CAPÍTULO 3: ESTIMACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR DE BIT MEDIANTE LOS MÉTODOS DE MONTE CARLO Y MUESTREO ENFATIZADO

1. Estimación de la probabilidad de error (BER) de un sistema digital de comunicaciones

En un sistema de comunicaciones, la medida de desempeño o de funcionamiento relevante es siempre una medida relacionada con el comportamiento frente al error de dicho sistema [JERU92b].

Se plantea el problema de la estimación de la **BER** de un sistema de comunicaciones como la búsqueda de la producción media de errores en un sistema de comunicaciones donde se transmiten símbolos, de entre un total de M, siendo $M = 2^k$. De este modo, si N es el número de símbolos transmitidos, y $n(N)$ es el correspondiente número de errores observados, entonces:

$$p = lim_{N \to \infty} \frac{n(N)}{N} \tag{1}$$

es la probabilidad de error de símbolo para $M > 2$ o la probabilidad de error de bit si $M = 2$. En este último caso se habla de *tasa de error de bit* (**BER**, *Bit Error Rate*). De cualquier manera, si M representa un total de 2^k símbolos, hay una probabilidad de error de bit equivalente para la probabilidad de error de símbolo obtenida.

En este capítulo se examinarán dos métodos de simulación basados en aproximaciones para la estimación de la **BER**:

📖 1. Simulación de **Monte Carlo.**

📖 2. **Muestreo Enfatizado** o Importance Sampling.

Para el caso de un sistema de comunicaciones binario ($M = 2$) afectado por un ruido, el estudio de la probabilidad de error de bit está basado en el estudio de las funciones de densidad de probabilidad de ambos símbolos, "cero" y "uno", en el receptor del sistema de comunicaciones y con respecto a un umbral de decisión V_T. El ruido se considerará que es del tipo aditivo, blanco gaussiano.

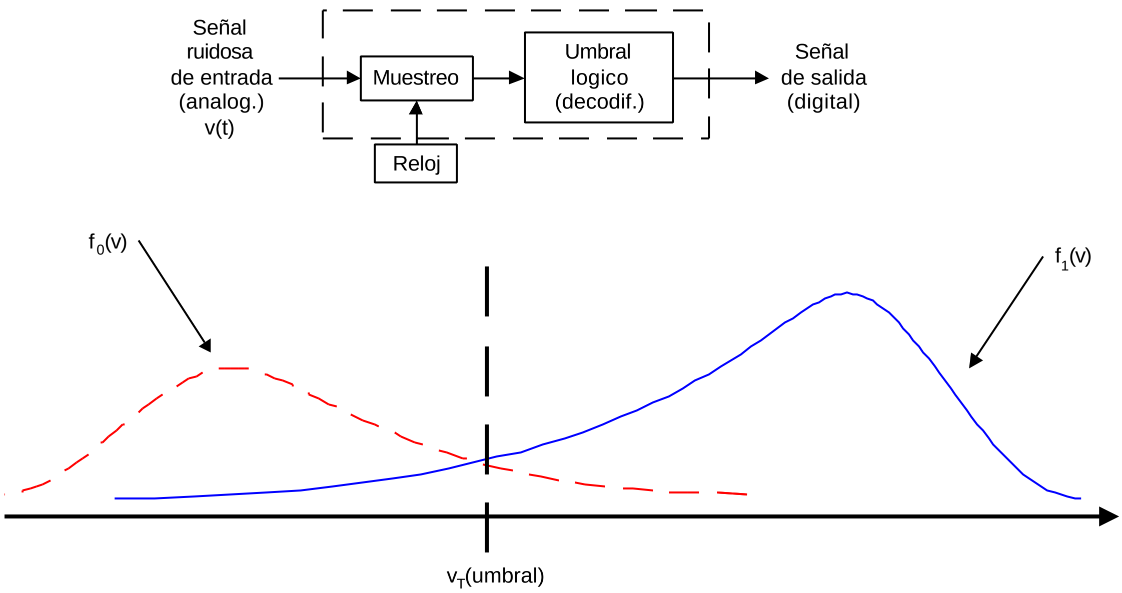

Figura 1.Ilustración de algunos términos básicos en la discusión de la estimación de la BER. (arriba) Mecanismo típico de decisión en una transmisión digital, (abajo) funciones de densidad de probabilidad hipotéticas

Como se ve en la **figura 1**, las funciones densidad de probabilidad (fdp) no son idénticas necesariamente, pues se pueden ver afectadas de distinta manera. Se puede decir que ha ocurrido un error cuando un “cero” es enviado y en el receptor hay un nivel de decisión suficiente para exceder el umbral V_T, o cuando se envía un “uno” y las perturbaciones producidas por el ruido hacen caer la decisión, en el receptor, por debajo del umbral.

La probabilidad de ocurrencia de estos errores se puede calcular fácilmente de forma teórica :

$$P\left[error/\text{"}uno\text{"}\right]=p_1=\int_{-\infty}^{V_T} f_1(v)\,dv=F_1(V_T) \qquad (2)$$

$$P\left[error/\text{"}cero\text{"}\right]=p_0=\int_{V_T}^{\infty} f_o(v)\,dv=1-F_0(V_T) \qquad (3)$$

con lo que el promedio de la probabilidad de error es

$$p=\pi_1\,p_1+\pi_2\,p_2 \qquad (4)$$

donde π_1 y π_2 son las probabilidades de ocurrencia que tienen los símbolos “cero” y “uno” en el emisor del sistema de comunicaciones.

1.1. Método de Monte Carlo

Este método no es más que la representación de una secuencia de pruebas de *Bernoulli* sobre un determinado proceso aleatorio. En la práctica, estas pruebas se traducen en el estudio de la transmisión de una secuencia de bits de información a través de un sistema de comunicaciones. De los resultados obtenidos, se cuentan los errores y se divide por el número total de pruebas realizadas. La implementación de estas pruebas de *Bernoulli* sobre un sistema de comunicaciones se podría ver como la comparación de dos secuencias binarias. A continuación, se propone un esquema gráfico de un sistema de comunicaciones que emplea el método de estimación de la **BER** de *Monte Carlo*.

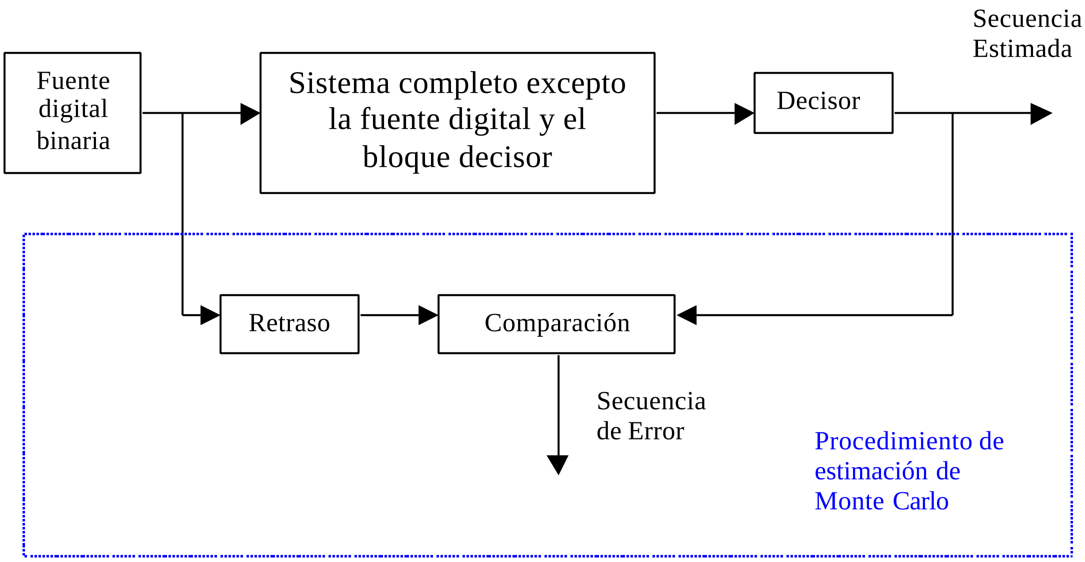

Figura 2.Método de Monte Carlo

Como se puede ver en la **figura 2**, no es necesario modificar en ningún momento el sistema de comunicaciones. Lo único que hay que hacer es comparar la secuencia estimada a salida del sistema de comunicaciones con la secuencia original producida por la fuente digital binaria. El bloque de *retraso* introducido es muy importante pues responde a la sincronización de las secuencias de entrada y salida del sistema, lo cual permite compararlas correctamente.

Se puede simplificar el esquema anterior con el fin de facilitar el entendimiento del funcionamiento del método **MC** **[BEAU90]**. Así, se considerará un sistema binario equivalente en banda base como el que se presenta en la figura siguiente:

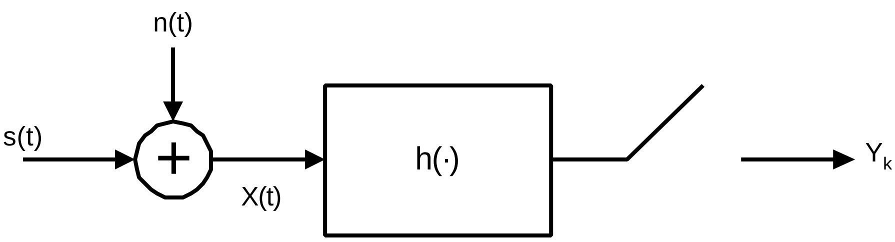

Figura 3.Esquema de un sistema de comunicaciones simplificado

En el esquema anterior, la señal transmitida, *s(t)*, se ve afectada por un ruido aditivo blanco gaussiano, *n(t)*, produciendo como resultado una señal ruidosa, *X(t)*, que será la que se reciba en el receptor del sistema de comunicaciones. La señal *s(t)* se podría representar matemáticamente así:

$$s(t) = \sum_i a_i \; p(t - iT) \qquad (5)$$

donde la función *p(t)* es una función rectangular igual a uno en el intervalo [0,*T*] y cero en el resto. La secuencia de bits de entrada es $\{a_i\}$, donde $a_i = \pm A$ con igual probabilidad, y con una duración de bit igual a *T*. En cuanto al proceso que representa al ruido, éste tiene una varianza σ^2, la cual le viene dada por la relación señal a ruido deseada a la entrada del receptor. En el esquema anterior se considera también un sistema *h(·)* sin memoria, cuya entrada es la secuencia de valores muestreados de *X(t)*, representados por X_k. La salida de este sistema es la secuencia Y_k.

La probabilidad de error de bit (**BER**) para este esquema se puede estimar mediante el método **MC**. Las muestras, Y_k, que se encuentran a la salida del sistema *h(·)*, y cuya tasa de bit es 1/*T*, son comparadas con cierto umbral de decisión, con el fin de determinar la secuencia de bits recibida. Esta secuencia de bits se compara con la secuencia de bits transmitida, y se cuentan los errores. De esta forma la tasa de bit de error estimada sobre la base de *N* pruebas, es decir, sobre una transmisión de *N* bits, es:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_i \qquad (6)$$

donde Z_i es una variable aleatoria, que toma el valor uno si el bit *i*-ésimo recibido es erróneo, y el valor cero si es recibido correctamente. De esta forma:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & con\ probabilidad\ P_e \\ 0, & con\ probabilidad\ 1 - P_e \end{cases} \qquad (7)$$

Se puede comprobar que *P* es un estimador insesgado de la probabilidad de error P_e, pues

$$E[P] = E[Z_i] = P_e \qquad (8)$$

con lo que el valor esperado de Z_i se puede expresar como

$$E[Z_i] = \int_I f_x(x)\,dx \qquad (9)$$

donde $f_x(x)$ es la fdp del proceso de entrada, e I es la región de la variable de entrada X que supone un evento de error.

1.2. Muestreo Enfatizado

El muestreo enfatizado (**IS**) es una variante del método de simulación de *Monte Carlo*. Está fundamentado en la alteración de las propiedades estadísticas de los procesos de ruido, de forma que lleven al sistema a la producción de un mayor número de errores por unidad de tiempo, y por tanto a una probabilidad de error de bit mayor **[ZOU93]**. Puesto que la producción de este mayor número de errores se hace de una forma conocida, es posible reescalar la nueva probabilidad de error para conseguir una estimación adecuada de la probabilidad de error de bit real. La consecuencia inmediata de la utilización de este método de simulación es la reducción del tiempo de simulación y de los recursos computacionales. Para más información ver **[DUBI]**.

Para el ejemplo de la **figura 3** del método de **MC**, en el cual una señal *s(t)* era afectada por un ruido aditivo, blanco gaussiano, *n(t)*, para producir una señal ruidosa *X(t)*, el método **IS** consiste en modificar sólo las características del proceso de ruido *n(t)*. Normalmente, y como ya se ha hecho en este proyecto, estos procesos ruidosos se suponen que son del tipo gaussiano. Se supondrá, por tanto, que el ruido es del tipo gaussiano de media cero, y que viene representado por una distribución normal $N(0,\sigma^2)$. Puesto que este tipo de distribuciones están definidas por dos parámetros, media y varianza, las modificaciones de las propiedades estadísticas de estos procesos se pueden hacer tomando dos alternativas:

🕮 Modificando la fdp con el fin de aumentar la varianza, es decir, eligiendo una $f_x^* \in N(0,\sigma^2)$ donde $\sigma_* > \sigma$ .Este método se denomina *Conventional Importance Sampling* o, simplemente, **CIS**. El problema de diseño de este tipo de simulación es cómo elegir la relación σ_*/σ .

🕮 Modificando la media de la distribución del ruido de forma que $\mu \neq 0$, pero no modificando la varianza, es decir, eligiendo una $f_x^* \in N(\mu,\sigma^2)$. Este método se denomina *Improved Importance Sampling* o **IIS**.

Estos dos tipos de **IS** quedan perfectamente recogidos en la siguiente figura:

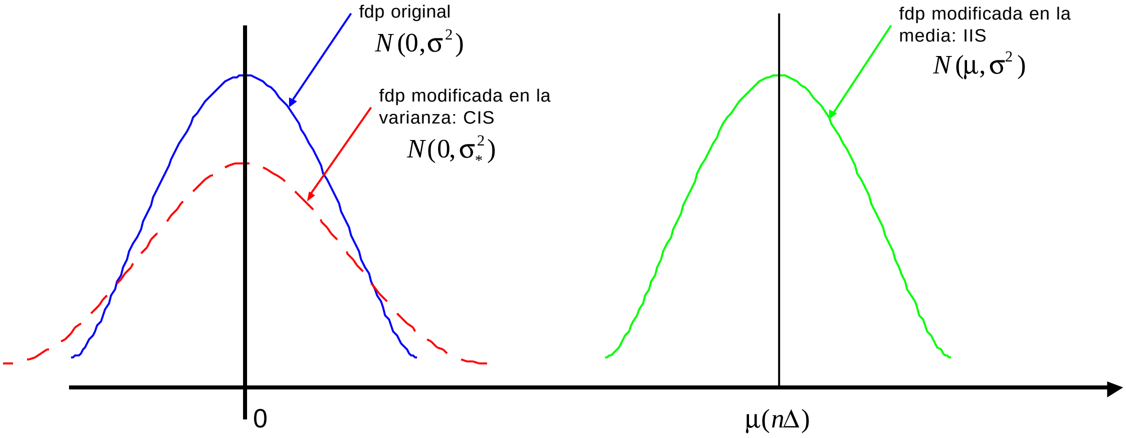

Figura 4.Posibles técnicas de Muestreo Enfatizado

De la misma forma en que se hizo con el método de **MC**, la probabilidad de error de bit se puede conocer mediante un estimador de la misma. Para ello se volverá a emplear el sistema de comunicaciones binario equivalente en banda base. Considérese que se emplea otra fdp $g_x(x)$. Esta nueva fdp será elegida de tal forma que verifique:

$$B(x) = \frac{g_x(x)}{f_x(x)} > 1 \quad para\ x \in I \tag{10}$$

y que con ella los errores ocurran con una mayor frecuencia. Sea también $Z_i'(x)$ una variable aleatoria que toma el valor $1/B(x)$ si ocurre un error, y cero en cualquier otro caso. Entonces:

$$E\left[Z_i^{'}(x)\right]=\int_I \frac{g_x(x)}{B(x)}dx=\int_I f_x(x)\,dx=P_e \qquad (11)$$

Se observa que la fdp $g_X(x)$ resulta de la transformación de la variable aleatoria X. Un estimador P' basado en esta variable aleatoria transformada es

$$P'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^{'}(x) \qquad (12)$$

Se puede comprobar fácilmente, al igual que se hizo en el método **MC**, que P' es un estimador insesgado de la probabilidad de error de bit P_e, pues

$$E[P']=E\left[Z_i^{'}\right]=P_e \qquad (13)$$

Más adelante, en el capítulo 5, y mediante el empleo de los estimadores P y P' vistos para el método **MC** y **IS** respectivamente, se justificará el empleo de las simulaciones **IS** en sistemas de comunicaciones con probabilidades de error del orden de 10^{-6}.

2. Resumen

En este capítulo se da fundamento teórico el estudio de la estimación de la probabilidad de error (**BER**), que se hará en este proyecto, mediante los métodos de *Monte Carlo* y *Muestreo Enfatizado*, y cuyos resultados y conclusiones se encuentran en el capítulo quinto.