estudio posee 4 restricciones no holónomas debido a que los rodillos ruedan sin deslizar.

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Es conveniente realizar la diferenciación entre coordenadas dependientes e independientes las cuales se denotarán como \mathbf{q}_d y \mathbf{q}_i , respectivamente. Las coordenadas independientes serán aquellas a las que se les impone un valor. A su vez, la matriz \mathbf{B} también se puede dividir en una parte dependiente y otra independiente, las cuales se nombrarán como \mathbf{B}_d y \mathbf{B}_i . Con estos subgrupos de coordenadas y matrices \mathbf{B} , la ecuación anterior se puede reescribir de la forma:

$$\mathbf{B}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{B}_d\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$$

Y despejando las velocidades generalizadas dependientes de la ecuación se obtiene la expresión:

$$\dot{\mathbf{q}}_d = -\mathbf{B}_d^{-1}\mathbf{B}_i\dot{\mathbf{q}}_i$$

4.2.2 Problema de posición

Para resolver el problema de posición, será necesario imponer un valor inicial para las coordenadas dependientes en el instante inicial, es decir, $q_{d0} = q_d(t_0)$. Al integrar la ecuación diferencial de primer orden utilizando la función de MATLAB `ode45`, que emplea el método de Runge-Kutta para la resolución de ecuaciones

diferenciales, se obtiene la posición generalizada de las coordenadas dependientes:

$$\dot{q}_d = -\mathbf{B}_d^{-1} \mathbf{B}_i \dot{q}_i$$

Con la condición inicial $q_{d_0} = q_d(t_0)$.

4.2.3 Problema de aceleración

Una vez resuelto el problema de velocidad, la resolución del problema de aceleración pasa por derivar con respecto al tiempo la ecuación del problema de velocidad:

$$\mathbf{B} \ddot{q} + \dot{\mathbf{B}} \dot{q} = \mathbf{0}$$

Diferenciando nuevamente entre coordenadas dependientes e independientes y matrices \mathbf{B} dependientes e independientes se obtiene la expresión:

$$\mathbf{B}_i \ddot{q}_i + \mathbf{B}_d \ddot{q}_d = -\dot{\mathbf{B}} \dot{q}$$

Y de igual manera que en el caso de las velocidades, despejando las aceleraciones generalizadas dependientes de la ecuación se obtiene:

$$\ddot{q}_d = -\mathbf{B}_d^{-1} (\dot{\mathbf{B}} \dot{q} + \mathbf{B}_i \ddot{q}_i)$$

4.3 Simulación Dinámica Inversa

Para llevar a cabo la simulación dinámica inversa, se impondrán como coordenadas independientes la posición absoluta del chasis y el ángulo de orientación, es decir, X_{G2}, Y_{G2} y ψ_2 . El resto de coordenadas se calculan mediante la simulación cinemática descrita en el apartado 4.2, cumpliendo con las correspondientes ecuaciones de restricción.

La ecuación de movimiento que rige la dinámica inversa del sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{app} + \mathbf{A}_\tau \tau$$

Donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{Q}_v es el vector de fuerzas generalizadas cuadráticas en velocidad comúnmente conocido como término de Coriolis. Es importante observar que el vector de fuerzas aplicadas se ha dividido en dos: \mathbf{Q}_{app} que es el vector de fuerzas generalizadas debida al peso propio de los sólidos que componen el vehículo y el producto $\mathbf{A}_\tau \tau$ que es el vector de fuerzas generalizadas debidas a las acciones que actúan sobre el sistema, siendo τ el valor de esas acciones.

Cabe destacar que el sistema posee tres grados de libertad, por lo que se consideran tres acciones independientes. Es importante señalar además, que estas acciones se aplican en el sistema de referencia global en el caso de tratarse de fuerzas, y en el sistema de referencia local cuando se trata de momentos.

Una vez resuelta la simulación cinemática expuesta en el apartado 4.2, se obtienen las posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas para cualquier instante de tiempo. Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse de manera matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{7x4}^T & \mathbf{A}_{\tau 7x3} \end{bmatrix}_{7x7} \begin{bmatrix} \lambda_{4x1} \\ \tau_{3x1} \end{bmatrix}_{7x1} = [\mathbf{M} \ddot{q} - \mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_{app}]_{7x1}$$

Es relevante destacar que, debido al signo negativo que presenta la transpuesta de \mathbf{B}^T en la ecuación, los multiplicadores de Lagrange obtenidos no corresponden a las fuerzas de reacción directamente, sino a dichas fuerzas con el signo invertido.

A continuación, se procede a la realización de los diferentes casos de simulación. En primer lugar, se validará si el código implementado en MATLAB es capaz de reproducir de manera realista y coherente diversas trayectorias del robot. Aunque, al tratarse de un vehículo omnidireccional, es capaz de seguir cualquier trayectoria en el plano, se seleccionarán trayectorias típicas basadas en la bibliografía especializada sobre este tipo de robots con el fin de validar el modelo.

Como se ha comentado anteriormente, para todos los casos se tomará como coordenadas independientes las coordenadas X_{G2} , Y_{G2} y ψ_2 . Como acciones externas (τ), se tomarán los momentos alrededor el eje Y local de las ruedas 3, 4 y 5.

$$\tau = [M_y^3 \quad M_y^4 \quad M_y^5]$$

4.3.1 Caso 1 en dinámica inversa. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación

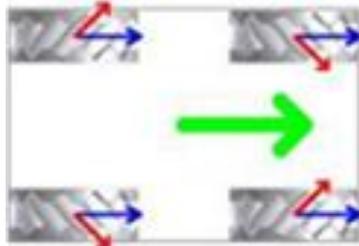


Figura 4-1. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación. Referencia [11]

En este caso de estudio se analiza un desplazamiento del vehículo a lo largo del eje X. Para ello, se genera una trayectoria de avance con una duración total de diez segundos, partiendo de las siguientes condiciones iniciales de integración de:

$$q_{d0} = [\theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

La trayectoria definida consta de tres fases: un periodo de aceleración de dos segundos, seguido por una fase de velocidad constante de seis segundos, y finalmente un periodo de desaceleración de dos segundos que concluye con velocidad nula.

A continuación, se presentan algunas gráficas de interés obtenidas a partir de la simulación, junto con el análisis correspondiente de los resultados:

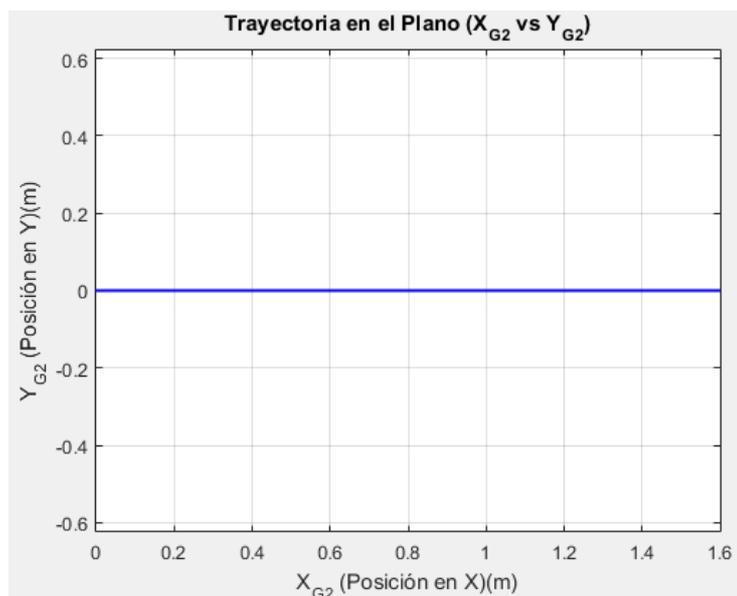


Figura 4-2. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica inversa

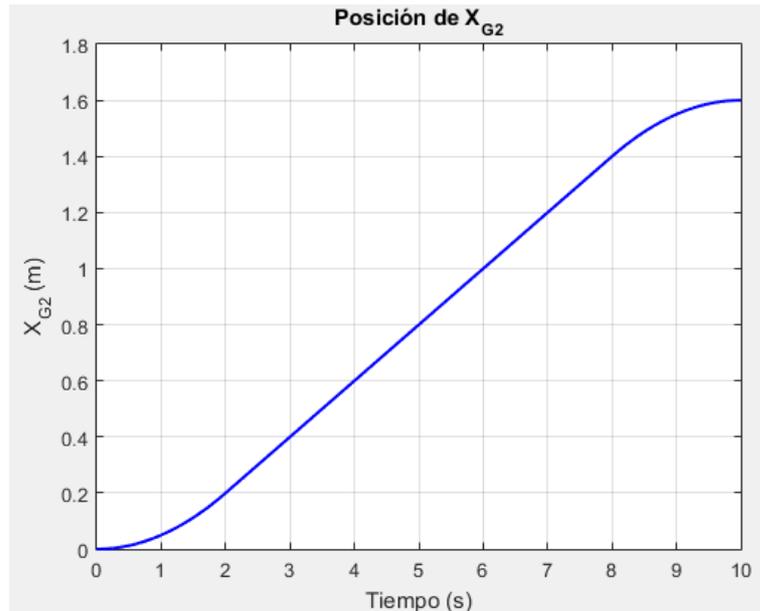


Figura 4-3. X_{G2} en caso 1 dinámica inversa

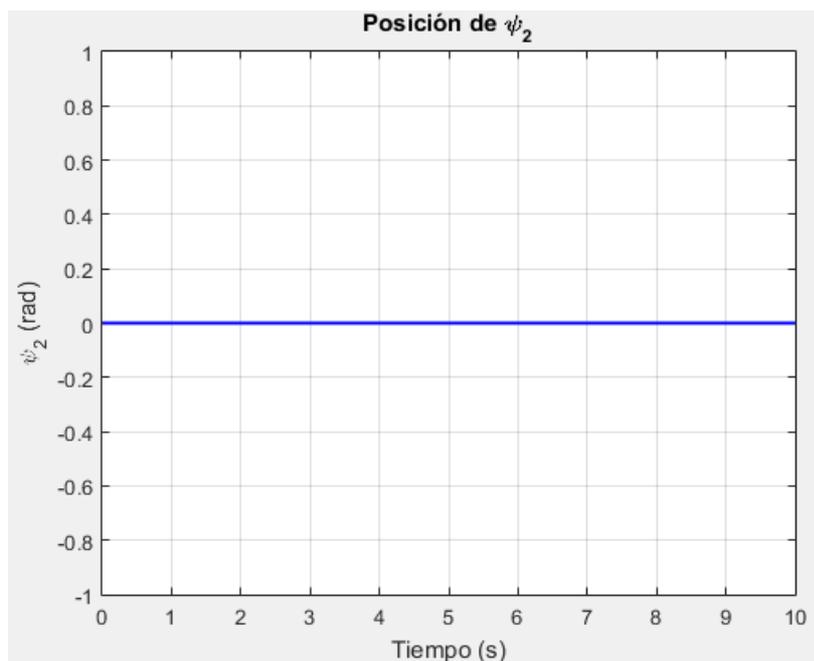


Figura 4-4. ψ_2 en caso 1 dinámica inversa

A partir de la Figura 4-2 se observa que el vehículo se desplaza hacia delante, recorriendo una distancia total de 1,6 metros. Asimismo, de la Figura 4-3 se deduce que dicho desplazamiento se realiza a velocidad constante durante el intervalo comprendido entre los 2 y los 8 segundos, lo cual concuerda con la fase de velocidad uniforme definida en la trayectoria impuesta. Por otro lado, la Figura 4-4 muestra que la tercera coordenada generalizada, correspondiente a ψ_2 , permanece constante en cero a lo largo de todo el tiempo simulado. Esto indica que el robot no experimenta ninguna variación en su orientación, hecho que era de esperar al haberse impuesto dicha coordenada como constante durante la simulación.

Las gráficas correspondientes a la posición, velocidad y aceleración generalizadas son idénticas para todas las ruedas del sistema. Por motivos de claridad, se presentan a continuación únicamente los resultados obtenidos para la rueda 4, siendo estos representativos del comportamiento de las restantes ruedas:

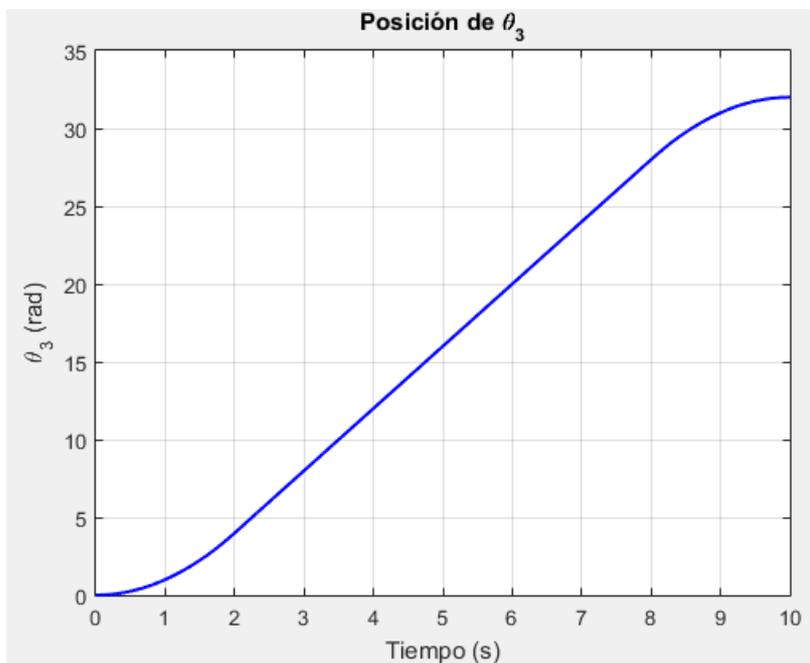


Figura 4-5. $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ en caso 1 dinámica inversa

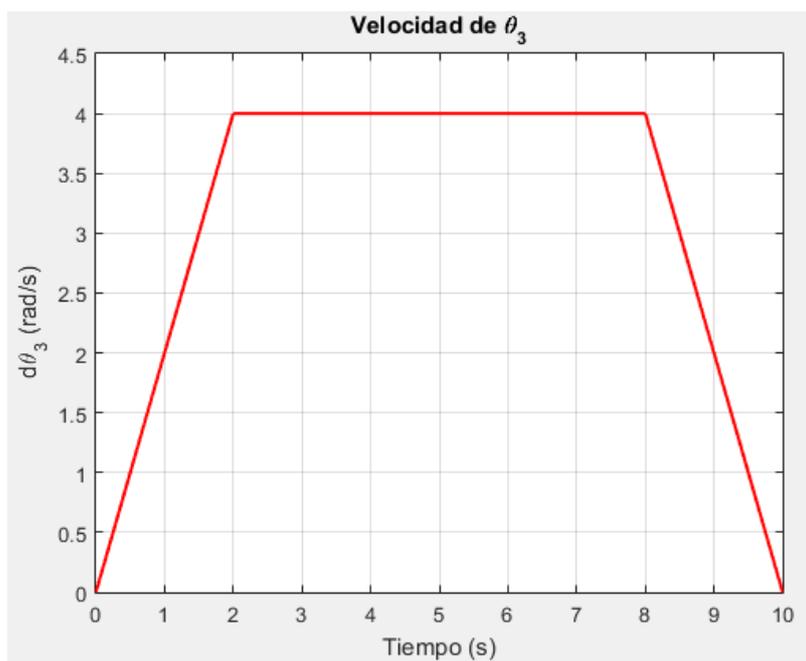


Figura 4-6. $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6$ en caso 1 dinámica inversa

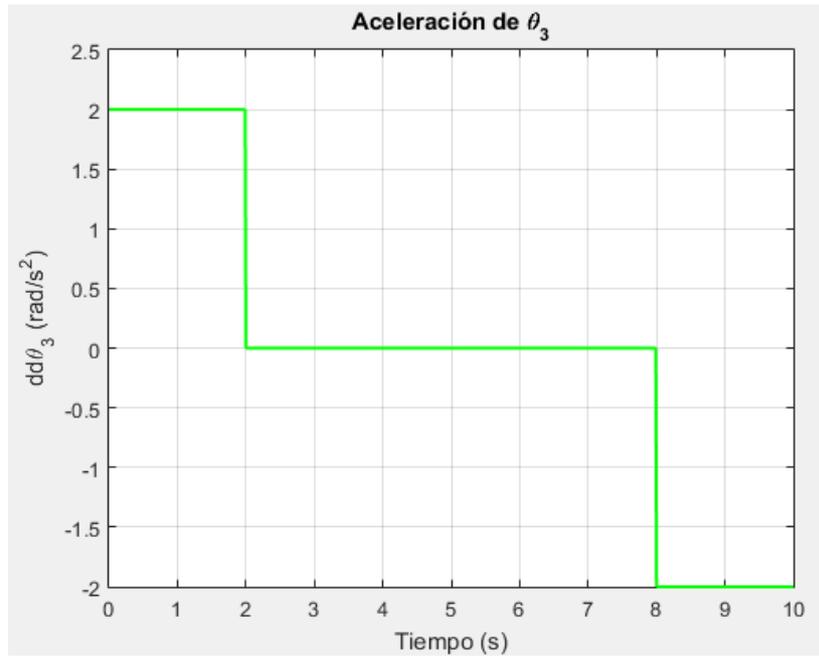


Figura 4-7. $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4, \ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6$ en caso 1 dinámica inversa

A continuación, se muestran las acciones externas necesarias para ejecutar el movimiento impuesto, obtenidas a partir de la simulación dinámica inversa:

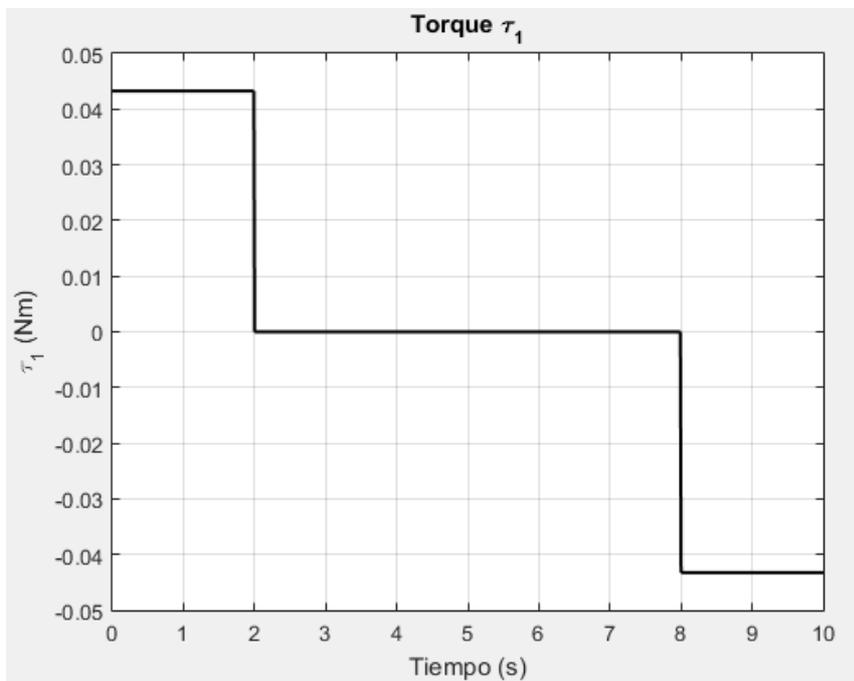


Figura 4-8. M_y^3 en caso 1 dinámica inversa

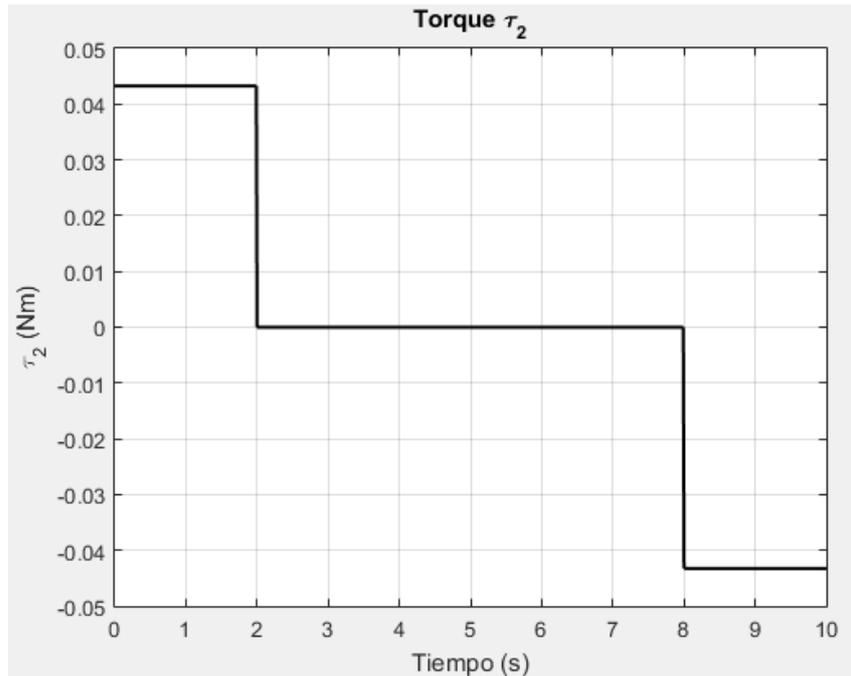


Figura 4-9. M_y^4 en caso 1 dinámica inversa

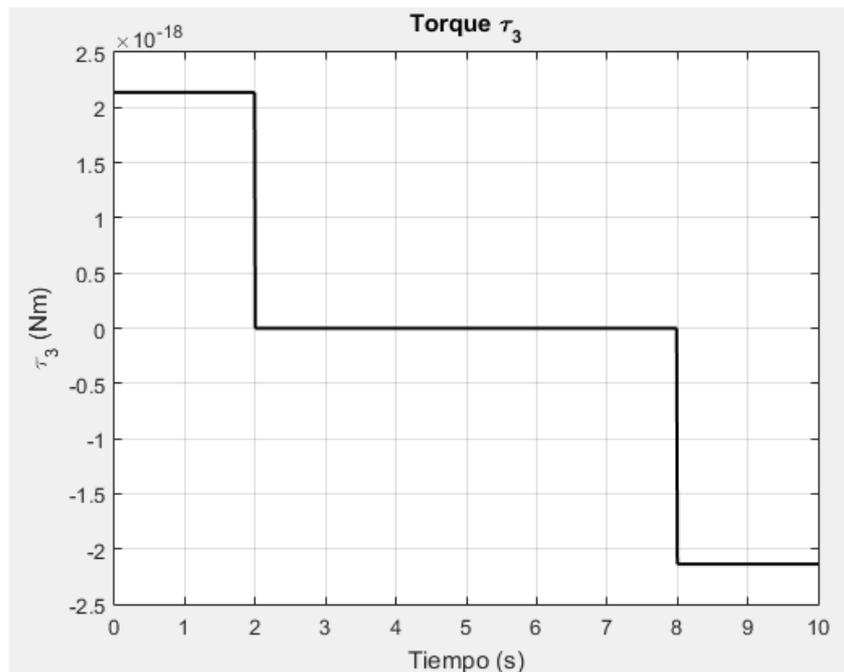


Figura 4-10. M_y^5 en caso 1 dinámica inversa

Estas acciones corresponden a los pares motrices requeridos por las ruedas 3, 4 y 5 para llevar a cabo el desplazamiento. Se puede observar que tanto en las ruedas 3 como 4 —ubicadas en la parte delantera del vehículo— se aplican pares significativos, mientras que en la rueda 5 el par es prácticamente nulo. Este comportamiento se justifica por la configuración del sistema: la rueda trasera 6 actúa en modo pasivo (comúnmente denominada “loca”), es decir, no tiene par asociado, por lo que su rueda simétrica, la rueda 5, tampoco presenta par aplicado.

Finalmente, es relevante señalar la similitud entre las gráficas de las aceleraciones generalizadas de las ruedas y los pares aplicados. Este paralelismo se debe al hecho de que, en sistemas dinámicos, las aceleraciones deben

ser inducidas por acciones externas. En este caso, dichas acciones son los pares motrices, lo que explica que cuando la aceleración se anula, los pares también tiendan a ser nulos.

4.3.2 Caso 2 en dinámica inversa. Desplazamiento a 45 grados con respecto al eje X sin cambio de orientación

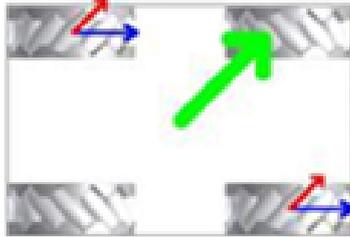


Figura 4-11. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación. Referencia [11]

En este caso, se procede a simular un desplazamiento del vehículo a 45 grados respecto a los ejes del sistema de referencia global, sin variación en su orientación. Para ello, se define un movimiento de avance positivo en las coordenadas X_{G2} e Y_{G2} , con una trayectoria compuesta por tres fases: una fase de aceleración de dos segundos, seguida de un periodo de velocidad constante de seis segundos, y finalmente un periodo de desaceleración de dos segundos hasta alcanzar velocidad nula. Las condiciones iniciales de integración consideradas son las siguientes:

$$q_{d0} = [\theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A continuación, se presentan algunas gráficas de interés obtenidas a partir de la simulación, así como el análisis correspondiente de los resultados:

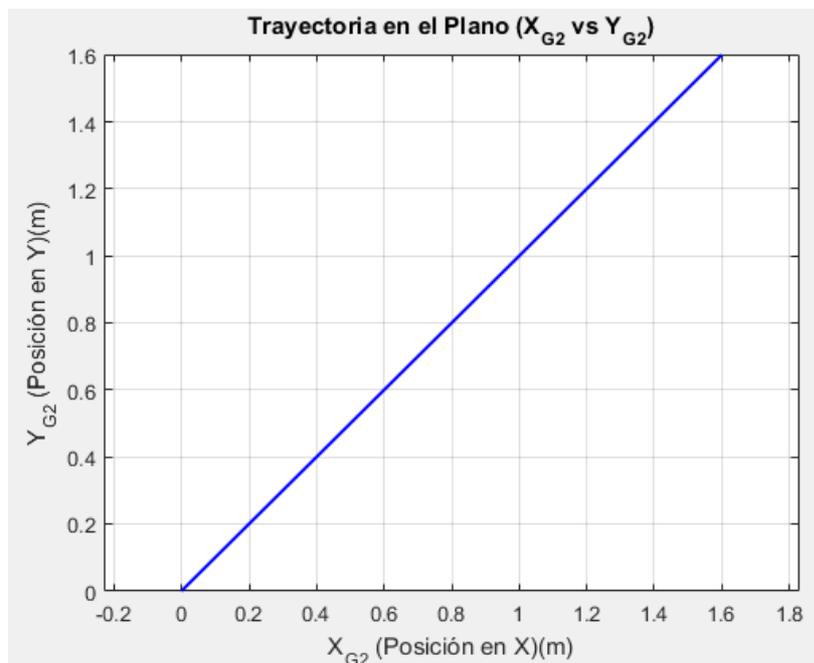
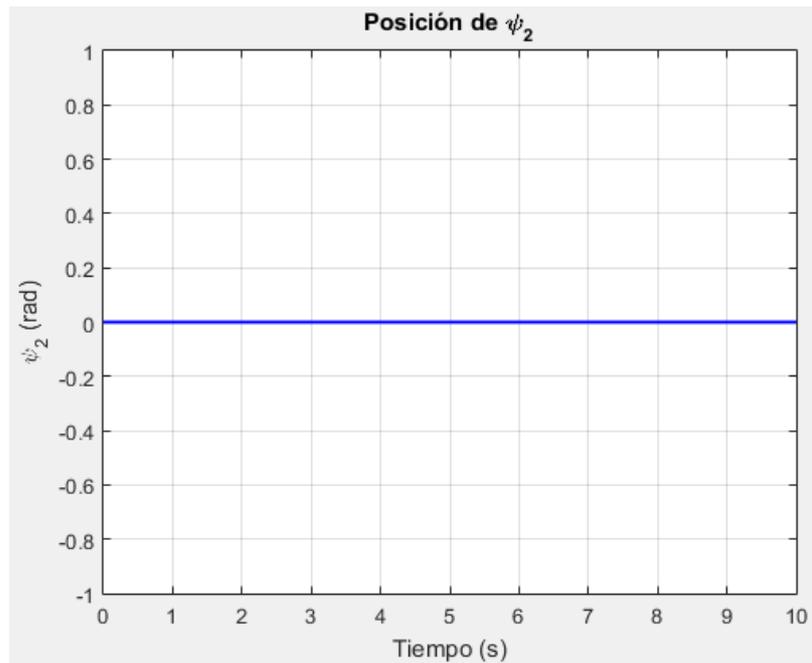
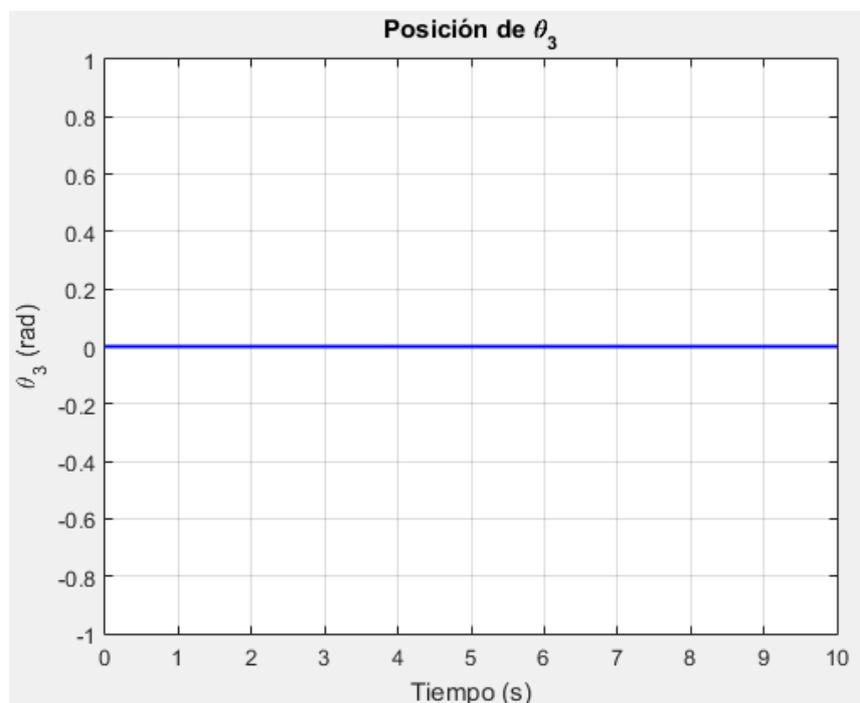


Figura 4-12. Trayectoria del chasis en caso 2 dinámica inversa

Figura 4-13. ψ_2 en caso 2 dinámica inversa

Del análisis de estas dos gráficas se deduce que la trayectoria seguida por el robot es la esperada: avanza en igual proporción tanto en el eje X como en el eje Y, y mantiene constante su orientación durante toda la simulación. En consecuencia, se observa que el desplazamiento total es de 1,6 metros en ambas direcciones.

Un aspecto relevante que se puede observar en las gráficas es que las coordenadas generalizadas de las ruedas 3 y 6, no presentan variación a lo largo del tiempo:

Figura 4-14. θ_3 y θ_6 en caso 2 dinámica inversa

Esto se debe a que dichas ruedas no giran en torno a su eje principal, como se indica en la Figura 4-15. En su lugar, el movimiento se produce únicamente a través del giro de los rodillos en contacto con el terreno, por lo que no se registra rotación en los ejes principales de las ruedas.

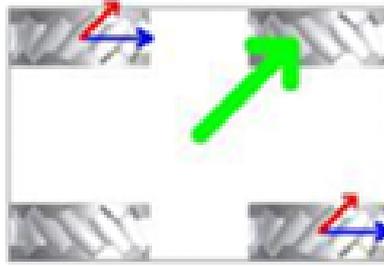


Figura 4-15. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación. Referencia [11]

Las posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas correspondientes a las ruedas 4 y 5 se representan a continuación:

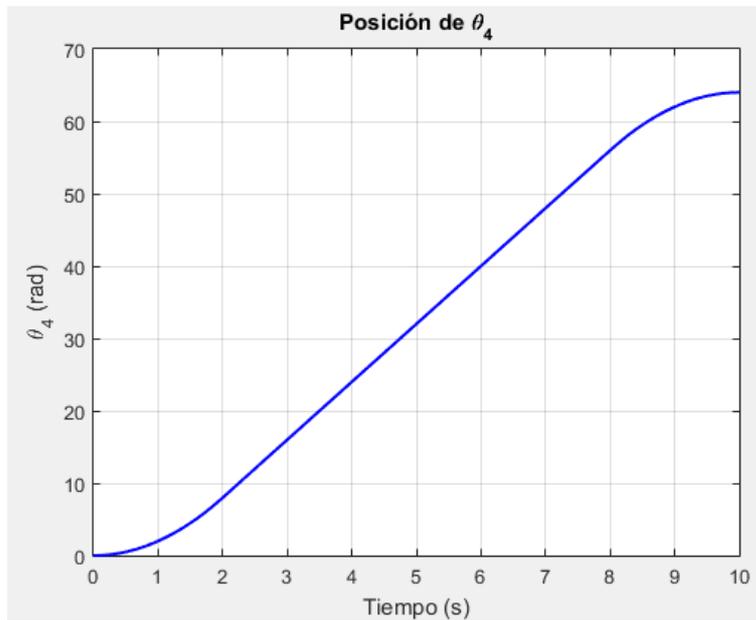


Figura 4-16. θ_4 y θ_5 en caso 2 dinámica inversa

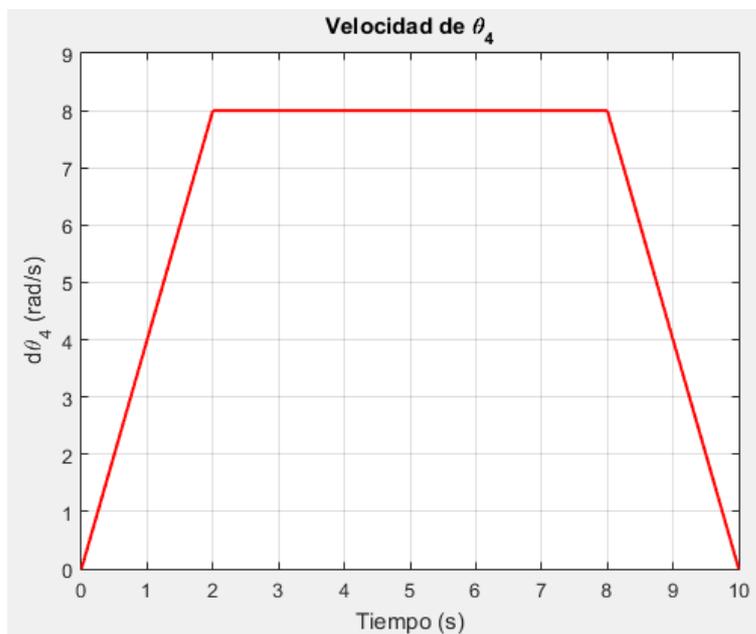


Figura 4-17. $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_5$ en caso 2 dinámica inversa

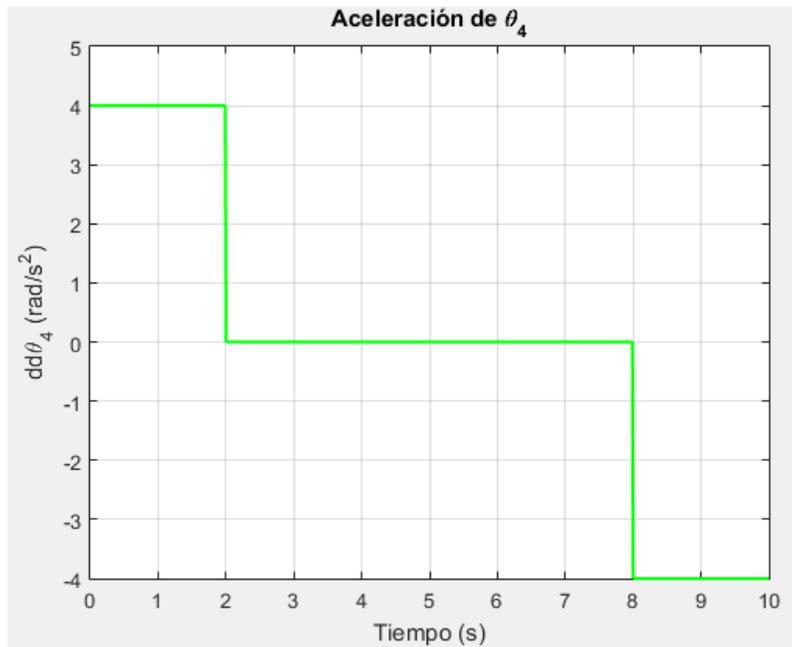


Figura 4-18. $\ddot{\theta}_4$ y $\ddot{\theta}_5$ en caso 2 dinámica inversa

En este escenario las velocidades y aceleraciones alcanzan valores superiores al del caso anterior, lo cual es coherente para lograr un mayor desplazamiento diagonal.

A continuación, se presentan las acciones externas obtenidas a partir de la simulación, las cuales corresponden a los pares aplicados a las ruedas 3, 4 y 5:

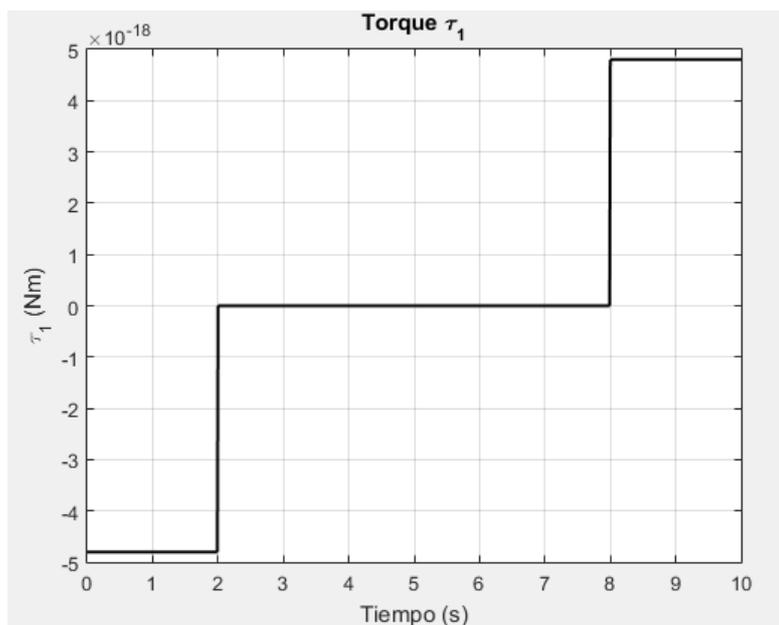
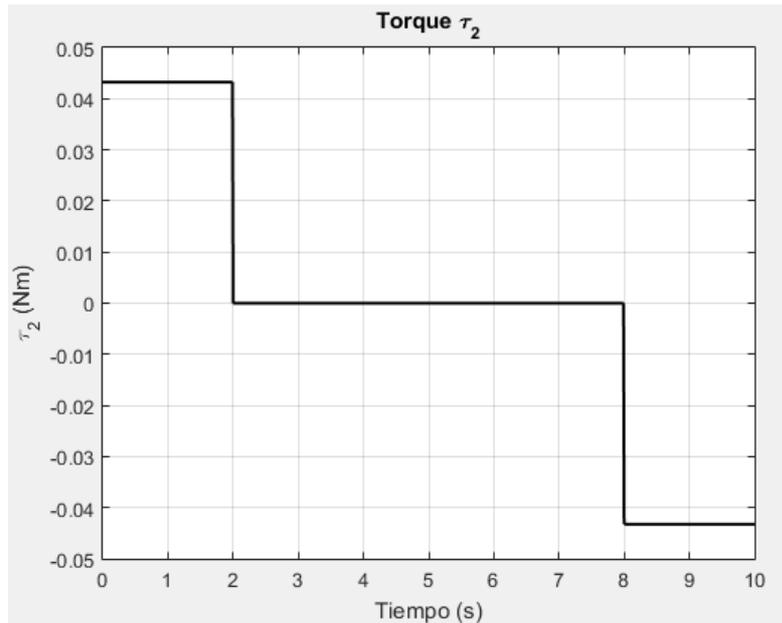
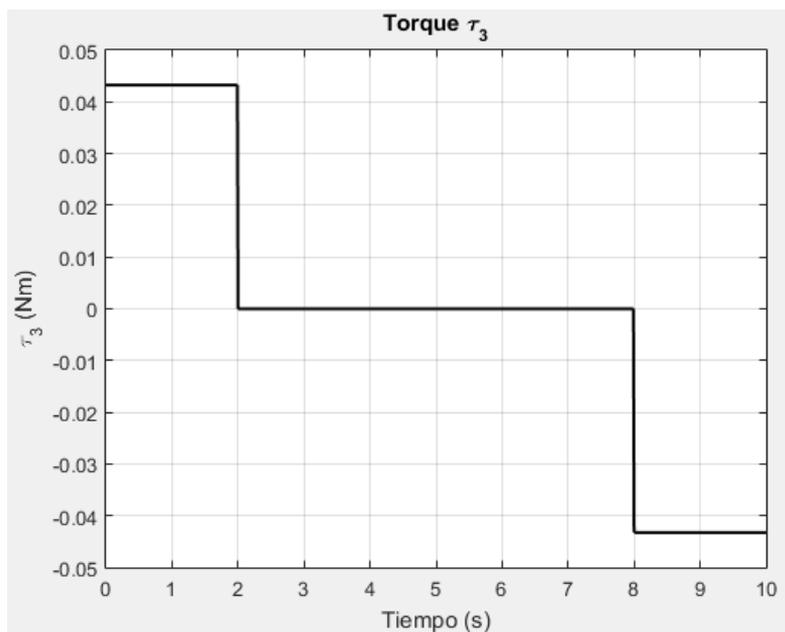


Figura 4-19. M_y^3 en caso 2 dinámica inversa

Figura 4-20. M_y^4 en caso 2 dinámica inversaFigura 4-21. M_y^5 en caso 2 dinámica inversa

Se observa que el par correspondiente a la rueda 3, es decir, τ_1 , es prácticamente nulo. Este resultado indica que para lograr el movimiento impuesto únicamente es necesario aplicar par en las ruedas 4 y 5, lo cual es coherente con el hecho de que las ruedas 3 y 6 no presentan rotación en este tipo de desplazamiento.

Además, resulta interesante señalar que el valor del par aplicado en las ruedas 4 y 5 es idéntico al requerido en el caso anterior. Sin embargo, las velocidades generadas en estas ruedas y el desplazamiento del chasis son notablemente mayores. Esta diferencia se explica por la interacción de las fuerzas de fricción entre las ruedas y el terreno: en el primer caso, existían componentes de fricción que se contrarrestaban entre sí, en concreto en la dirección Y, impidiendo el avance en esa dirección. En cambio, en este segundo escenario, las fuerzas de fricción asociadas a las ruedas 4 y 5 actúan en la misma dirección y, por tanto, no se anulan, lo que facilita el desplazamiento diagonal del vehículo.

4.3.3 Caso 3 en dinámica inversa. Cambio de orientación en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas

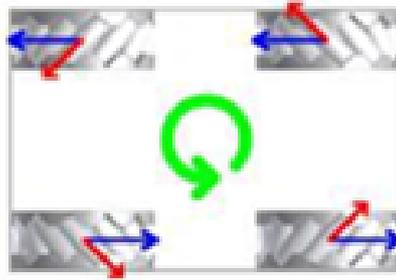


Figura 4-22. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas. Referencia [11]

En este último caso, se procede a simular un giro positivo del ángulo ψ_2 manteniendo constantes las coordenadas X_{G2} e Y_{G2} . Para ello, se impone una trayectoria angular en ψ_2 que consta de tres fases: una fase inicial de aceleración angular durante los dos primeros segundos, seguida de un intervalo de velocidad angular constante de seis segundos, y finalmente una fase de desaceleración angular de dos segundos hasta alcanzar velocidad cero. Las condiciones iniciales de integración se definen como:

$$q_{d0} = [\theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Al igual que en los casos anteriores, se presentan a continuación las gráficas más relevantes y se procede al análisis de los resultados obtenidos.

En primer lugar, se representan las tres primeras coordenadas generalizadas en función del tiempo. Se observa que el único parámetro que varía a lo largo del tiempo es el ángulo ψ_2 , mientras que X_{G2} e Y_{G2} permanecen constantes, lo cual confirma que el movimiento simulado corresponde exclusivamente a un giro en el plano sin traslación del chasis:

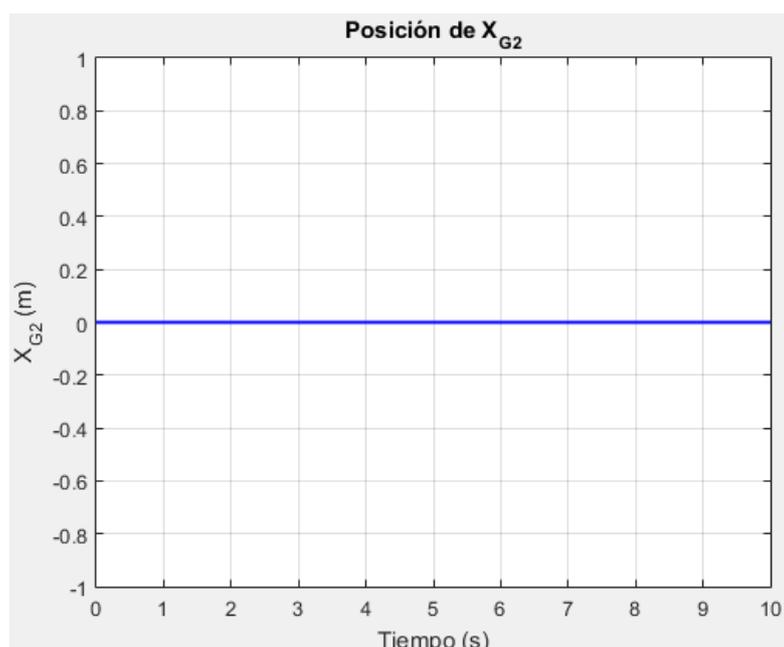


Figura 4-23. X_{G2} en caso 3 dinámica inversa

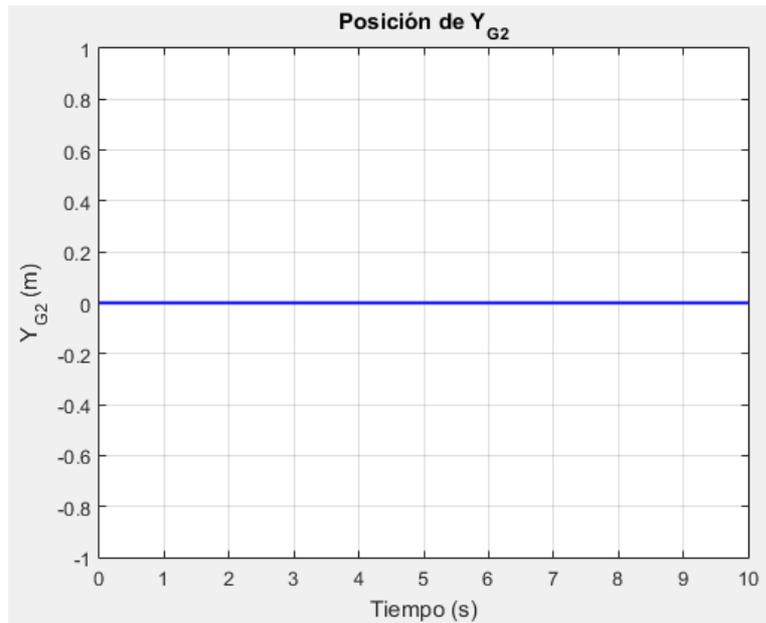


Figura 4-24. Y_{G2} en caso 3 dinámica inversa

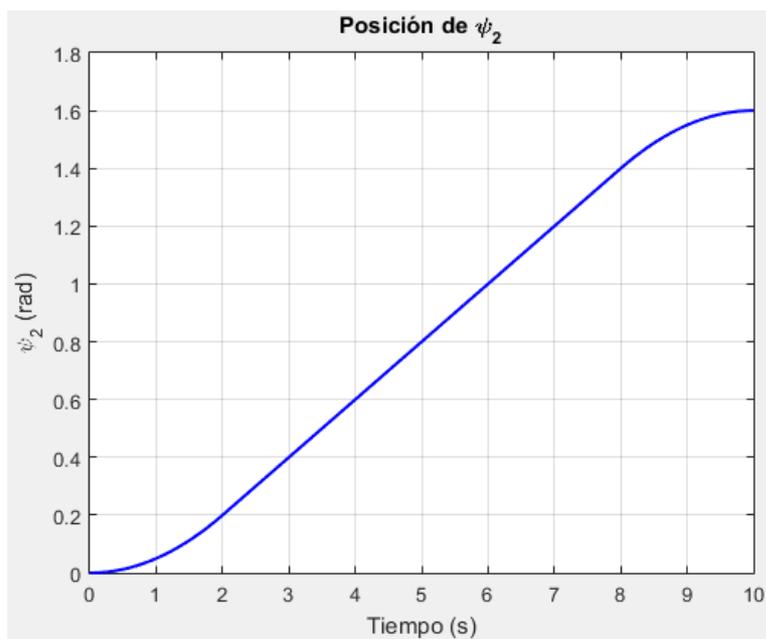


Figura 4-25. ψ_2 en caso 3 dinámica inversa

A continuación, se representan las posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas de las ruedas. Se observa que las ruedas 3 y 5 presentan exactamente la misma evolución temporal en sus respectivas gráficas, tanto de posición como de velocidad y aceleración. Por su parte, las ruedas 4 y 6 también muestran curvas idénticas entre sí, pero simétricas respecto a las obtenidas para las ruedas 3 y 5:

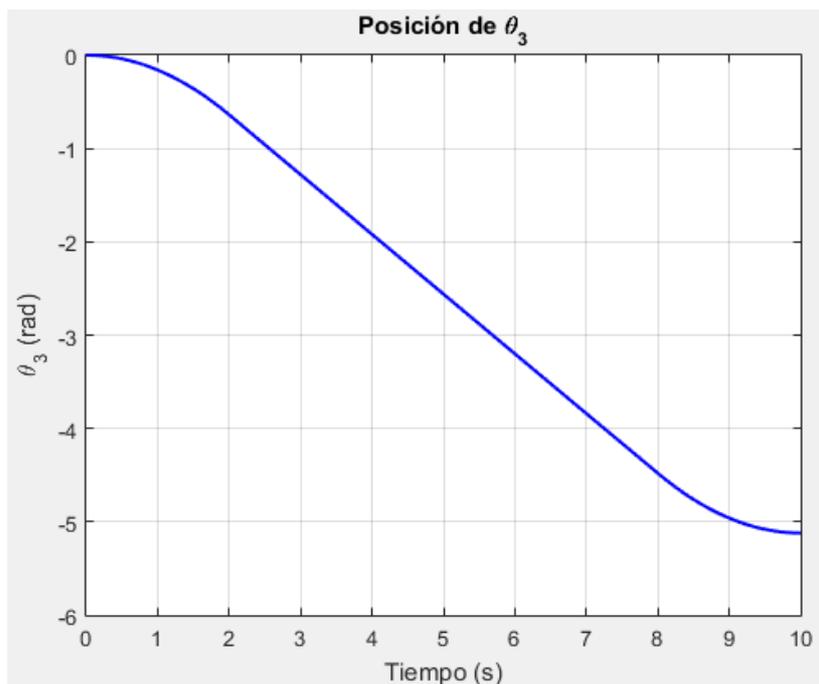


Figura 4-26. θ_3 y θ_5 en caso 3 dinámica inversa

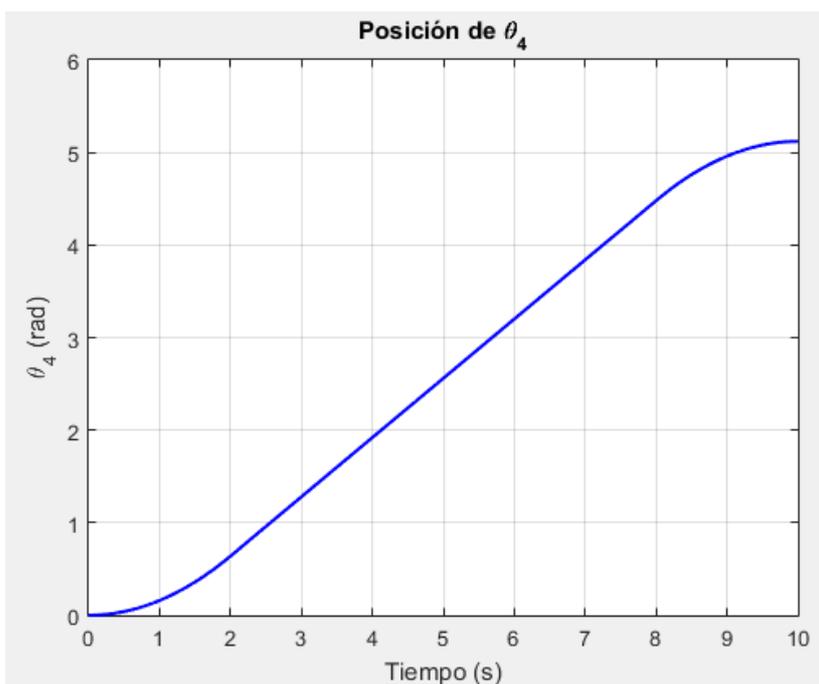
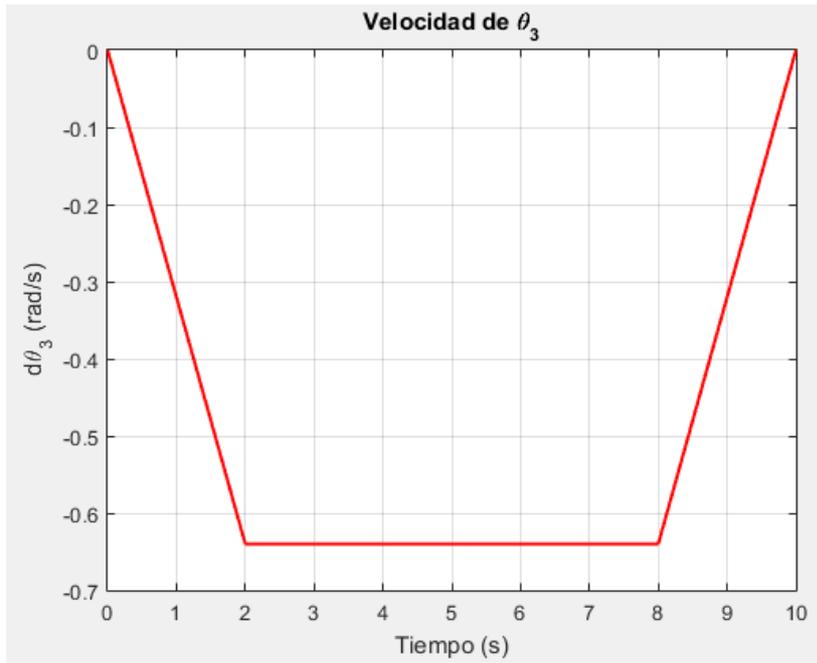
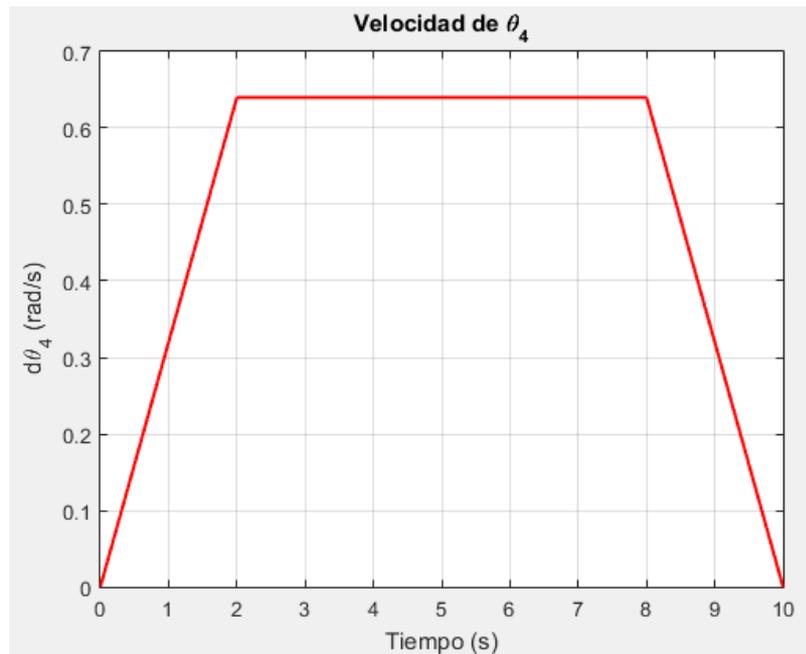


Figura 4-27. θ_4 y θ_6 en caso 3 dinámica inversa

Figura 4-28. $\dot{\theta}_3$ y $\dot{\theta}_5$ en caso 3 dinámica inversaFigura 4-29. $\dot{\theta}_4$ y $\dot{\theta}_6$ en caso 3 dinámica inversa

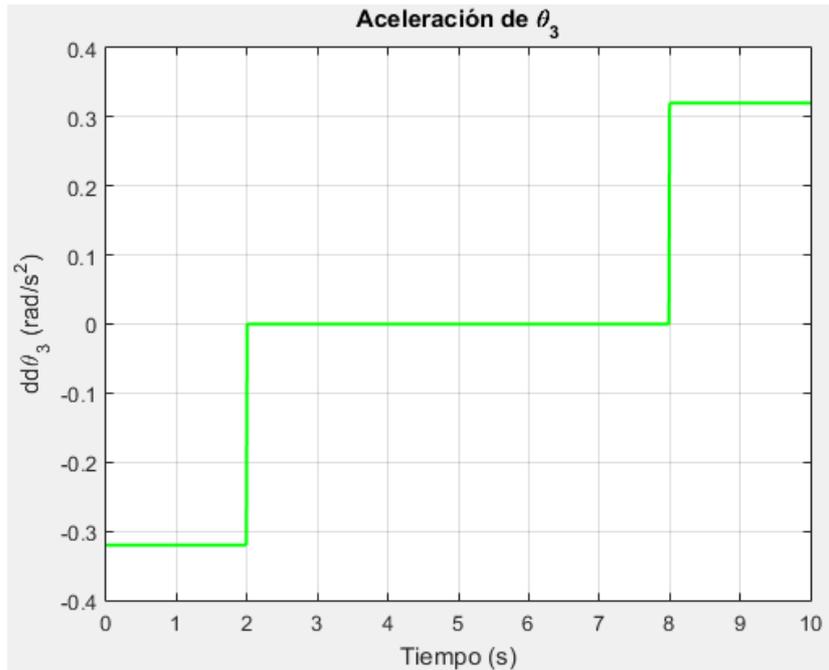


Figura 4-30. $\ddot{\theta}_3$ y $\ddot{\theta}_5$ en caso 3 dinámica inversa

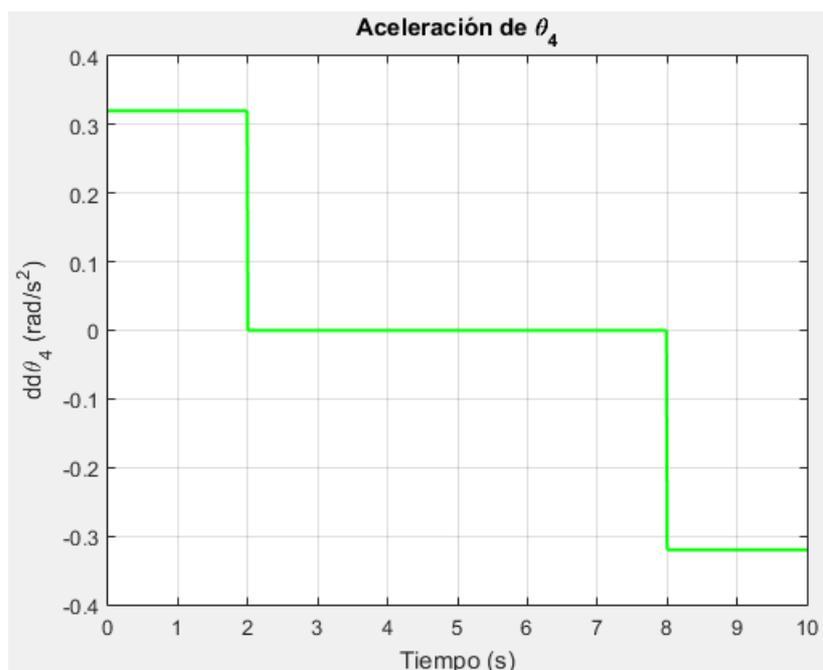


Figura 4-31. $\ddot{\theta}_4$ y $\ddot{\theta}_6$ en caso 3 dinámica inversa

Este comportamiento es coherente con el movimiento impuesto: para generar un giro del chasis en el plano sin desplazamiento lineal, las ruedas situadas en el lado derecho del vehículo deben girar en sentido positivo, mientras que las del lado izquierdo deben hacerlo en sentido negativo. Esta distribución de velocidades garantiza el giro puro del vehículo respecto a su centro de masas sin que exista desplazamiento en los ejes X o Y.

Otro aspecto relevante que se puede extraer de los resultados obtenidos es la relación entre el ángulo de giro del chasis y el giro necesario de las ruedas motrices. En este caso, se observa que para que el chasis describa una rotación de 1,6 radianes, las ruedas deben girar aproximadamente 5,12 radianes, siendo esta relación de aproximadamente 3,2. Por tanto, se deduce que para que el vehículo complete un giro completo de 2π radianes (es decir, una vuelta completa), las ruedas deben girar en torno a 20,106 radianes.

Esta proporción evidencia la necesidad de un mayor recorrido angular en las ruedas para inducir una rotación del chasis, lo cual es característico de este tipo de vehículos omnidireccionales debido a su configuración geométrica y la forma en que se transmite el movimiento al chasis a través de movimiento de la rueda.

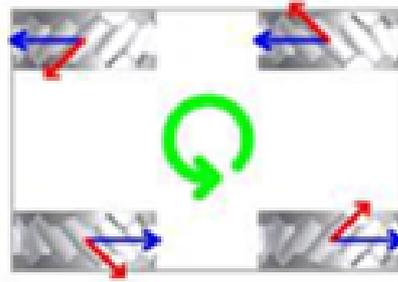


Figura 4-32. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas. Referencia [11]

Finalmente, se presentan las acciones externas calculadas mediante la simulación, las cuales corresponden a los pares aplicados a las ruedas 3, 4 y 5:

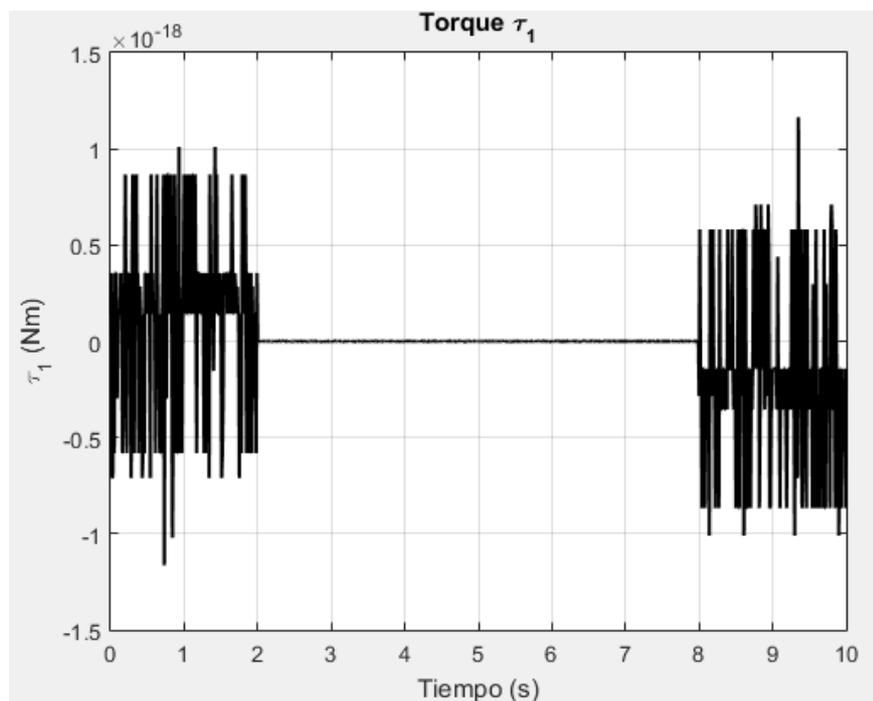


Figura 4-33. M_y^3 en caso 3 dinámica inversa

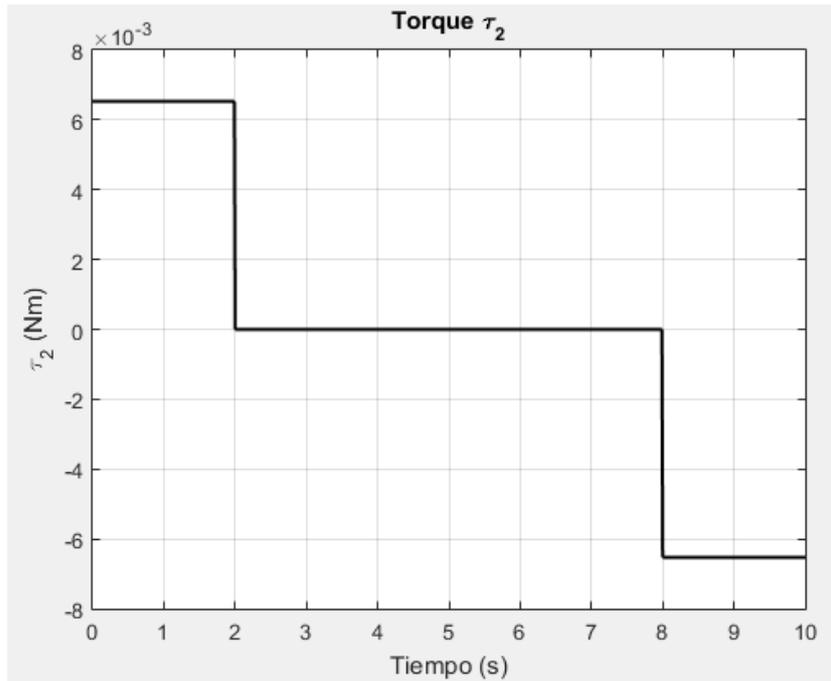


Figura 4-34. M_y^4 en caso 3 dinámica inversa

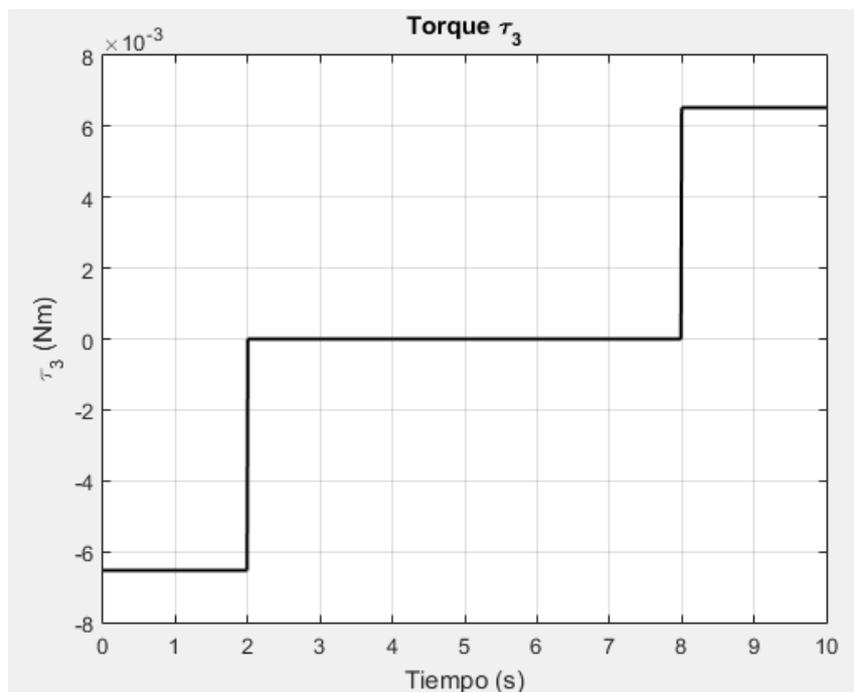


Figura 4-35. M_y^5 en caso 3 dinámica inversa

Se observa que sobre las ruedas 4 y 5 actúan pares motrices, mientras que el par aplicado en la rueda 3 es muy reducido, de un orden significativamente menor en comparación con los anteriores. Este resultado es coherente con la arquitectura del sistema: dado que la rueda 6 es una rueda loca (no actúa par sobre ella), y la rueda 3 es su opuesta diagonal, esta última tampoco recibe par para mantener el equilibrio dinámico del sistema. En consecuencia, el movimiento de giro se genera exclusivamente a partir de los pares aplicados sobre las ruedas 4 y 5.

4.4 Simulación Dinámica Directa

Para llevar a cabo la simulación de dinámica directa se imponen los pares aplicados en las cuatro ruedas motrices del vehículo. Es importante señalar que el sistema presenta tres grados de libertad, mientras que se están aplicando cuatro entradas de control (pares), lo que da lugar a un sistema sobreactuado. Esta condición implica que se dispone de más actuadores de los estrictamente necesarios para controlar completamente el movimiento del sistema, lo cual conlleva una serie de características y ventajas, entre las que se destacan:

- 1) Redundancia en el control: La existencia de múltiples combinaciones de pares que permiten alcanzar un mismo estado dinámico proporciona flexibilidad en la planificación del movimiento. Esta redundancia puede aprovecharse para optimizar parámetros como el consumo energético, la eficiencia o la robustez del sistema.
- 2) Mayor estabilidad y precisión: La distribución del esfuerzo entre más actuadores permite reducir la carga individual de cada uno, lo que se traduce en un comportamiento más suave, estable y preciso del sistema.
- 3) Necesidad de estrategias de control avanzadas: La sobreactuación exige el uso de métodos de control más elaborados, como el control óptimo o técnicas de asignación de esfuerzos, que permitan determinar la distribución más adecuada de los pares entre las ruedas para cumplir con los objetivos de movimiento.

Un ejemplo ilustrativo de esta situación se encuentra en el Caso 1 desarrollado durante el estudio de la dinámica inversa. En dicho caso, se comprobó que el movimiento impuesto podía lograrse actuando únicamente sobre las ruedas 3 y 4, sin necesidad de aplicar par en la rueda 5. No obstante, en el contexto de dinámica directa con sobreactuación, se observa que es posible alcanzar el mismo resultado actuando sobre las cuatro ruedas simultáneamente. Además, al distribuir los esfuerzos, el par necesario en cada rueda se reduce considerablemente, aproximadamente a la mitad del requerido cuando solo se actuaba sobre dos ruedas.

A continuación, se procederá a la ejecución de distintos casos de simulación. En primer lugar, se reproducirá el Caso 1 de dinámica inversa, esta vez bajo condiciones de dinámica directa con sobreactuación, para verificar que el mismo movimiento puede lograrse mediante la acción conjunta de las cuatro ruedas. Posteriormente, se abordará un nuevo caso más complejo con el objetivo de analizar el comportamiento del sistema en situaciones de mayor exigencia dinámica.

4.4.1 Caso 1 en dinámica directa. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación

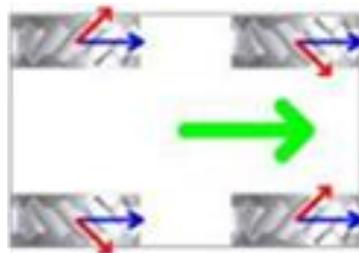


Figura 4-36. Desplazamiento hacia delante sin cambio de orientación. Referencia [11]

A partir de las gráficas obtenidas en el análisis de dinámica inversa, se puede observar que los pares requeridos en las ruedas delanteras para imponer un desplazamiento rectilíneo hacia delante, sin variación en la orientación, y con una distancia total recorrida de 1,6 metros, son los siguientes:

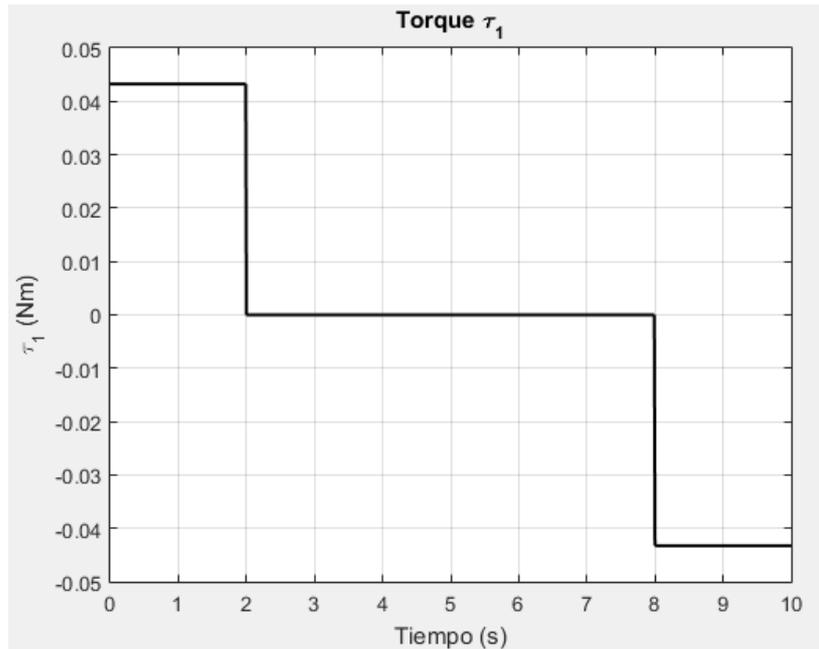


Figura 4-37. M_y^3 en caso 1 dinámica inversa

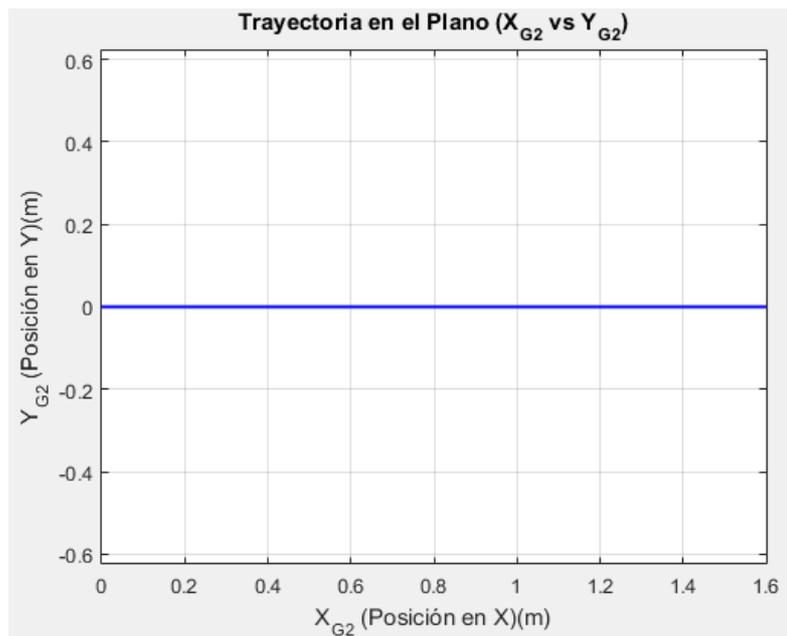


Figura 4-38. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica inversa

Como se deduce de dichas gráficas, los pares aplicados eran del orden de 0,043 Nm en cada una de las ruedas motrices activas. En el caso de la simulación de dinámica directa, al actuar sobre las cuatro ruedas en lugar de sobre dos, se puede aplicar un par reducido de aproximadamente 0,0215 Nm por rueda. Esto permite obtener el mismo resultado cinemático, repartiendo el esfuerzo entre más actuadores y confirmando así las ventajas del sistema sobreactuado.

A continuación, se presentan las gráficas resultantes de la simulación, correspondientes a la trayectoria del centro del chasis, la velocidad de giro de las ruedas y los pares aplicados en cada una de ellas:

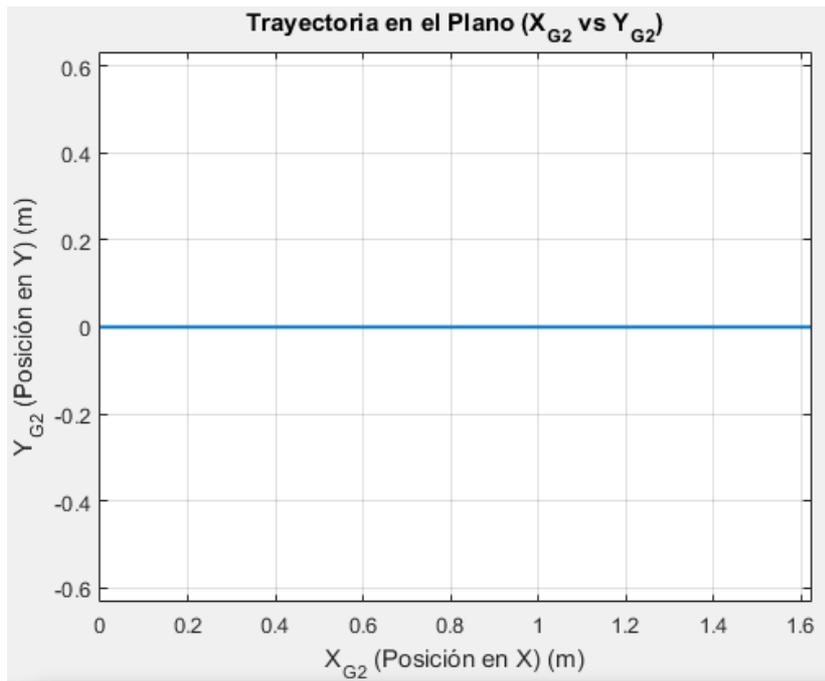


Figura 4-39. Trayectoria del chasis en caso 1 dinámica directa

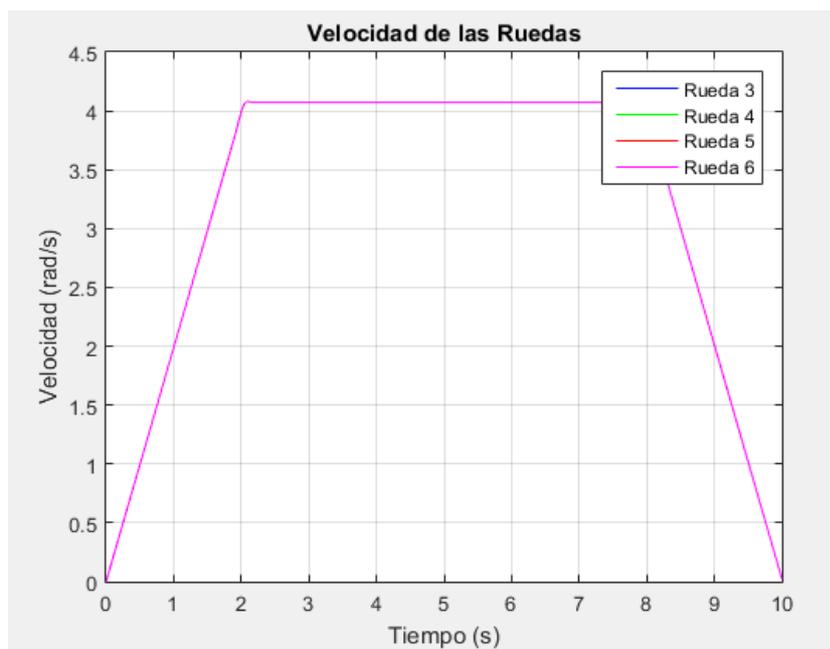


Figura 4-40. Velocidad angular de las ruedas en caso 1 dinámica directa

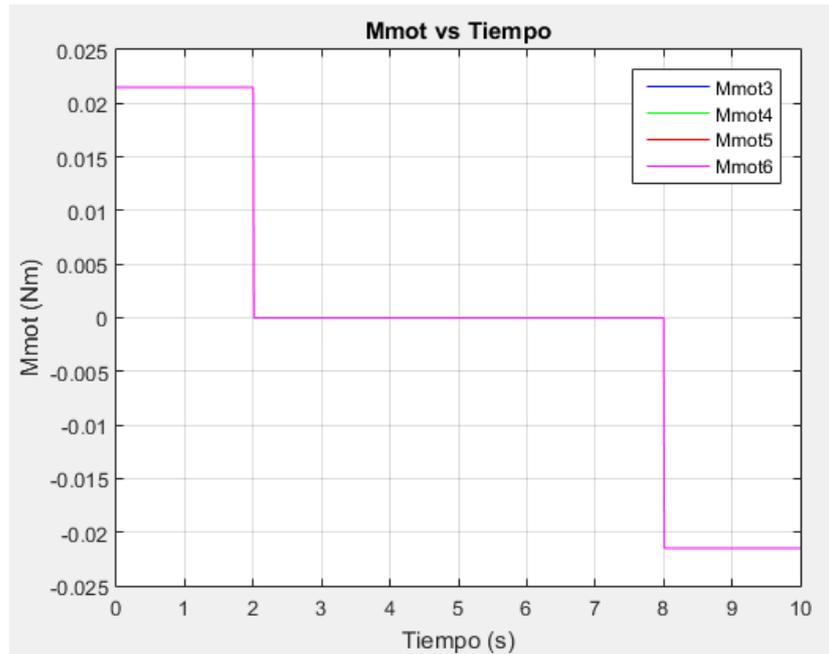


Figura 4-41. M_y^3 , M_y^4 , M_y^5 y M_y^6 en caso 1 dinámica directa

Se observa que, efectivamente, al aplicar un par reducido pero repartido entre todas las ruedas, se reproduce con precisión tanto la velocidad como la trayectoria del sistema obtenidas en el Caso 1 de dinámica inversa. Esto valida el planteamiento teórico de que el sistema sobreactuado puede lograr el mismo comportamiento dinámico con menores exigencias individuales por rueda, mejorando así la eficiencia global.

4.4.2 Caso 2 en dinámica directa. Desplazamiento 45 grados y un cambio de orientación en sentido horario simultáneamente

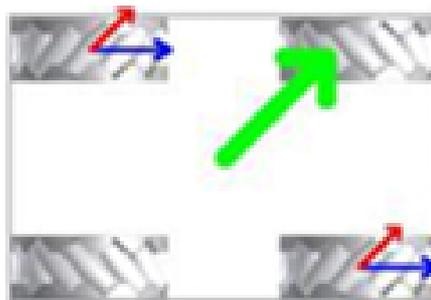


Figura 4-42. Desplazamiento a 45° con respecto al eje X sin cambio de orientación. Referencia [11]

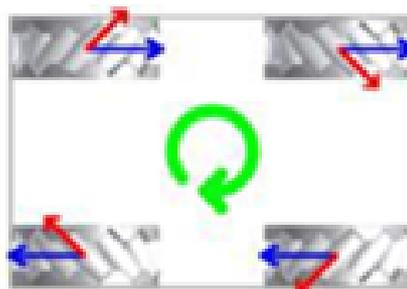


Figura 4-43. Giro en sentido antihorario sin trasladar el centro de masas. Referencia [11]

Para producir este movimiento se imponen pares motrices con un perfil definido sobre las ruedas del sistema. En concreto, se aplica un par inicialmente positivo sobre las ruedas 4 y 5 durante los primeros dos segundos, con el objetivo de acelerar el vehículo en una dirección de 45 grados respecto al eje X. Durante los seis segundos siguientes, el par aplicado es nulo, lo que permite al vehículo desplazarse a velocidad constante, y finalmente se aplica un par negativo durante los últimos dos segundos para desacelerar el sistema hasta alcanzar velocidad cero.

Adicionalmente, se impone un pequeño par sobre la rueda 3, con el mismo perfil temporal: positivo durante los primeros dos segundos, nulo en el intervalo intermedio, y negativo en los dos últimos segundos. Para la rueda 6 se impone el mismo perfil de par, pero de signo contrario al de la rueda 3. Este esquema de aplicación de pares produce un momento neto sobre el sistema sin generar fuerza neta de traslación, ya que las fuerzas de fricción generadas por las ruedas 3 y 6, al ser iguales en magnitud, pero opuestas en dirección, se anulan entre sí y únicamente inducen un giro del chasis respecto a su centro de masas.

Observando la Figura 4-42, se deduce que el desplazamiento del vehículo en dirección 45° se debe a la acción de las ruedas 4 y 5. Como se aprecia en la Figura 4-43, la acción combinada de las ruedas 3 y 6 induce una rotación del chasis en sentido horario. Esta rotación es coherente con el modelo dinámico: las flechas rojas que representan las fuerzas de fricción en dichas ruedas son simétricas y contrarias, cancelándose en términos de traslación, pero generando un momento neto.

A continuación, se muestran las gráficas correspondientes a la trayectoria, posición y orientación del centro de masas, velocidades del chasis y de las ruedas y pares aplicados, junto con su análisis:

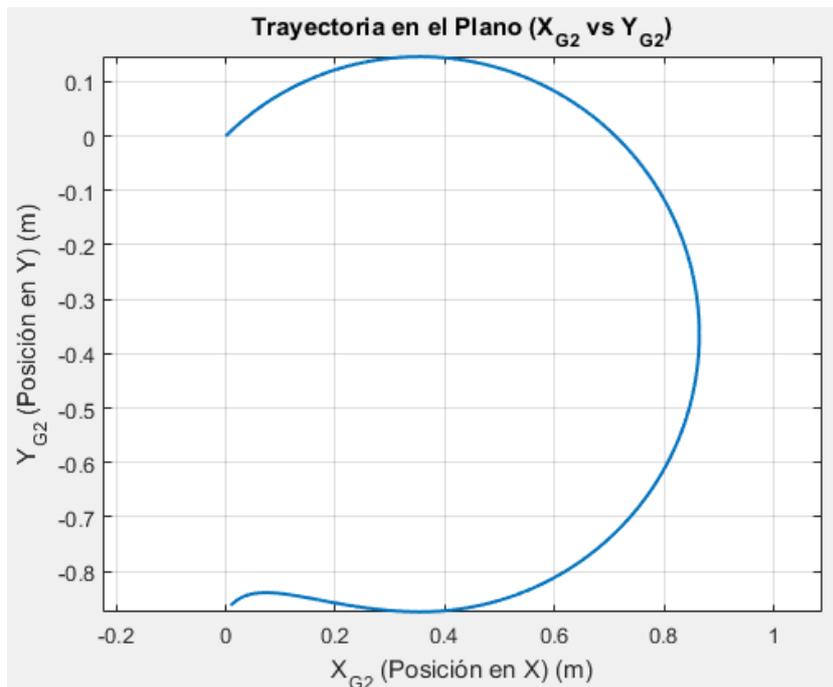


Figura 4-44. Trayectoria del chasis en caso 2 dinámica directa

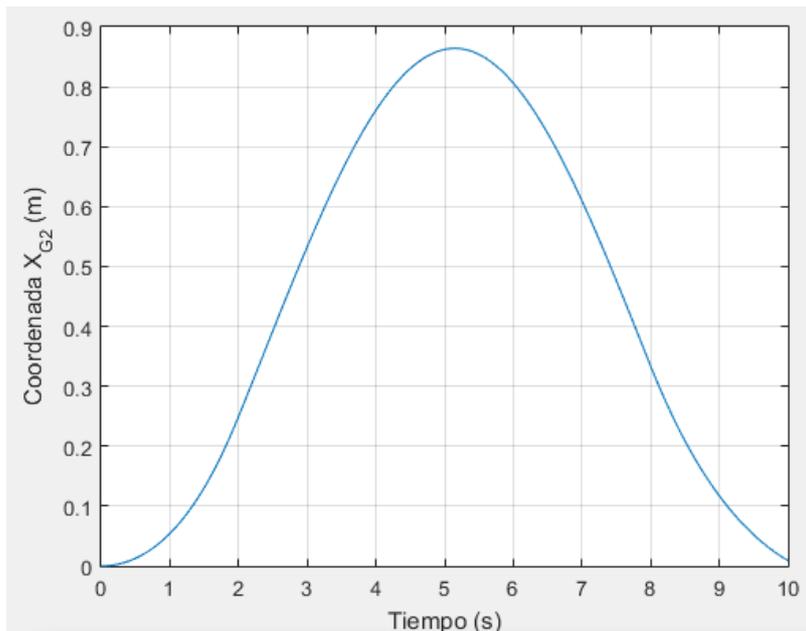


Figura 4-45. X_{G2} en caso 2 dinámica directa

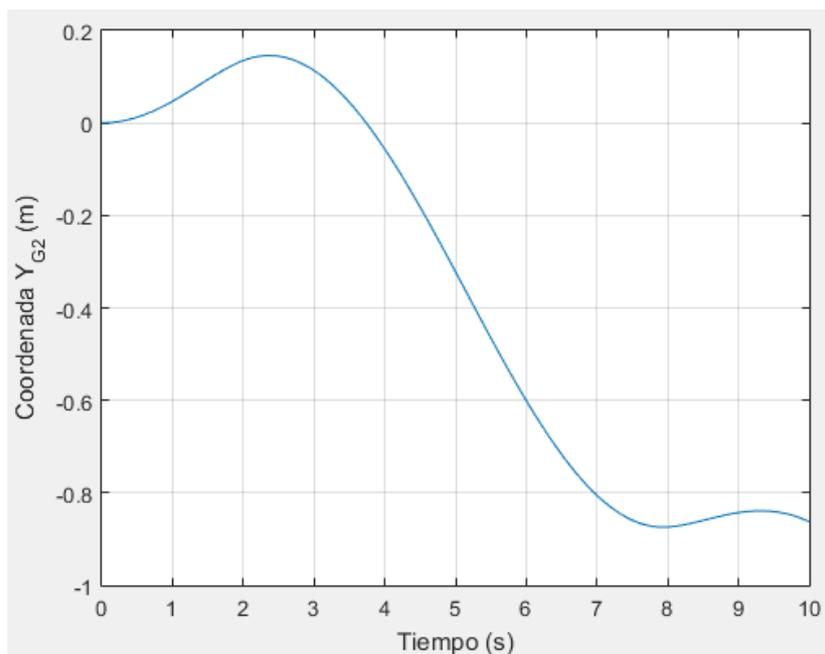


Figura 4-46. Y_{G2} en caso 2 dinámica directa

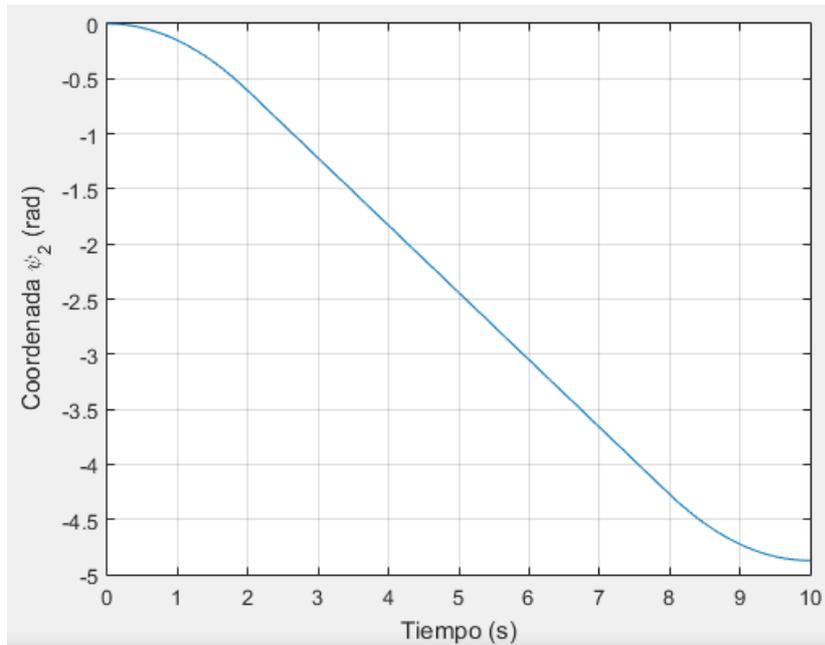
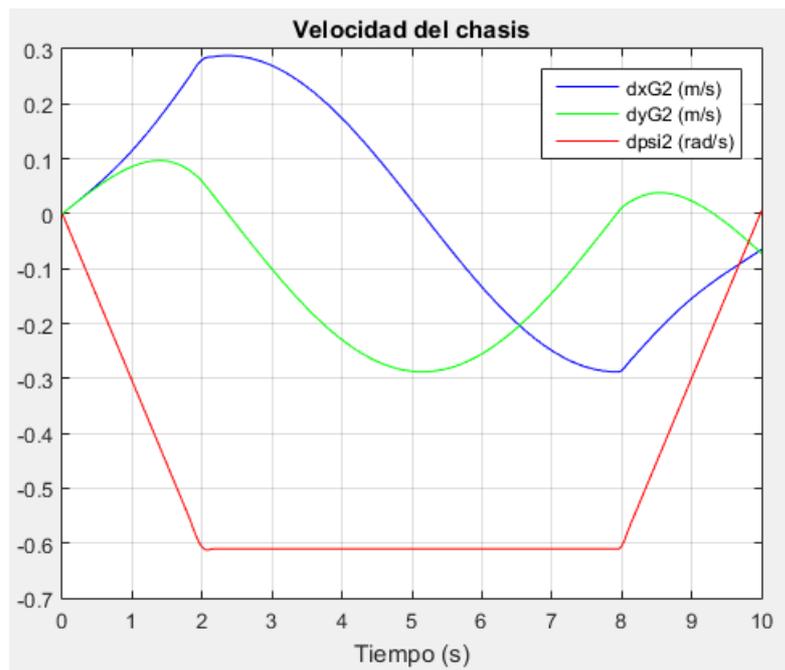
Figura 4-47. ψ_2 en caso 2 dinámica directa

Figura 4-48. Velocidad del chasis en caso 2 dinámica directa

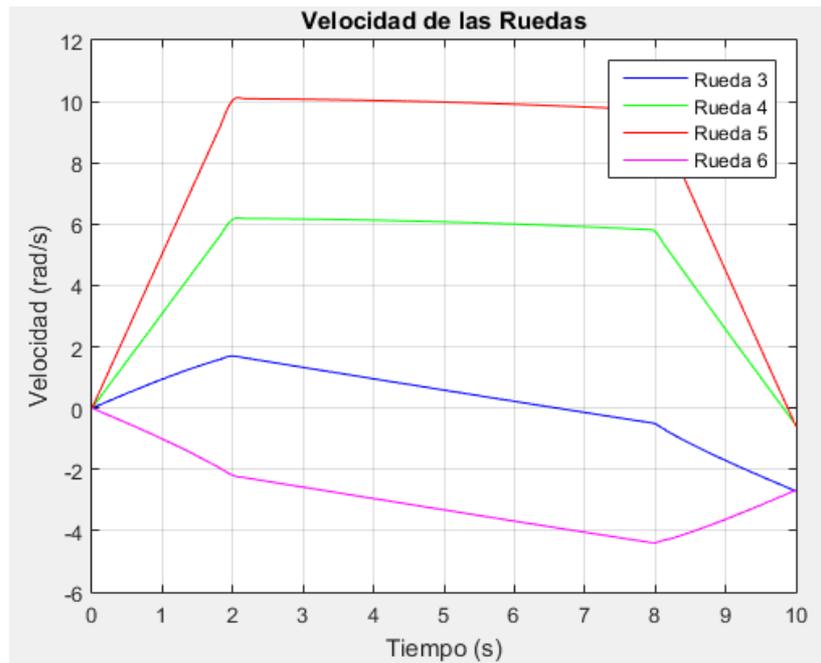
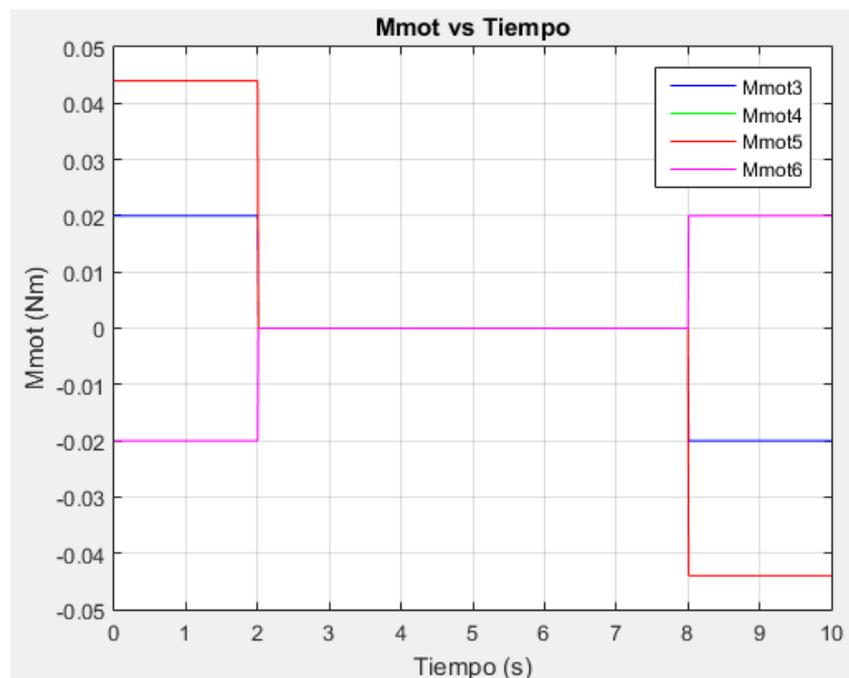


Figura 4-49. Velocidad angular de las ruedas en caso 2 dinámica directa


 Figura 4-50. M_y^3 , M_y^4 , M_y^5 y M_y^6 en caso 2 dinámica directa

Se observa que, aunque el vehículo inicialmente se desplaza a 45 grados con respecto al eje X global, la trayectoria se curva progresivamente en sentido horario. Esto es consecuencia directa del giro del chasis sobre su propio eje, inducido por el momento aplicado mediante las ruedas 3 y 6. En realidad, el desplazamiento de traslación se mantiene constante en la dirección de 45 grados respecto al eje X local del chasis; sin embargo, dado que dicho eje gira respecto al sistema de coordenadas global, el ángulo de desplazamiento observado desde el marco global varía a lo largo del tiempo, tal como se evidencia en la figura 4-44.

Un fenómeno interesante se manifiesta en las gráficas de velocidad de las ruedas: todas ellas muestran un incremento de velocidad (aunque en diferente magnitud) en el intervalo entre los segundos 2 y 8, a pesar de que

en ese periodo no se están aplicando pares externos. A primera vista, esto podría parecer una violación de las ecuaciones de Newton-Euler, ya que sin fuerzas externas no debería existir aceleración. Sin embargo, un análisis energético revela que la energía cinética total del sistema se mantiene constante durante este intervalo. Dado que tampoco existe variación en la energía potencial, se concluye que la energía total del sistema es conservada.

La conservación de la energía confirma que no se está violando ninguna ley física. En realidad, lo que ocurre es un fenómeno habitual en sistemas con múltiples grados de libertad: la energía puede redistribuirse internamente, permitiendo que algunas velocidades aumenten mientras otras disminuyen, siempre respetando la conservación global de la energía.

Para ilustrar este comportamiento, se presenta a continuación la gráfica de la energía cinética del sistema en el intervalo comprendido entre 2,2 y 7,8 segundos. Se ha omitido un pequeño intervalo de 0,2 segundos al inicio y al final del tramo, correspondiente a las transiciones abruptas en los pares aplicados, las cuales generan ligeras oscilaciones (ruido) en las velocidades que afectan momentáneamente al cálculo de la energía.

Esta energía se ha calculado como la suma de las energías cinéticas de todos los sólidos que componen el sistema.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

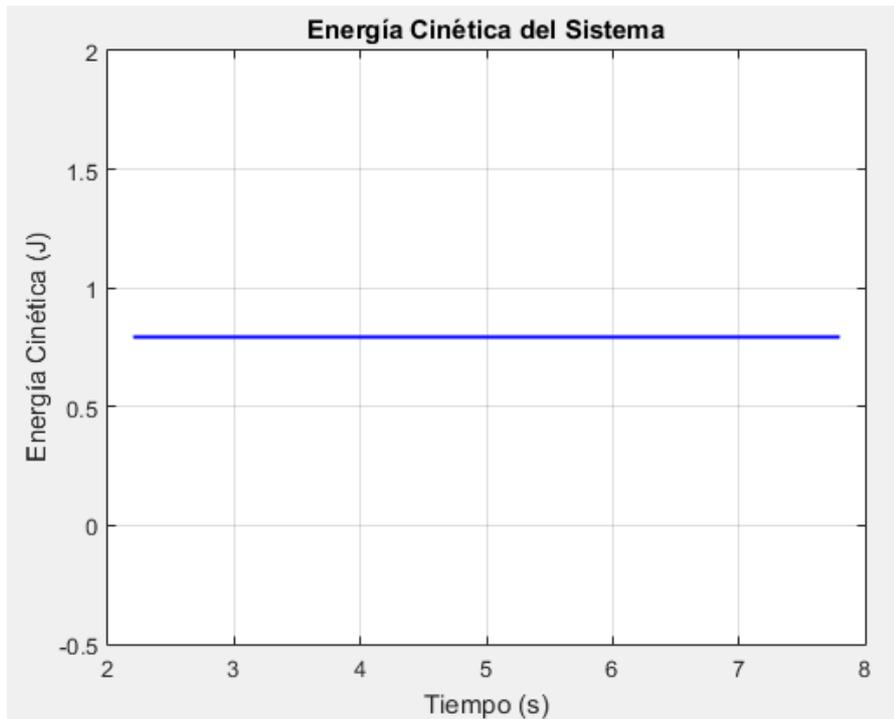


Figura 4-51. Energía cinética del sistema en caso 2 dinámica directa

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha llevado a cabo un análisis extenso de la cinemática y dinámica de un robot omnidireccional de cuatro ruedas Mecanum. Se ha abordado tanto la simulación dinámica inversa, en la que se han determinado los pares necesarios para generar los movimientos impuestos, como la simulación dinámica directa, que ha permitido obtener el movimiento real del robot a partir de la imposición de los pares en las cuatro ruedas, sobreactuando el sistema. A través del desarrollo de los modelos matemáticos correspondientes y la implementación de las simulaciones, se ha logrado caracterizar el comportamiento del robot y validar su capacidad de desplazarse en cualquier dirección y con cualquier orientación, lo que demuestra la versatilidad inherente a su diseño.

Los resultados obtenidos durante las simulaciones han confirmado la precisión de los modelos propuestos, corroborando que las metodologías empleadas son adecuadas para describir con fiabilidad el movimiento del robot bajo diferentes condiciones operacionales. En particular, se ha demostrado que el sistema es capaz de realizar movimientos complejos, como desplazamientos diagonales y giros, manteniendo una correcta distribución de los esfuerzos en las ruedas motrices.

Adicionalmente, podría explorarse la influencia de la resistencia aerodinámica, aunque dada la baja velocidad típica de los robots Mecanum, se espera que su impacto sobre el movimiento sea mínimo. No obstante, en escenarios de mayor velocidad o aplicaciones en entornos específicos, esta variable podría tener una relevancia mayor y justificar su inclusión en futuras simulaciones.

Por otro lado, sería interesante desarrollar e incorporar un controlador avanzado al sistema que permita gestionar los pares aplicados a las ruedas de manera óptima, considerando factores como la eficiencia energética, la estabilidad dinámica y el cumplimiento de trayectorias complejas. El diseño de un controlador, como un controlador PID o un controlador basado en optimización, permitiría mejorar la respuesta del robot ante cambios en las condiciones de operación y optimizar su rendimiento en tareas específicas.

Finalmente, otro aspecto que podría ser considerado es la implementación de un modelo de interacción más detallado entre el robot y su entorno, incluyendo factores como la fricción de las ruedas, la interacción con superficies deslizantes o adherentes, y el estudio del desgaste de los componentes bajo diferentes condiciones de carga y uso. Esto permitiría obtener un modelo aún más realista y robusto, útil para aplicaciones industriales donde la precisión y la fiabilidad son fundamentales.

En resumen, este trabajo ha permitido entender la dinámica de los robots omnidireccionales de cuatro ruedas Mecanum y ha demostrado la viabilidad de utilizar modelos matemáticos avanzados para simular su comportamiento. A partir de aquí, futuras investigaciones pueden expandir y afinar estos modelos, incorporando más complejidad y simulando condiciones más realistas para explorar nuevas aplicaciones y mejorar la eficiencia de estos sistemas en el mundo real.

REFERENCIAS

- [1] Z. HENDZEL and Ł. RYKAŁA (2017): MODELLING OF DYNAMICS OF A WHEELED MOBILE ROBOT WITH MECANUM WHEELS WITH THE USE OF LAGRANGE EQUATIONS OF THE SECOND KIND - Int. J. of Applied Mechanics and Engineering, 2017, vol.22, No.1, pp.81-99
- [2] Christof Röhrig, Daniel Heß, Frank Künemund (2017): Motion Controller Design for a Mecanum Wheeled Mobile Manipulator - Preprint, In: Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA 2017) August 27-30, 2017. Kohala Coast, Hawai'i, USA
- [3] Zenon Hendze, Lukasz Rykata: OPIS KINEMATYKI MOBILNEGO ROBOTA KOLOWEGO Z KOLAMI TYPU MECANUM - MODELOWANIE INZYNIERSKIE nr 57. ISSN 1896-771X
- [4] Eduardo Arroyo (2018): Modelado y Estudio Cinemático y Dinámico de un Waveboard
- [5] Peter Manzl, Johannes Gerstmayr (2021): AN IMPROVED DYNAMIC MODEL OF RHE MECANUM WHEEL FOR MULTIBODY SIMULATIONS - Proceedings of the ASME 2021 International Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference IDETC/CIE2021 August 17-20, 2021, Virtual, Online
- [6] José Luis Escalona: Dinámica de Sistemas Multicuerpo. Apuntes asignatura Cinemática y dinámica de máquinas - Department of Mechanical and Manufacturing Engineering University of Seville, Spain
- [7] José Luis Escalona: SYMBOLIC CALCULATION OF THE EQUATIONS OF MOTION OF MULTIBODY SYSTEMS - Department of Mechanical and Manufacturing Engineering University of Seville, Spain
- [8] <https://www.aliexpress.com>
- [9] <https://www.youtube.com/watch?v=PYLT2bCU5Ek&list=LL&index=7>
- [10] Junior Figueroa, William Montalvo, Marcia Bayas: Cinemática y dinámica de robots móviles con ruedas. Primera edición: Marzo 2023
- [11] Alberto Ortega Antón (2019): Algoritmo de control de un robot omnidireccional de tres ruedas

ANEXO. CÓDIGOS DE MATLAB

Programa de cálculo simbólico

```
% Symbolic definition of coordinates, velocities and accelerations
```

```
syms xG2 yG2 psi2 tet3 tet4 tet5 tet6 real
syms dxG2 dyG2 dpsi2 dtet3 dtet4 dtet5 dtet6 real
syms ddxG2 ddyG2 ddpsi2 ddtet3 ddtet4 ddtet5 ddtet6 real
```

```
q = [ xG2 yG2 psi2 tet3 tet4 tet5 tet6]';
dq = [dxG2 dyG2 dpsi2 dtet3 dtet4 dtet5 dtet6]';
ddq = [ddxG2 ddyG2 ddpsi2 ddtet3 ddtet4 ddtet5 ddtet6]';
```

```
%Geometric parameters
```

```
syms R r lx ly lz gam real
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% POSITION AND ORIENTATION KINEMATICS %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Rotation matrices
```

```
A2(1,:) = [cos(psi2) -sin(psi2) 0];
```

$$A2(2,:) = [\sin(\text{psi}2) \quad \cos(\text{psi}2) \quad 0];$$

$$A2(3,:) = [\quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

$$A23(1,:) = [\cos(\text{tet}3) \quad 0 \quad \sin(\text{tet}3)];$$

$$A23(2,:) = [\quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$A23(3,:) = [-\sin(\text{tet}3) \quad 0 \quad \cos(\text{tet}3)];$$

$$A24(1,:) = [\cos(\text{tet}4) \quad 0 \quad \sin(\text{tet}4)];$$

$$A24(2,:) = [\quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$A24(3,:) = [-\sin(\text{tet}4) \quad 0 \quad \cos(\text{tet}4)];$$

$$A25(1,:) = [\cos(\text{tet}5) \quad 0 \quad \sin(\text{tet}5)];$$

$$A25(2,:) = [\quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$A25(3,:) = [-\sin(\text{tet}5) \quad 0 \quad \cos(\text{tet}5)];$$

$$A26(1,:) = [\cos(\text{tet}6) \quad 0 \quad \sin(\text{tet}6)];$$

$$A26(2,:) = [\quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$A26(3,:) = [-\sin(\text{tet}6) \quad 0 \quad \cos(\text{tet}6)];$$

$$A3 = A2 * A23;$$

$$A4 = A2 * A24;$$

$$A5 = A2 * A25;$$

$$A6 = A2 * A26;$$

% Local position vectors

$$uG3 = [lx \quad ly \quad -lz]';$$

$$uG4 = [lx \quad -ly \quad -lz]';$$

$$uG5 = [-lx \quad ly \quad -lz]';$$

$$uG6 = [-lx \quad -ly \quad -lz]';$$

% Global position vectors

```

r2 = [xG2 yG2 lz+R+r]';
r3 = r2 + A2*uG3;
r4 = r2 + A2*uG4;
r5 = r2 + A2*uG5;
r6 = r2 + A2*uG6;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% VELOCITY KINEMATICS %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Time-derivative of rotation matrices

dA2 = diff(A2,psi2)*dpsi2+diff(A2,tet3)*dtet3+diff(A2,tet4)*dtet4+diff(A2,tet5)*dtet5+diff(A2,tet6)*dtet6;
dA3 = diff(A3,psi2)*dpsi2+diff(A3,tet3)*dtet3+diff(A3,tet4)*dtet4+diff(A3,tet5)*dtet5+diff(A3,tet6)*dtet6;
dA4 = diff(A4,psi2)*dpsi2+diff(A4,tet3)*dtet3+diff(A4,tet4)*dtet4+diff(A4,tet5)*dtet5+diff(A4,tet6)*dtet6;
dA5 = diff(A5,psi2)*dpsi2+diff(A5,tet3)*dtet3+diff(A5,tet4)*dtet4+diff(A5,tet5)*dtet5+diff(A5,tet6)*dtet6;
dA6 = diff(A6,psi2)*dpsi2+diff(A6,tet3)*dtet3+diff(A6,tet4)*dtet4+diff(A6,tet5)*dtet5+diff(A6,tet6)*dtet6;

% Calculation of global angular velocities

w2Gsk = simplify(dA2*A2');
w2G = [-w2Gsk(2,3) w2Gsk(1,3) -w2Gsk(1,2)]';

w3Gsk = simplify(dA3*A3');
w3G = [-w3Gsk(2,3) w3Gsk(1,3) -w3Gsk(1,2)]';

w4Gsk = simplify(dA4*A4');
w4G = [-w4Gsk(2,3) w4Gsk(1,3) -w4Gsk(1,2)]';

w5Gsk = simplify(dA5*A5');
w5G = [-w5Gsk(2,3) w5Gsk(1,3) -w5Gsk(1,2)]';

w6Gsk = simplify(dA6*A6');
w6G = [-w6Gsk(2,3) w6Gsk(1,3) -w6Gsk(1,2)]';

```

% Jacobian of global angular velocities

G2G = jacobian(w2G,dq);

G3G = jacobian(w3G,dq);

G4G = jacobian(w4G,dq);

G5G = jacobian(w5G,dq);

G6G = jacobian(w6G,dq);

% Calculation of local angular velocities

w2Lsk = simplify(A2'*dA2);

w2L = [-w2Lsk(2,3) w2Lsk(1,3) -w2Lsk(1,2)]';

w4Lsk = simplify(A4'*dA4);

w4L = [-w4Lsk(2,3) w4Lsk(1,3) -w4Lsk(1,2)]';

w3Lsk = simplify(A3'*dA3);

w3L = [-w3Lsk(2,3) w3Lsk(1,3) -w3Lsk(1,2)]';

w5Lsk = simplify(A5'*dA5);

w5L = [-w5Lsk(2,3) w5Lsk(1,3) -w5Lsk(1,2)]';

w6Lsk = simplify(A6'*dA6);

w6L = [-w6Lsk(2,3) w6Lsk(1,3) -w6Lsk(1,2)]';

% Jacobian of global angular velocities

G2L = jacobian(w2L,dq);

G3L = jacobian(w3L,dq);

G4L = jacobian(w4L,dq);

G5L = jacobian(w5L,dq);

G6L = jacobian(w6L,dq);

```
% Jacobian of traslational velocities
```

```
H2 = jacobian(r2,q);
```

```
H3 = jacobian(r3,q);
```

```
H4 = jacobian(r4,q);
```

```
H5 = jacobian(r5,q);
```

```
H6 = jacobian(r6,q);
```

```
v2 = H2*dq;
```

```
v3 = H3*dq;
```

```
v4 = H4*dq;
```

```
v5 = H5*dq;
```

```
v6 = H6*dq;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%% ACCELERATION KINEMATICS %%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Translational acceleration
```

```
h2 = jacobian(v2,q);
```

```
h3 = jacobian(v3,q);
```

```
h4 = jacobian(v4,q);
```

```
h5 = jacobian(v5,q);
```

```
h6 = jacobian(v6,q);
```

```
a2 = H2*ddq + h2*dq;
```

```
a3 = H3*ddq + h3*dq;
```

```
a4 = H4*ddq + h4*dq;
```

```
a5 = H5*ddq + h5*dq;
```

```
a6 = H6*ddq + h6*dq;
```

```
% Angular acceleration
```

```
g2G = jacobian(w2G,q);
```

```
g3G = jacobian(w3G,q);
```

```
g4G = jacobian(w4G,q);
g5G = jacobian(w5G,q);
g6G = jacobian(w6G,q);
```

```
alf2G = G2G*ddq + g2G*dq;
alf3G = G3G*ddq + g3G*dq;
alf4G = G4G*ddq + g4G*dq;
alf5G = G5G*ddq + g5G*dq;
alf6G = G6G*ddq + g6G*dq;
```

```
g2L = jacobian(w2L,q);
g3L = jacobian(w3L,q);
g4L = jacobian(w4L,q);
g5L = jacobian(w5L,q);
g6L = jacobian(w6L,q);
```

```
alf2L = G2L*ddq + g2L*dq;
alf3L = G3L*ddq + g3L*dq;
alf4L = G4L*ddq + g4L*dq;
alf5L = G5L*ddq + g5L*dq;
alf6L = G6L*ddq + g6L*dq;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% NON-NOLONOMIC CONSTRAINTS %%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Global velocities of contact points
uR = [0 0 -R-r]';
ur = [0 0 -r]';
```

```
%Restricciones no holónomas simplificando en giro pasivo del rodillo
```

```
vP2 = -dxG2*(cos(psi2)+sin(psi2)) + dyG2*(cos(psi2)-sin(psi2)) + dpsi2*(lx+ly) + dtet3*(r+R);
vQ2 = dxG2*(cos(psi2)-sin(psi2)) + dyG2*(cos(psi2)+sin(psi2)) + dpsi2*(lx+ly) - dtet4*(r+R);
```

```
vS2 = dxG2*(cos(psi2)-sin(psi2)) + dyG2*(cos(psi2)+sin(psi2)) - dpsi2*(ly+lx) - dtet5*(r+R);
vT2 = -dxG2*(cos(psi2)+sin(psi2)) + dyG2*(cos(psi2)-sin(psi2)) - dpsi2*(ly+lx) + dtet6*(r+R);
```

```
C_nh = [vP2 vQ2 vS2 vT2]';
B_nh = jacobian(C_nh,dq);
dB_nh = jacobian(B_nh*dq,q);
%matlabFunction(dB_nh,'file', 'derivativeBnhMecanum');
```

```
%%%%%%%%%
%%% DYNAMICS %%%
%%%%%%%%%
```

```
syms m2 m3 m4 m5 m6 g real
syms I2xx I2yy I2zz I2xz real
```

```
syms I3xx I3yy I3zz real
syms I4xx I4yy I4zz real
syms I5xx I5yy I5zz real
syms I6xx I6yy I6zz real
```

```
I2(1,:) = [I2xx 0 I2xz];
I2(2,:) = [0 I2yy 0];
I2(3,:) = [I2xz 0 I2zz];
```

```
I3(1,:) = [I3xx 0 0];
I3(2,:) = [0 I3yy 0];
I3(3,:) = [0 0 I3zz];
```

```
I4(1,:) = [I4xx 0 0];
I4(2,:) = [0 I4yy 0];
I4(3,:) = [0 0 I4zz];
```

```
I5(1,:) = [I5xx 0 0];
I5(2,:) = [0 I5yy 0];
I5(3,:) = [0 0 I5zz];
```

```
I6(1,:) = [I6xx 0 0];
I6(2,:) = [0 I6yy 0];
```

$I6(3,:) = [0 \ 0 \ I6zz];$

% Assembly of Newton-Euler mass matrices %

$MM(3*(1-1)+1:3*(1-1)+3,3*(1-1)+1:3*(1-1)+3) = m2*eye(3);$

$MM(3*(2-1)+1:3*(2-1)+3,3*(2-1)+1:3*(2-1)+3) = m3*eye(3);$

$MM(3*(3-1)+1:3*(3-1)+3,3*(3-1)+1:3*(3-1)+3) = m4*eye(3);$

$MM(3*(4-1)+1:3*(4-1)+3,3*(4-1)+1:3*(4-1)+3) = m5*eye(3);$

$MM(3*(5-1)+1:3*(5-1)+3,3*(5-1)+1:3*(5-1)+3) = m6*eye(3);$

$MM(15+3*(1-1)+1:15+3*(1-1)+3,15+3*(1-1)+1:15+3*(1-1)+3) = I2;$

$MM(15+3*(2-1)+1:15+3*(2-1)+3,15+3*(2-1)+1:15+3*(2-1)+3) = I3;$

$MM(15+3*(3-1)+1:15+3*(3-1)+3,15+3*(3-1)+1:15+3*(3-1)+3) = I4;$

$MM(15+3*(4-1)+1:15+3*(4-1)+3,15+3*(4-1)+1:15+3*(4-1)+3) = I5;$

$MM(15+3*(5-1)+1:15+3*(5-1)+3,15+3*(5-1)+1:15+3*(5-1)+3) = I6;$

% Assembly of Newton-Euler quadratic-velocity inertia terms %

$QQv(15+3*(1-1)+1:15+3*(1-1)+3,:) = -cross(w2L,I2*w2L);$

$QQv(15+3*(2-1)+1:15+3*(2-1)+3,:) = -cross(w3L,I3*w3L);$

$QQv(15+3*(3-1)+1:15+3*(3-1)+3,:) = -cross(w4L,I4*w4L);$

$QQv(15+3*(4-1)+1:15+3*(4-1)+3,:) = -cross(w5L,I5*w5L);$

$QQv(15+3*(5-1)+1:15+3*(5-1)+3,:) = -cross(w6L,I6*w6L);$

% Gravity forces %

$QQgrav(3*(1-1)+1:3*(1-1)+3,1) = [0 \ 0 \ -m2*g]';$

$QQgrav(3*(2-1)+1:3*(2-1)+3,1) = [0 \ 0 \ -m3*g]';$

$QQgrav(3*(3-1)+1:3*(3-1)+3,1) = [0 \ 0 \ -m4*g]';$

$QQgrav(3*(4-1)+1:3*(4-1)+3,1) = [0 \ 0 \ -m5*g]';$

$QQgrav(3*(5-1)+1:3*(5-1)+3,1) = [0 \ 0 \ -m6*g]';$

$QQgrav(30,1) = 0;$

% Kinematic transformation matrices %

$L = [H2' \ H3' \ H4' \ H5' \ H6' \ G2L' \ G3L' \ G4L' \ G5L' \ G6L']';$

$l = [h2' \ h3' \ h4' \ h5' \ h6' \ g2L' \ g3L' \ g4L' \ g5L' \ g6L']';$

```
M = L'*MM*L;
%matlabFunction(M,'file', 'massMatrixMecanum');
Qv = L'*(QQv-MM*I*dq);
%matlabFunction(Qv,'file', 'quadraticInertiaMecanum');
Qgrav = L'*QQgrav;

% Drive forces %

syms ParM3 ParM4 ParM5 ParM6 real

Qmot = G3L'*[0 ParM3 0]' + G4L'*[0 ParM4 0]' + G5L'*[0 ParM5 0]' + G6L'*[0 ParM6 0]';

MassMatForces = [M Qv Qgrav Qmot];

% matlabFunction(MassMatForces,'file', 'MatMasaFuerzas');
```

Programa de Dinámica Inversa

```
clear all;
clc

g = 9.81;
R = 45e-3;
r = 5e-3;
lx = 80e-3;
ly = 80e-3;
lz = 40e-3;
gam = 45;

m2=0.7;
Ix2=0.00153;
Iy2=0.001;
Iz2=0.002;
m3=0.15;
Ix3=1e-4;
Iy3=1e-2;
Iz3=1e-4;
m4=0.15;
Ix4=1e-4;
Iy4=1e-2;
Iz4=1e-4;
m5=0.15;
Ix5=1e-4;
Iy5=1e-2;
```

```
Iz5=1e-4;
m6=0.15;
Ix6=1e-4;
Iy6=1e-2;
Iz6=1e-4;
par = [g R r lx ly lz gam m2 m3 m4 m5 m6 Ix2 Iy2 Iz2 Ix3 Iy3 Iz3 Ix4 Iy4 Iz4 Ix5 Iy5 Iz5 Ix6 Iy6 Iz6];
m = zeros(15,15);
m(1,1) = m2;
m(2,2) = m2;
m(3,3) = m2;
m(4,4) = m3;
m(5,5) = m3;
m(6,6) = m3;
m(7,7) = m4;
m(8,8) = m4;
m(9,9) = m4;
m(10,10) = m5;
m(11,11) = m5;
m(12,12) = m5;
m(13,13) = m6;
m(14,14) = m6;
m(15,15) = m6;

I=zeros(15,15);
I(1,1) = Ix2;
I(2,2) = Iy2;
I(3,3) = Iz2;
I(4,4) = Ix3;
I(5,5) = Iy3;
I(6,6) = Iz3;
I(7,7) = Ix4;
I(8,8) = Iy4;
I(9,9) = Iz4;
I(10,10) = Ix5;
I(11,11) = Iy5;
I(12,12) = Iz5;
I(13,13) = Ix6;
I(14,14) = Iy6;
```

```
I(15,15) = Iz6;
```

```
Mgorro=[m zeros(15);zeros(15) I];
```

```
% Definir el tiempo
```

```
ts = 0:0.01:10;
```

```
num_samples = length(ts);
```

```
% Definir la velocidad máxima alcanzada
```

```
Vmax = 0.2;
```

```
% Definir el tiempo de aceleración y desaceleración
```

```
t_acc = 2; % Tiempo de aceleración
```

```
t_const = 6; % Tiempo a velocidad constante
```

```
t_dec = 2; % Tiempo de desaceleración
```

```
% Calcular la aceleración y desaceleración
```

```
a = Vmax / t_acc; % Aceleración constante
```

```
% Inicializar matrices
```

```
xG2 = zeros(size(ts));
```

```
dxG2 = zeros(size(ts));
```

```
ddxG2 = zeros(size(ts));
```

```
yG2 = zeros(size(ts));
```

```
dyG2 = zeros(size(ts));
```

```
ddyG2 = zeros(size(ts));
```

```
psi2 = zeros(size(ts));
```

```
dpsi2 = zeros(size(ts));
```

```
ddpsi2 = zeros(size(ts));
```

```
% Calcular las trayectorias para xG2
```

```
for i = 1:length(ts)
```

```
    t = ts(i);
```

```
    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
```

```
    if t < t_acc
```

```
        xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t^2);
```

```
        dxG2(i) = 0;%(a * t);
```

```

    ddxG2(i) = 0;%(a);

% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
elseif t < (t_acc + t_const)
    xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
    dxG2(i) = 0;%(Vmax);
    ddxG2(i) = 0;

% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
else
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
    xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
    dxG2(i) = 0;%(Vmax - a * t_red);
    ddxG2(i) = 0;%(-a);
end

end

end

% Calcular las trayectorias para yG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

% Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
if t < t_acc
    yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t^2);
    dyG2(i) = 0;%(a * t);
    ddyG2(i) = 0;%(a);

% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
elseif t < (t_acc + t_const)
    yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
    dyG2(i) = 0;%(Vmax);
    ddyG2(i) = 0;

% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
else
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración

```

```

    yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
    dyG2(i) = 0;%(Vmax - a * t_red);
    ddyG2(i) = 0;%(a);
end

end

% Calcular las trayectorias para psi2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        psi2(i) = (0.5 * a * t^2);
        dpsi2(i) = (a * t);
        ddpsi2(i) = (a);

    % Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
    elseif t < (t_acc + t_const)
        psi2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
        dpsi2(i) = (Vmax);
        ddpsi2(i) = 0;

    % Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
    else
        t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
        psi2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
        dpsi2(i) = (Vmax - a * t_red);
        ddpsi2(i) = (-a);
    end
end

end

%obtencion de q0dep

```



```

N=[-E',Atau]\(M(q,par)*(ydospunto(k,:))'-Qv(q,ypunto(k,:),par)-Qapl(q,ypunto(k,:),par));

multiplicadores(k,:)=(N(1:4))';
tau(k,:)=(N(5:7))';
end

```

```

% Definir el tiempo

```

```

ts = 0:0.01:10;

```

```

num_samples = length(ts);

```

```

% Inicializar matrices para almacenar resultados

```

```

q = zeros(num_samples, 7);

```

```

qp = zeros(num_samples, 7);

```

```

qpp = zeros(num_samples, 7);

```

```

%multiplicadores = zeros(num_samples, 4);

```

```

%tau = zeros(num_samples, 3);

```

```

for k = 1:num_samples

```

```

    % Obtener q, qp y qpp

```

```

    q(k, :) = y(k, :);

```

```

    qp(k, :) = ypunto(k, :);

```

```

    qpp(k, :) = ydospunto(k, :);

```

```

end

```

```

% Definir el tiempo

```

```

ts = 0:0.01:10;

```

```

num_samples = length(ts);

```

```

% Inicializar matrices para almacenar resultados

```

```

q = zeros(num_samples, 7);

```

```

qp = zeros(num_samples, 7);

```

```

qpp = zeros(num_samples, 7);

```

```

%multiplicadores = zeros(num_samples, 4);

```

```

%tau = zeros(num_samples, 3);

```

```

% Almacenar los valores de q, qp y qpp

```

```

for k = 1:num_samples
    q(k, :) = y(k, :);
    qp(k, :) = ypunto(k, :);
    qpp(k, :) = ydospunto(k, :);
end

% Graficar la trayectoria del punto (q1, q2) en el plano ---
figure;
plot(q(:, 1), q(:, 2), 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('X_{G2} (Posición en X)(m)');
ylabel('Y_{G2} (Posición en Y)(m)');
title('Trayectoria en el Plano (X_{G2} vs Y_{G2})');
grid on;
axis equal; % Mantiene las proporciones en la escala

% Nombres de las variables
nombres_variables = {'X_{G2}', 'Y_{G2}', '\psi_2', '\theta_3', '\theta_4', '\theta_5', '\theta_6'};

% --- Posición ---
for i = 1:size(q, 2)
    figure;
    plot(ts, q(:, i), 'b', 'LineWidth', 1.5);
    xlabel('Tiempo (s)');

    if i <= 2
        unidad = '(m)';
    else
        unidad = '(rad)';
    end

    ylabel([nombres_variables{i}, ' ', unidad], 'Interpreter', 'tex');
    title(['Posición de ', nombres_variables{i}], 'Interpreter', 'tex');
    grid on;
end

% --- Velocidad ---

```

```
for i = 1:size(qp, 2)
    figure;
    plot(ts, qp(:, i), 'r', 'LineWidth', 1.5);
    xlabel('Tiempo (s)');

    if i <= 2
        unidad = '(m/s)';
    else
        unidad = '(rad/s)';
    end

    ylabel(['d', nombres_variables{i}, ' ', unidad], 'Interpreter', 'tex');
    title(['Velocidad de ', nombres_variables{i}], 'Interpreter', 'tex');
    grid on;
end

% --- Aceleración ---
for i = 1:size(qpp, 2)
    figure;
    plot(ts, qpp(:, i), 'g', 'LineWidth', 1.5);
    xlabel('Tiempo (s)');

    if i <= 2
        unidad = '(m/s^2)';
    else
        unidad = '(rad/s^2)';
    end

    ylabel(['dd', nombres_variables{i}, ' ', unidad], 'Interpreter', 'tex');
    title(['Aceleración de ', nombres_variables{i}], 'Interpreter', 'tex');
    grid on;
end

% --- Graficar cada multiplicador de Lagrange en una figura distinta ---
for i = 1:size(multiplicadores, 2)
    figure;
```

```
plot(ts, multiplicadores(:, i), 'm', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel(['\lambda_', num2str(i)]);
title(['Multiplicador de Lagrange \lambda_', num2str(i)]);
grid on;
end
```

% --- Graficar cada torque (?) en una figura distinta ---

```
for i = 1:size(tau, 2)
    figure;
    plot(ts, tau(:, i), 'k', 'LineWidth', 1.5);
    xlabel('Tiempo (s)');
    ylabel(['\tau_', num2str(i), '(Nm)']);
    title(['Torque \tau_', num2str(i)]);
    grid on;
end
```

//

Se adjunta función simulacionmecanum2

//

```
function f=simulacioncinematicaMecanum2(t,X,ts,qindeppunto,par)
```

```
xG2 = spline(ts,qindeppunto(1,:),t);
yG2 = spline(ts,qindeppunto(2,:),t);
psi2 = spline(ts,qindeppunto(3,:),t);
```

```
q=[xG2;yG2;psi2;X(1);X(2);X(3);X(4)];
P=B(q,par);
Bdep=[P(:,4),P(:,5),P(:,6),P(:,7)];
Bindep=[P(:,1),P(:,2),P(:,3)];
f=-Bdep\ (Bindep*[xG2;yG2;psi2]);
end
```

//

Se adjunta parte del código de Matlab donde se imponen las coordenadas independientes en los distintos casos de simulación:

Caso 1 Dinámica inversa

```

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% Definir el tiempo
ts = 0:0.01:10;
num_samples = length(ts);

% Definir la velocidad máxima alcanzada
Vmax = 0.2;

% Definir el tiempo de aceleración y desaceleración
t_acc = 2; % Tiempo de aceleración
t_const = 6; % Tiempo a velocidad constante
t_dec = 2; % Tiempo de desaceleración

% Calcular la aceleración y desaceleración
a = Vmax / t_acc; % Aceleración constante

% Inicializar matrices
xG2 = zeros(size(ts));
dxG2 = zeros(size(ts));
ddxG2 = zeros(size(ts));
yG2 = zeros(size(ts));
dyG2 = zeros(size(ts));
ddyG2 = zeros(size(ts));
psi2 = zeros(size(ts));
dpsi2 = zeros(size(ts));
ddpsi2 = zeros(size(ts));

```

```

% Calcular las trayectorias para xG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        xG2(i) = (0.5 * a * t^2);
        dxG2(i) = (a * t);
        ddxG2(i) = (a);

    % Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
    elseif t < (t_acc + t_const)
        xG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
        dxG2(i) = (Vmax);
        ddxG2(i) = 0;

    % Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
    else
        t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
        xG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
        dxG2(i) = (Vmax - a * t_red);
        ddxG2(i) = (-a);
    end
end

end

% Calcular las trayectorias para yG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        yG2(i) = 0;
        dyG2(i) = 0;
        ddyG2(i) = 0;

```

```
% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
```

```
elseif t < (t_acc + t_const)
```

```
    yG2(i) = 0;
```

```
    dyG2(i) = 0;
```

```
    ddyG2(i) = 0;
```

```
% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
```

```
else
```

```
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
```

```
    yG2(i) = 0;
```

```
    dyG2(i) = 0;
```

```
    ddyG2(i) = 0;
```

```
end
```

```
end
```

```
% Calcular las trayectorias para psi2
```

```
for i = 1:length(ts)
```

```
    t = ts(i);
```

```
% Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
```

```
if t < t_acc
```

```
    psi2(i) = 0;
```

```
    dpsi2(i) = 0;
```

```
    ddpsi2(i) = 0;
```

```
% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
```

```
elseif t < (t_acc + t_const)
```

```
    psi2(i) = 0;
```

```
    dpsi2(i) = 0;
```

```
    ddpsi2(i) = 0;
```

```
% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
```

```
else
```

```
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
```

```
    psi2(i) = 0;
```

```
    dpsi2(i) = 0;
```

```
    ddpsi2(i) = 0;
```

end

end

//

Caso 2. Dinámica inversa

//

% Definir el tiempo

ts = 0:0.01:10;

num_samples = length(ts);

% Definir la velocidad máxima alcanzada

Vmax = 0.2;

% Definir el tiempo de aceleración y desaceleración

t_acc = 2; % Tiempo de aceleración

t_const = 6; % Tiempo a velocidad constante

t_dec = 2; % Tiempo de desaceleración

% Calcular la aceleración y desaceleración

a = Vmax / t_acc; % Aceleración constante

% Inicializar matrices

xG2 = zeros(size(ts));

dxG2 = zeros(size(ts));

ddxG2 = zeros(size(ts));

yG2 = zeros(size(ts));

dyG2 = zeros(size(ts));

ddyG2 = zeros(size(ts));

psi2 = zeros(size(ts));

dpsi2 = zeros(size(ts));

```

ddpsi2 = zeros(size(ts));

% Calcular las trayectorias para xG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        xG2(i) = (0.5 * a * t^2);
        dxG2(i) = (a * t);
        ddxG2(i) = (a);

    % Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
    elseif t < (t_acc + t_const)
        xG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
        dxG2(i) = (Vmax);
        ddxG2(i) = 0;

    % Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
    else
        t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
        xG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
        dxG2(i) = (Vmax - a * t_red);
        ddxG2(i) = (-a);
    end
end

end

% Calcular las trayectorias para yG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        yG2(i) = (0.5 * a * t^2);
        dyG2(i) = (a * t);
        ddyG2(i) = (a);

```

```

% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
elseif t < (t_acc + t_const)
    yG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
    dyG2(i) = (Vmax);
    ddyG2(i) = 0;

% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
else
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
    yG2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
    dyG2(i) = (Vmax - a * t_red);
    ddyG2(i) = (-a);
end

end

% Calcular las trayectorias para psi2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        psi2(i) = 0;%(0.5 * a * t^2);
        dpsi2(i) = 0;%(a * t);
        ddpsi2(i) = 0;%(a);

    % Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
    elseif t < (t_acc + t_const)
        psi2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
        dpsi2(i) = 0;%(Vmax);
        ddpsi2(i) = 0;

    % Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
    else
        t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
        psi2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
        dpsi2(i) = 0;%(Vmax - a * t_red);
    end
end

```

```

    ddpsi2(i) = 0;%(-a);
end

```

```

end

```

```

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

```

Caso 3. Dinámica inversa

```

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

```

```

% Definir el tiempo

```

```

ts = 0:0.01:10;

```

```

num_samples = length(ts);

```

```

% Definir la velocidad máxima alcanzada

```

```

Vmax = 0.2;

```

```

% Definir el tiempo de aceleración y desaceleración

```

```

t_acc = 2; % Tiempo de aceleración

```

```

t_const = 6; % Tiempo a velocidad constante

```

```

t_dec = 2; % Tiempo de desaceleración

```

```

% Calcular la aceleración y desaceleración

```

```

a = Vmax / t_acc; % Aceleración constante

```

```

% Inicializar matrices

```

```

xG2 = zeros(size(ts));

```

```

dxG2 = zeros(size(ts));

```

```

ddxG2 = zeros(size(ts));

```

```

yG2 = zeros(size(ts));

```

```

dyG2 = zeros(size(ts));

```

```

ddyG2 = zeros(size(ts));

```

```

psi2 = zeros(size(ts));

```

```

dpsi2 = zeros(size(ts));
ddpsi2 = zeros(size(ts));

% Calcular las trayectorias para xG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t^2);
        dxG2(i) = 0;%(a * t);
        ddxG2(i) = 0;%(a);

    % Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
    elseif t < (t_acc + t_const)
        xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
        dxG2(i) = 0;%(Vmax);
        ddxG2(i) = 0;

    % Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
    else
        t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
        xG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
        dxG2(i) = 0;%(Vmax - a * t_red);
        ddxG2(i) = 0;%(-a);
    end
end

end

% Calcular las trayectorias para yG2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

    % Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
    if t < t_acc
        yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t^2);
        dyG2(i) = 0;%(a * t);

```

```

    ddyG2(i) = 0;%(a);

% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
elseif t < (t_acc + t_const)
    yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
    dyG2(i) = 0;%(Vmax);
    ddyG2(i) = 0;

% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
else
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
    yG2(i) = 0;%(0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);
    dyG2(i) = 0;%(Vmax - a * t_red);
    ddyG2(i) = 0;%(-a);
end

end

% Calcular las trayectorias para psi2
for i = 1:length(ts)
    t = ts(i);

% Fase 1: Aceleración constante (0 - 2s)
if t < t_acc
    psi2(i) = (0.5 * a * t^2);
    dpsi2(i) = (a * t);
    ddpsi2(i) = (a);

% Fase 2: Velocidad constante (2 - 8s)
elseif t < (t_acc + t_const)
    psi2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * (t - t_acc));
    dpsi2(i) = (Vmax);
    ddpsi2(i) = 0;

% Fase 3: Desaceleración constante (8 - 10s)
else
    t_red = t - (t_acc + t_const); % Tiempo relativo a la fase de desaceleración
    psi2(i) = (0.5 * a * t_acc^2 + Vmax * t_const + Vmax * t_red - 0.5 * a * t_red^2);

```

```
dpsi2(i) = (Vmax - a * t_red);
```

```
ddpsi2(i) = (-a);
```

```
end
```

```
end
```

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

Programa de Dinámica Directa

```
clear all
```

```
Param = ParametrosMecanum;
```

```
ts = 0:0.01:10;
```

```
tt = [ts];
```

```
% Asignar valores según el tiempo
```

```
Mmot3(ts <= 2) = 0.02;
```

```
Mmot3(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot3(ts > 8) = -0.02;
```

```
Mmot4(ts <= 2) = 0.044;
```

```
Mmot4(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot4(ts > 8) = -0.044;
```

```
Mmot5(ts <= 2) = 0.044;
```

```
Mmot5(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot5(ts > 8) = -0.044;
```

```
Mmot6(ts <= 2) = -0.02;
```

```
Mmot6(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot6(ts > 8) = 0.02;
```

```
Param.Mmot3_spline = spline(tt, Mmot3);
```

```

Param.Mmot4_spline = spline(tt, Mmot4);
Param.Mmot5_spline = spline(tt, Mmot5);
Param.Mmot6_spline = spline(tt, Mmot6);

% Valores iniciales de q y vind
q0 = zeros(7,1);
vind0 = [0 0 0]';
y0 = [q0' vind0]';

%tspan = 0:0.01:150;

% SOLUCION MEDIANTE INTEGRACION NUMERICA
[t, y] = ode45(@(t, y) EcMovMecanum_ruedaSinDeslizar(t, y, Param), ts, y0);

q = y(:, 1:Param.n);
vind = y(:, Param.n+1:end);
figure(12); plot(q(:,1), q(:,2), 'LineWidth', 1.5);
xlabel('X_{G2} (Posición en X) (m)');
ylabel('Y_{G2} (Posición en Y) (m)');
title('Trayectoria en el Plano (X_{G2} vs Y_{G2})');
grid on;
axis equal;
figure(13); plot(t, q(:,1)); grid on;
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Coordenada X_{G2} (m)');
figure(14); plot(t, q(:,2)); grid on;
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Coordenada Y_{G2} (m)');
figure(15); plot(t, q(:,3)); grid on;
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Coordenada \psi_2 (rad)');

N = length(t);
T = zeros(N,1);

v = zeros(Param.n, N);

for i = 1:N

```



```
B = matrixBnhMecanum(q, Param);
```

```
Bdep = B(:,Param.Dep);
```

```
Bind = B(:,Param.Ind);
```

```
vdep = -Bdep\ (Bind*vind);
```

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
```

Se adjunta función ruedaSinDeslizar

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
function yp = EcMovMecanum_ruedaSinDeslizar(t,y,Param)
```

```
% t
```

```
n = Param.n;
```

```
m = Param.m;
```

```
g = n-m;
```

```
Ind = Param.Ind;
```

```
Dep = Param.Dep;
```

```
q = y(1:n,1);
```

```
qind = y(Ind,1);
```

```
qdep = y(Dep,1);
```

```
vind = y(n+1:n+g,1);
```

```
vdep = cinMecanum(q,vind,Param);
```

```
v(Param.Ind,1) = vind;
```

```
v(Param.Dep,1) = vdep;
```

```
M = massMatrixMecanum(q,Param);
```

```
Qv = quadraticInertiaMecanum(q,v,Param);
```

```
B_nh = matrixBnhMecanum(q, Param);
```

```
dB_nh = derivativeBnhMecanum(q,v,Param);
```

```
% MOTOR TORQUES %
```

```
Mmot3 = ppval(Param.Mmot3_spline,t);
```

```
Mmot4 = ppval(Param.Mmot4_spline,t);
```

```
Mmot5 = ppval(Param.Mmot5_spline,t);
```

```
Mmot6 = ppval(Param.Mmot6_spline,t);
```

```
Qmot = zeros(7,1);
```

```
Qmot(4,1) = Mmot3;
```

```
Qmot(5,1) = Mmot4;
```

```
Qmot(6,1) = Mmot5;
```

```
Qmot(7,1) = Mmot6;
```

```
A(1:n,1:n) = M;
```

```
A(1:n,n+1:n+m) = B_nh';
```

```
A(n+1:n+m,1:n) = B_nh;
```

```
b(1:n,1) = Qv + Qmot;
```

```
b(n+1:n+m,1) = -dB_nh*v;
```

```
x = A\b;
```

```
a = x(1:n,1);
```

```
lam = x(n+1:n+m,1);
```

```
yp(Ind,1) = vind;
```

```
yp(Dep,1) = vdep;
```

```
yp(n+1:n+g,1) = a(Ind,1);
```

Se adjunta parte del código de Matlab donde se imponen los pares de las ruedas motrices en los distintos casos de simulación:

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

Caso 1. Dinámica directa

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
ts = 0:0.01:10;
```

```
tt = [ts];
```

```
% Asignar valores según el tiempo
```

```
Mmot3(ts <= 2) = 0.0215;
```

```
Mmot3(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot3(ts > 8) = -0.0215;
```

```
Mmot4(ts <= 2) = 0.0215;
```

```
Mmot4(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

```
Mmot4(ts > 8) = -0.0215;
```

```
Mmot5(ts <= 2) = 0.0215;  
Mmot5(ts > 2 & ts <= 8) = 0;  
Mmot5(ts > 8) = -0.0215;
```

```
Mmot6(ts <= 2) = 0.0215;  
Mmot6(ts > 2 & ts <= 8) = 0;  
Mmot6(ts > 8) = -0.0215;
```

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
```

Caso 2. Dinámica directa

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
ts = 0:0.01:10;
```

```
tt = [ts];
```

```
% Asignar valores según el tiempo
```

```
Mmot3(ts <= 2) = 0.02;  
Mmot3(ts > 2 & ts <= 8) = 0;  
Mmot3(ts > 8) = -0.02;
```

```
Mmot4(ts <= 2) = 0.044;  
Mmot4(ts > 2 & ts <= 8) = 0;  
Mmot4(ts > 8) = -0.044;
```

```
Mmot5(ts <= 2) = 0.044;  
Mmot5(ts > 2 & ts <= 8) = 0;  
Mmot5(ts > 8) = -0.044;
```

```
Mmot6(ts <= 2) = -0.02;  
Mmot6(ts > 2 & ts <= 8) = 0;
```

Mmot6(ts > 8) = 0.02;

////////////////////////////////////