2. SIMULACION DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES MOVILES E INALAMBRICAS.

2.1. REPRESENTACION DE SEÑALES Y SISTEMAS EN EL TIEMPO DISCRETO.

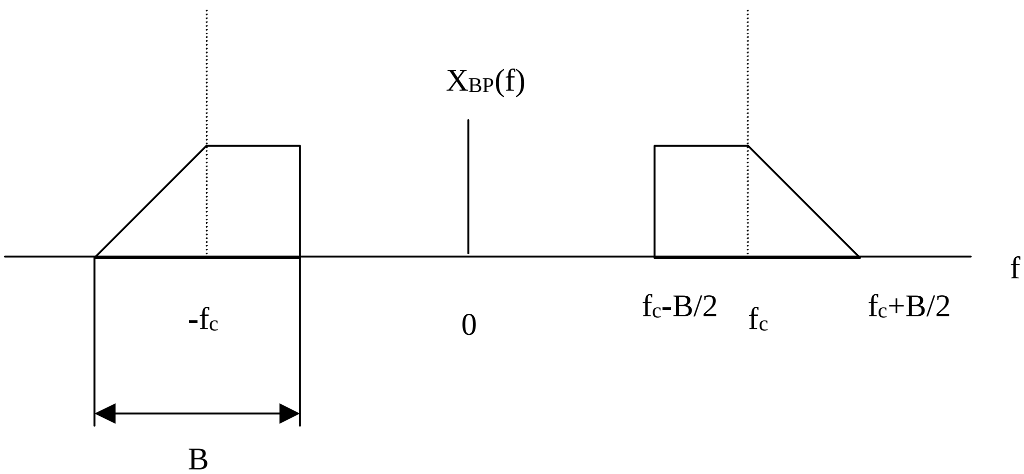
2.1.1. Muestreado e interpolación en simulaciones.

Una vez que tenemos en mente efectuar simulaciones de un sistema de comunicaciones por computador hemos de considerar el hecho de que el estudio que efectuemos sobre el sistema continuo por restricciones de las herramientas de estudio ha de ser discreto. Esto conlleva la discretización tanto de las señales que se ven inmersas en el proceso de la simulación así como las respuesta de los sistemas que actúan sobre las señales. Por esto el tema de la discretización por medio de la toma de ciertos valores de la señal en unos determinados instantes t (instantes de muestreo) adquiere una importancia vital para el buen desarrollo de nuestra simulación ya que establece la frontera entre los sistemas simulados y los sistemas reales. El objetivo es recobrar tan fielmente como sea posible la respuesta de un sistema continuo a partir de una simulación discreta. Esto será posible para señales que estén limitadas en banda si la frecuencia de muestreo es elegida convenientemente. El teorema del muestreo dice:

"Una señal limitada en banda x(t) con X(f)=0 para $|f| \geq f_M$ esta determinada de forma única por sus muestras $x(nT_s)$ de una secuencia en puntos equidistantes t=nT, si $f_s>2f_M$, donde $f_s=1/T_s$. La frecuencia de muestreo $f_s=2f_M$ es conocida como frecuencia de Nyquist."

A partir del teorema de muestreo o de Nyquist sabemos cual debe ser la frecuencia de muestreo de una señal limitada en banda. Sin embargo, en simulaciones se recomienda utilizar de 8 a 16 veces la tasa de Nyquist.

Si el espectro de la señal esta confinada en una banda $f_c - B/2 \leq f \leq f_c + B/2$,es decir, es una señal paso banda una interpretación estricta de teorema nos indicaría una tasa de muestreo de $2f_c + B$ para luego poder reconstruir exactamente la señal muestreada.



Esto conllevaría el tener una tasa de muestreo muy grande comparado con el ancho de banda de la señal. Afortunadamente la frecuencia de muestreo en esto casos solo necesita ser del orden de dos veces el ancho de banda de la señal que transporta la señal en banda a una frecuencia de f_c. En este caso solo necesitamos disponer de 2B muestras por segundo o B muestras complejas por segundo. Esto es posible porque el muestreo a esta frecuencia no conlleva perdida de información ya que en realidad no se produce sobremuestreo efectivo. Sin embargo, esto tiene algunos inconvenientes:

- El muestreo en paso banda es más complicado que el realizado en paso baja.
- El muestreo de señales paso banda implica su reconstrucción.

Es por esto que nos interesaría ser capaces de emular procesos paso banda sin generar de forma explicita una señal paso banda. Esto se consigue a través de la representación de sistemas y señales con sus equivalentes complejos en paso bajo. Posteriormente veremos que permiten realizar simulación de sistemas paso banda en paso bajo con lo cual tenemos una tasa de muestreo mucho menor y por lo tanto hacen viable desde el punto de vista computacional las simulaciones de sistemas que trabajan en frecuencias altas.

Una forma de obtener la señal original si esta es limitada en banda es por medio de la interpolación usando la función sinc, sin embargo, tal filtro es irrealizable. Entonces una forma alternativa que se usa en las simulaciones es la interpolación lineal. La salida de la interpolación lineal es

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h_i(t - nT_s)$$

donde la respuesta en frecuencia del filtro es

$$H_i(f) = T_s sinc^2(fT_s)$$

La transformada de Fourier de la señal interpolada es

$$X_i(f) = sinc^2(fT_s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

La interpolación lineal no nos da exactamente una reconstrucción ideal de la señal pero en la mayoría de los casos es adecuada.

A la hora de fijar la tasa de muestreo y debido a la importancia que ha de tener esta en nuestra simulación debemos tener en cuenta factores como:

- Cantidad de aliasing que podemos tolerar. Esto se debe a que aunque supongamos que las señales son perfectamente limitadas en banda, esto no ocurre prácticamente nunca, ya que las señales reales no son estrictamente limitadas en banda. De esta forma, aunque las señales pudieran ser reconstruidas perfectamente con un filtro ideal paso baja con ancho de banda $f_M \leq f_c \leq f_s - f_M$, dependiendo de la cantidad de aliasing o sobremuestreo que tenga la señal, la obtención de la señal original va a ser posible con un cierto margen de error mayor cuanto más grave sea el sobremuestreo que se ha efectuado sobre la señal continua.
- Presencia de no-linealidades, presentes en sistemas con memoria. En estos casos la tasa de muestreo puede ser fijada por la caracterización de estas no-linealidades.
- Frecuencia de warping de los filtros.
- Carga computacional, factor que esta altamente determinado por la frecuencia de muestreo y provocado por una mala elección de la frecuencia de muestreo puede provocar que la simulación no sea viable.

Todos estos factores y el hecho de que haya que mantener un equilibrio entre unos y otros que hagan a la simulación fiable y a la vez soportable por un computador hacen que la elección de la tasa de muestreo un factor de vital importancia a la hora de llevar a cabo una simulación de un sistema de comunicaciones.

En este caso puede resultar apropiado usar múltiples tasas de muestreo en el tiempo dependiendo de la exigencias de la simulación en un determinado instante.

2.1.2. Representación compleja en banda base para sistemas y señales paso banda.

Las funciones temporales que se tratan en sistemas de comunicaciones están compuestas por una señal de información que modula de alguna forma a una portadora. Dado que debemos realizar una simulación de un sistema de tales características necesitamos realizar un muestreo de estas señales de la forma más eficiente posible. No habría problema si el sistema fuera paso bajo. Una herramienta útil para el estudio de los sistemas de comunicación paso banda es la notación equivalente paso bajo compleja. Esta nos suministra una ayuda que evita la tediosa trigonometría que generalmente acompaña a las señales moduladas con una portadora senosoidal, además de la excesiva carga computacional que conllevaría la simulación de un sistema paso banda.

2.1.2.1. Señales paso banda.

La forma general de una señal paso banda, x(t), con una portadora f_c es

$$x(t) = A(t)\cos\left[2pf_c t + f(t)\right]$$

donde uno, o ambos, la amplitud y la fase son usados para llevar el mensaje de información, tal como voz digitalizada y codificada. Podemos expandir la ecuación

$$x(t) = u_I \cos(2pf_c t) - u_Q sin(2pf_c t)$$

donde

$$u_I = A(t)\cos f(t)$$

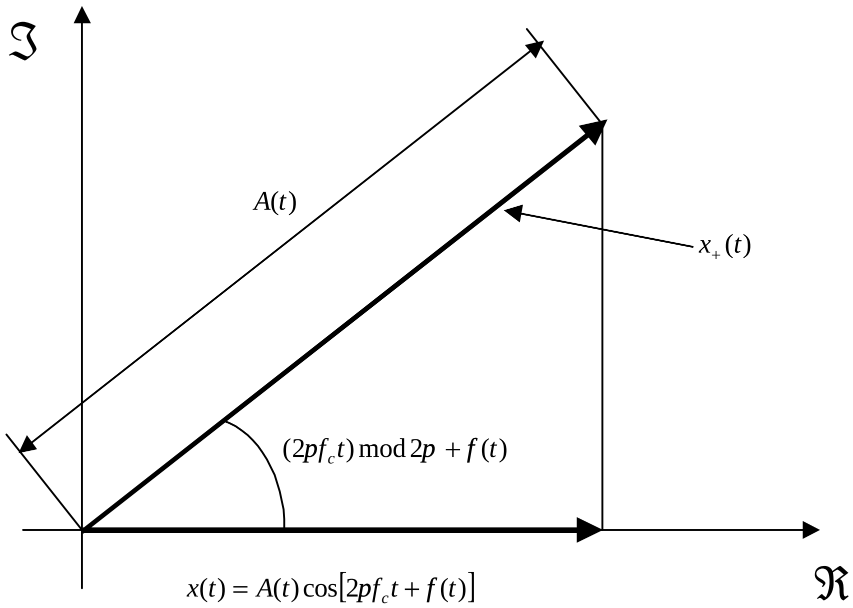
y

$$u_Q = A(t) sin f(t)$$

son las envolventes de las dos componentes cuadráticas de las portadora en frecuencia. Usando notación compleja, podemos escribir

$$x(t) = \Re\{x_+(t)\}$$

donde $x_+(t)$ es referida como la pre-envolvente de x(t). La pre-envolvente de una señal paso banda puede ser representada como un fasór, con la señal paso banda dada por la imagen de la pre-envolvente sobre el eje real. Esto lo podemos ver en la siguiente figura que muestra la representación de $x_+(t)$.



Delas formulas anteriores

$$x_+(t) = u(t)\exp(j2pf_c t)$$

donde

$$u(t) = u_I(t) + ju_Q(t)$$

La forma de onda u(t) esta referida a la envolvente compleja, o equivalente complejo paso baja, de x(t). Esto es además un fasór. x_+(t), es obtenida rotando el fasór u(t) con una velocidad angular $2pf_c$. En mucho moduladores, la forma de onda modulada es generada a partir de su envolvente compleja.

Sabiendo pues que $x(t)$ es la parte real de x_+(t), tenemos

$$x(t) = \Re\{u(t)\exp(\mathrm{j}2p\mathrm{f}_c t)\}$$

Esta ecuación representa como u(t) y f_c describe de forma completa la señal x(t). Como todos los mensajes de información están representados por u(t), es común describir x(t) por su equivalente compleja paso baja.

Para establecer como el espectro en frecuencia de x(t) y u(t) [X(f) y U(f) respectivamente] están relacionados, consideremos el espectro de la señal paso banda x(t). Este es

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2pft)dt$$

Sustituyendo x(t) en la ecuación anterior

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re\{u()\exp(j2pf_c t)\}\exp(-j2pft)dt$$

Es fácil mostrar que la parte real de una variable compleja, z, puede ser escrita como

$$\Re\{z\} = \frac{1}{2}\{z + z^*\}$$

donde z^* es la forma compleja conjugada de z. Por lo tanto

$$X(F) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [u(t)\exp(j2pf_c t) + u^*\exp(-j2pf_c t)]\exp(-2pft)dt$$

definiendo el espectro U(f) como la transformada de Fourier de u(t),

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(-2pft)dt$$

permitiéndonos expresar X(f)

$$X(f) = \frac{1}{2}\left[U(f - f_c) + U^*(-f - f_c)\right]$$

En los entornos de radio móvil celular el ancho de banda de las señales portadoras de información es siempre mucho menor que la frecuencia de la portadora. De esta forma las dos componentes de X(f) de se superponen en frecuencia. Si se solaparan la notación compleja podría aun utilizarse, pero requeriría del uso explícito de las transformadas de Hilbert.

2.1.2.2. Sistemas paso banda lineales.

Los sistemas paso banda lineales pueden ser descritos usando notación compleja. La respuesta al impulso de tales sistemas, g(t), puede ser escrita como la transformada de Fourier de su respuesta en frecuencia, G(f)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(j2pft)df$$

Para derivar la representación del equivalente complejo paso bajo para un sistema paso banda nosotros debemos establecer primero g(t) en función de solo uno de esas componentes, en particular aquella que esta centrada en f_c. Esta componente puede ser entonces trasladada en frecuencia a banda base, resultando la respuesta en frecuencia para un sistema equivalente complejo en paso bajo.

Actuando sobre el rango de integración tenemos,

$$g(t) = \int_{0}^{\infty} G(f)\exp(j2pft)df + \int_{-\infty}^{0} G(f)\exp(j2pft)df$$

y sustituyendo la variable f'=-f en la segunda integral obtenemos

$$g(t) = \int_{0}^{\infty} G(f)\exp(j2pft)df + \int_{-\infty}^{0} G(-f')\exp(-j2p'ft)df$$

Hay que hacer notar que un sistema físico debe poseer una respuesta al impulso real, y que para una g(t) real se debe cumplir que

$$G(-f) = G^*(f)$$

lo que provoca que sobre la anterior integral.

$$g(t) = \int_{0}^{\infty} G(f)\exp(j2pft)df + \int_{0}^{\infty} G(f')\exp(-j2pf't)df$$

Comparando tenemos:

$$g(t) = 2\Re\{\int_{0}^{\infty} G(f)\exp(j2pft)df\}$$

Habiendo obtenido g(t) en términos de la componente positiva en frecuencia de G(f), ya podemos efectuar el paso de paso banda a equivalente complejo paso bajo. El espectro de un sistema equivalente paso bajo esta definido de tal forma que es igual a la componente de frecuencia positiva de G(f) centrada en la frecuencia cero. De esta forma tenemos,

$$H(f - f_c) = \begin{cases} G(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

La ecuación que expresa $g(t)$ en función de la parte real de la integral sobre $G(f)$ es equivalente a

$$g(t) = 2\Re\{\int_{0}^{\infty} H(f - f_c)\exp(j2pft)df\}$$

o

$$g(t) = 2\Re\{h(t)\exp(j2pf_c t)\}$$

donde

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\exp(j2pft)df$$

es la respuesta al impulso del equivalente complejo paso bajo del sistema. Tal como pasa con u(t), h(t) puede ser escrita en términos de sus componentes en fase y cuadratura

$$h(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$$

Se ha mostrado que al igual que pasa con las señales paso banda, los sistemas paso banda pueden ser completamente descritos por el conocimiento de sus equivalentes paso bajo y su frecuencia central.

Es fácil de ver que la respuesta en frecuencia de un sistema esta descrita por

$$G(f) = H(f - f_c) + H^*(-f - f_c)$$

Esta ecuación difiere de la análoga para señales por un factor de 1/2. La razón de esta diferencia es clara tras leer la próxima sección.

2.1.2.3. Respuesta de un sistema lineal paso banda

La respuesta al impulso de un sistema paso banda, y(t), debe ser una señal paso banda, incluso si la entrada al sistema no esta limitada en banda. Esta respuesta puede ser representada como

$$y(t) = \Re\{z(t)\exp(j2pf_c t)\}$$

donde z(t) es la señal equivalente compleja paso bajo, más normalmente, la envolvente compleja de y(t). Además el espectro de la señal viene dado por

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[Z(f - f_c) + Z^*(-f - f_c)\right]$$

Un sistema paso banda, descrito en el espectro X(f), tiene una salida

$$Y(f) = G(f)X(f)$$

Expandiendo esto

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[H(f - f_c) + H^*(-f - f_c)\right]\left[U(f - f_c) + U^*(-f - f_c)\right]$$

El ancho de banda de las señales encontradas en entornos de radio móvil son pequeñas comparadas con la frecuencia de la portadora. Por lo tanto los términos en el producto $H(f\text{-}f_c)U^*(\text{-}f\text{-}f_c)$ no e solaparan en frecuencia, y el producto será igual a cero. De forma análoga pasa con $H^*(\text{-}f\text{-}f_c)U(f\text{-}f_c)$ que es también igual a cero.

El espectro de la señal recibida RF es

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[H(f - f_c) + U^*(f - f_c) + H^*(-f - f_c) + U^*(-f - f_c)\right]$$

Esta ecuación puede ser comparada con $Y(f) = G(f)X(f)$ para obtener la relación del equivalente complejo paso bajo

$$Z(f) = H(f)U(f)$$

de la cual la envolvente compleja de y(t) puede ser deducida como

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)u(t-x)dx$$

Esto puede ser escrito como

$$z(t) = h(t) * u(t)$$

donde * significa convolución.

$$z(t) = h_I(t) * u_I(t) - h_Q(t) * u_Q(t) + j\left[h_I(t) * u_Q(t) + h_Q(t) * u_I(t)\right]$$

que en términos de la componente en fase y cuadratura de z(t)

$$z_I(t) = h_I(t) * u_I(t) - h_Q(t) * u_Q(t)$$
$$z_Q(t) = h_I(t) * u_Q(t) + h_Q(t) * u_I(t)$$

Para que la ecuación $Y(f) = G(f)X(f)$ tenga la misma forma que la ecuacion $Z(f) = H(f)U(f)$ deba haber un factor de 1/2 de diferencia entre las ecuaciones que definen $G(f)$ y $X(f)$ como ya hemos visto. Si hubiésemos definido la ecuación de tal forma que la relación en el dominio de la frecuencia para sistemas paso banda fuera análoga que para las señales paso banda, esto es

$$G(f) = \frac{1}{2}\left[H(f - f_c) + H^*(-f - f_c)\right]$$

la ecuación anterior se leería

$$Z(f) = \frac{1}{2}H(f)U(f)$$

Si se diera este caso, las señales equivalentes complejas paso bajo y la teoría de sistemas no se reflejarían en la teoría convencional. La respuesta a un sistema complejo paso bajo no sería la convolución de su respuesta al impulso y la señal de entrada compleja paso baja.

Conceptualmente, la transformación de señales de paso banda a complejas paso baja se puede ver como un mapeado de las componentes frecuenciales positivas y negativas del espectro de la señal a banda base sumándose. Los sistemas, sin embargo, no poseen espectro de frecuencia, sino que ellos responden al espectro de las señales (ellos son descritos como respuesta a frecuencias). Por lo tanto, la razón de que un sistema lineal paso banda tenga una componente positiva y negativa en su frecuencia es así porque modifica ambas componentes de la señal.

Después de una transformación de paso banda a complejo paso baja, las dos componentes del espectro de una señal están centradas en la frecuencia cero. Solo una componente de la respuesta en frecuencia del sistema necesita ser mapeada a banda base, porque ella será la que dará forma a ambas componentes de la señal a la vez.

Los resultados expuestos en esta sección ilustran que podemos reducir los problemas que comprenden sistemas y señales de radio tipo paso banda a alta frecuencias a banda base usando sus equivalentes complejos paso baja. Esto es fundamental si simulaciones por ordenador de canales de radio móvil se van a efectuar, ya que es impracticable simular con portadoras de alta frecuencia.

2.1.2.4. Ruido en sistemas paso banda.

En sistemas de comunicaciones el ruido de todas las fuentes esta referenciado a la entrada del receptor y están representadas por un fuente de ruido única y aditiva que se añade a la señal en recepción. La fuente de ruido dominante es el ruido térmico distribuido de forma gaussiana dentro del receptor. Ya que el espectro del ruido térmico se extiende hasta frecuencia del orden de 10^{13} Hz, la fuente de ruido aditivo se asume que es blanco.

AWGN tiene, pues, espectro infinito. De esto se coliga que el uso de las transformadas de Hilbert son requeridas para derivar el equivalente complejo paso baja. No solo es esto dificultoso, sino que además es innecesario.

Una aproximación es considerar el supuesto de que en un sistema paso banda esta compuesto por señales que no sobresalen de su espectro de frecuencia. El AWGN puede ser contemplado como filtrado por un filtro ideal antes de sumarse a la señal en recepción. El bloque que filtra tiene la respuesta ideal en frecuencia,

$$H(f)\begin{cases}1 & f_c - \frac{B}{2} \le f \le f_c + \frac{B}{2} \\ 0 & e.o.c.\end{cases}$$

donde B es mayor que el ancho de banda del sistema pero no tan grande cuando es comparado con la frecuencia central.

Para el filtro que cae en la región de interés el filtro es transparente. Sin embargo el ruido que cae fuera de la banda tiene una atenuación infinita. El ruido resultante paso banda, $n_B(t)$, es entonces añadido a la señal recibida.

El proceso ruidoso paso banda, $n_B(t)$, puede ser representado como

$$n_B(t) = \Re\{n(t)\exp(j2pf_c t)\}$$

El equivalente complejo paso bajo del ruido mantiene la distribución gaussiana, ya que la estadística de la señal no se ven afectadas por la transformación en frecuencia.

Es posible representar n(t) como la suma de dos procesos ruidosos gaussianos en cuadratura

$$n(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$$

Las componentes en cuadratura, $n_I(t)$ y $n_Q(t)$, son variables gaussianas independientes con la misma media y varianza que n(t).