

## 3 IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El capítulo referente a la identificación del sistema expone primero las características del sistema, ya sea que se hayan observado durante el desarrollo de los experimentos o se puedan suponer por consideraciones teóricas. Dado que la característica más relevante de este sistema es su alto grado de no linealidad, como se pondrá más adelante de manifiesto, es necesario un estudio muy particular del sistema y es muy probable que las soluciones adoptadas para abordar el problema de identificación sólo sean aplicables al sistema que nos ocupa y no a otros sistemas.

En todo caso, se ha buscado siempre conseguir un modelo que tenga una determinada estructura que posibilite la implementación del tipo de control adoptado. El tipo de control que se realiza sobre el sistema necesita de un modelo que cumpla unos ciertos requisitos, y, por supuesto, que sea lo más sencillo posible conservando al mismo tiempo la fiabilidad y fidelidad al comportamiento real del sistema.

El hecho de buscar una identificación del sistema utilizando una estructura prefijada para el modelo hace más difícil el proceso de identificación, ya que puede que no se exista ninguna combinación de los parámetros de dicho modelo que consiga que el modelo simule satisfactoriamente el comportamiento del sistema. En este capítulo se mostrarán algunas soluciones propuestas que no tuvieron resultados satisfactorios. El apartado dedicado al ajuste polinomial de la no linealidad sirve de ejemplo en cuanto a soluciones teóricas que no funcionan en la realidad.

Es importante recalcar que el objetivo es realizar un control robusto, dado que los parámetros del sistema no son siempre iguales. Por consiguiente, en el proceso de

identificación se busca no una identificación de unos valores fijos de los parámetros, si no de unos valores nominales y más adelante un espacio de valores posibles para el vector de los parámetros. No obstante, en este proyecto no se ha podido abordar en profundidad el proceso de identificación al haber tenido que dedicar gran parte del esfuerzo a la implementación del sistema levitador neumático y a la realización del programa de control del sistema.

Por último, recordamos de nuevo que las soluciones adoptadas para poder identificar el sistema son particulares para éste sistema. En cambio, el método de control sí ha de ser un método de carácter general que sirva para otros sistemas reales diferentes de éste, siempre que se disponga del modelo de dicho sistema (excepto en el caso del controlador PID).

La importancia del capítulo dedicado a identificación no es tanto la obtención de un determinado modelo del sistema, sino el estudio de las características y las limitaciones que presenta el sistema levitador neumático.

Ha de tenerse en cuenta, que se ha partido de un conocimiento previo muy pequeño de la dinámica del levitador, a la hora de estudiar el sistema. En este apartado donde se analizarán aspectos como la invariancia en el tiempo del sistema, o la existencia de retardos y su efecto en el comportamiento general del levitador. Por tanto, la finalidad última del proceso de identificación es obtener información adecuada sobre el comportamiento del sistema levitador, y utilizar dicha información en el diseño de controladores para dicho sistema.

Sería una línea de actuación interesante, continuar y profundizar en el análisis de las características del sistema, y en la obtención de nuevos modelos, que se adecuen a los posibles tipos de control que pueden aplicarse sobre el sistema, como, por ejemplo, control borroso, control adaptativo, control robusto, etc...

### **3.2 CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA**

En este apartado se reseñan las características principales que se observan en el sistema.

Como se ha explicado en el capítulo dedicado a la descripción del sistema, éste consiste físicamente en un cilindro de plástico con una barra de metal como eje, pudiendo subir y bajar por el eje una plataforma de cartón y plástico. La altura que alcanza dicha plataforma viene determinada por la fuerza ejercida sobre la plataforma por una corriente de aire impulsada por un ventilador que está situado en la parte inferior del cilindro. La velocidad de giro del ventilador, y como consecuencia la altura de la plataforma, puede ser regulada por una señal de control generada en un ordenador conectado al sistema.

En el capítulo de descripción del sistema se estudió con detenimiento cada uno de los elementos que conforman, no sólo el sistema físico en sí, sino también los elementos captadores, actuadores, etc.. que conforman el conjunto, en concreto, se analizó la problemática que presentaba el sensor y la forma de reducir o eliminar cuando fuera posible los errores derivados de su no idealidad.

Dado que estos elementos ya fueron analizados antes, podemos centrarnos sólo en el sistema físico en sí, dejando de lado los otros elementos.

La primera característica relevante del sistema es que es no lineal. La consideración de que este sistema es no lineal puede hacerse basándose tanto en la teoría como en la observación directa a través de experimentos. La dependencia de la fuerza ascendente de la corriente de aire del ventilador es no lineal, de manera que esa no linealidad se refleja en el conjunto del sistema. De hecho, la no linealidad es la principal característica de este sistema, y, por ello, se tratará de manera independiente y con mayor detalle, en el siguiente apartado.

La segunda característica del sistema es la presencia de retardos. Desde que se produce un cambio en la señal aplicada al ventilador hasta que la velocidad del ventilador empieza a cambiar a su nuevo valor, transcurre un tiempo que significa un retardo en el sistema.

Un segundo retardo es el derivado de que el aire que impulsa el ventilador desde el suelo del cilindro tarda un tiempo en llegar a la altura a la que esté la plataforma. Este tiempo también es un retardo, que además es variable en función de la altura de la plataforma, o sea, de la propia variable a controlar.

Al estudiar el primer retardo se comprobó que era despreciable el tiempo que tardaba el transitorio del ventilador desde una velocidad hasta otra, para todos el rango posible de la señal de control 'u'.

Es importante señalar que este retardo es despreciable sólo cuando el motor ya está en marcha y dentro del rango marcado para 'u', es decir, desde el valor de la señal 'u' para el cual el ventilador aún no es capaz de elevar la plataforma, hasta el valor de la señal 'u' a partir del cual la plataforma alcanza el extremo superior de la barra por la que desliza. Los valores correspondientes a estos dos casos son de aproximadamente  $u = 1.4$  voltios y  $u = 3.6$  voltios respectivamente.

Para valores de la señal 'u' cercanos a 0 voltios el motor se para. El tiempo que tarda desde que se aplica una señal 'u' que haga girar el motor hasta que éste realmente empieza a girar las aspas sí es un tiempo apreciable, que debería tenerse en cuenta si se trabajara en esa zona. No obstante, como no se trabajará nunca con valores de 'u' que lleven a una parada del ventilador, este primer retardo puede desecharse al ser muy pequeño.

El segundo retardo sí es más importante. Este retardo presenta el problema de que depende de la altura a que se encuentre la plataforma. En consecuencia sería un retardo variable que presentaría bastantes dificultades a la hora de ser tratado.

Durante el proceso de identificación no se hicieron suposiciones sobre si existía o no retardo en el sistema, y el identificador que se programó en MATLAB y al que se le introdujeron los datos, realizó un barrido para los diferentes valores de retardo desde retardo nulo hasta un retardo considerable.

Como se verá más adelante, y aunque a priori se pudiera pensar otra cosa, el mejor ajuste a los datos de los experimentos se consigue con un modelo que no tiene retardo.

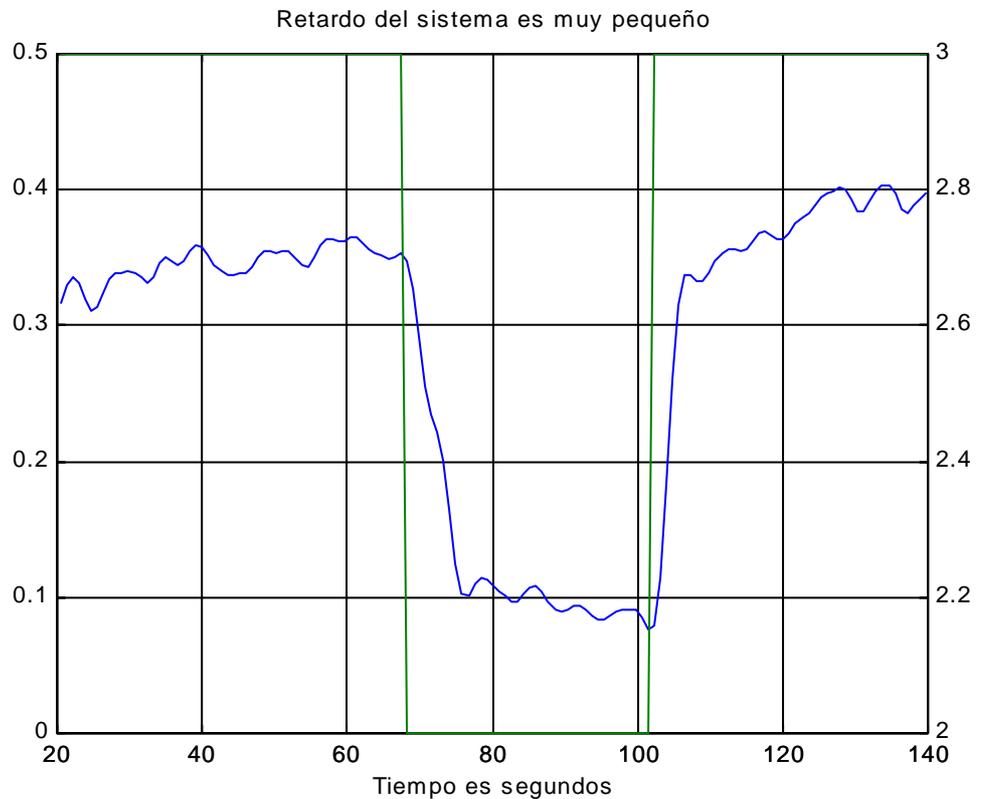
La explicación más lógica de que el ajuste sea mejor sin retardo viene dada porque el retardo tiene un valor muy inferior a los tiempos característicos de la dinámica del sistema, es decir, el sistema evoluciona mucho más lento que el aire que impulsa el ventilador. Por tanto, el retardo debido a la difusión del aire desde el ventilador a la plataforma es despreciable para la dinámica del sistema.

Como ejemplo de la no existencia de retardos apreciables se añade la gráfica 3-1 en la cual se observa como responde el sistema ante dos escalones, uno positivo y otro negativo, en la señal de control 'u'.

El tiempo de muestreo de la señal ha sido de 0.852 segundos.

La señal de color verde oscuro es la señal de control 'u' aplicada, que inicialmente vale 3 voltios, luego pasa a valer 2 voltios, y por último vuelve a valer 3 voltios.

La señal de color azul es la altura alcanzada por la plataforma. La escala de la izquierda de la gráfica está referida a esta señal, y sus unidades son metros.



Gráfica 3-1

De la observación de la gráfica puede apreciarse como el retardo, que necesariamente debe existir alguno, es sin embargo tan pequeño que no se puede distinguir en la gráfica.

Además hay que hacer notar que no existe retardo apreciable ni cuando la plataforma está sobre los 0.35 metros aproximadamente, y se baja la señal 'u' en un voltio, ni cuando está alrededor de 0.1 metros y se incrementa la señal 'u' en un voltio.

En el caso de 0.1 metros de altura podría pensarse que 0.1 metros es un valor pequeño, y que como el retardo en la difusión del aire depende de la altura a la que esté la plataforma éste aún es muy pequeño para manifestarse de forma visible. Pero para

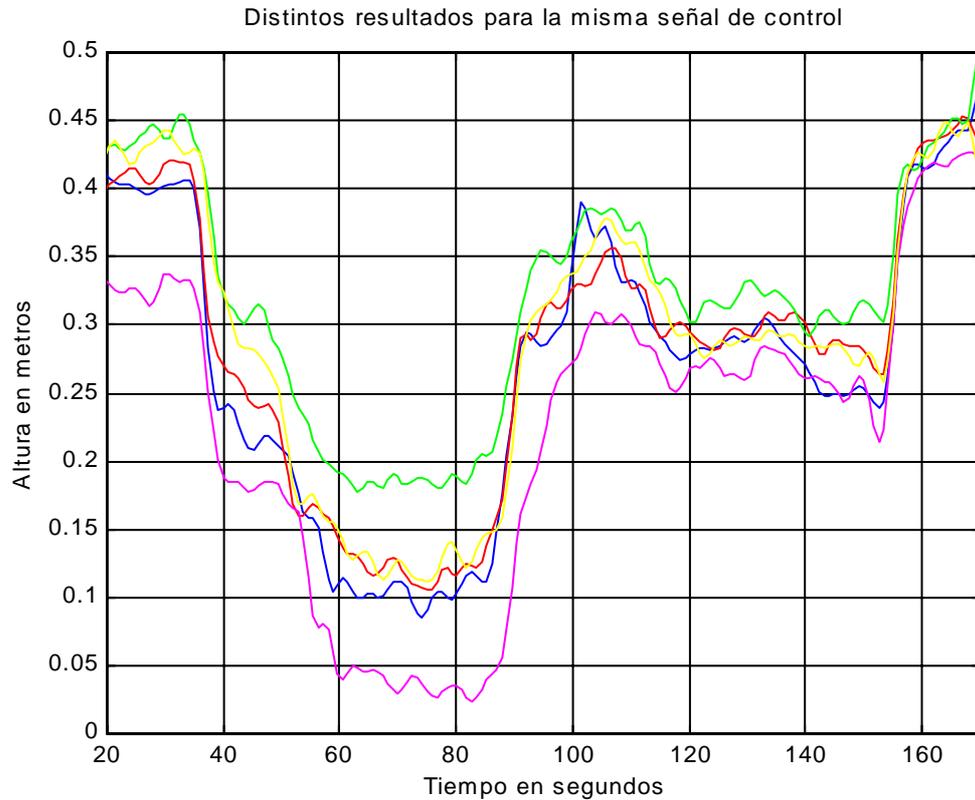
0.35 metros sí debería haber ya un valor de retardo apreciable, y como no lo hay es lícito suponer que el retardo no es importante en la dinámica del sistema.

Otra característica importante es la variación del comportamiento del sistema ante una misma entrada en dos experimentos diferentes. El sistema, como sistema real que es, tiene una cierta variancia en el tiempo.

Para presentar mejor el problema se ha incluido una gráfica en la que se representan las salidas obtenidas en diferentes experimentos para una misma señal de entrada.

En la gráfica están representadas cinco señales todas ellas son la salida del sistema para la misma entrada.

En todos los casos la señal ha sido filtrada y linealizada para compensar el efecto del sensor y para expresar los valores de salida en metros.



Gráfica 3-2

Como se explicará a continuación las variaciones en el comportamiento del sistema se deben en su mayor parte a que el motor del ventilador esté caliente o no.

La señal de color magenta está casi siempre por debajo de las demás. Esta señal es la obtenida cuando el experimento se realiza con el motor en frío. Habiendo tenido apagado el motor durante unos minutos, se aplica la señal de control y se obtiene una señal de salida que como puede comprobarse es inferior a las demás señales obtenidas.

Las señales en azul, rojo y amarillo son los resultados de aplicar la señal de control habiendo tenido antes unos minutos en funcionamiento el ventilador, para calentarlo.

El tiempo necesario para calentar el motor son unos 5 ó 6 minutos.

La señal en verde es el resultado obtenido cuando la señal de control se aplica al sistema después de que el motor lleve cerca de una hora funcionando. En este tiempo el motor del ventilador se ha ido calentando cada vez más reduciendo el rozamiento interno y alcanzando mayor velocidad para la misma potencia que antes.

El calentamiento del motor no presenta un problema grave, dado que podemos obviar el problema de tener el motor frío, si realizamos un calentamiento previo a las pruebas o experimentos que vayamos a realizar. En pocos minutos el motor está caliente y permanece durante bastante tiempo sin variar de forma apreciable su comportamiento hasta que se calienta mucho; pero dado que eso ocurre cuando se llevan muchos minutos de funcionamiento, no es tampoco problema.

Se puede concluir que el sistema es en cierto modo dependiente del tiempo, pero que esta característica no influye de manera crítica en nuestro problema, puesto que tras un calentamiento inicial, el sistema se mantiene relativamente invariante durante bastante tiempo antes de que el calentamiento del motor altere demasiado los parámetros.

Aunque pueda pensarse que sería mejor trabajar y hacer los experimentos en la última zona, es decir, cuando el ventilador lleva mucho tiempo funcionando, esto no es práctico.

La primera razón por la que no es práctico es la que se deriva del tiempo que hace falta para calentarlo hasta ese punto, cerca de una hora o más, lo cual supone una pérdida de tiempo considerable dado que además hay que repetir el proceso de calentamiento cada vez que se enfríe.

La segunda razón es que el sistema tarda menos en enfriarse que en calentarse y es más cómodo esperar a que se enfríe el motor cuando se calienta demasiado que esperar a que se caliente totalmente.

La siguiente característica del sistema es la existencia de una zona de succión en las inmediaciones del ventilador. El ventilador se encuentra fijado en la parte inferior del cilindro y en principio es de esperar que la fuerza que ejerce la corriente de aire del ventilador sobre la plataforma sea mayor cuanto más cerca esté dicha plataforma del ventilador.

En cambio, se observa que para una pequeña zona de la parte del cilindro adyacente al ventilador no ocurre esto y en vez de empujar la plataforma hacia arriba lo que ocurre es que la plataforma cae hasta el límite inferior. Además, si la plataforma está sobre el extremo inferior es necesario aplicar una señal de control ‘u’ mayor para sacarla de esa zona que la que es necesaria luego para mantenerla.

La gráfica 3-3 presenta más claramente el fenómeno comentado.

La señal en azul es la señal de control aplicada, que primero permanece fija en 3 voltios y a los 24 segundos empieza a variar aleatoriamente.

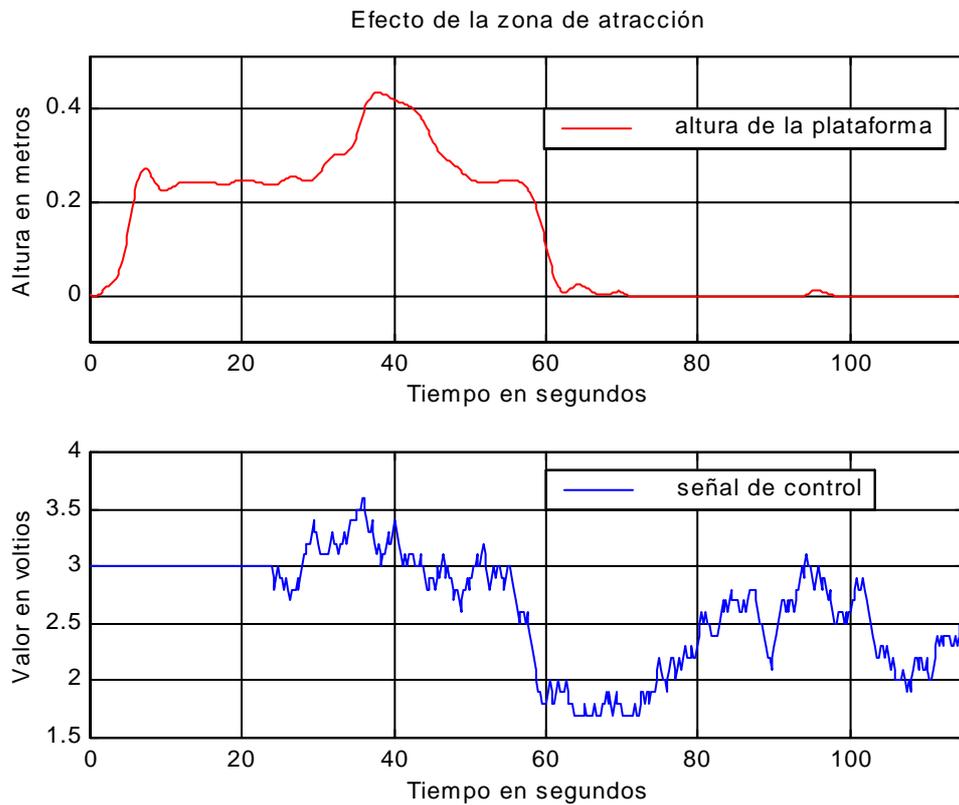
La señal en rojo es la altura de la plataforma, obtenida a partir de la señal del sensor que ha sido filtrada y linealizada como siempre.

Se puede observar que la señal de altura depende del valor de la señal de control hasta los sesenta segundos más o menos. Entonces la señal ‘u’ desciende a menos de 2 voltios y como consecuencia la plataforma baja. Al bajar la plataforma hasta el nivel en que se manifiesta la zona de succión la fuerza sobre la plataforma disminuye y ésta acaba cayendo hasta el nivel de altura cero.

En el tramo de la gráfica de 80 a 100 segundos aparece el segundo aspecto de este fenómeno. Ahora con la plataforma a altura cero, metida de lleno en la zona de succión, a pesar de que la señal ‘u’ aumenta y alcanza valores de hasta 3 voltios la plataforma no se eleva sino que permanece “clavada” al extremo inferior.

Nótese que para un valor de señal 'u' de 3 voltios la plataforma estaba estabilizada en unos 0.25 metros, y que ahora en cambio no se mueve de los 0 metros.

Para hacerla subir de nuevo haría falta un valor de 'u' superior que le permitiese salir de la zona de succión. Dicho valor no es muy superior a los 3 voltios, y se puede observar en la gráfica como a los 95 segundos la altura de la plataforma aumenta un poco sobre cero, señal de que la fuerza del ventilador está tratando de elevar la plataforma.



Gráfica 3-3

Esta zona de succión abarca hasta unos pocos centímetros de altura en la zona inferior del cilindro, la que está contigua al ventilador. Aunque no se puede dar una altura determinada, sus efectos empiezan a notarse para un intervalo de entre cinco y

diez centímetros de altura. Por debajo de esa zona la plataforma empieza a sufrir perturbaciones en su posición no pudiendo mantenerse estable y termina bajando hasta altura cero.

La zona de succión es debida a que la corriente de aire que genera el ventilador, se encuentra con la plataforma como un obstáculo, y se ve obligada a circular hacia arriba a través del espacio ( en forma de corona circular ) que queda libre entre el final de la plataforma y las paredes del cilindro. Una vez que ha superado la plataforma, dicha corriente de aire puede circular libremente hacia arriba por toda la sección transversal del cilindro, de manera que ejerce presión sobre la cara superior de la plataforma. Esta presión actúa sobre la plataforma como una fuerza añadida al peso que aumenta la fuerza necesaria para elevar la plataforma.

La zona de succión no puede modelarse de una manera explícita ni tampoco en esa zona se puede llevar a cabo un control satisfactorio de la altura de la plataforma pues las perturbaciones acaban llevándola al límite inferior, dado que los movimientos de las corrientes de aire son demasiado complicados para modelarlos, o requieren, al menos para modelarlos, un estudio mucho más teórico y profundo.

En consecuencia, a la hora de modelar y controlar el sistema hay que excluir esta zona, que al ser relativamente pequeña, no significa perder mucho rango de variación de la altura de la plataforma.

La última consideración sobre el sistema no está referida al sistema en sí sino a las condiciones en que se realizará la identificación. En particular, se refiere a la elección del tiempo de muestreo.

La identificación que se pretende realizar se hará en tiempo discreto, lo cual significa que los parámetros que se obtengan serán válidos sólo para el tiempo de muestreo con el cual se han obtenido los datos. Se hace necesario fijar un valor del tiempo de muestreo que sea el que se use de aquí en adelante tanto durante la identificación como durante el control del sistema.

La elección del tiempo de muestreo no es banal, y tiene decisiva importancia en la identificación. No se puede elegir un tiempo de muestreo excesivamente grande pues podría perderse parte de la dinámica del sistema si éste fuese lo suficientemente rápido.

Dado que el sistema tiene una dinámica lenta, del orden de varios segundos de tiempo de subida no representa una limitación especial.

Por otro lado, es deseable tener el mayor tiempo posible para calcular la señal de control óptima. Como el cálculo se realiza de nuevo cada periodo de muestreo, se debe escoger el tiempo de muestreo más grande posible para así disponer del máximo tiempo posible dedicado a cálculos.

Otro factor importante es el ruido. En este caso particular, se ha comprobado que el sensor añade un ruido a la medida que depende en parte del tiempo de muestreo. Esta parte del ruido que depende del tiempo de muestreo muestra un pico en su espectro siempre a la misma frecuencia digital. Esto significa que a medida que aumentamos el tiempo de muestreo la frecuencia analógica de esta parte del ruido es menor, y si el tiempo de muestreo es lo bastante grande la frecuencia del pico del ruido llegará a aproximarse a las frecuencias típicas del sistema con lo cual no podría filtrarse esta parte del ruido sin afectar también al valor real inmerso en la medida.

Este comportamiento del ruido nos limita la elección del tiempo de muestreo a valores de menos de 1 segundo más o menos.

Además, otra parte del ruido es un ruido periódico de alta frecuencia, muy probablemente de la propia red eléctrica a 50 Hz, y si se escoge un valor del tiempo de muestreo que sea múltiplo de  $1/50 = 0.02$  segundos se producirá un sobremuestreo de manera que este ruido aparecerá como un ruido periódico pero de una frecuencia mucho más baja de manera que igual que antes no podrá filtrarse correctamente al estar en la misma banda de frecuencias que la de la característica en frecuencia del sistema.

Este hecho nos obliga a tomar valores que no sean múltiplos o cercanos de múltiplos de 0.02 segundos.

Teniendo en cuenta todos estos factores se decidió tomar como tiempo de muestreo  $0.213 * 4 = 0.852$  segundos.

El problema que presenta este tiempo de muestreo, adecuado a la dinámica del sistema, es que el ruido dependiente del tiempo de muestreo que se ha comentado antes no se puede filtrar bien.

Para solucionar este inconveniente se decidió muestrear la señal del sensor cada 0.213 segundos, es decir, la cuarta parte de 0.852 segundos. Será la señal que se obtiene con este muestreo la que se filtre y se linealice convirtiéndola a metros, y a continuación se realizará un submuestreo tomando una muestra por cada cuatro muestras para obtener la señal 'y' que será la salida del sistema.

El valor de 0.852 segundos es pues un valor de compromiso entre el deseo de tener el mayor tiempo de muestreo posible, y la limitación impuesta por el ruido del sensor y, en menor medida, por el tiempo de respuesta del sistema.

Naturalmente aunque la señal del sensor se muestree cada 0.213 segundos la señal de control 'u' permanece fija, y sólo puede variar su valor cada 0.852 segundos.

El último aspecto importante del sistema es el rozamiento, tanto estático como dinámico.

En principio, no se ha observado rozamiento dinámico apreciable en los experimentos realizados. Siendo por otra parte éste un sistema muy lento es factible suponer que el efecto del rozamiento no sea apreciable pues no se alcanzan grandes velocidades en ningún momento.

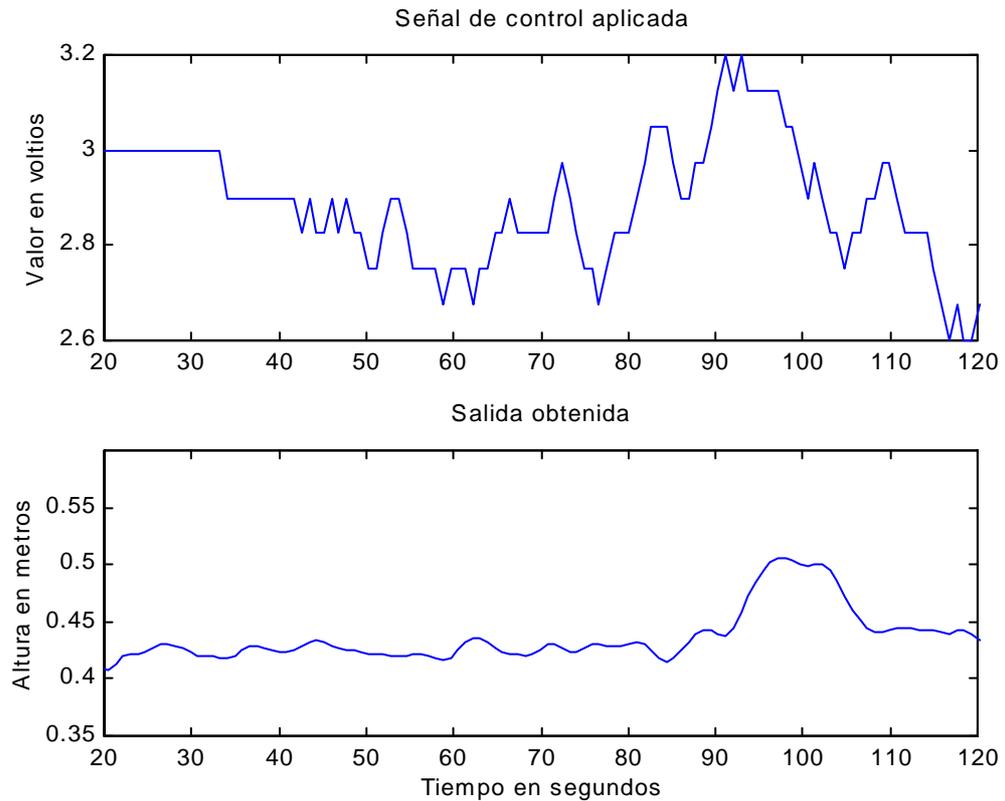
El rozamiento estático sí se ha manifestado durante los experimentos. La consecuencia del rozamiento estático es que para cambios pequeños en la señal de control 'u' no se producen cambios apreciables en la altura 'y'. Es necesario que el cambio en la señal 'u' supere un cierto nivel para que la plataforma se ponga en movimiento y evolucione a su nueva posición.

El rozamiento estático no aparece con igual intensidad en todas las zonas sino que al ser debido al rozamiento existente entre la barra por la que desliza la plataforma y la propia plataforma, depende de las irregularidades y pequeñas oxidaciones que tenga la barra, y que por supuesto varían a lo largo de ella.

Se puede decir que en algunas zonas es más acusado por presentar la barra una mayor oxidación y en esas zonas donde si puede ser importante si la plataforma se para allí.

Tampoco se presenta siempre, sino que sólo en algunos experimentos produce un efecto verdaderamente apreciable.

La gráfica siguiente es un caso extremo de influencia del rozamiento estático en el sistema. Como puede verse la plataforma permanece prácticamente anclada en una altura y las variaciones en la señal 'u' no se traducen en cambios en la altura.



Gráfica 3-4

No obstante, esta situación no se presenta habitualmente y en la gran mayoría de los experimentos realizados no ha aparecido rozamiento estático apreciable.

Hay que recordar aquí que, precisamente, se añadió peso a la plataforma para reducir el rozamiento, y conseguir que el rozamiento no fuera un componente importante en el comportamiento total del sistema. En consecuencia, fue una medida acertada añadir peso a la plataforma.

Por tanto, por el momento se despreciará el efecto del rozamiento estático por lo menos en una primera aproximación.

Resumiendo este apartado, puede decirse que el sistema es relativamente invariante en el tiempo, que existe una pequeña zona en la parte inferior que no es

modelable y ha de evitarse en lo sucesivo, y que la elección del tiempo de muestreo viene marcada por el ruido presente en las medidas.

No se tendrá en cuenta el rozamiento, ni dinámico ni estático ya que presenta excesivas dificultades en su estudio y tampoco significa un problema grande en el control del sistema.

Respecto a la existencia o no de retardos en el sistema, no se harán suposiciones, sino que se estudiará más adelante en otros experimentos, aunque ya se ha adelantado que el resultado obtenido en la identificación fue que no existía retardo apreciable. Igualmente, la no linealidad se analiza en el apartado siguiente.

### 3.3 NO LINEALIDAD DEL SISTEMA

La no linealidad que presenta el sistema es el principal problema para realizar una identificación correcta de éste. El sistema presenta un grado de no linealidad muy alto, dependiendo su comportamiento dinámico en gran medida de la altura en que se encuentre el disco.

La no linealidad aparece sobre todo en la dependencia de la fuerza que sustenta la plataforma con la altura. A medida que la corriente de aire que impulsa el ventilador va subiendo por el cilindro va perdiendo fuerza, es decir, la fuerza de la corriente de aire no es la misma justo encima del ventilador que medio metro o un metro más arriba, sino que decrece con la altura.

Si denominamos 'y' a la altura, es evidente que existe una dependencia de la fuerza del aire con la altura 'y'. Se puede expresar la fuerza que ejerce dicha corriente de aire para cualquier altura en el cilindro en función de la fuerza que ejerce en la altura cero, multiplicada por una función  $f(y)$  dependiente de la altura.

El objeto de esta función  $f(y)$  es el de “ponderar” la acción del ventilador según la altura a la que esté la plataforma, de manera que a mayor altura de la plataforma menor sea el efecto del ventilador.

Expresando esta idea mediante ecuaciones, se puede escribir de esta forma:

$$h_k + g_1 \cdot h_{k-1} + g_2 \cdot h_{k-2} = d \cdot u_k$$

La primera ecuación representa aproximadamente la función de transferencia que va desde la señal de control 'u' hasta la fuerza 'h' que ejerce el ventilador para esa determinada señal 'u'.

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} = -k + \frac{b_0 \cdot h_{k-1} + b_1 \cdot h_{k-2} + \dots + b_m \cdot h_{k-m-1}}{f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})}$$

En la segunda ecuación se puede ver la manera en que se presenta la no linealidad. El término debido a la acción de control, que se representa por la función 'h' se ve afectado por una función 'f' que depende de la altura de la plataforma en ese instante  $y_k$  pudiendo también depender de los valores pasados de la altura de la plataforma.

El término  $k$  representa el efecto del peso de la plataforma, que tiende a bajarla, y que es independiente de la altura.

Se ha elegido esta función de transferencia con dos polos, porque siendo el comportamiento de un motor lo que se pretende modelar es corriente que dos polos e incluso uno sirvan a tal efecto, actuando de filtro de la señal 'u'.

Dado que la objetivo de esta ecuación es modelar el comportamiento como "filtro" de la señal 'u' que tiene el motor, podemos añadir una restricción sobre los coeficientes  $g_1$ ,  $g_2$  y  $d$  de manera que se cumpla que:

$$d - g_1 - g_2 = 1$$

No existe pérdida de generalidad por hacer esto ya que cualquier factor multiplicativo puede ser integrado en los coeficientes  $b_i$ .

Aunque la determinación de esta función  $f(y)$  es posible que pueda obtenerse de forma teórica por aplicación de las leyes físicas que rigen el proceso, aquí se intentará hacer un ajuste de una función de atenuación en función de la altura basándose en datos obtenidos de experimentos.

No obstante sí se pueden hacer algunas suposiciones sobre  $f(y)$ , como por ejemplo que será una función creciente con 'y' ya que a mayor altura tiene que haber mayor atenuación.

La segunda suposición es que  $f(0)=1$ , o sea, que para altura nula de la plataforma no hay atenuación. No existe ningún problema en hacer esta suposición ya que cualquier constante se puede englobar en los coeficientes  $b_i$ .

Además, para simplificar hallar la función 'f' supondremos que sólo depende de la altura en cada instante,  $y_k$ , y no de la alturas anteriores.

Para calcular  $f(y)$  lo que se hizo fue lo siguiente. Dado que el modelo propuesto antes representa la dinámica del sistema, también representa la estática. Si se aplica una señal 'u' constante, el sistema, tras evolucionar durante un tiempo llegará a una posición de equilibrio con un valor determinado para la altura 'y'. Naturalmente en estado estacionario el valor de  $y_k$ ,  $y_{k-1}$ ,  $y_{k-2}$ , etc... será el mismo, e igualmente pasará con el valor de las h y el valor de las u.

Reescribiendo las ecuaciones del modelo para estado estacionario:

$$\begin{aligned} h_k &= h_{k-1} = h_{k-2} = h \\ u_k &= u_{k-1} = \dots = u_{k-m-1} = u \\ y_k &= y_{k-1} = \dots = y_{k-n} = y \end{aligned}$$

$$h_k + g_1 \cdot h_{k-1} + g_2 \cdot h_{k-2} = d \cdot u_k \Rightarrow (1 + g_1 + g_2) \cdot h = d \cdot u \Rightarrow d \cdot h = d \cdot u \Rightarrow h = u$$

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} = -k + \frac{b_0 \cdot h_{k-1} + b_1 \cdot h_{k-2} + \dots + b_m \cdot h_{k-m-1}}{f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})} \Rightarrow$$

$$y \cdot (1 + a_1 + \dots + a_n) = -k + \frac{(b_0 + b_1 + \dots + b_m) \cdot u}{f(y)}$$

$$\text{si ahora } k_y = (1 + a_1 + \dots + a_n) \quad y \quad k_u = (b_0 + b_1 + \dots + b_m) \Rightarrow$$

$$k_y \cdot y = -k + \frac{k_u \cdot u}{f(y)} \Rightarrow k_u \cdot u = (k + k_y \cdot y) \cdot f(y) \Rightarrow$$

$$u = \left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right) \cdot f(y) \Rightarrow u = F(y)$$

Así pues, en estado estacionario existe una relación que liga los valores de la señal de control 'u' y de la altura 'y'. Si conocemos la función 'F' podremos conocer también la función 'f' que buscamos.

Por añadidura también obtendremos la relación entre  $k_y$ ,  $k$  y  $k_u$  y fijando uno de ellos podremos calcular los otros dos.

Para obtener los datos necesarios se realizó una serie de experimentos en los cuales se aplicaba una señal de control 'u' de valor constante, durante algo más de un minuto, para asegurar que el sistema se estabilizaba.

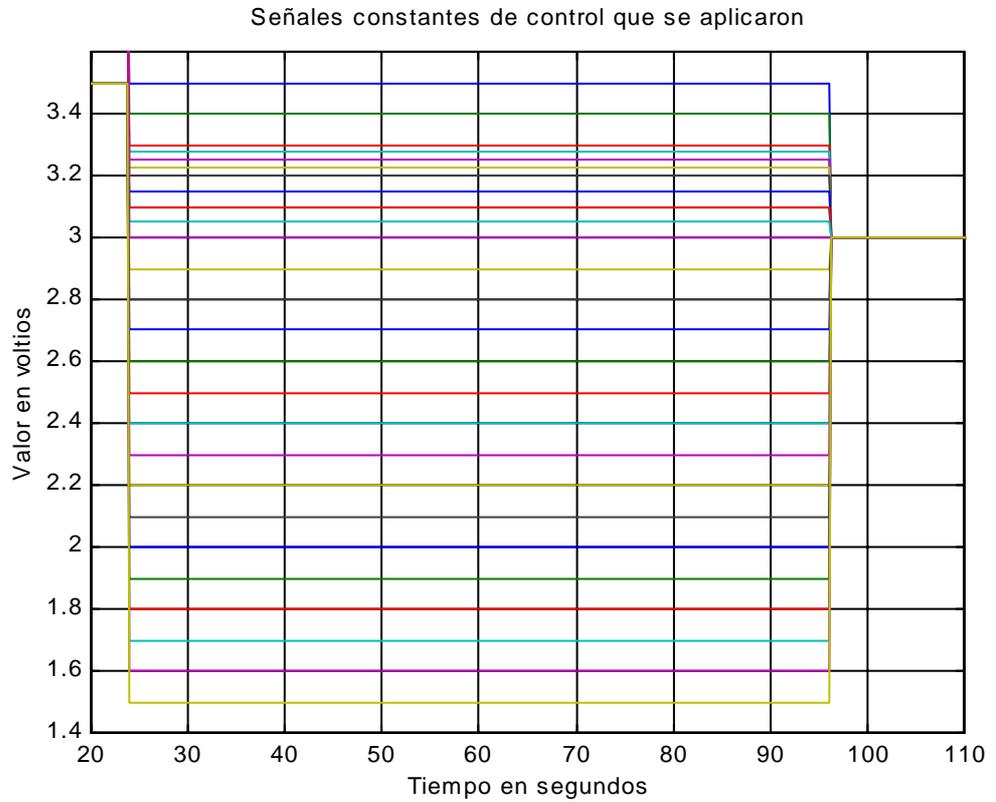
Partiendo de un valor de 'u' que deja la plataforma en el límite inferior del cilindro, se irá incrementando en cada experimento el valor de la señal 'u' aplicada para

que la altura de la plataforma cuando se estabilice vaya barriendo todo el intervalo delimitado por los extremos del cilindro.

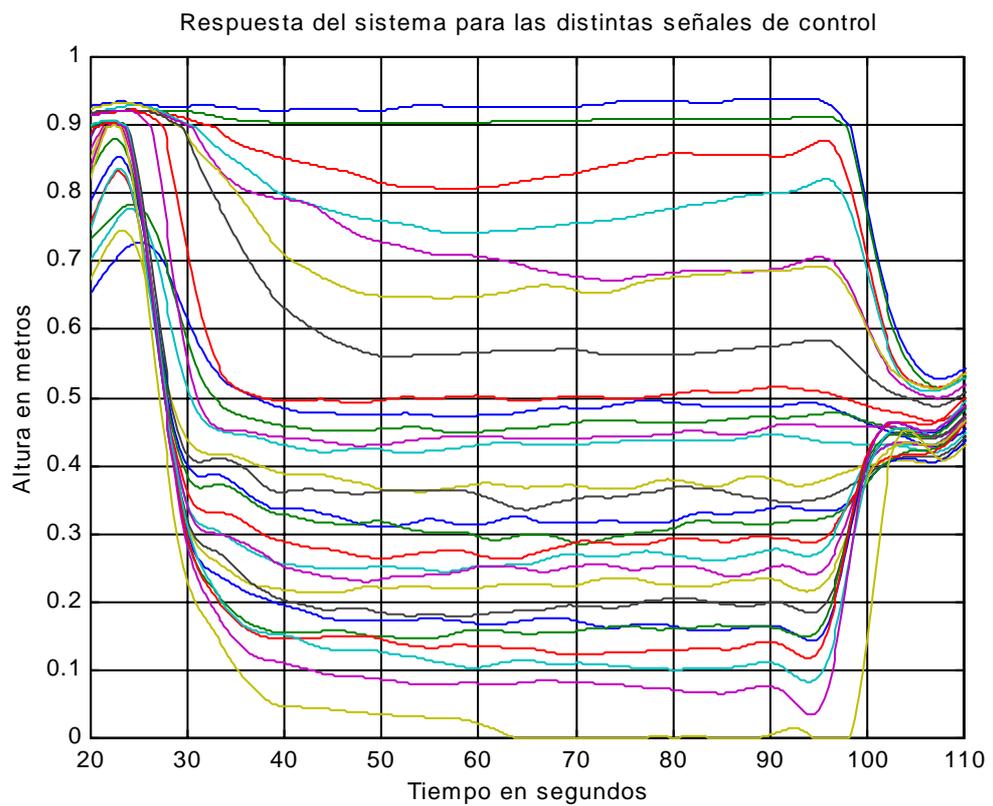
Se procuró realizar suficientes experimentos para barrer de una manera precisa todo el rango de variación de la altura, de manera que se obtuviese un dato para cada pocos centímetros de variación en la altura.

Como es evidente, al no ser lineal el sistema, para los mismos incrementos en la señal 'u' no se producen los mismos incrementos en la señal 'y', sino que dependen del valor de la propia señal 'y', y es precisamente esta no linealidad lo que se está estudiando. Por tanto, habrá zonas en las que se produzca mayor variación en la altura para la misma variación en la señal de control. En esas zonas se incrementó el número de experimentos y se redujo el incremento  $\Delta u$  que se aplica de un experimento al siguiente. De esta manera, se procuró mantener un cambio más o menos fijo en la altura entre un experimento y el siguiente.

En las dos gráficas siguientes se dibujan las señales de control que se aplicaron y las alturas que se obtuvieron. Dado que existen muchas gráficas y puede ser complicado extraer la información sobre las señales 'u' aplicadas y las señales 'y' obtenidas, a continuación se incluye una tabla con los pares de valores (u,y) que se obtienen.



Gráfica 3-5



---

### Gráfica 3-6

La salida 'y' que corresponde a la entrada 'u' aplicada tiene el mismo color en la segunda gráfica, que la 'u' correspondiente tenga en la primera.

De la propia forma de las gráficas se pueden extraer algunas conclusiones sobre el sistema. La primera es la constatación de que existen dos valores de 'u' para los cuales se alcanzan los límites superior e inferior del cilindro.

La plataforma baja hasta el límite inferior para un valor de 'u' de 1.5 voltios.

Es necesario recordar aquí la existencia de una zona de succión en las inmediaciones del ventilador. Por efecto de esta zona existen valores de 'u' para los que la plataforma no se levanta del nivel cero, pero sin embargo, para esos mismos valores y una vez fuera de la zona de succión la plataforma permanece estable a una cierta altura, dependiente del valor en concreto de 'u'. Si la plataforma no está dentro de la zona de succión no caerá hasta abajo para esos valores sino que alcanzará una posición estable a la altura adecuada.

El valor de  $u=1.5$  voltios es el máximo para el cual la plataforma, independientemente de la altura en que se encuentre, acaba cayendo hasta el nivel de altura nula.

Se constata también que la atenuación es creciente pues siempre se cumple que para alcanzar una mayor altura es necesario aplicar una señal de control mayor.

Se distinguen dos zonas diferenciadas en la gráfica. La zona inferior, en la cual los incrementos de altura entre incrementos de señal de control son menores y además más regulares, y la zona superior, en la cual estos incrementos son superiores y las variaciones en las alturas que muestran las señales de la gráfica anterior son más irregulares.

La tabla 3-1 está basada en las gráficas y presenta los valores de los pares (u,y) obtenidos de los experimentos:

Los valores de la tabla hacen corresponder a cada valor de ‘u’ un valor fijo y determinado de altura. De la observación de cualquiera de las señales de la gráfica anterior se puede concluir que realmente no existe una altura exacta a la que quede la plataforma, sino que la plataforma tiene ligeras oscilaciones en torno a un punto de equilibrio que es el que se toma como valor para la tabla.

Estas oscilaciones son provocadas por las variaciones en el flujo de aire desde el ventilador. En el interior del cilindro se producen perturbaciones en la corriente de forma que la corriente que “sostiene” la plataforma no es constante sino que fluctúa respecto a un valor por causa de dichas perturbaciones.

Estas perturbaciones siguen una dinámica compleja y no entra en el objetivo de este proyecto analizarlas, sino únicamente considerar la presencia de perturbaciones en el sistema a la hora de realizar el control.

**Tabla 3-1. Altura alcanzada para un valor constante de la señal de control**

Señal u (voltios)	Señal y (metros)	Señal u (voltios)	Señal y (metros)
3.5	0.94	2.7	0.33
3.4	0.91	2.6	0.31
3.3	0.85	2.5	0.29
3.275	0.80	2.4	0.27
3.25	0.70	2.3	0.25
3.225	0.69	2.2	0.23
3.2	0.57	2.1	0.20
3.15	0.49	2.0	0.17
3.1	0.47	1.9	0.16
3.1	0.51	1.8	0.14

---

3.05	0.45	1.7	0.11
3	0.43	1.6	0.08
2.9	0.38	1.5	0.05
2.8	0.35		

De los valores de la tabla se pueden obtener varias conclusiones.

La zona inferior, hasta aproximadamente 0.5 metros, presenta unas variaciones de la altura bastante lineales con respecto a la señal de control 'u'. Eso significa que la función de atenuación  $f(y)$  que se había propuesto adquiere un valor casi constante en ese intervalo. En esta zona la no linealidad puede ser poco importante y puede ser posible ajustar un modelo lineal para el sistema.

La zona superior presenta una marcada no linealidad y además para un intervalo muy pequeño de valores de la señal de control, comprendido entre 3.2 voltios y 3.4 voltios se corresponde un intervalo muy grande de altura, que comprende prácticamente toda la zona superior del tubo. Esta zona es pues altamente no lineal, lo que añadido a que el rango de 'u' que cubre esa zona es muy pequeño (de 0.2 voltios) se traduce en que el control y probablemente también el ajuste de algún modelo será muy difícil y es posible que no se puede abordar sin entrar en excesivas complicaciones.

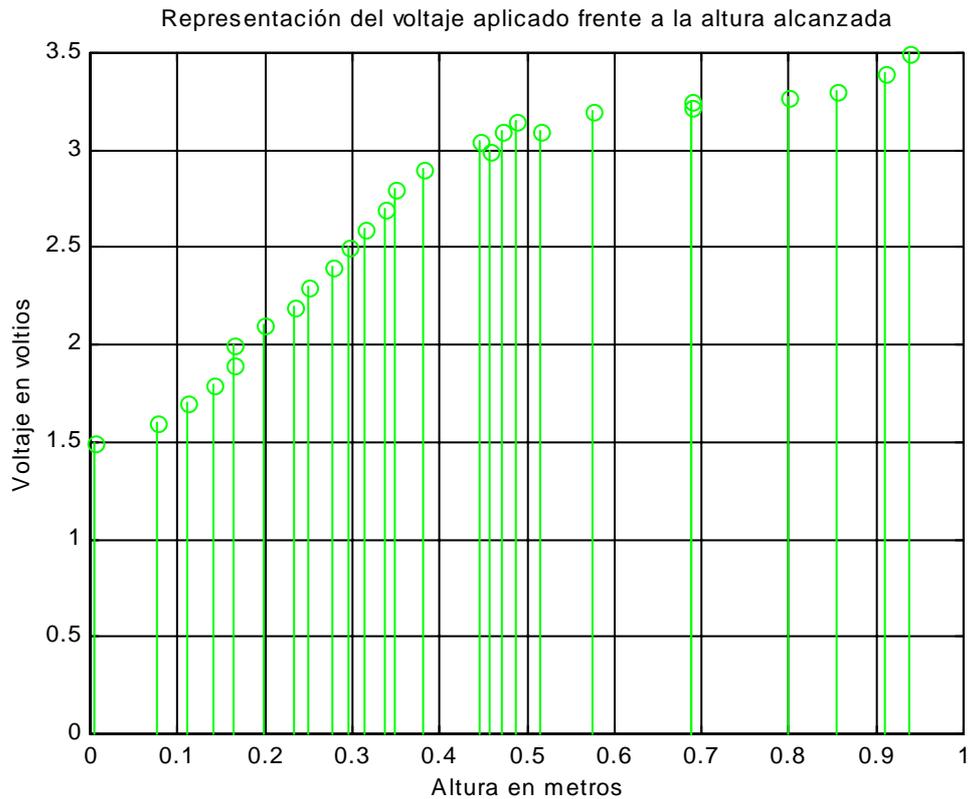
Otro dato importante que se obtiene de la tabla es la variación de la altura que alcanza la plataforma en estado estacionario a lo largo del tiempo. Se han hecho dos experimentos para un mismo valor constante de 'u' de 3.1 voltios. El primer experimento con  $u=3.1$  voltios fue realizado de los primeros de toda la serie, y el segundo de los experimentos con  $u= 3.1$  voltios fue realizado de los últimos. En el tiempo transcurrido entre uno y otro se realizaron otros experimentos que fueron recalentando el motor, de tal forma que éste al calentarse reduce su rozamiento, como ya se comentó al describir las características del sistema.

El resultado del calentamiento del motor es un aumento en la altura alcanzada de unos cuatro centímetros, diferencia entre los 47 centímetros que se alcanzan en el primer caso y los 51 centímetros alcanzados en el segundo caso en que se aplica la señal 'u' de 3.1 voltios.

Aunque este hecho significa que el sistema varía con el tiempo, la poca variación que se produce no representa un problema grave, teniendo en cuenta que un posible método de control a utilizar, sería el control robusto, entre cuyas ventajas está precisamente la de tener en cuenta posibles variaciones en el valor de los parámetros del sistema.

Se puede hacer una representación del voltaje aplicado frente a la altura alcanzada.

La gráfica 3-7 contiene esta representación.



Gráfica 3-7

Resumiendo, el sistema presenta un alto grado de no linealidad, que es mucho más acusado en la mitad superior del tubo, en la cual para un pequeño rango de variación en la señal de control 'u' se produce una gran variación de la altura 'y'. Por el contrario, en la mitad inferior se observa una característica más cercana a lo lineal que hace presumir que la identificación ofrezca menos problemas en esta zona.

### 3.4 IDENTIFICACIÓN USANDO UN AJUSTE POLINOMIAL DE LA NO

#### LINEALIDAD

Una vez que se poseen datos que relacionan los valores de la señal de control con la altura, el siguiente paso es usar estos datos para ajustar una función que recoja la no linealidad del sistema.

En este apartado de la memoria se cuenta cómo se utilizaron los datos para realizar el ajuste, y su posterior uso en un intento de identificar el sistema. Se comentan los resultados obtenidos y en especial, y dado que esta forma de abordar el problema no dio resultado, cuáles son los problemas que presenta este modelo y la razones por las cuales falla a la hora de reproducir el comportamiento del sistema.

En el apartado anterior se propuso una forma de modelar la no linealidad a través de una función  $f(y)$ . El modelo era el siguiente:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} = -k + \frac{b_0 \cdot h_{k-1} + b_1 \cdot h_{k-2} + \dots + b_m \cdot h_{k-m-1}}{f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})}$$

donde la señal 'h' se simplemente la señal de control 'u' tras atravesar un filtro:

$$h_k + g_1 \cdot h_{k-1} + g_2 \cdot h_{k-2} = d \cdot u_k$$

Se demostró que si se introducía una señal 'u' constante, en estado estacionario se llegaba a :

$$u = \left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right) \cdot f(y) \Rightarrow u = F(y)$$

es decir, una relación directa entre la altura y el voltaje.

Utilizando los datos de la Tabla 3-1 se puede realizar un ajuste por mínimos cuadrados de una función que aproxime a todos los puntos.

Por sencillez, se decidió usar polinomios para ajustar la función  $F(y)$ . Una ventaja de usar polinomios es que a posteriori se podrá tomar una raíz real como término aparte y el resto del polinomio corresponderá a la función  $f(y)$  buscada.

Naturalmente, se intentará que el polinomio sea del orden más bajo posible para simplificar en lo posible el modelo.

Como primer polinomio se intentó ajustar uno de grado tres, de manera que

$$F(y) = p_0 + p_1 \cdot y + p_2 \cdot y^2 + p_3 \cdot y^3$$

y una vez eliminada la raíz real correspondiente al término

$$\left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right)$$

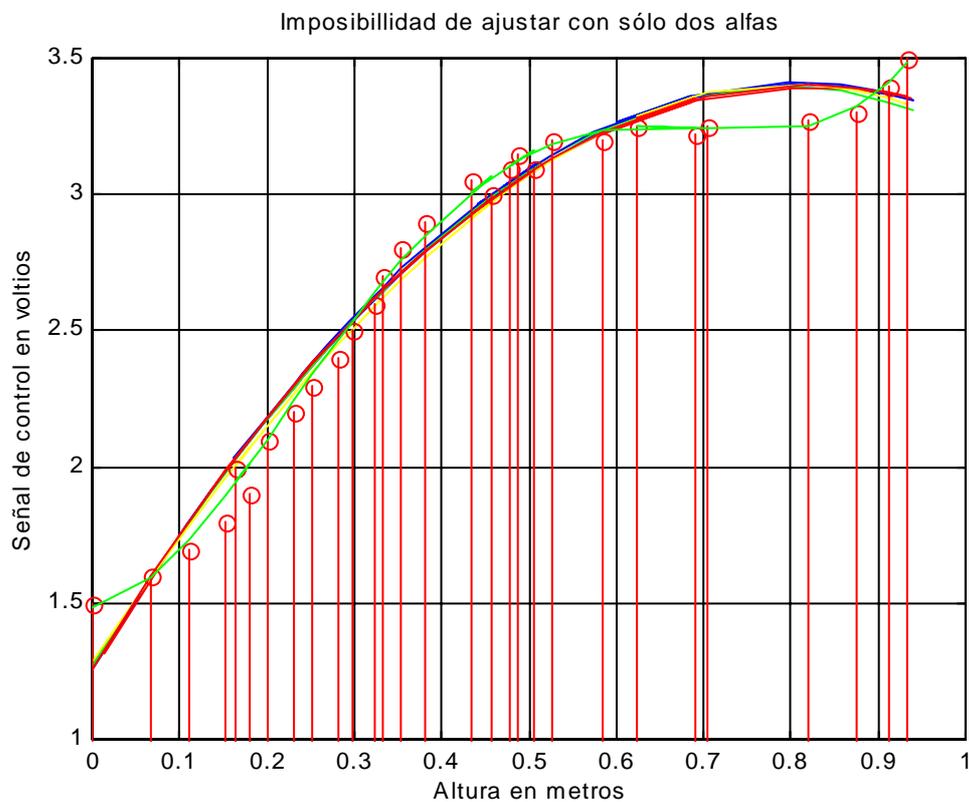
se obtendría  $f(y)$  como un polinomio de grado dos:

$$f(y) = 1 + \alpha_1 y + \alpha_2 \cdot y^2$$

Para realizar el ajuste del polinomio se utilizaron funciones incluidas en el paquete MATLAB.

El resultado obtenido fue que el ajuste con un polinomio de segundo orden para  $f(y)$ , de tercer orden para  $F(y)$ , era insatisfactorio.

La gráfica 3-8 refleja la pobreza del ajuste realizado con un polinomio de segundo orden, es decir, con sólo dos coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para  $f(y)$ .



Gráfica 3-8

Las parábolas de color rojo, amarillo y azul son distintos ajustes obtenidos suponiendo un polinomio  $f(y)$  de segundo orden. Es evidente que las discrepancias entre

---

el valor que tomen los polinomios y los datos, dibujados como círculos en rojo, hacen que este ajuste no valga.

En verde aparece el ajuste obtenido al suponer un polinomio de grado tres para  $f(y)$ . En este caso el ajuste sí es satisfactorio para prácticamente todos los puntos. Por tanto, un polinomio de grado cuatro para  $F(y)$ , grado tres para  $f(y)$ , es suficiente.

Sin embargo, aparece un problema al usar un polinomio  $F(y)$  de grado cuatro. Dado que el grado es par ninguna de las raíces tiene porqué ser real. Y de hecho, es esto lo que ocurre. El polinomio  $F(y)$  que se obtiene de un ajuste por mínimos cuadrados a los datos es éste:

$$F(y) = 1.48 + 0.47 \cdot y + 20.19 \cdot y^2 - 39.55 \cdot y^3 + 21.26 \cdot y^4$$

y si se calculan las raíces se obtiene estos valores:

$$r_1 = 0.9930 + 0.3907 i$$

$$r_2 = 0.9930 - 0.3907i$$

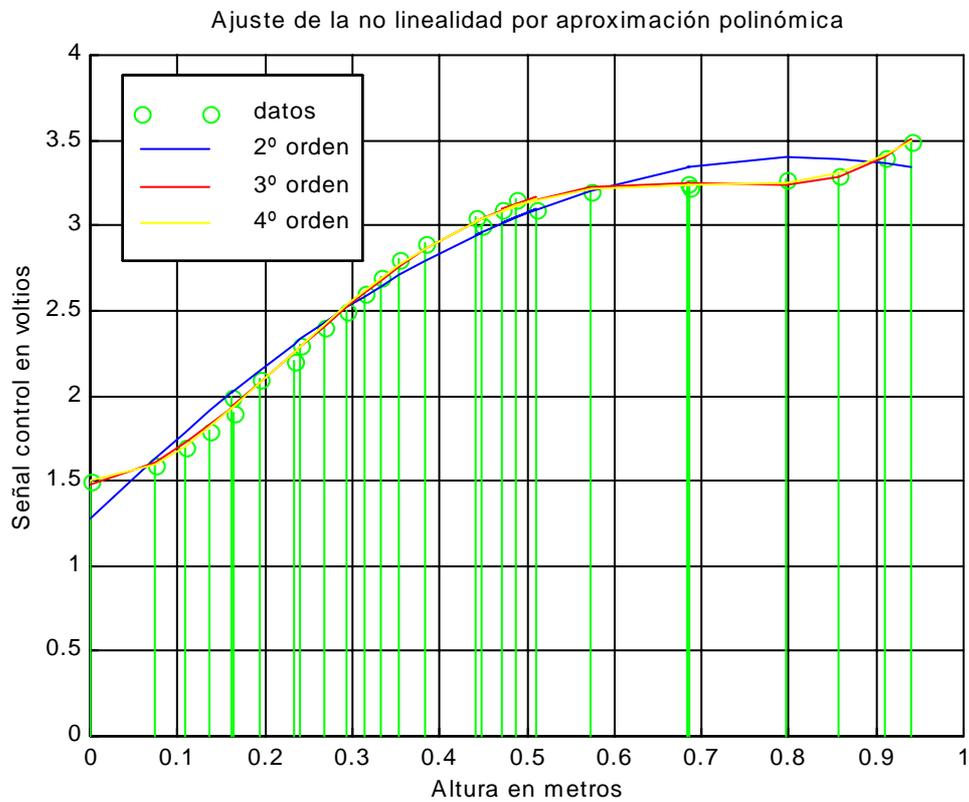
$$r_3 = -0.0630 + 0.2393i$$

$$r_4 = -0.0630 - 0.2393i$$

lo que hace imposible la descomposición de  $F(y)$  en una raíz real que multiplica a un polinomio  $f(y)$

Se hizo necesario aumentar en uno el grado del polinomio  $F(y)$ , a pesar de que con ello no se mejoraba la calidad del ajuste.

La gráfica 3-9 presenta la comparación entre los ajustes calculados:



Gráfica 3-9

En esta gráfica los datos aparecen en verde, en azul aparece al ajuste con un polinomio  $f(y)$  de segundo grado, en rojo con uno de tercer grado y en amarillo con uno de cuarto grado.

Como se observa en la gráfica, aumentar en un grado el polinomio no se traduce en una mejora del ajuste, y la justificación de introducirlo es para que el polinomio  $F(y)$  sea de grado impar y posea al menos una raíz real que permita separarlo en dos partes y obtener  $f(y)$ .

Una vez que se ajusta por mínimos cuadrados el polinomio  $F(y)$  al que se llega es:

$$F(y) = 1.50 - 0.44 \cdot y + 28 \cdot y^2 - 62.5 \cdot y^3 + 50 \cdot y^4 - 12.5 \cdot y^5$$

que tiene estas raíces:

$$r_1 = 2.162$$

$$r_{2,3} = 0.9654 \pm 0.4744 i$$

$$r_{4,5} = -0.0442 \pm 0.2149 i$$

y se puede descomponer  $F(y)$  en dos términos:

$$F(y) = (-0.69 \cdot y + 1.50) \cdot (1 + 0.17 \cdot y + 18.5 \cdot y^2 - 33 \cdot y^3 + 18 \cdot y^4)$$

luego ya conocemos  $f(y)$ :

$$f(y) = (1 + 0.17 \cdot y + 18.5 \cdot y^2 - 33 \cdot y^3 + 18 \cdot y^4)$$

y además conocemos:

$$\left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right) = (-0.69 \cdot y + 1.50)$$

con lo que si fijamos  $k_u = 1$  obtenemos  $k = 0.69$  y  $k_y = 1.50$

Una vez que tenemos una función determinada para  $f(y)$ , podemos hacer experimentos y calcular los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  del modelo mediante un ajuste por mínimos cuadrados, ya que la no linealidad que presenta el sistema se evita con el uso de  $f(y)$ .

Para realizar la identificación de los parámetros del sistema se hicieron una serie de programas en MATLAB. Estos programas fueron:

- identif.m : Programa que sirve de interfaz para facilitar la lectura de los datos de los experimentos almacenados en fichero, su tratamiento para la identificación y la simulación a partir de los resultados obtenidos.

- mincuad.m : Programa que realiza la identificación mediante mínimos cuadrados de los parámetros del sistema suponiendo el modelo que se ha establecido en el apartado anterior para el sistema .

- genera\_y.m : Programa que genera la salida simulada del sistema usando como parámetros del sistema los suministrados por el programa mincuad.m u otros introducidos de teclado.

El listado de estos programas se encuentra incluido en los anexos del proyecto.

Para obtener la mayor información del sistema a través de los experimentos se decidió usar como señal de control 'u' una señal pseudoaleatoria generada por el ordenador.

La señal 'u' aplicada era de la siguiente forma; un intervalo inicial de valor constante, al que seguía un intervalo en donde el valor de la señal 'u' cambiaba a cada período de muestreo según el valor que tomase una cierta variable aleatoria.

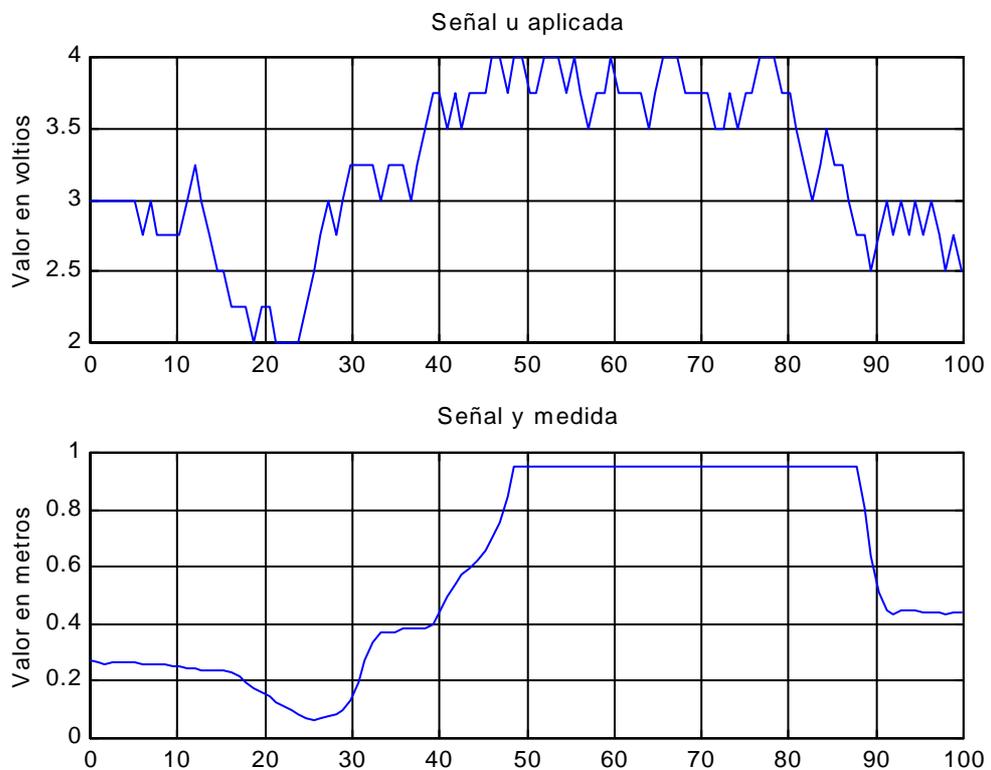
Dicha variable podía tomar como valores 0, 1 ó 2 con igual probabilidad. En el primer caso la señal 'u' se decrementaba en un valor  $\Delta u$  fijo, en el segundo caso el valor de la señal de control permanecía invariable y en el tercer caso se incrementaba en un valor  $\Delta u$ .

Además existían un límite superior y un límite inferior para el valor que podía tomar 'u'. Tanto estos límites como el valor del salto  $\Delta u$  dependen del experimento en cuestión.

Como ejemplo de los experimentos realizados se presentan dos de ellos.

En el primero de ellos se establece como límites de 'u' los valores de 2 y 4 voltios. Como  $\Delta u$  se establece un valor de 0.25 voltios. El tiempo de muestreo sigue siendo 0.852 segundos, que fue el valor escogido tras la discusión que se hizo en un apartado anterior de la memoria. El valor constante que tiene al principio es de 3 voltios.

La gráfica 3-10 representa los valores de 'u' aplicados y los valores de 'y' medidos:

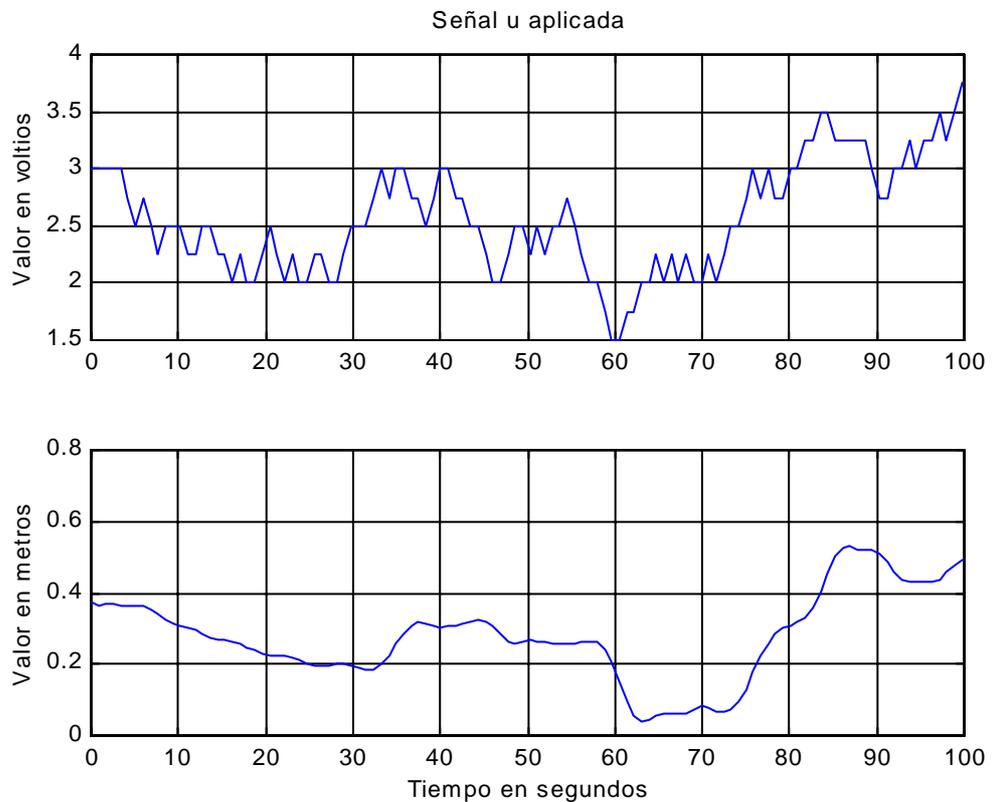


Gráfica 3-10

Como se puede apreciar durante parte del tiempo del experimento la plataforma se encuentra en el límite superior sin poder subir. Esta zona no sirve como dato para la identificación porque no existe una correspondencia entre la señal 'u' y la señal 'y' dado que el tope físico existente limita el valor que puede tomar 'y'.

Por tanto, son preferibles experimentos en los que no se produzca esto, y que la señal 'y' no se vea limitada en ningún momento.

En la siguiente gráfica no se llega nunca a los límites entre los que se mueve la señal 'y'. Para este experimento el límite inferior de 'u' no estaba en 2 voltios sino que se bajó a 1.5 voltios.



Gráfica 3-11

En este caso no existe el problema comentado y se pueden usar todos los datos del experimento como entrada al identificador.

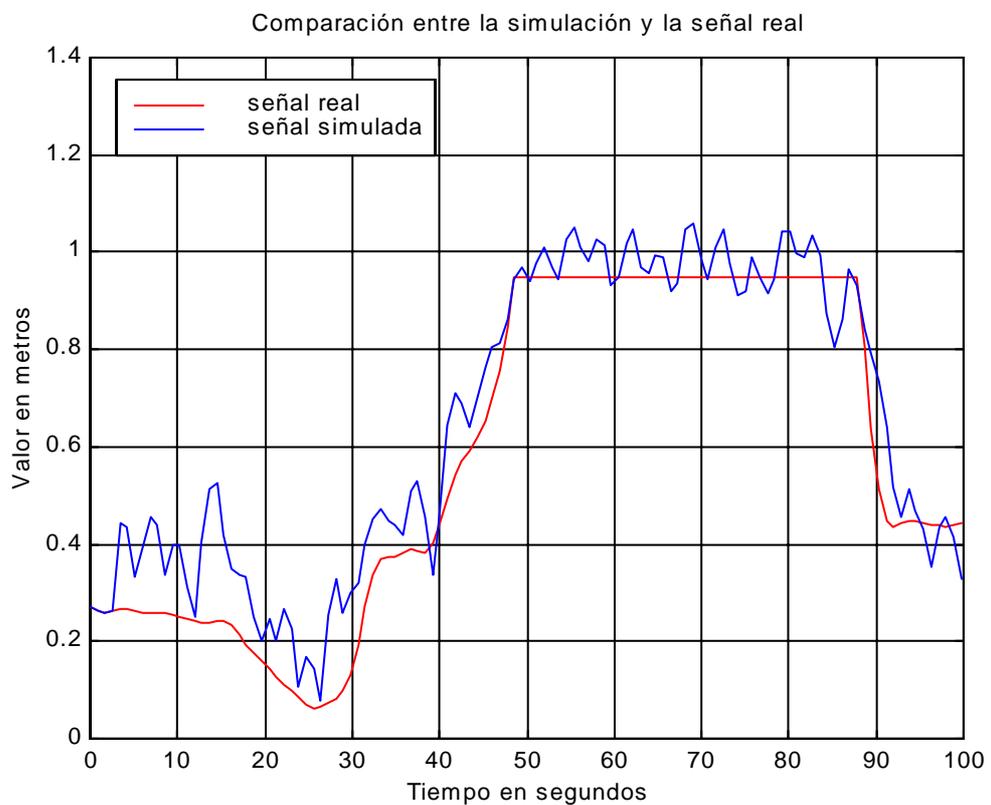
Nótese que hemos dicho antes que la señal 'u' permanece constante al principio a un valor fijo. Esta parte de los experimentos no aparece en las gráficas porque ha sido eliminada dado que no aporta información que pueda ser útil para la identificación.

En total se realizaron veintiocho experimentos como los dos anteriores con el fin de poseer suficientes muestras que introducir al identificador.

De todos estos datos se eliminaron aquéllos en que la señal 'y' alcanzaba alguno de los límites, superior o inferior, con el fin de no adulterar la identificación.

La identificación se llevó a cabo para diferentes retardos con el fin de conocer qué retardo era el que más se ajustaba al sistema.

La gráfica 3-12 representa la simulación del sistema con los parámetros obtenidos del identificador. Esta gráfica representa la simulación obtenida en el mejor de los casos, tras hacer un barrido tanto en el número de coeficientes a identificar como en el retardo.



Gráfica 3-12

La señal real es la misma que la de la gráfica 3-10. La señal simulada se ha simulado a partir de la señal 'u' que se aplicó en ese experimento y de los parámetros que dio el identificador.

Para realizar esta identificación se tomaron cinco coeficientes  $a_i$  y cuatro coeficientes  $b_i$  y un retardo nulo.

Para otros valores en el número de coeficientes y el retardo salen resultados totalmente erróneos e incluso las simulaciones dan como resultado un sistema inestable, algo que no se corresponde con el sistema real.

Si se observa la gráfica se ve que la simulación sigue bien el comportamiento general del sistema pero parece estar afectada por perturbaciones de frecuencia superior a las del sistema. El resultado es que la simulación no sirve para predecir el comportamiento del sistema ni mucho menos el valor que alcanzará la señal 'y' en un instante dado.

Si se compara la señal simulada con la señal 'u' aplicada, que se muestra en la gráfica 3-11, se ve como lo que se ha llamado "perturbaciones" no son más que la respuesta del sistema que simulamos a los cambios que se producen en la señal 'u'. Parece pues que el sistema real no muestra ese comportamiento porque debe filtrar la señal 'u' de manera que la señal que controla la potencia del motor no es realmente la que se aplica desde el ordenador sino el resultado de filtrar dicha señal con un filtro de paso de baja.

El hecho de que la señal 'u' esté filtrada ya está recogido en el modelo del sistema, pues recordando las ecuaciones del modelo:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} = -k + \frac{b_0 \cdot h_{k-1} + b_1 \cdot h_{k-2} + \dots + b_m \cdot h_{k-m-1}}{f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})}$$

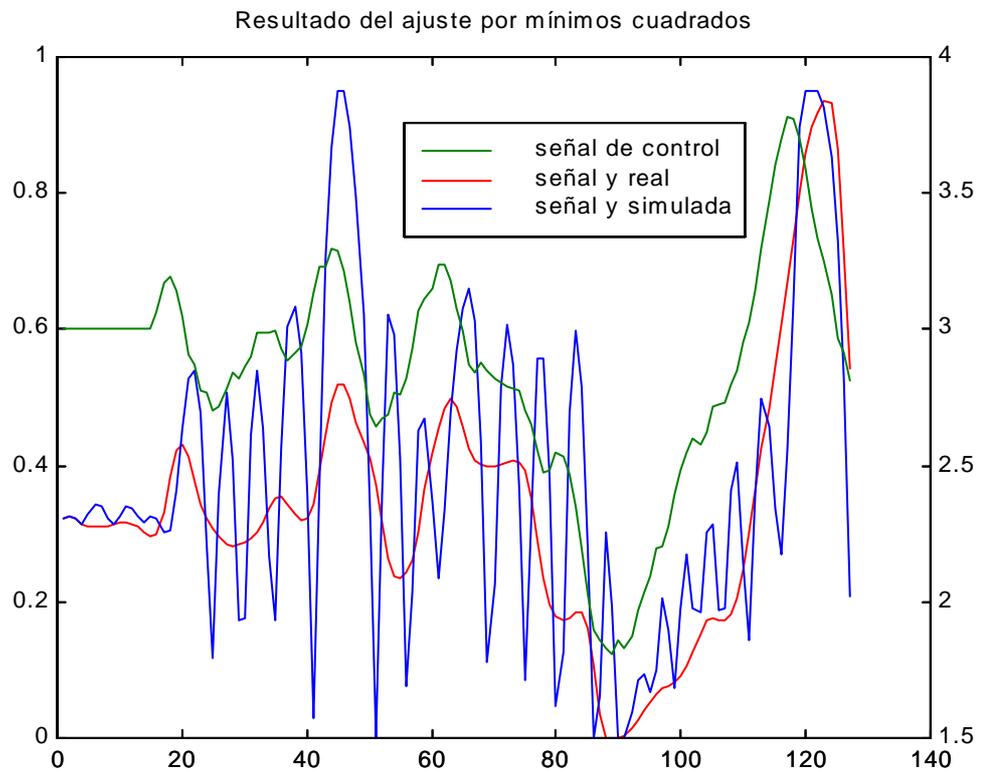
donde la señal 'h' es simplemente la señal de control 'u' tras atravesar un filtro:

$$h_k + g_1 \cdot h_{k-1} + g_2 \cdot h_{k-2} = d \cdot u_k$$

de manera que si introducimos al identificador no la señal 'u' sino la señal 'h' resultado de filtrar 'u', es de esperar que la identificación sea mejor, y la simulación posterior también lo sea.

Dado que no se pueden identificar los coeficientes  $g_i$  a la vez que los otros mediante mínimos cuadrados, lo que se hizo fue un barrido tomando distintos valores para  $g_1$ , y el otro coeficiente  $g$  se tomó cero, es decir, un sistema de primer orden.

Sin embargo, el resultado que se obtuvo filtrando la señal fue peor que el que se tenía. De hecho, el resultado fue extraordinariamente malo, como se ve en la gráfica siguiente:



Gráfica 3-13

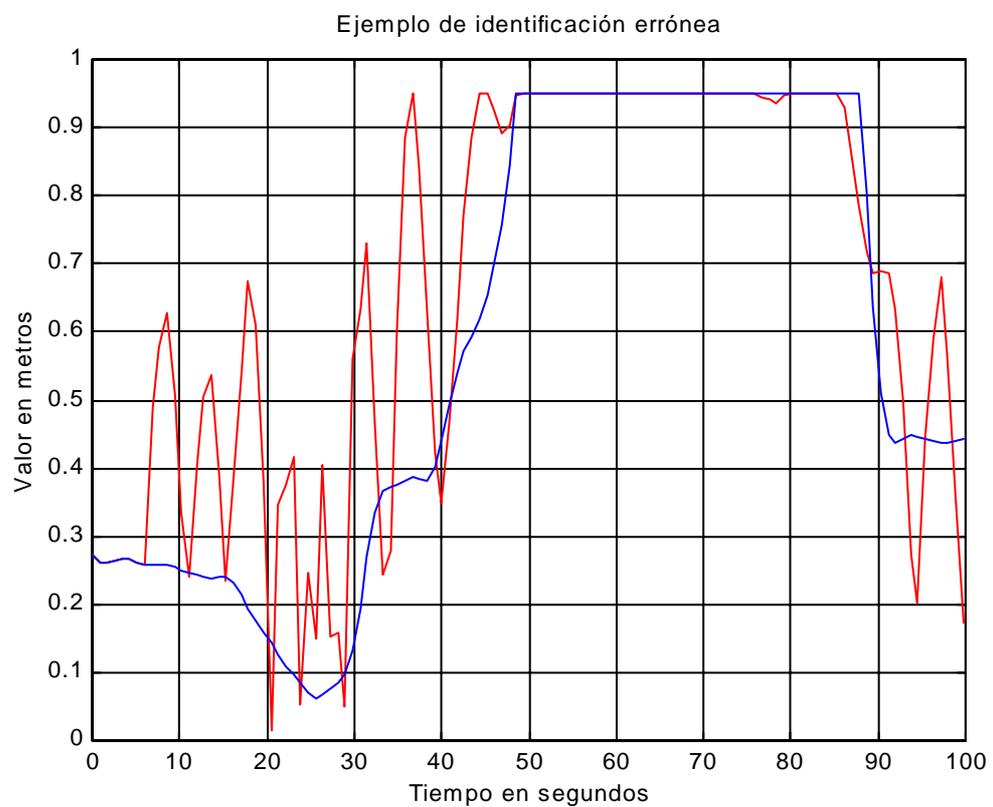
Puede verse que la simulación del sistema no tiene más que un ligero parecido con la realidad, y sólo en un sentido cualitativo, dado que los valores de la simulación son por completo diferentes a los valores reales.

Además esta gráfica corresponde al mejor resultado que se ha obtenido tras recorrer los valores de  $g$ , es decir, del filtro, para otros valores la simulación del sistema identificado resultaba un sistema inestable.

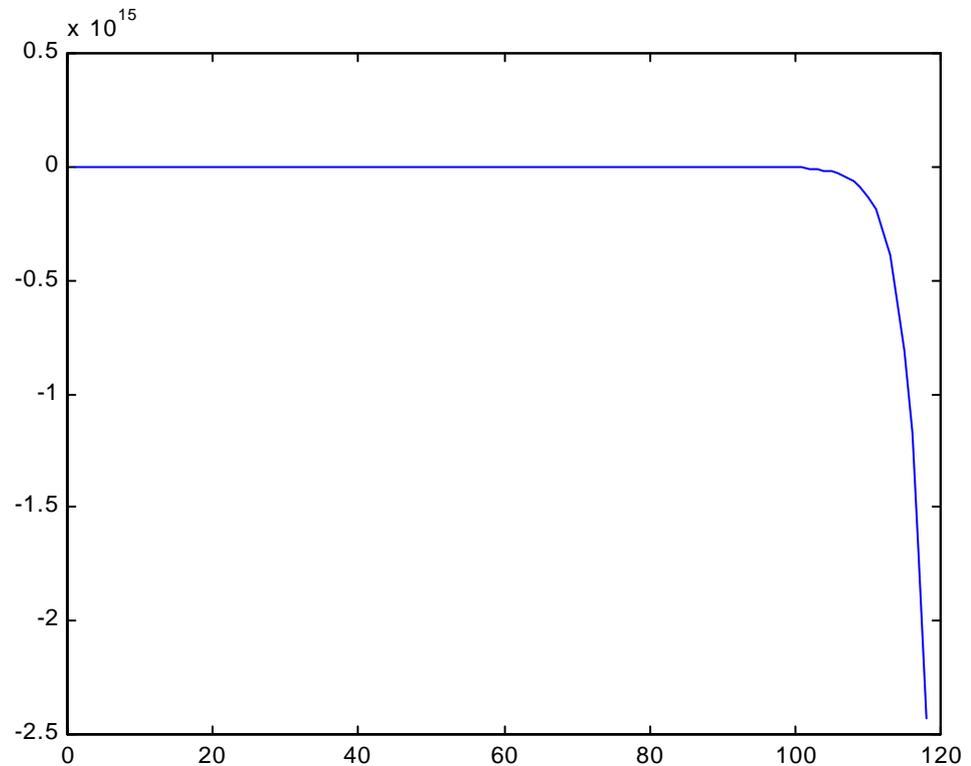
En consecuencia, el filtrado no soluciona ningún problema, sino que empeora el resultado que ya se tenía, por tanto, no haremos uso de él en adelante.

Como ejemplos de la mala identificación conseguida se incluyen las gráficas números 3-14 y 3-15 en las que se ve que el sistema identificado no representa al sistema real.

En el primer caso, el sistema identificado al menos es estable. En el segundo caso, ni siquiera es estable.



Gráfica 3-14



Gráfica 3-15

Las dos gráficas anteriores son el resultado de simular el sistema dado por los parámetros que obtiene el identificador. En la primera gráfica se supone que el retardo es de seis veces el tiempo de muestreo, y en el segundo caso se ha tomado un retardo de un tiempo de muestreo. El número de coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  es de cinco y cuatro respectivamente.

Podemos concluir que intentar identificar los parámetros que ajustan un modelo como el propuesto al comportamiento del sistema no es posible, al menos para el grado de exactitud que se desea. Por tanto, es necesario abandonar este modelo y pensar en otra forma de identificar el sistema. Eso es lo que se hará en los próximos apartados.

Para terminar este apartado se ofrece una posible explicación para este fallo del modelo propuesto. Si se recuerda la forma del modelo:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \dots + a_n \cdot y_{k-n} = -k + \frac{b_0 \cdot h_{k-1} + b_1 \cdot h_{k-2} + \dots + b_m \cdot h_{k-m-1}}{f(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})}$$

donde se puede suponer que no existe filtro sobre la señal 'u', y considerar 'h' igual a 'u' para simplificar.

A la hora ajustar un polinomio  $f(y)$  se realizó suponiendo que en régimen estático, se cumple esto:

$$u = \left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right) \cdot f(y) \Rightarrow u = F(y)$$

y se buscaba obtener  $F(y)$  para de él obtener  $f(y)$  a su vez. Sin embargo, una vez obtenidos  $F(y)$  y  $f(y)$  resulta que también queda fijo el término:

$$\left( \frac{k}{k_u} + \frac{k_y}{k_u} \cdot y \right)$$

lo que se traduce en una relación que liga los valores de los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  y el factor  $k$ . Si se fija  $k$ , queda también fijado el valor de la suma de los coeficientes  $a_i$  y el valor de la suma de los coeficientes. Es la raíz real del polinomio  $F(y)$  la que establece estos valores.

El problema surge cuando al hacer la identificación esta relación no se cumple. Al no cumplirse la relación se altera el valor de la raíz real de  $F(y)$  que pasa a ser un polinomio diferente del que se obtuvo a partir del comportamiento estático del sistema, de manera que no se corresponden los valores reales con los que ahora se obtienen. En consecuencia, la identificación de los coeficientes  $a$  y  $b$  es buena pero el polinomio  $F(y)$  no es el que se ajustó y no se comporta igual que éste, y el resultado es que el sistema así identificado no sirve para simular el comportamiento del sistema real.

Intentando resolver este problema, se trató de conseguir que los coeficientes  $a$  y  $b$  y el factor  $k$  cumplieran la condición impuesta por  $F(y)$ . Para ello, se incluyeron en el identificador de mínimos cuadrados dos igualdades más, una para los coeficientes  $a_i$  y otra para los coeficientes  $b_i$  de manera que se cumpliera la restricción impuesta por  $F(y)$ . Se realizaron mínimos cuadrados ponderados para que estas dos restricciones tuvieran suficiente peso a la hora de calcular los coeficientes.

Sin embargo, el resultado que se obtuvo tampoco fue satisfactorio, debido a que al forzar a los coeficientes a que su suma tomara unos ciertos valores la adecuación a los datos de los experimentos era peor. La ventaja que suponía la adecuación al verdadero  $F(y)$  se perdía por la peor adaptación a los valores de los experimentos.

Se decidió finalmente abandonar este modelo que no ofrecía resultados útiles.

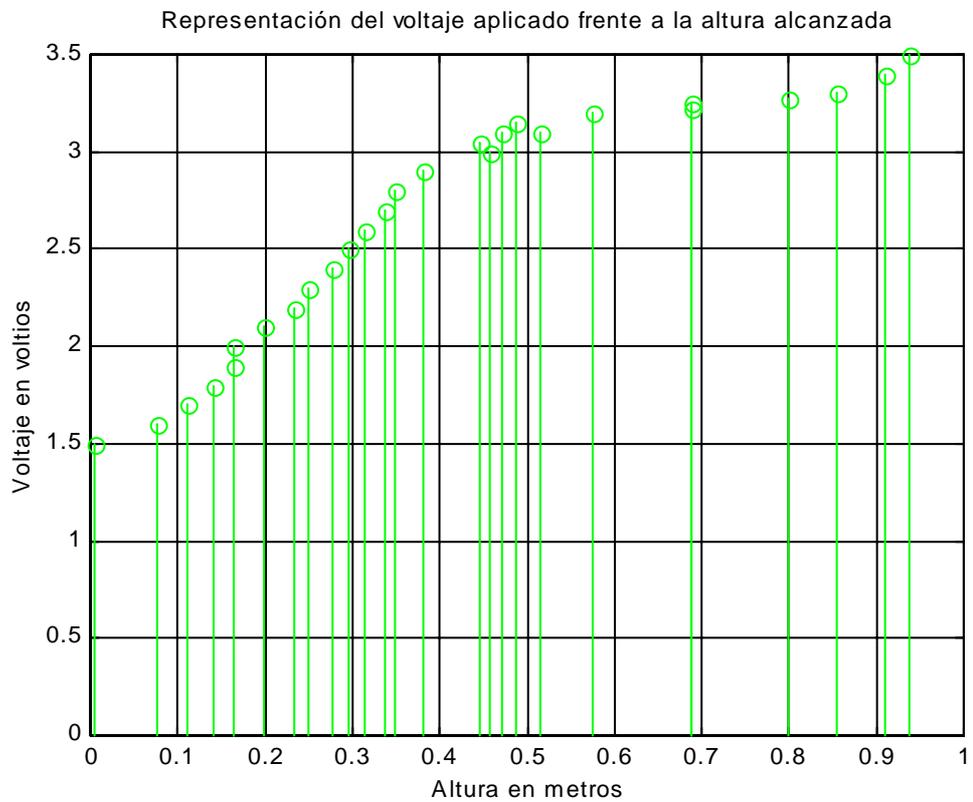
### **3.5 DIVISIÓN EN ZONAS DE TRABAJO**

Se ha visto en apartados anteriores la dificultad de ajustar un modelo al comportamiento del sistema debido al alto grado de no linealidad que presenta, y que hace que la identificación directa por mínimos cuadrados no sea posible.

También se ha visto un intento de tratar la no linealidad modelándola como un polinomio cuya variable es la altura, o sea, la señal 'y'. Este intento no ha dado los resultados deseados debido a la dependencia de la calidad de este ajuste polinomial de la no linealidad con las raíces del polinomio, y que al variar en un poco el valor de la raíz real de dicho polinomio, éste dejaba de servir como aproximación adecuada para modelar la no linealidad.

Ahora lo que se va a hacer es dividir todo el rango en que puede variar la señal 'y', altura de la plataforma, en zonas de trabajo. Al reducir el intervalo de variación de 'y' es de esperar que el efecto de la no linealidad sea menos acusado, y sea posible ajustar un modelo lineal que valga para una zona en particular.

Para dividir en zonas de trabajo es útil volver a la gráfica que representaba el comportamiento estático del sistema. Dicha gráfica era la siguiente:



Gráfica 3-16

En esta gráfica existen dos zonas bastante diferenciadas.

La primera zona es la que va desde la altura nula hasta una altura de unos 0.5 metros. En esta zona los puntos que representan la altura alcanzada en estático para un valor dado de la señal de control siguen una línea prácticamente recta, en especial en el intervalo comprendido entre los 0.1 metros y los 0.4 metros. El hecho de que los puntos sigan una recta significa que el sistema en este intervalo es casi lineal, y es más lineal en la medida en que más se aproxime a una recta. Resulta factible intentar ajustar un modelo lineal para esta zona.

Dentro de esta zona la parte inferior, por debajo de 0.1 metros de altura, no admite ningún modelo, como ya se señaló en su momento, por la existencia allí de lo que se denominó una zona de succión.

La segunda zona comprende la parte derecha de la gráfica y es la que abarca desde los 0.5 metros hasta el límite superior del tubo. En esta zona la curva que dibujan los puntos no es una recta ni se puede aproximar por una recta. Es una zona claramente no lineal. Aquí no es posible utilizar un modelo lineal y se tendría que pensar en otro tipo de modelado.

Por tanto, lo que se ha hecho ha sido dividir el intervalo total en dos zonas de trabajo; la zona inferior, para la que usaremos un modelo lineal y la zona superior que en principio no se estudiará.

Las dos zonas son aproximadamente igual de grandes, sin que pongamos una frontera definida entre las dos. Cuando se obtenga un modelo para la zona inferior se planteará hasta que altura alcanza la validez del modelo.

### 3.6 AJUSTE EN ZONA INFERIOR

La zona inferior abarca alrededor de cincuenta centímetros de los noventa y cinco totales del tubo. La ventaja que presenta es que aquí el sistema es menos no lineal y se presta al ajuste de un modelo lineal.

Si expresamos este modelo lineal con ecuaciones:

$$y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} - a_2 \cdot y_{k-2} - \dots - a_n \cdot y_{k-n} + b_0 \cdot u_{k-1-d} + b_1 \cdot u_{k-2-d} + \dots + b_m \cdot u_{k-m-1-d} + c$$

en donde el término 'c' incluye el efecto del peso del disco. Cuando se haya hecho la identificación puede eliminarse éste término usando como señal 'u' del modelo

$$U = -\frac{c}{\sum_0^m b_i}$$

no la señal de control, sino la señal menos un término constante que vendrá dado por :

quedando el modelo como:

$$y_k = -a_1 \cdot y_{k-1} - a_2 \cdot y_{k-2} - \dots - a_n \cdot y_{k-n} + b_0 \cdot (u_{k-1-d} - U) + b_1 \cdot (u_{k-2-d} - U) + \dots + b_m \cdot (u_{k-m-1-d} - U)$$

La ventaja de poner el modelo en esta forma se verá en el apartado referido al control predictivo.

Para realizar la identificación y posteriormente la simulación se implementaron los siguientes programas en MATLAB:

---

identif2.m: Sirve de interfaz para facilitar la introducción de los datos y la presentación de los resultados mediante menús y gráficas.

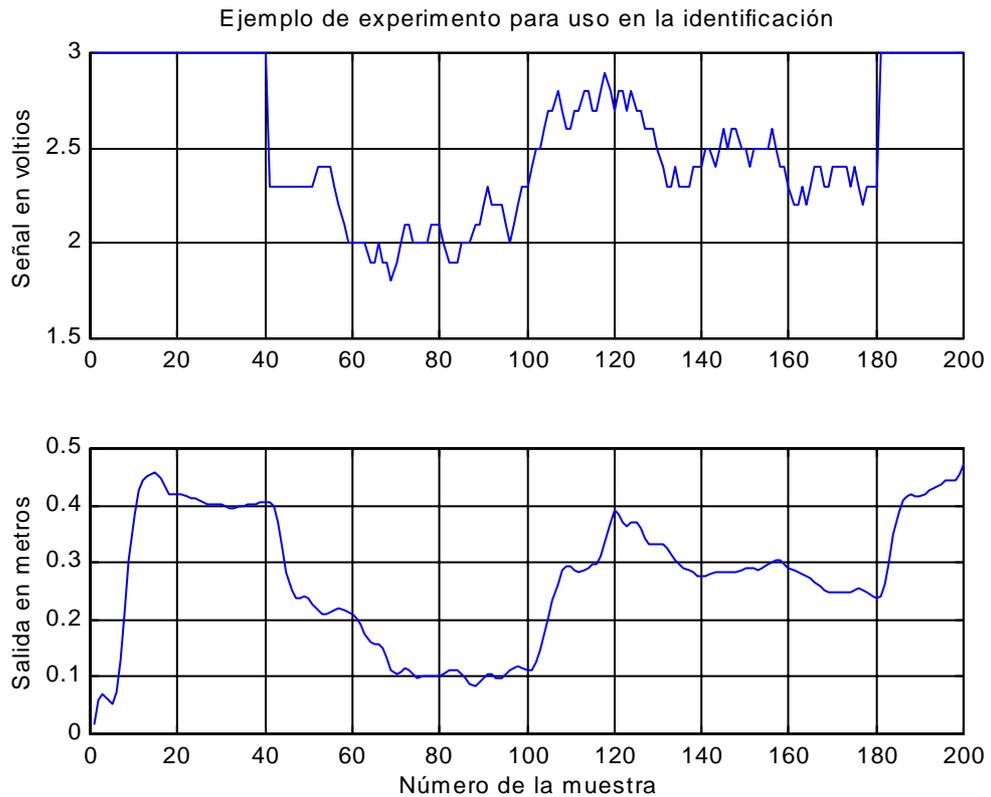
mincuad2.m: Realiza la identificación por mínimos cuadrados para un modelo como el descrito al principio del apartado. Como datos adicionales a los del experimento necesita el retardo 'd', y el número de coeficientes  $a_i$  'n' y de coeficientes  $b_i$  'm'.

gener\_y2.m: Simula el sistema descrito por el modelo usado también por el identificador y toma los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  y  $c$  de los vectores **a**, **b**, **c** y el retardo  $d$  que son los parámetros que se le suministran junto con la señal 'u' de entrada .

Como ya se hizo cuando se intentó identificar usando el modelo con el polinomio, aquí también se realiza un barrido tanto en el número de coeficientes  $a$  y  $b$  como en el retardo  $d$ . Respecto al número de coeficientes se usará el menor número de ellos que permita una buena simulación del comportamiento del sistema, con el objeto de conseguir un modelo lo más sencillo posible.

Los experimentos que se realizaron con objeto de conseguir datos para identificar un modelo para la zona inferior fueron equivalentes a los que se habían realizado para la identificación con el modelo no lineal. La única diferencia es que aquí los límites en los que varía la señal 'u' son 1.7 voltios de límite inferior y 3.2 voltios de límite superior, con un salto  $\Delta u$  de 0.1 voltios.

Como ejemplo de experimento se presenta la gráfica número ¿? en la que se representan la señal 'u' que se ha aplicado y la señal 'y' correspondiente que se midió.



Gráfica 3-17

Se puede ver que la variación de la altura está entre medio metro como altura máxima y un poco menos de 10 centímetros como altura mínima. El límite inferior para la señal 'u', fijado en 1.7 voltios, impide que la plataforma llegue en algún momento a caer hasta abajo del todo quedándose atrapada en la zona de succión.

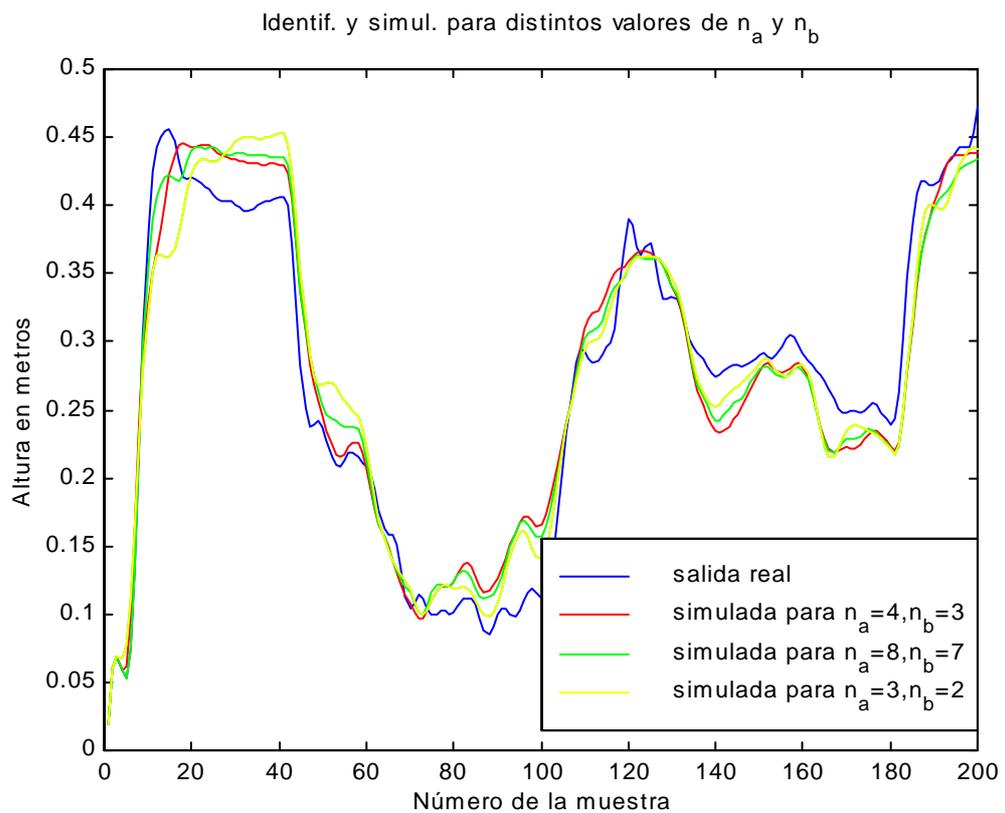
Se realizaron diecisiete experimentos análogos a éste para tener una cantidad elevada de datos que introducir al identificador. Dado que la duración de cada experimento está limitada por la memoria que reserva el programa para guardar los datos, es necesario hacer varios experimentos y luego concatenar los datos de cada uno para introducirlos al identificador. Para que no existan discontinuidades entre los datos de un experimento y los del siguiente lo que se hizo fue que tanto al principio como al final de cada experimento se fijaba la señal 'u' a un valor de tres voltios de manera que el sistema evolucionaba hasta un punto fijo en que se quedaba estacionario. Esto permite que la altura de la plataforma al final de un experimento y al principio del

siguiente sea aproximadamente la misma pues en ambos casos debe ser la altura que alcanza la plataforma en estado estacionario para una entrada de tres voltios.

Gracias a esto se pudo realizar una identificación con mínimos cuadrados con una cantidad suficiente de puntos.

La identificación se realizó sin problemas.

A continuación se muestra una gráfica con el resultado de la simulación con los parámetros resultantes de diferentes identificaciones, para el mismo experimento cuya gráfica se representó antes.



Gráfica 3-18

En los tres casos el retardo se ha considerado nulo.

De la forma de las gráficas se pueden hacer estos razonamientos.

Primero, tomar más términos no significa un ajuste mejor, dado que el sistema tiene pequeñas variaciones en el tiempo y si se ajusta mucho el modelo para un determinado experimento, puede resultar que se comporte peor para otro experimento.

Segundo, el modelo ajusta bastante bien con pocos coeficientes tanto de  $a$  como de  $b$ , lo que significa que con un modelo sencillo es suficiente.

Tercero, el modelo presenta las mayores discrepancias con la realidad en las zonas donde la señal 'y' se mantiene estacionaria durante un tiempo. Esta discrepancia entre la simulación y la realidad es inevitable porque en estacionario la altura alcanzada depende únicamente de la señal 'u' que se aplica y de la relación lineal que existe entre 'u' e 'y' a través de los coeficientes. Es decir si representamos en una gráfica la señal 'u' que hay que aplicar frente a la altura que se pretende alcanzar se tiene que la curva descrita es una recta. Como ya se vio en el apartado anterior esto es relativamente cierto para la zona inferior en la que estamos trabajando, pero no es totalmente cierto. En realidad el sistema no es totalmente lineal y de ahí proviene esta discrepancia entre el valor que se obtiene de la simulación y el valor real.

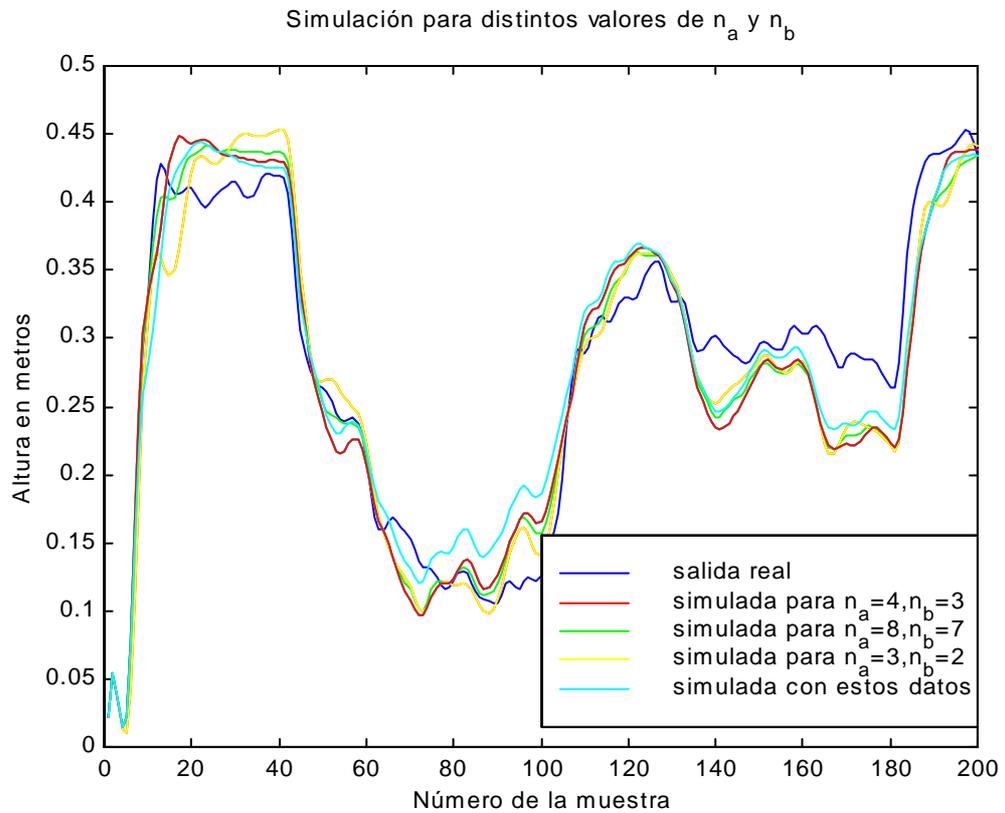
Cuarto, las simulaciones no son muy buenas, pero hay que tener en cuenta que el objetivo del modelo es que proporcione una estimación válida del comportamiento del sistema al cabo de poco tiempo. Es decir, conocido el valor real de las 'y' pasadas poder estimar las 'y' futuras para un espacio relativamente corto de tiempo. No se pretende que el modelo simule el comportamiento del sistema perfectamente, porque además eso es imposible pues este sistema varía ligeramente sus parámetros con el tiempo.

Cabe preguntarse en qué medida es aceptable la identificación que se ha hecho. Puede ocurrir que el modelo obtenido al tratar de ajustarse a todos los datos lo único que consiga sea ajustarse mal a todos ellos.

Una manera de comprobar si la identificación ha sido buena es comparar los resultados de simular con el modelo obtenido usando todos los datos disponibles en la identificación con la simulación usando un modelo obtenido con los datos de sólo un experimento. En el segundo caso, el número de muestras que utiliza el identificador es menor y puede esperarse que el ajuste de los parámetros sea más exacto que en el primer caso en que además de a estos datos debe ajustarse a muchas otras muestras procedentes de los demás experimentos.

El modelo obtenido usando los datos de un solo experimento debe reproducir luego mejor el comportamiento real que el modelo que usa todos los datos.

La gráfica número 3-19 Sirve para hacer la comparación. En esta gráfica aparece en azul el comportamiento real del sistema durante el experimento, en rojo, verde y amarillo aparece la simulación usando el modelo “general” sacado a mediante mínimos cuadrados usando todos los datos disponibles. En cyan se representa la simulación usando el modelo obtenido de la identificación usando como datos sólo las muestras de este experimento. En éste último caso el número de coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  es de 4 y 3 respectivamente.



Gráfica 3-19

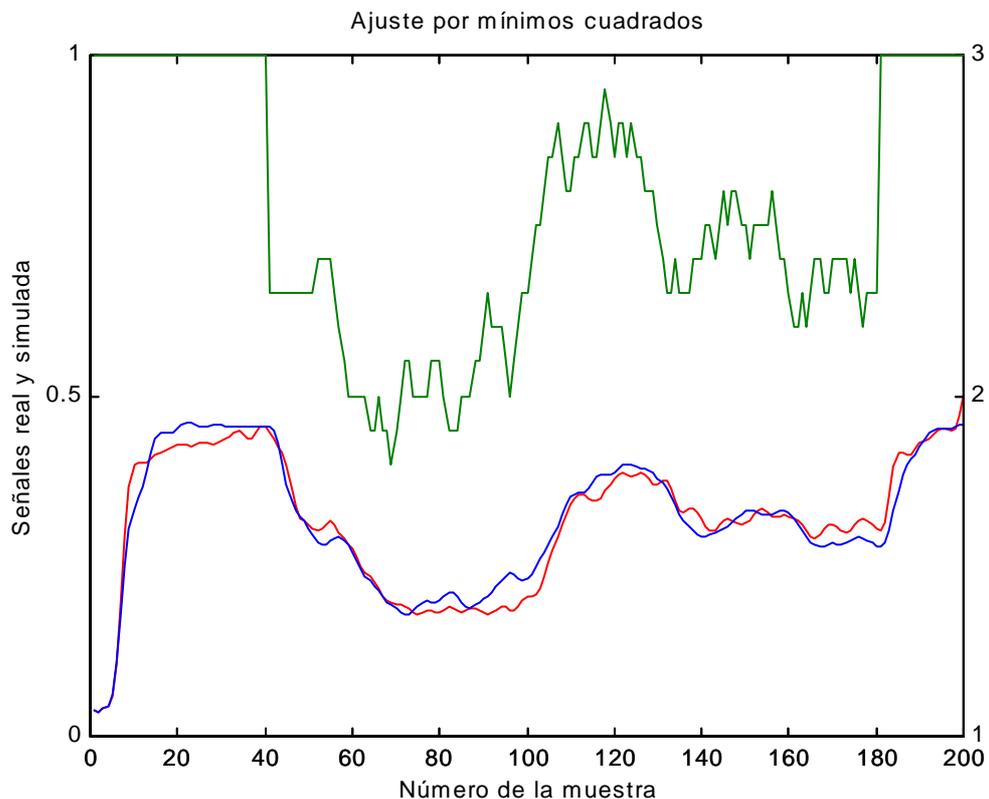
De forma inmediata se comprueba que no existe diferencia apreciable entre el modelo más “general” y el modelo más “específico” lo que indica que el modelo obtenido mediante el uso de todos los datos es un modelo que aproxima bien el comportamiento del sistema, es decir, que el comportamiento del sistema no es diferente en cada experimento sirviendo el mismo modelo para ajustar el comportamientos a las muestras de todos los experimentos. En otras palabras, el sistema es relativamente invariante en el tiempo y la incapacidad del modelo para reflejar exactamente el comportamiento del sistema se deben a la no linealidad del sistema y a los errores en las medidas.

En conclusión, es posible ajustar un modelo lineal al sistema que sea útil para predecir el comportamiento del sistema conociendo las salidas pasadas y las entradas pasadas y futuras.

Naturalmente, al ser un modelo lineal, ya no tiene sentido considerar un filtro que elimine las componentes a partir de una cierta frecuencia del espectro de la señal 'u' de entrada, puesto que si existe algún filtro quedaría englobado dentro del propio modelo.

La siguiente gráfica presenta otra comparación entre la señal real obtenida de un experimento y la señal simulada con el modelo identificado por mínimos cuadrados.

La señal real aparece en rojo, las señal simulada en azul y la señal de control en verde. La escala de unidades para las dos primeras es la de la izquierda y para la tercera señal es la de la derecha. La primera escala está en metros y la segunda en voltios.



---

### Gráfica 3-20

Se puede ver que el comportamiento de la simulación es muy parecido al de la señal real. Es importante recordar de nuevo que no se pretende tener un modelo que simule perfectamente el sistema, sino sólo que sirva para predecir el comportamiento futuro de éste hasta un cierto, y limitado, horizonte temporal.

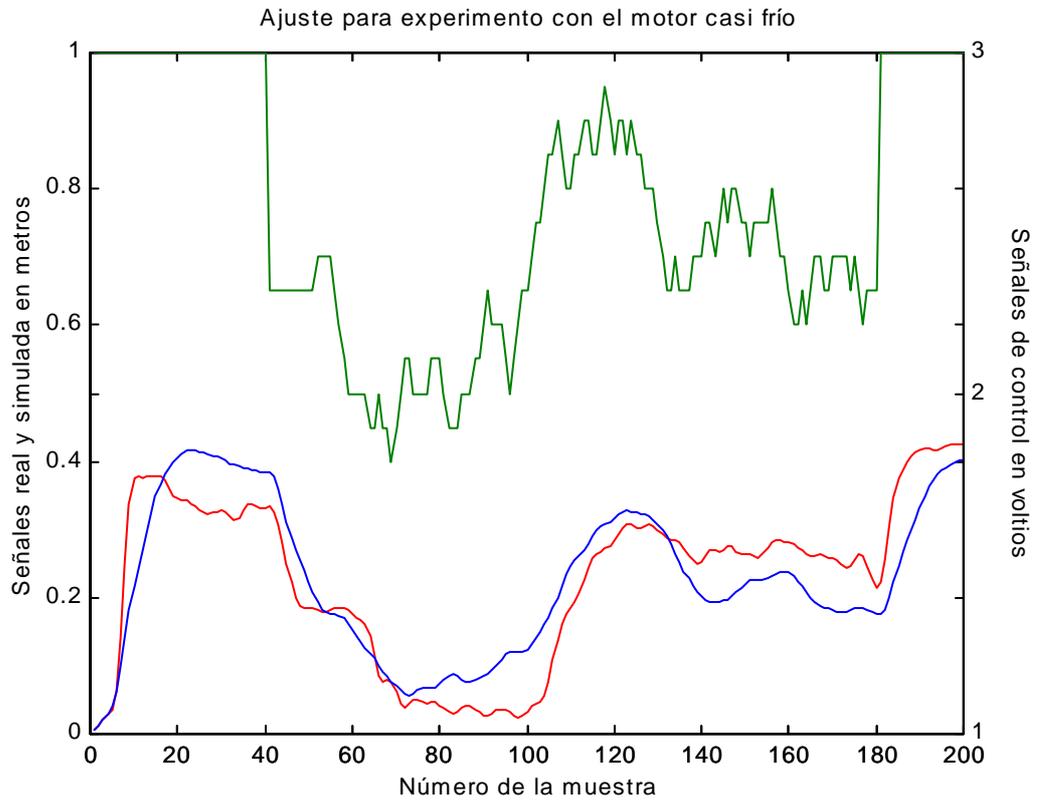
Si se observa la leyenda del eje de abscisas se verá que la simulación llega hasta las doscientas muestras. Con el período de muestreo escogido, de 0.852 segundos, significa predecir el comportamiento del sistema hasta dentro de más de 150 segundos, o sea, más de dos minutos y medio. En ningún caso se llegará a usar el modelo para predecir más allá de pocos segundos, luego es de esperar que las predicciones sean más exactas reduciéndose la discrepancia entre predicción y realidad al referirse estas predicciones a un futuro mucho más de cercano que esos dos minutos y medio.

Otro aspecto que es importante es si el modelo sirve aún en el caso en que el experimento se haga con el motor casi en frío. Ya se ha comentado que en este caso el comportamiento del sistema varía de forma apreciable, y puede ser que el modelo no valga. Naturalmente es imposible conseguir un modelo fijo que simule el comportamiento del sistema con el motor frío y con el motor caliente puesto que tienen comportamientos diferentes para una misma señal de control. Lo que si sería de desear es que el modelo ajustase aunque fuera de manera imperfecta al comportamiento del sistema cuando el motor no está aún caliente pero tampoco parte desde el frío.

La gráfica número 3-21 compara la simulación y la realidad para un experimento realizado tras calentar un poco el motor pero sin que lleve todavía mucho tiempo funcionando.

La señal 'u' de control que se ha aplicado es exactamente la misma que en el experimento representado en la gráfica anterior. Es inmediato comprobar de la observación de las dos gráficas que ahora el sistema se comporta de manera ligeramente

diferente ya que la altura que se alcanza en para un mismo valor de la señal de control es menor en el segundo experimento que en el primero.



Gráfica 3-21

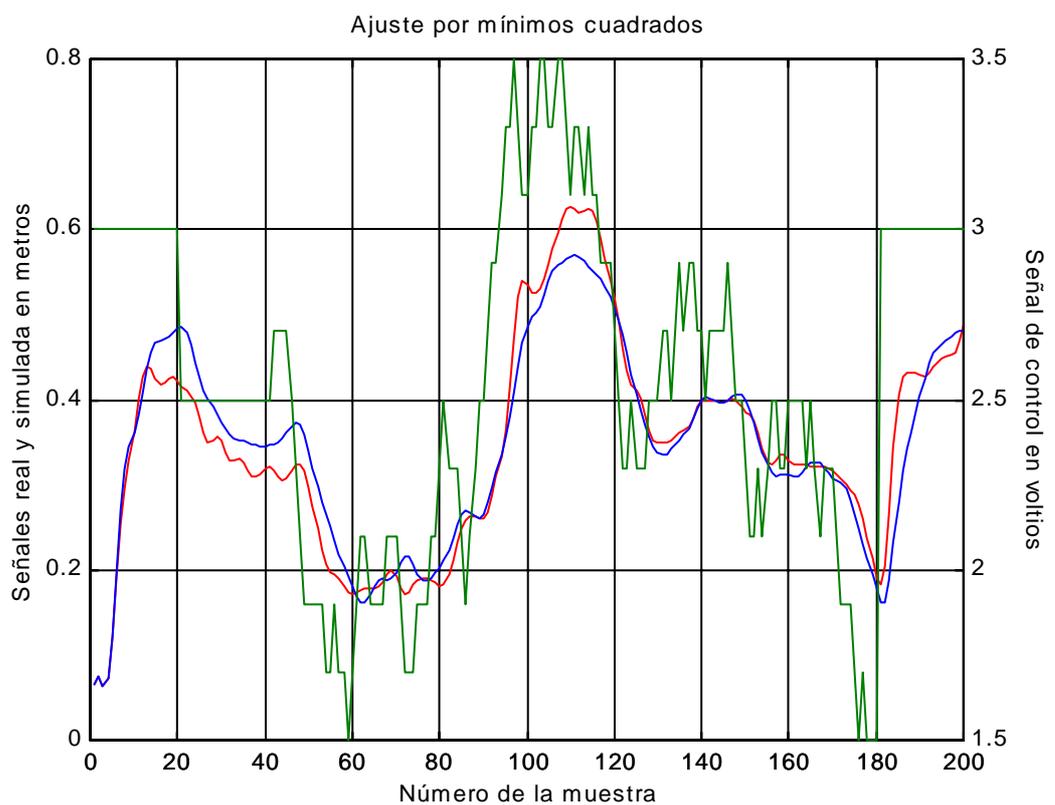
Nótese en particular el cambio en el comportamiento del sistema durante la duración de este segundo experimento. Fijándose en la altura que alcanza la plataforma al principio y al final del experimento, donde en ambos casos la señal de control está fija a tres voltios, se ve como para la parte inicial la altura a la que se estabiliza la plataforma para los tres voltios de 'u' es inferior a los treinta y cinco centímetros, y que en cambio para el intervalo final la altura a que se estabiliza es de más de cuarenta centímetros.

Sirve por tanto esta gráfica para mostrar el efecto del calentamiento del motor en el comportamiento del sistema.

La conclusión es que el modelo tiene sus limitaciones respecto al cambio en los parámetros del sistema. Sin embargo, lo importante aquí es comprobar que la estructura del modelo permita seguir el comportamiento del sistema independientemente de la mayor o menor calidad de este seguimiento.

En cuanto a las limitaciones del modelo la más importante es la que se refiere al límite para el cual un modelo lineal no sirve pues la no linealidad del sistema lo hace inviable. Es posible ajustar un modelo lineal en la zona inferior porque en esta zona el sistema es relativamente lineal. A partir de los cincuenta centímetros de altura la no linealidad del sistema aumenta de manera que el modelo lineal ya no es posible.

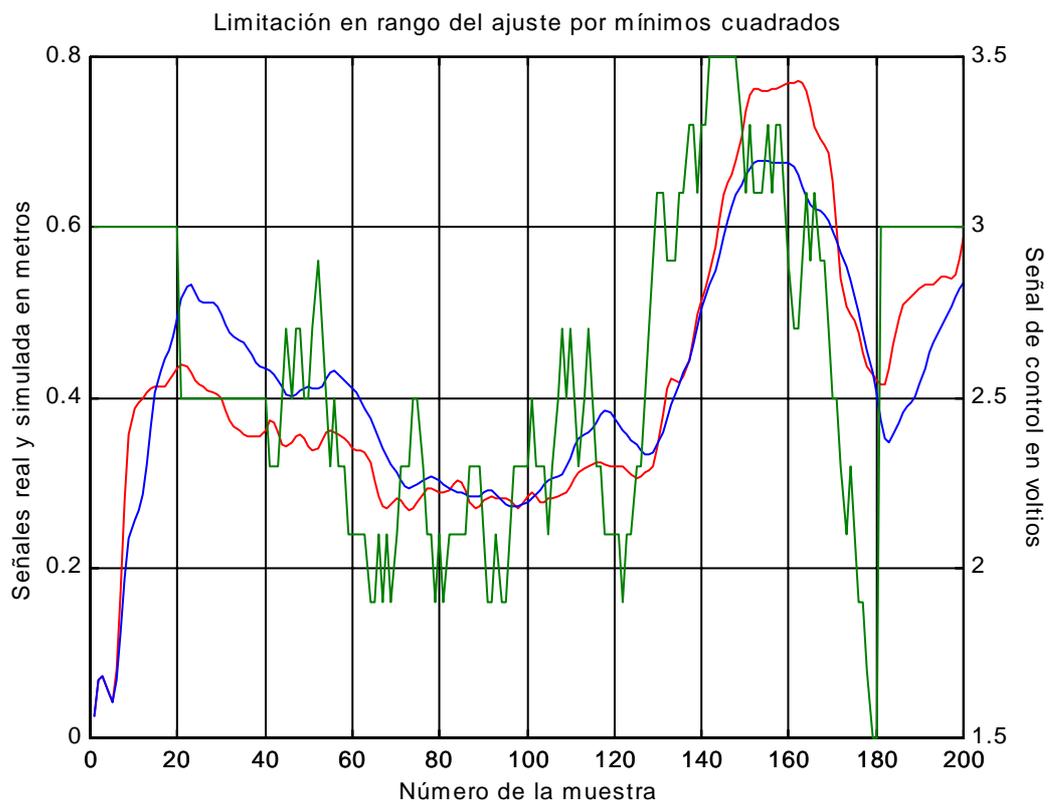
Las gráficas número 3-22 y 3-23, muestran como por encima de los cincuenta centímetros de altura las divergencias entre la simulación y la señal real aumentan, señal de que la validez del modelo se pierde.



Gráfica 3-22

En esta segunda simulación se ha utilizado un modelo en el que los parámetros se han obtenido mediante mínimos cuadrados usando solamente como datos las muestras del experimento con el cual se compara.

Queda claro que al aumentar el rango de variación posible para la señal de control 'u' (cuyos límites están ahora entre 1.5 y 3.5 voltios frente a 1.7 y 3.2 voltios de antes) aumenta también el rango en que se mueve la altura de la plataforma llegando a zonas que son no lineales y donde no un modelo lineal no sirve para simular el comportamiento del sistema.



Gráfica 3-23

---

Podemos concluir que un modelo lineal es viable para una zona del rango total de variación que va desde la altura nula (excluyendo la zona de succión) hasta algo más de cincuenta centímetros, siendo a partir de esta altura cuando el modelo va perdiendo validez hasta que para los alrededores de los sesenta centímetros la no linealidad es demasiado acusada para que el modelo sirva.

Ahora que se ha discutido la validez y la utilidad que puede tener un modelo lineal, se presenta el modelo obtenido y las comparaciones entre las predicciones obtenidas con este modelo y la realidad.

Como ya se analizó en el comienzo del apartado lo más conveniente es tener un modelo con los mínimos parámetros posibles. Se vio también que un modelo con 4 ó 5 coeficientes  $a_i$  y con 2 ó 3 coeficientes  $b_i$  es suficiente para reproducir de forma satisfactoria el comportamiento del sistema.

Igualmente se puede comprobar que el mejor ajuste se consigue suponiendo que el sistema presenta un retardo nulo. Con objeto de no extender demasiado este apartado se presenta directamente el modelo más simple de los que ajustaban satisfactoriamente, que es el que se ha usado en las simulaciones de las gráficas anteriores.

En concreto, el modelo que se escogió es un modelo con cuatro coeficientes  $a_i$  y con dos coeficientes  $b_i$  y un retardo nulo.

El modelo es éste:

$$y_k = -1.5278 \cdot y_{k-1} + 0.6912 \cdot y_{k-2} + 0.0132 \cdot y_{k-3} - 0.1059 \cdot y_{k-4} \\ + 0.0154 \cdot u_{k-1} + 0.0071 \cdot u_{k-2} - 0.0352$$

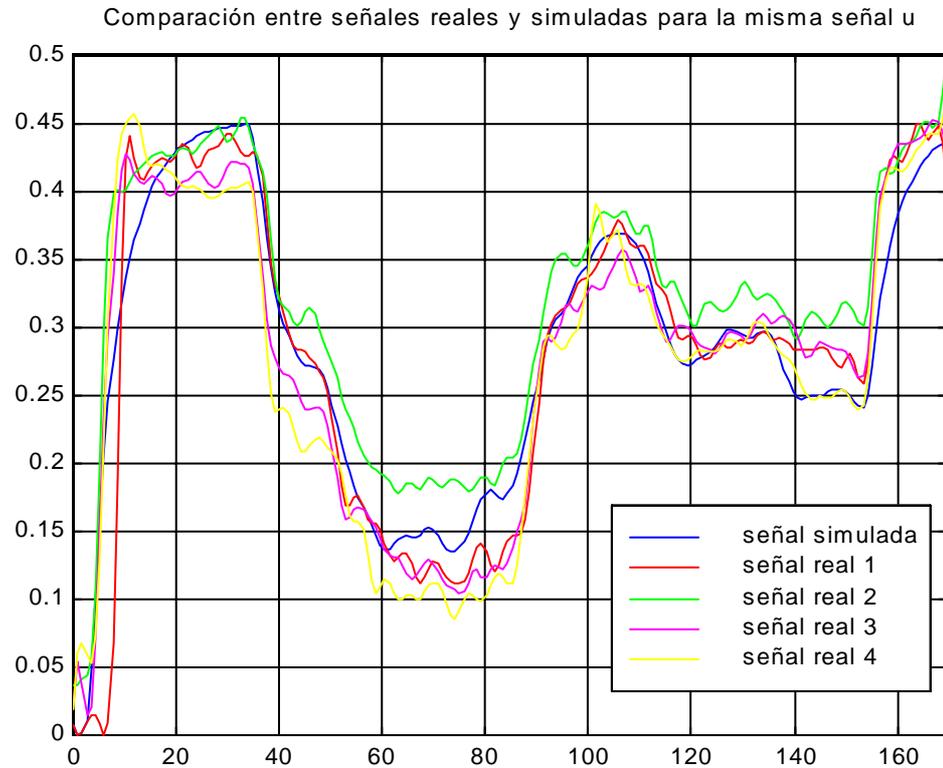
Es interesante señalar cómo el término constante es negativo, (-0.0352), algo que era de esperar puesto que representa el efecto del peso de la plataforma, que tiende a bajar la plataforma hacia abajo.

También es normal que los coeficientes que multiplican las muestras de la señal ‘u’ sean tan pequeños pues hay que contar que ‘u’ se mida en voltios en un rango de entre 1.5 y 3.2 voltios, y que ‘y’ se mide en metros con un rango entre 0 y 0.5 metros, es decir, hay un “coeficiente” entre escalas de, cuando menos,  $0.5/3.2$  que afecta a estos términos. Evidentemente si se midiese ‘y’ en centímetros, los coeficientes  $b_i$  serían 100 veces más grandes.

Este modelo se obtuvo usando ocho experimentos de doscientas muestras cada uno, lo que hace 1600 muestras suministradas al identificador por mínimos cuadrados, que con el tiempo de muestreo de 0.852 segundos que se está usando significa más de veinte minutos de funcionamiento del sistema. Esta cantidad de muestras proporciona una relativa seguridad respecto a la validez del modelo puesto que este tiempo es suficientemente largo como para que se recoja bastante bien la dinámica del sistema.

La gráfica número 3-24 sirve para comparar la salida que se obtiene simulando el sistema con el modelo anterior con la salida obtenida en cuatro experimentos diferentes, usando en todos ellos la misma señal de entrada.

Se ve claramente que existen más diferencias entre algunos experimentos que entre la simulación y los experimentos, y que el modelo es representativo del sistema en la medida en que éste puede admitir un modelado, ya que su comportamiento puede variar ( aunque no mucho, como ya se discutió en apartados anteriores)



Gráfica 3-24

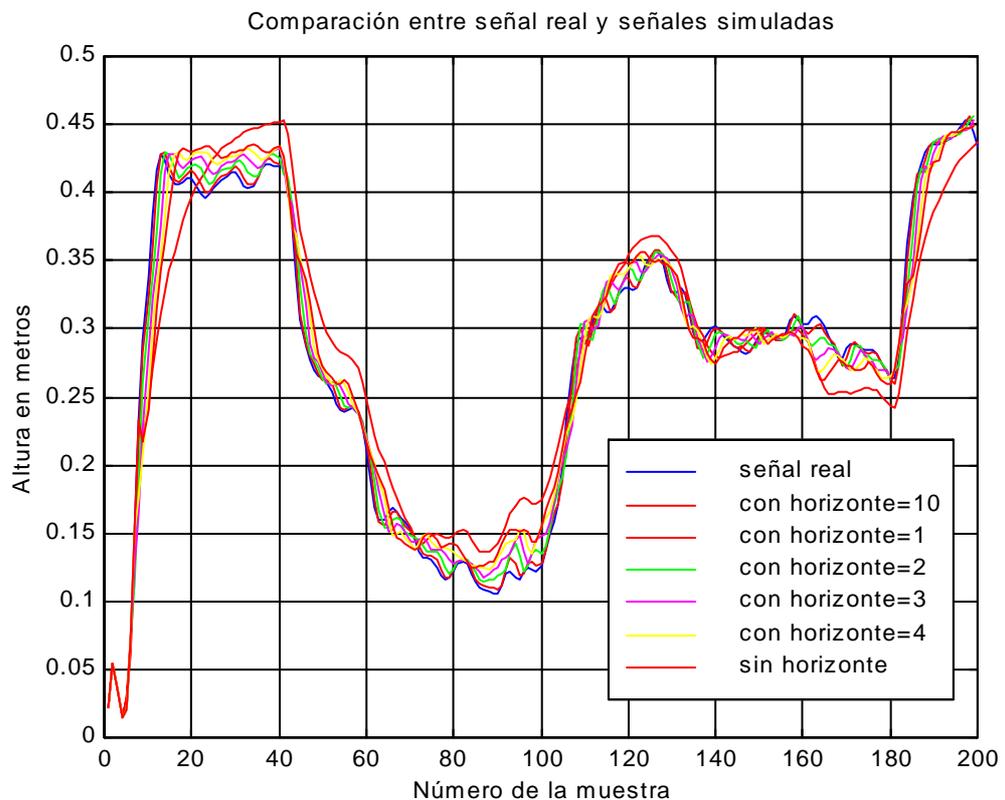
A continuación se presenta el comportamiento del modelo como predictor, es decir, la validez del modelo para predecir el comportamiento del sistema conocidas las entradas y salidas anteriores y las entradas futuras.

Para ello, se creó un programa en MATLAB que dado un número entero 'n' como parámetro (además de los datos sobre las señales 'u', 'y' y sobre el modelo) calculaba las salidas previstas para el sistema dentro de n períodos de tiempo supuestas conocidas 'u' e 'y' anteriores y las n muestras de 'u' siguientes al instante en que realiza la predicción.

De esta manera, para  $n=4$ , el programa calcula en cada índice como será la salida dentro de cuatro muestras, usando como datos, además del modelo, todos los datos sobre 'u' e 'y' anteriores al valor del índice y los datos de 'u' desde el valor del índice

hasta el valor del índice más 4. El índice va creciendo en una unidad hasta calcular todos los puntos.

La gráfica número 3-25 presenta la comparación entre un experimento a las simulaciones realizadas para distintos horizontes temporales.



Gráfica 3-25

En azul aparece la señal real, y en la leyenda se identifican las otras señales. De entre ellas las que tienen como horizonte valores de uno a cuatro siguen con fidelidad a la señal real, pero como es lógico a medida que aumenta el horizonte sobre el que se hace la predicción ésta es peor y por eso la señal amarilla, obtenida para un horizonte de cuatro, es menos parecida a la señal real que roja, obtenida para horizonte igual a uno.

La segunda conclusión que se puede obtener es que efectivamente el modelo funciona como predictor, al menos hasta un cierto horizonte, que dependerá de la exactitud con que se desee predecir el comportamiento del sistema.