

Índice General

1	Introducción	9
1.1	Antenas Microstrip	9
1.2	Importancia de los métodos numéricos. El Método de los elementos finitos.	9
1.3	Objetivos del proyecto.	10
1.4	Contenido de la memoria.	11
2	Antenas microstrip	15
2.1	Introducción	15
2.2	Técnicas de análisis. Modelo de cavidad.	17
2.2.1	Introducción	17
2.2.2	Modelado de la alimentación, frecuencia de resonancia y campos internos	17
2.2.3	Campo radiado.	20
2.2.4	Pérdidas en la cavidad.	22
2.2.5	Impedancia de entrada.	23
2.2.6	Ancho de banda VSWR.	24
2.2.7	Descripción cualitativa de los resultados proporcionados por el modelo.	25
2.3	El parche rectangular.	26
2.3.1	Introducción.	26
2.3.2	Formulación del campo interior a la cavidad. Impedancia de entrada. Diagrama de radiación.	29
2.4	Efecto del plano de tierra finito.	31
2.4.1	Introducción.	33
2.4.2	Formulaciones para los diagramas de radiación.	34
2.4.3	Resultados	41
2.5	Revisión de CAD para antenas microstrip.	44
2.5.1	Introducción	44
2.5.2	Modelos de CAD y software comercial disponible.	47

3	El método de los elementos finitos.	51
3.1	Métodos clásicos para problemas valor-frontera.	51
3.1.1	Problemas valor-frontera.	51
3.1.2	El método de Ritz.	52
3.1.3	El método de Galerkin	53
3.1.4	Ejemplo.	54
3.2	Pasos básicos en el MEF.	59
3.2.1	Discretización del dominio.	59
3.2.2	Selección de las funciones de interpolación.	61
3.2.3	Formulación del Sistema de Ecuaciones.	61
3.2.4	Resolución del Sistema de Ecuaciones.	63
3.3	Análisis del MEF 3D.	63
3.3.1	Problema valor-frontera 3D.	63
3.3.2	Formulación variacional.	64
3.3.3	Aplicación a problemas de campos armónicos en el tiempo.	65
3.4	Modos espurios.Elementos curl-conformes.	67
3.4.1	Introducción.	67
3.4.2	Origen de los Modos Espurios.	68
3.4.3	Solución del Problema de los Modos Espurios.	78
3.5	Análisis de Problemas Abiertos.	89
4	Aplicación del MEF a MPA.	99
4.1	Introducción.	99
4.2	Elementos de arista. Funciones base.	100
4.3	Formulación y Resolución del problema.	105
4.3.1	Cavidad encapsulada en un plano de tierra.	106
4.3.2	Antena parche microstrip en la cavidad.	117
5	Resultados.	121
5.1	Convergencia y precisión del MEF. Otros métodos.	121
5.1.1	Resultados del MEF. Convergencia.	121
5.1.2	Comparación con otros métodos.	124
5.1.3	Efecto del sustrato finito.	127
5.1.4	Sustrato eléctricamente grueso.	128
5.2	Estudio detallado de la antena MPA con MEF.	135
5.2.1	Impedancia de entrada.	135
5.2.2	Diagramas de radiación.	135
5.2.3	Potencias.	135
5.2.4	Eficiencia de radiación.	145
5.2.5	Directividad y Ganancia.	145

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
5.2.6 Factor de calidad. Ancho de banda.	145
6 Conclusiones.	155
A Funciones MATLAB	157

Índice de Figuras

2.1	Antena parche microstrip con (a) alimentación coaxial y (b) alimentación línea microstrip	16
2.2	Modelado de la alimentación coaxial con una cinta de corriente para un parche circular.	19
2.3	Aplicación del principio de equivalencia para calcular la radiación de una antena microstrip parche	21
2.4	Geometría para el parche rectangular	26
2.5	Campo eléctrico y distribuciones de corriente magnética superficial para varios modos de una antena microstrip rectangular. (a) Modo TM_{01} . (b) Modo TM_{10} . (c) Modo TM_{20}	28
2.6	Diagramas de radiación (modo TM_{10}) para una antena microstrip parche rectangular con $a = 5.2831$ cm., $b = 3.6977$ cm., $t = 0.3106$ cm., $\epsilon_r = 2.55$ y $f = 2.295$ GHz. Plano E '-', Plano H ' '.	32
2.7	Configuración de la antena microstrip.	33
2.8	Configuración del modelo de ranura de la antena microstrip parche.	35
2.9	Radiación en el plano-E y mecanismos de difracción.	36
2.10	Radiación en el plano-H y mecanismos de difracción.	37
2.11	Corriente magnética lineal equivalente para el cálculo del diagrama de radiación Plano H.	39
2.12	Campo eléctrico en el perímetro de un parche microstrip cuadrado para (a) Modo 10 y (b) Modo 02. El punto indica la alimentación.	40
2.13	Diagrama de radiación plano-E.	42
2.14	Diagrama de radiación plano-H.	43
2.15	Comparación de los diagramas del plano-E para un parche que está sobre un plano de tierra de dos longitudes de onda y cuando está sobre un plano infinito de tierra	45
2.16	Diagrama de radiación del plano-H para diferentes contribuciones de borde.	46

3.1	División del dominio (0,1) en tres subdominios.	56
3.2	Elementos finitos básicos. (a) una dimensión. (b) dos dimensiones. (c) tres dimensiones.	60
4.1	Elemento Prisma Rectangular.	101
4.2	Geometría de la cavidad encapsulada en un plano de tierra. . .	106
4.3	Geometría de un array microstrip parche en una cavidad . . .	117
5.1	Geometría de la antena microstrip utilizada para simulación. .	122
5.2	Velocidad de Convergencia de la Resistencia de entrada en la frecuencia de resonancia del modo fundamental.	123
5.3	Resistencia de entrada según resultados: experimentales, MEF, método de los momentos y modelo de cavidad.	125
5.4	Reactancia de entrada según resultados: experimentales, MEF, método de los momentos y modelo de cavidad.	126
5.5	Configuración de la antena con sustrato finito.	127
5.6	Comparación de diagramas de radiación Plano E, correspondientes a análisis con sustrato finito y al MEF.	128
5.7	Comparación de diagramas de radiación Plano H, correspondientes a análisis con sustrato finito y al MEF.	129
5.8	Comparación entre la impedancia de entrada medida y la obtenida con análisis MEF para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm, y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$	131
5.9	Diagramas de radiación Plano E medido y obtenido con análisis MEF, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm., y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$	133
5.10	Diagramas de radiación Plano H medido y obtenido con análisis MEF, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm., y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$	134
5.11	Resistencia de entrada de una antena microstrip de parche rectangular sin impedancia de carga y $a = 5$ cm, $b = 3.4$ cm, $e = 5.1$ cm, $h = 7.5$ cm, $t = 0.08779$ cm, $x' = 1.22$ cm, $y' = 0.85$ cm, $\epsilon_r = 2.17$	136
5.12	Reactancia de entrada (antena de la Figura 5.11).	137
5.13	Resistencia de entrada de la antena microstrip parche (ver parámetros en Figura 5.11) con impedancia de carga de 50Ω situada en $x_L = -2.2$ cm, $y_L = -1.5$ cm.	138

5.14	Reactancia de entrada de la antena con parche cargado de la Figura anterior.	139
5.15	Diagrama de radiación Plano E, para una antena microstrip de parche rectangular con $a/b = 1.5$, $f = 1$ GHz; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.	140
5.16	Diagrama de radiación Plano H, para la antena de la Figura 5.15.	141
5.17	Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a pérdidas en el conductor P_c , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$	142
5.18	Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a pérdidas en el dieléctrico P_d , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.159$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.0635$ cm.	143
5.19	Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a radiación P_r , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.159$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.0635$ cm.	144
5.20	Eficiencia de radiación en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.	146
5.21	Eficiencia de radiación en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.	147
5.22	Directividad (valores absolutos) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm; $\epsilon_r = 9.8$, $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.	148
5.23	Ganancia (dB) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.	149
5.24	Ganancia (dB) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.	150

5.25	Factor de calidad Q en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.	151
5.26	Factor de calidad Q en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.	152
5.27	Ancho de banda en función de la frecuencia de resonancia para la antena de la Figura 5.25 ($\epsilon_r = 2.32$).	153
5.28	Ancho de banda en función de la frecuencia de resonancia para la antena de la Figura 5.26 ($\epsilon_r = 9.8$).	154

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antenas Microstrip

Las antenas microstrip han sido, durante los últimos veinte años, objeto de numerosas investigaciones que surgen a partir de la utilización de la tecnología de circuito impreso. Estas antenas, además de la compatibilidad con la tecnología de circuito integrado, poseen otras características tales como perfil delgado, peso reducido, bajo coste y conformidad superficial, que justifican su extensa variedad de aplicaciones: comunicaciones móviles, sistemas de radiodeterminación por satélite, redes de área local inalámbricas, PCs portátiles, radiodifusión de televisión directa (DBS), etc. No obstante, su comportamiento desde el punto de vista eléctrico no es tan ventajoso presentando, como inconveniente importante, un estrecho ancho de banda. La dificultad en el modelado de la geometría de estas antenas y el hecho de que son relativamente nuevas explican la escasez de software de diseño asistido por computador (CAD) para las antenas microstrip, y motivan este proyecto.

1.2 Importancia de los métodos numéricos. El Método de los elementos finitos.

Las actuales tecnologías de fabricación de dispositivos de microondas exigen un diseño cuidadoso de las diversas estructuras pasivas y radiantes. Para evitar el coste que supondría el tener que efectuar rediseños en tecnología híbrida, y aún más en la monolítica, son necesarios métodos de análisis capaces de obtener con precisión los parámetros circuitales, de propagación, radiación, etc., de una determinada configuración.

Cada vez existe una mayor variedad de geometrías y materiales en dichas

estructuras: existencia de múltiples capas de dieléctricos, varios niveles de metalización, contornos con esquinas reentrantes y formas variadas. A ello se añade el alto grado de miniaturización en los circuitos monolíticos (MMIC) que puede dar lugar a acoplamientos indeseados, propagación de modos superiores originados en las discontinuidades, etc. Igualmente, es preciso considerar las pérdidas de radiación presentes en estructuras no encapsuladas o realizar el análisis electromagnético de estructura radiantes o antenas propiamente dichas, así como el estudio de la sección radar de objetos. Todo ello, hace necesario el empleo de un método numérico, que sea capaz de efectuar un análisis preciso y fiable de dichas estructuras. Dicho análisis debe proporcionar su caracterización no sólo circuital, sino fundamentalmente electromagnética, de modo que se pueda llegar a la comprensión de los fenómenos involucrados. Simultáneamente, esa herramienta de cálculo debe ser suficientemente versátil y flexible de modo que pueda aplicarse a una diversidad de geometrías sin necesidad de nuevas formulaciones analíticas. Un último requisito es que sea lo más eficiente posible en términos de necesidades de memoria y almacenamiento, tiempo de cálculo, etc.

El *Método de los Elementos Finitos (MEF)* ha demostrado ser una herramienta de cálculo numérico precisa y de gran flexibilidad. Su aplicación a problemas electromagnéticos data de la década de los sesenta, experimentando un espectacular avance durante los últimos años. Su gran ventaja frente a otros métodos numéricos estriba en su flexibilidad, derivada del propio fundamento del método. Ofrece también una gran precisión siempre que la discretización sea suficientemente elevada e inteligente, para lo que se emplean técnicas de mallado autoadaptativo entre otros procedimientos. Como inconveniente frente a otros métodos numéricos cabe citar el tamaño de las matrices resultantes. En este sentido, es muy importante aprovechar de forma eficiente la estructura dispersa de las matrices, fruto del carácter local del operador diferencial. De este modo, pueden abordarse problemas complejos manteniendo los requerimientos de almacenamiento y tiempos de cálculo dentro de unos límites razonables.

1.3 Objetivos del proyecto.

Los objetivos del proyecto son la resolución mediante el MEF del problema del análisis de las antenas microstrip de forma precisa y eficiente, la implementación del método de resolución propuesto mediante funciones MATLAB y la utilización del programa resultante para la obtención de parámetros básicos de la antena tales como diagramas de radiación, impedancia de entrada, eficiencia, ganancia y ancho de banda. Por otro lado, en el contexto de apli-

cación del MEF, se tienen como objetivos el desarrollo de problemas en tres dimensiones, la eliminación de los modos espúrios mediante utilización de elementos curl-conformes y el análisis MEF de problemas abiertos, esto es, con dominio infinito.

1.4 Contenido de la memoria.

La organización en capítulos de la memoria del proyecto se ha realizado de la manera siguiente:

Capítulo 1.

Introduce el tema de este proyecto, describe sus objetivos y presenta la organización de la memoria.

Capítulo 2.

En este capítulo, se realiza el análisis teórico de las antenas microstrip mediante el modelo de cavidad que proporciona los resultados de los parámetros de la antena a partir del cálculo de los campos electromagnéticos en el interior de la misma, considerando el comportamiento en la región bajo el parche como el de una cavidad resonante, bajo las hipótesis de sustrato eléctricamente delgado y dimensión infinita del plano de tierra. El modelo de cavidad y su aplicación, en antenas con parche de forma arbitraria, para cálculo de diagramas de radiación, impedancia de entrada, pérdidas, factor de calidad, etc. se describen en la sección 2.2. En la sección 2.3 se aplica el modelo de cavidad a un parche rectangular, presentándose la formulación correspondiente, según el modelo de cavidad, para los campos interiores a la cavidad y la impedancia de entrada. A continuación, en la sección 2.4, se estudia el efecto de la consideración de plano de tierra finito, empleando la teoría geométrica uniforme de la difracción, poniéndose de manifiesto la necesidad de tal consideración, debido a la pérdida de precisión que resulta con la utilización de métodos que consideran el plano de tierra infinito (el modelo de cavidad, entre otros). En la sección 2.5 se hace una revisión de las características del software para diseño asistido por computador (CAD) existente para antenas microstrip, con objeto de mostrar el escaso desarrollo del mismo y las dificultades existentes para conseguir precisión, eficiencia computacional y versatilidad, de forma que se aprecia el sentido práctico de este proyecto.

Capítulo 3.

En la primera sección, se definen de forma general los problemas valor-frontera (BVP) y el planteamiento de los dos procedimientos, Ritz y Galerkin, que pueden ser empleados por el MEF; se explican las ideas fundamentales de éste, justificando su aplicación e importancia para CAD. A continuación, en la sección 3.2, se describen los pasos básicos de cualquier análisis de elementos finitos. En la sección 3.3, se particulariza el análisis MEF para problemas valor-frontera en tres dimensiones, se presenta el planteamiento variacional correspondiente y se considera la formulación para el caso de problemas 3D de campos armónicos en el tiempo. Aquí se define la condición de contorno de tercer tipo, que será imprescindible para la aplicación del MEF a MPA realizada en este proyecto. En la sección 3.4, se aborda el problema de los modos espurios en la formulación mediante el MEF de problemas electromagnéticos. Se revisan los distintos enfoques presentes en la literatura para resolver el problema de los modos espurios, considerando el papel de los procesos de formulación y discretización. Se introducen los elementos curl-conformes, que se utilizan en este proyecto, mostrando cómo su empleo resuelve el problema de los modos espurios y representa una forma consistente y adecuada para la discretización del problema electromagnético en 3D. Por último, la sección 3.5 trata el análisis de problemas abiertos, es decir, con dominio infinito.

Capítulo 4.

En este capítulo se aplica el método de los elementos finitos a una antena microstrip de parche rectangular. En la sección 4.1 se introducen las características de dicha aplicación, así como de su implementación para simulación con el computador. Los dos primeros pasos básicos del MEF, es decir, la discretización del volumen y selección de las funciones base se realizan en la sección 4.2; mientras que en la sección 4.3 se llevan a cabo la formulación y resolución del sistema de ecuaciones.

Capítulo 5.

Se presentan numerosos resultados de la aplicación del MEF a antenas microstrip expuesta en el capítulo anterior. En la sección 5.1 se utiliza el método propuesto con el fin de determinar su precisión y convergencia, comparando los resultados con los obtenidos experimentalmente. Se realizan comparativas con otros métodos (modelo teórico de cavidad, método de los momentos). Pueden resultar especialmente interesantes las subsecciones 5.1.3 y 5.1.4, que tratan el efecto de sustrato finito y de sustrato eléctricamente grueso, respectivamente, puesto que no pueden ser estudiados con algunos métodos. Por

último, en la sección 5.2, se hacen simulaciones variando distintos parámetros de la antena, tales como espesor y permitividad eléctrica del sustrato, obteniendo los resultados correspondientes para los diagramas de radiación, impedancia de entrada, pérdidas, eficiencia, ganancia, factor de calidad y ancho de banda.

Capítulo 6.

Se presentan las conclusiones del proyecto.

Capítulo 2

Antenas microstrip

2.1 Introducción

El desarrollo de las antenas microstrip (*microstrip patch antenna* MPA) surge a partir de la utilización de la tecnología de circuito impreso no sólo para componentes de circuitos y líneas de transmisión, sino también para elementos radiantes de sistemas electrónicos. La geometría básica de una antena microstrip se muestra en la Figura 2.1. En principio, la forma del parche puede ser arbitraria, siendo el rectangular, circular, equitriangular y anular los parches más comunes. La alimentación puede ser un cable coaxial (Figura 2.1 (a)) o una línea microstrip (Figura 2.1 (b)), que conducen la energía electromagnética desde la fuente hasta la región bajo el parche. Parte de esta energía atraviesa la frontera del parche y es radiada al espacio. La MPA constituye una forma relativamente nueva de elemento radiante. Además de la compatibilidad con la tecnología de circuito integrado, ofrece otras ventajas tales como perfil delgado, peso reducido, bajo coste y conformidad superficial. La principal desventaja es su inherente estrecho ancho de banda debido a que la región bajo el parche es, básicamente, una cavidad resonante con un alto factor de calidad.

La MPA fue propuesta por Deschamps en 1953. Sin embargo, sólo en los últimos 20 años se le han dedicado investigaciones profundas, motivadas por las ventajas mencionadas anteriormente que convierten la antena microstrip en una candidata atractiva para sistemas de radiocomunicación por satélite, comunicaciones móviles, radiodifusión directa de televisión, vehículos de gran velocidad como aviones, cohetes y misiles, etc.

Figura 2.1: Antena parche microstrip con (a) alimentación coaxial y (b) alimentación línea microstrip

2.2 Técnicas de análisis. Modelo de cavidad.

2.2.1 Introducción

La antena microstrip parche a considerar tiene la geometría básica mostrada en la Figura 2.1., donde el eje z es perpendicular al plano del parche. Las ondas electromagnéticas son guiadas primero a través del coaxial o de la línea microstrip y después se propagan bajo el parche. Cuando alcanzan la frontera del parche, algunas se reflejan y otras son radiadas al espacio libre. Existen dos formas de aproximación para deducir los campos radiados. Una de ellas consiste en encontrar las distribuciones de corriente en la estructura de la antena y obtener los campos radiados a partir de éstas. La otra es hallar los campos en la región de salida. Estos campos actúan como fuentes equivalentes, a partir de las cuales se obtienen los campos radiados.

Se han desarrollado numerosos métodos de análisis bajo las dos aproximaciones mencionadas. Las más importantes son el modelo de línea de transmisión, el modelo de cavidad y el modelo de ecuación integral. El empleo del modelo de línea de transmisión en su forma original está restringido a parches rectangulares o cuadrados; sin embargo, la extensión a otras formas es posible. El método de ecuación integral es el más general: puede tratar parches de forma arbitraria, así como sustratos gruesos. Sin embargo, requiere un considerable esfuerzo computacional y proporciona pocas nociones físicas. Véase [1] para tratar los métodos de línea de transmisión y ecuación integral.

En esta sección se introducirá el modelo de cavidad. La mayoría de los resultados obtenidos con este modelo son para sustratos eléctricamente delgados. En este caso, el modelo de cavidad ofrece simplicidad y nociones físicas.

2.2.2 Modelado de la alimentación, frecuencia de resonancia y campos internos

La simplicidad del modelo de cavidad puede atribuirse a la hipótesis de que el espesor del sustrato es mucho menor que la longitud de onda, es decir $t \ll \lambda$. Así, se hacen las siguientes observaciones:

(i) El campo eléctrico \mathbf{E} tiene sólo componente z y el campo magnético \mathbf{H} tiene sólo componentes transversales en la región limitada por el parche conductor y el plano de tierra.

(ii) Los campos en la región mencionada no varían con z .

(iii) Puesto que la corriente eléctrica en la microtira no debe tener componente normal al borde, se deduce de las ecuaciones de Maxwell que la

componente tangencial de \mathbf{H} a lo largo del borde es despreciable.

Como resultado de (i)-(iii), la región entre el parche y el plano de tierra puede considerarse como una cavidad con paredes eléctricas en las partes superior e inferior, y paredes magnéticas laterales. La suposición (i) no se mantiene en las proximidades de las fronteras puesto que no se han tenido en cuenta los campos de borde atendiendo a la delgadez del sustrato. Este modelo ha sido muy utilizado en análisis de resonadores microstrip. La aplicación a antenas microstrip aparece en [2].

Escribiendo las ecuaciones de Maxwell para la región bajo el parche, se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\epsilon \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.4)$$

siendo ϵ la permitividad del sustrato, cuya permeabilidad se supone igual a μ_0 . La densidad de corriente \mathbf{J} en la ecuación (2.2) es debida a la alimentación que, usualmente, consiste en un cable coaxial o una línea microstrip. Las ventajas de la alimentación coaxial son que la impedancia característica deseada puede tenerse con la localización del conductor interno, y que el cable puede situarse bajo el plano de tierra para minimizar el acoplamiento entre la alimentación y la antena. La desventaja es que la estructura no es completamente monolítica y, por tanto, su fabricación es más complicada. Esto no ocurre con alimentación microstrip, pero ésta introduce su propia radiación y proporciona menor flexibilidad para la obtención de la impedancia apropiada. Generalmente, se necesita una línea en cuarto de longitud de onda para transformar la impedancia de la antena a la de la línea microstrip.

A continuación, se describe el modelado de la corriente de alimentación que se ha empleado en el modelo de cavidad. En primer lugar, se considera la alimentación por cable coaxial. Ésta puede ser representada por una banda cilíndrica de corriente eléctrica que fluye desde el plano de tierra hasta el parche, con un anillo de corriente magnética en la apertura del coaxial en el plano de tierra. Ésto último puede despreciarse con un pequeño error, de forma que el modelo idealizado sería una corriente uniforme de anchura angular efectiva $2w$, centrada en el eje de la alimentación. Por ejemplo, para un parche circular alimentado a distancia d del centro, como ilustra la Figura 2.2, se tiene

$$\mathbf{J} = \hat{z}J(\psi)\delta(\varrho - d)/d \quad (2.5)$$

Figura 2.2: Modelado de la alimentación coaxial con una cinta de corriente para un parche circular.

siendo

$$J(\psi) = J, \quad \text{si} \quad \pi - w < \psi < \pi + w$$

$$J = 0 \quad \text{en otro caso} \quad (2.6)$$

La anchura angular efectiva $2w$ es un parámetro que se suele elegir imponiendo la compatibilidad en las impedancias obtenidas teórica y experimentalmente. Generalmente, la longitud del arco $2wd$ es varias veces la dimensión física del conductor interno.

Si la alimentación es una línea microstrip, puede reemplazarse por una fuente de corriente equivalente obtenida a partir de los campos transversales en el plano donde la línea se conecta con el parche. La alimentación por línea puede modelarse por una corriente equivalente en dirección z de anchura efectiva $2w$. Para el parche circular se tendría la misma ecuación que (2.4) salvo que d es sustituido por el radio del parche.

Tanto con alimentación coaxial, como con línea microstrip, la corriente en dirección z se considera independiente de z atendiendo a delgadez de la región dieléctrica. De este modo, $\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho = 0$ y la ecuación (2.3) se

reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.7)$$

De las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.6) y (2.4), se obtiene

$$(\nabla^2 + k_d^2)E_z = j\omega\mu_0 J_z \quad (2.8)$$

siendo $k_d = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$ el número de onda en el dieléctrico. La condición de pared eléctrica se satisface automáticamente puesto que $\mathbf{E} = E_z\hat{z}$, mientras que la condición de pared magnética implica que

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0 \quad (2.9)$$

en las caras laterales de la cavidad.

Para resolver la ecuación (2.8) sujeta a las condiciones de frontera, se debe encontrar las autofunciones de la ecuación de ondas homogénea

$$(\nabla^2 + k_d^2)E_z = 0 \quad (2.10)$$

imponiendo las mismas condiciones de frontera. Las autofunciones se denotan ψ_{mn} y los autovalores de k_d son k_{mn} .

Asumiendo que las autofunciones son ortogonales, la solución a (2.8) es

$$E_z = j\omega\mu_0 \sum_m \sum_n \frac{1}{k_d^2 - k_{mn}^2} \frac{\langle J_z \psi_{mn}^* \rangle}{\langle \psi_{mn} \psi_{mn}^* \rangle} \psi_{mn} \quad (2.11)$$

donde * denota el complejo conjugado y

$$\langle J_z \psi_{mn}^* \rangle = \iiint J_z \psi_{mn}^* dv \quad (2.12)$$

$$\langle \psi_{mn} \psi_{mn}^* \rangle = \iiint \psi_{mn} \psi_{mn}^* dv \quad (2.13)$$

En las ecuaciones (2.12) y (2.13), la integración es sobre el dominio del parche.

Las frecuencias de resonancia se calculan resolviendo $k_d^2 - k_{mn}^2 = 0$ y están dadas por

$$f_{mn} = k_{mn}/2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon}. \quad (2.14)$$

2.2.3 Campo radiado.

Para calcular el campo radiado, se considera una superficie cerrada S como muestra la Figura 2.3. La superficie superior de S se sitúa justo encima del parche, y lo mismo ocurre con la superficie inferior respecto al plano de tierra.

Figura 2.3: Aplicación del principio de equivalencia para calcular la radiación de una antena microstrip parche

La superficie vertical de S coincide con la pared magnética de la cavidad. Los campos exteriores a S pueden calcularse a partir de las fuentes equivalentes sobre S y sus imágenes; esto último es necesario para tener en cuenta el plano de tierra, que se supone infinito en este análisis. Puesto que las componentes tangenciales del campo eléctrico en las superficies superior e inferior, así como las componentes tangenciales del campo magnético en la superficie vertical, son nulas, las únicas contribuciones a las fuentes equivalentes son las componentes tangenciales del campo eléctrico \mathbf{E}_t sobre la superficie vertical de la cavidad. Junto con su imagen, la corriente magnética equivalente total es

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{E}_t \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.15)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal hacia fuera.

Si el espesor del sustrato t es mucho menor que la longitud de onda λ , su efecto sobre el campo radiado es pequeño y puede suponerse \mathbf{M} radiando en el espacio libre. Utilizando la función de Green en el espacio libre, el potencial eléctrico \mathbf{F} en un punto \mathbf{r} está dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0 t}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl' \quad (2.16)$$

donde la integración es sobre el perímetro del parche.

Los campos en zona lejana vienen dados por

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

$$E_\theta(\mathbf{r}) = \zeta_0 H_\phi(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

$$E_\phi(\mathbf{r}) = -\zeta_0 H_\theta(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

donde $\zeta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$.

2.2.4 Pérdidas en la cavidad.

A las pérdidas en la cavidad bajo el parche contribuyen la pérdida en el dieléctrico P_d , pérdida en el conductor P_c , pérdida por radiación P_r y pérdida por onda superficial P_{sw} . Se estima [3] que la excitación de onda superficial no es importante si $t/\lambda_0 < 0.09$ para $\epsilon_r \simeq 2.3$ y $t/\lambda_0 < 0.03$ para $\epsilon_r \simeq 10$, siendo λ_0 la longitud de onda en el espacio libre. Existe otro criterio más cuantitativo: $t/\lambda_0 < 0.07$ para $\epsilon_r = 2.3$ y $t/\lambda_0 < 0.023$ para $\epsilon_r = 10$. Trabajos más recientes mostraron que el tamaño del parche es también un parámetro. Por simplicidad, se usará el segundo criterio y se supone que se satisface en adelante.

La pérdida en el dieléctrico P_d y en el conductor P_c se calculan a partir del campo eléctrico en la cavidad, mientras que la pérdida por radiación se calcula con el campo electromagnético en zona lejana. Estas pérdidas están dadas por:

$$P_d = \frac{\omega\epsilon\delta}{2} \iiint |E_z|^2 dv \quad (2.20)$$

$$P_c = R_s \iint |\mathbf{H}|^2 ds \quad (2.21)$$

$$P_r = \frac{1}{4\zeta_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{E}|^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2.22)$$

La cantidad δ en la ecuación (2.20) es la tangente de pérdidas del dieléctrico y R_s en la ecuación (2.21) es la resistividad superficial de los conductores.

La eficiencia de la antena, o eficiencia de radiación, es la razón entre la potencia radiada respecto a la potencia de entrada:

$$e\% = \frac{P_r}{P_r + P_d + P_c} \times 100\% \quad (2.23)$$

En el cálculo de las pérdidas, generalmente, se hace uso de la aproximación de resonancia: si la frecuencia se aproxima a la frecuencia de resonancia de un modo particular, el factor $1/(k_d^2 - k_{mn}^2)$ en la ecuación (2.11)

es muy grande y la contribución a E_z , y en este caso al campo radiado \mathbf{E} , es debida principalmente al término del modo resonante. La energía eléctrica almacenada en resonancia es:

$$W_e = \frac{\epsilon}{4} \iiint |E_z|^2 dv = P_d/2\omega\delta \quad (2.24)$$

y la energía total almacenada en resonancia es

$$W_T = 2W_e = \frac{\epsilon}{2} \iiint |E_z|^2 dv = P_d/\omega\delta \quad (2.25)$$

La tangente de pérdidas efectiva de la cavidad, teniendo en cuenta las tres formas de pérdidas P_d , P_c y P_r , está dada por

$$\delta_{eff} = P_T/(\omega W_T) \quad (2.26)$$

siendo

$$P_T = P_d + P_c + P_r. \quad (2.27)$$

Se definen distintos factores de calidad:

-dieléctrico:

$$Q_d = \omega W_T/P_d = 1/\delta \quad (2.28)$$

-conductor:

$$Q_c = \omega W_T/P_c = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma t} \quad (2.29)$$

-radiación:

$$Q_r = \omega W_T/P_r \quad (2.30)$$

-Total:

$$Q_T = \omega W_T/P_T = 1/\delta_{eff} \quad (2.31)$$

En la ecuación (2.29), σ es la conductividad del parche y el plano de tierra.

2.2.5 Impedancia de entrada.

La impedancia de entrada en la alimentación de la antena viene dada por

$$Z = R + jX = V/I = E_{av}t/I \quad (2.32)$$

donde E_{av} es el valor medio del campo eléctrico en el punto de alimentación e I es la corriente total. Por ejemplo, si la alimentación se modela como en (2.4), se tiene:

$$E_{av} = \frac{1}{2w} \int_{\pi-w}^{\pi+w} E_z(d, \phi) d\phi \quad (2.33)$$

y

$$I = -J(2wd) \quad (2.34)$$

A diferencia del cálculo de δ_{eff} , se encuentra que los modos no resonantes deben incluirse en el cálculo de la impedancia de entrada si se desea adecuación entre teoría y experiencia. Así, la ecuación apropiada para E_z es (2.11), que contiene el factor $1/(k_d^2 - k_{mn}^2)$. Para mantener este término finito en resonancia, la permitividad del dieléctrico debe considerarse compleja. Si sólo se consideran las pérdidas en el dieléctrico, se tiene

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j\delta) \quad (2.35)$$

$$k_d^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon = k_0^2 \epsilon_r (1 - j\delta). \quad (2.36)$$

Sin embargo, se obtiene un mayor acercamiento a los datos experimentales si, en vez de la tangente de pérdidas del dieléctrico, se usa la tangente de pérdidas efectiva. De este modo, en el cálculo de la impedancia de entrada, la ecuación (2.11) se modifica resultando:

$$E_z = j\omega\mu_0 \sum_m \sum_n \frac{1}{k_{eff}^2 - k_{mn}^2} \frac{\langle J_z \psi_{mn}^* \rangle}{\langle \psi_{mn} \psi_{mn}^* \rangle} \psi_{mn} \quad (2.37)$$

donde

$$k_{eff}^2 = k_0^2 \epsilon_r (1 - j\delta_{eff}) \quad (2.38)$$

2.2.6 Ancho de banda VSWR.

Es sabido que el ancho de banda de una antena es el rango de frecuencias dentro del cual el comportamiento de la antena, con respecto a alguna característica, es conforme con un estándar específico. En el caso de la antena microstrip parche, que es básicamente un diseño asociado a la resonancia, es usualmente la impedancia, en lugar del patrón de radiación, la que limita el comportamiento estándar. Si la impedancia de la antena está adaptada a la línea de transmisión en resonancia, la desadaptación fuera de la resonancia está relacionada con el VSWR. El valor del VSWR que puede tolerarse define el ancho de banda de la antena. Si este valor es menor que S , se utiliza un ancho de banda relacionado con el factor de calidad según:

$$\text{Ancho de banda } (BW) = \frac{100(S-1)}{Q_T \sqrt{S}} \% \quad (S \geq 1) \quad (2.39)$$

Para $S = 2$, que es el estándar, la ecuación anterior se reduce a:

$$BW = \frac{100}{\sqrt{2} Q_T} \% \quad (2.40)$$

2.2.7 Descripción cualitativa de los resultados proporcionados por el modelo.

En la Sección siguiente se emplearán las ecuaciones presentadas anteriormente con el fin de obtener resultados para una antena microstrip específica: con parche rectangular. Por ello, se estima conveniente describir aquí las características cualitativas comunes de antenas microstrip parche, desde el punto de vista del comportamiento de la antena como cavidad.

(i) Existe un número infinito de modos resonantes caracterizados, cada uno de ellos, por una frecuencia de resonancia.

(ii) Debido a la existencia de campos de borde en las fronteras del parche, se consideran las dimensiones del parche ligeramente superiores. Se emplean factores semi-empíricos para obtener estas dimensiones efectivas, que varían según el parche.

(iii) Cada modo resonante tiene su propio diagrama de radiación. El primer modo radia, generalmente, más potencia en dirección *broadside*. El patrón de este modo es *broad*, con un ancho de banda del orden de 100°.

(iv) Para alimentación de la antena mediante cable coaxial, la impedancia de entrada es dependiente de la posición de la alimentación. La variación de la resistencia de entrada con la localización de la alimentación sigue a la del campo en la cavidad. Para el modo más bajo, normalmente, la resistencia de entrada es mayor a medida que la alimentación se acerca al borde del parche, y decrece si el cable se sitúa en el interior del parche. Su magnitud puede variar entre decenas y centenas de ohmios. Si la posición de la alimentación es adecuada, puede obtenerse una adecuada relación entre la antena y la línea de transmisión.

(v) Dado que la cavidad bajo el parche es, básicamente, un resonador, el factor de calidad total Q y el ancho de banda de la impedancia dependen del espesor del sustrato y de su permitividad ϵ_r . Para valores bajos de ϵ_r , la anchura de banda, generalmente, se incrementa con el incremento de t , y decrece con el aumento de ϵ_r . Esto es debido a que la energía almacenada W_T disminuye con t y aumenta con ϵ_r , mientras que la pérdida total P_T es insensible a estos cambios. Sin embargo, análisis detallados muestran que la anchura de banda y Q son funciones complicadas de la frecuencia, el espesor del sustrato y la permitividad.

(vi) Para sustratos delgados, la anchura de banda de la impedancia varía menos de un uno o dos por ciento.

Figura 2.4: Geometría para el parche rectangular

2.3 El parche rectangular.

2.3.1 Introducción.

La antena microstrip más utilizada es la de parche rectangular (Figura 2.4) y, sobre ésta, se trabaja en este proyecto. Se analizará, en esta sección, mediante el modelo de cavidad. El parche se caracteriza por su longitud a y anchura b .

El campo eléctrico de un modo resonante en la cavidad bajo el parche está dado por

$$E_z = E_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \quad (2.41)$$

donde $m, n = 0, 1, 2, \dots$

La frecuencia de resonancia es

$$f_{mn} = k_{mn}c / (2\pi\sqrt{\epsilon_r}) \quad (2.42)$$

siendo

$$k_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \quad (2.43)$$

La ecuación (2.42) se basa en la hipótesis de pared magnética perfecta. Para tener en cuenta los campos de borde en el perímetro del parche, se puede utilizar la siguiente fórmula empírica para las dimensiones efectivas [3]:

$$a_e = a + t/2 \quad (2.44)$$

$$b_e = b + t/2 \quad (2.45)$$

Una formulación más precisa, aunque más complicada, es

$$f_{r1} = f_{r0} \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_e(a)\epsilon_e(b)}} \frac{1}{(1 + \Delta)} \quad (2.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{t}{a} & \left[0.882 + \frac{0.164(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r^2} + \frac{(\epsilon_r + 1)}{\pi\epsilon_r} \right. \\ & \left. \times \left\{ 0.758 + \ln\left(\frac{a}{t} + 1.88\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\epsilon_e(u) = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[1 + \frac{10t}{u} \right]^{-1/2} \quad (2.48)$$

siendo f_{r0} la frecuencia de resonancia dada por la ecuación (2.42).

Está demostrado que las frecuencias de resonancia obtenidas con la ecuación (2.46) se mantienen dentro de un 3% con respecto a los valores experimentales, mientras que el modelo de paredes magnéticas perfectas introduce errores incluso superiores al 20%.

De la ecuación (2.41) se obtiene el campo eléctrico de un modo resonante y, por tanto, la distribución de corriente magnética equivalente en las paredes laterales de la cavidad. Los resultados para los modos TM_{10} , TM_{01} y TM_{20} se ilustran en la Figura 2.5. Para el modo TM_{10} , las corrientes magnéticas a lo largo de b son constantes y están en fase, mientras que varían sinusoidalmente y con fases opuestas a lo largo de a . Por esta razón, el borde b se conoce como borde radiante, puesto que contribuye predominantemente a la radiación. El borde a se conoce como borde no radiante. De forma similar, para el modo TM_{01} , las corrientes magnéticas son constantes y están en fase en el borde a y sinusoidales de fases opuestas en b . Así, a es el borde radiante en el modo TM_{01} .

El campo lejano, las pérdidas y Q , y la impedancia de entrada pueden calcularse a partir de las ecuaciones dadas en la sección anterior. A continuación, se expone una formulación más detallada para el campo en el interior de la cavidad, así como para la impedancia de entrada, aunque los resultados numéricos se ilustrarán en el Capítulo 5. También se muestran los diagramas de radiación que se obtienen empleando la formulación propuesta.

Figura 2.5: Campo eléctrico y distribuciones de corriente magnética superficial para varios modos de una antena microstrip rectangular. (a) Modo TM_{01} . (b) Modo TM_{10} . (c) Modo TM_{20} .

2.3.2 Formulación del campo interior a la cavidad. Impedancia de entrada. Diagrama de radiación.

Se considera la geometría de la Figura 2.4. Puesto que el sustrato se supone eléctricamente delgado, el campo eléctrico tiene dirección z y los modos interiores serán TM_{mn} en z , de forma que

$$E_z(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} e_{mn}(x, y) \quad (2.49)$$

donde A_{mn} son los coeficientes de amplitud de los modos y e_{mn} son vectores ortonormalizados con dirección z que constituyen los campos eléctricos correspondientes a los distintos modos. Para el caso elemental de cavidad no radiante cuyas paredes son circuitos abiertos perfectos,

$$e_{mn}(x, y) = \frac{\chi_{mn}}{\sqrt{\epsilon abt}} \cos(k_m x) \cos(k_n y) \quad (2.50)$$

siendo χ_{mn}

$$\begin{aligned} &1, && \text{si} && m = 0 && \text{y} && n = 0 \\ &\sqrt{2}, && \text{si} && m = 0 && \text{o} && n = 0 \\ &2, && \text{si} && m \neq 0 && \text{y} && n \neq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Los vectores de los modos satisfacen la ecuación de ondas homogénea, y los autovalores satisfacen la ecuación de separación

$$k_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \mu \epsilon = k_m^2 + k_n^2. \quad (2.52)$$

Para cavidad no radiante, $k_m = (m\pi/a)$ y $k_n = (n\pi/b)$. Los vectores modales ortonormalizados del campo magnético se encuentran a partir de las ecuaciones de Maxwell, y vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{mn} = \frac{1}{j\omega\mu\sqrt{\epsilon abt}} \cdot \{ &\mathbf{x} k_n \cos(k_m x) \sin(k_n y) \\ &-\mathbf{y} k_m \sin(k_m x) \cos(k_n y) \}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para este caso de no radiación, la condición de frontera $\mathbf{n} \times \mathbf{h}_{mn} = 0$ se satisface en los perímetros de las paredes.

Si se tiene en cuenta la radiación, los autovalores pasan a ser complejos, correspondientes a frecuencias de resonancia complejas, de forma que $|k_m|$ es

ligeramente inferior a $m\pi/a$ y lo mismo ocurre con $|k_n|$ respecto a $n\pi/b$. Los vectores modales del campo magnético \mathbf{h}_{mn} ya no tienen componente tangencial cero en las paredes laterales de la cavidad. No obstante, se demuestra que los vectores modales de campo eléctrico dados por (2.50) siguen teniendo precisión.

Se estudia ahora el efecto de la corriente de prueba I_0 de sección transversal rectangular pequeña dada por $(dx dy)$ en (x', y') . Los coeficientes del vector campo eléctrico de cada modo son

$$A_{mn} = \frac{j\sqrt{\mu\epsilon}k}{k^2 - k_{mn}^2} \iiint \mathbf{J}e_{mn}^* dv, \quad (2.54)$$

cuyo resultado puede escribirse

$$A_{mn} = jI_0 \sqrt{\frac{\mu t}{ab}} \frac{k\chi_{mn}}{k^2 - k_{mn}^2} G_{mn} \cos(k_n y') \cos(k_m x') \quad (2.55)$$

donde

$$G_{mn} = \frac{\sin(m\pi d_x/2a)}{m\pi d_x/2a} \cdot \frac{\sin(n\pi d_y/2b)}{n\pi d_y/2b} \quad (2.56)$$

y

$$k_{mn} = \tilde{\omega}_{mn} \sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.57)$$

En (2.57), $\tilde{\omega}_{mn}$ es la frecuencia de resonancia compleja del modo mn que resulta a partir de 2.52. La relación (2.54) para los coeficientes se basa en la ortogonalidad de los vectores modales; aunque la introducción de la condición de radiación implica que los vectores modales ya no son ortogonales en sentido estricto, para sustratos eléctricamente delgados el error debido a esta suposición es despreciable. El factor G_{mn} tiene en cuenta la anchura de la alimentación; para alimentación coaxial $d_x = d_y$ y el área de la sección transversal $d_x d_y$ es igual área efectiva de la sección transversal de prueba. Si el parche está alimentado por línea de transmisión en $y' = 0$, se toma $d_y = 0$ y d_x como la anchura de la línea de alimentación en aproximación de orden cero, ignorando los efectos de acoplamiento capacitivo.

Sustituyendo (2.55) en (2.49) se obtiene

$$E_z(x, y) = jI_0 Z_0 k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{mn}(x, y) \psi_{mn}(x', y')}{k^2 - k_{mn}^2} G_{mn}, \quad (2.58)$$

siendo $Z_0 = \sqrt{\mu\epsilon}$, $k_{mn}^2 = k_m^2 + k_n^2$, y

$$\begin{aligned} \psi_{mn} &= \frac{\chi_{mn}}{\sqrt{ab}} \cos(k_m x) \cos(k_n y) \\ &\cong \frac{\chi_{mn}}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

El voltaje en la alimentación se puede calcular como

$$\begin{aligned} V_{in} &= -tE_z(x', y') \\ &= -jI_0Z_0kt \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{mn}^2(x', y')}{k^2 - k_{mn}^2} G_{mn}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Así, se puede obtener la impedancia de entrada,

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_0} = -jZ_0kt \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{mn}^2(x', y')}{k^2 - k_{mn}^2} G_{mn}. \quad (2.61)$$

El término (0,0) con $k_{00} = 0$ corresponde a la capacidad estática, con una resistencia en paralelo para representar las pérdidas en el sustrato. El término (0,1) es el modo RF dominante y es idéntico al modelo de línea de transmisión citado en la sección 2.2.1; corresponde, como ya se ha visto, a una variación sinusoidal del campo en dirección y , mientras que en dirección x se mantiene constante. Este modo es equivalente a una red R-L-C paralelo donde R representa las pérdidas debidas a radiación, sustrato y cubierta. Si el parche es o se aproxima a un cuadrado, puede excitarse el modo (1,0) como modo degenerado; se modelará con el mismo tipo de red que el modo (0,1). Los modos de más alto orden presentan pérdidas despreciables y se suman para formar una inductancia L.

Se han formulado los campos en el interior de la cavidad, de tal forma que, a partir de lo expuesto en el apartado 2.2.3, se pueden determinar los patrones de radiación. Los modos de mayor interés son el TM_{10} y el TM_{01} ; ambos tienen diagramas de radiación *broadside*. En la Figura 2.6 puede verse el diagrama de radiación para el modo TM_{10} .

2.4 Efecto del plano de tierra finito.

La teoría geométrica uniforme de difracción (GTD) se utiliza para calcular los campos difractados en los bordes del plano de tierra finito de una antena microstrip. Los campos cuyas fuentes se encuentran en el parche radiante se calculan por dos métodos diferentes: la teoría de ranuras y la teoría de expansión modal. Se presentarán resultados numéricos y mediciones para demostrar la precisión de los cálculos y el efecto del plano de tierra finito.

Figura 2.6: Diagramas de radiación (modo TM_{10}) para una antena microstrip parche rectangular con $a = 5.2831$ cm., $b = 3.6977$ cm., $t = 0.3106$ cm., $\epsilon_r = 2.55$ y $f = 2.295$ GHz. Plano E ' ', Plano H ' '.

Figura 2.7: Configuración de la antena microstrip.

2.4.1 Introducción.

En la Figura 2.7 se muestra la configuración de una antena microstrip de parche: una delgada tira (parche) conductora radiante separada del plano de tierra por una capa de sustrato dieléctrico.

En esta sección, se presenta una aproximación que combina la teoría de ranuras y el método de la teoría geométrica uniforme de la difracción (GTD) para considerar las difracciones en los bordes del plano de tierra. De esta forma, la radiación “hacia atrás” y las regiones correspondientes a ángulos grandes pueden predecirse con precisión, lo cual no es posible con otros métodos. Aunque la teoría de ranuras sólo es útil para parche rectangular y cálculo copolar, la GTD, sin embargo, puede combinarse con otras teorías, tales como la teoría de expansión modal, para encontrar los diagramas de radiación (incluso información contrapolar) para numerosas formas diferentes de radiadores microstrip. Se incluye aquí una discusión sobre la teoría de expansión modal. Nótese que el método que se describe no debería aplicarse sin modificaciones cuando el producto del espesor del sustrato (en longitudes de onda) y la constante dieléctrica es mucho mayor que 0.1, puesto que los resultados carecerían de precisión. Esto es debido al hecho de que el efecto

de las ondas superficiales del sustrato dieléctrico y la difracción en las cuñas del mismo no han sido tenidas en cuenta. Puesto que GTD es una técnica para alta frecuencia, la condición para su aplicación es que la distancia entre el borde del plano de tierra y el borde del parche radiante no debe ser menor que un cuarto de longitud de onda. Afortunadamente, la mayoría de las aplicaciones consideradas hasta la fecha están dentro de la región de validez de las formulaciones descritas en la presente sección.

2.4.2 Formulaciones para los diagramas de radiación.

Teoría de ranuras y GTD.

La teoría de ranuras asume que la radiación de un parche microstrip rectangular es equivalente a la de dos ranuras paralelas adyacentes al parche metálico como se muestra en la Figura 2.8.

La anchura (W) de cada ranura es aproximada por el espesor del sustrato, y la longitud (l) es igual a la longitud del parche (a) más el espesor del sustrato [5] (debido a efectos de borde). El diagrama para el plano-E puede calcularse sumando tres rayos procedentes de cada una de las dos ranuras como se ilustra en la Figura 2.9 (a). La óptica geométrica (GO) proporciona los campos directos desde cada ranura,

$$\mathbf{E}_{GO} = \hat{\mu} \frac{\sin(\pi W \sqrt{\epsilon_r} \cos \mu) e^{-jkS}}{\pi W \sqrt{\epsilon_r} \cos \mu} \frac{e^{-jkS}}{\sqrt{S}}, \quad (2.62)$$

donde W es la anchura de la ranura en términos de la longitud de onda, ϵ_r es la constante dieléctrica relativa del sustrato, y S es la distancia desde el centro de la ranura hasta el punto de observación. Según GTD, los campos difractados una vez desde cada borde para la misma ranura están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d &= \hat{\mu}_i E_{inc} D_h \frac{e^{-jkS_i}}{\sqrt{S_i}} \\ &= \hat{\mu}_i \frac{\sin(\pi W \sqrt{\epsilon_r}) e^{-jkd_i}}{\pi W \sqrt{\epsilon_r}} \frac{e^{-jkS_i}}{\sqrt{d_i}} D_h \frac{e^{-jkS_i}}{\sqrt{S_i}}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

siendo D_h el coeficiente de difracción de frontera fuerte sin el efecto del dieléctrico y está dado en [6]. Además del campo GO y los campos difractados una vez, los campos doblemente difractados han de incluirse si se requiere un patrón en las regiones de las fronteras $\mu = 0^\circ$ y 180° .

El diagrama para el plano-H en la región hacia delante puede calcularse sumando tres rayos como se muestra en la Figura 2.10.

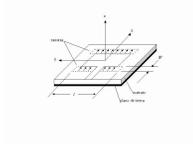


Figura 2.8: Configuración del modelo de ranura de la antena microstrip parche.

Figura 2.9: Radiación en el plano-E y mecanismos de difracción.

Figura 2.10: Radiación en el plano-H y mecanismos de difracción.

El campo directo GO desde la ranura está dado por

$$\mathbf{E}_{GO} = \hat{x} \frac{\sin(\pi l \cos \mu)}{\pi l \cos \mu} \sin \mu \frac{e^{-jkS}}{\sqrt{S}}. \quad (2.64)$$

Puesto que el campo eléctrico sobre la superficie de un conductor, cuando la polarización de la onda incidente es paralela a la superficie, se anula (condición de frontera suave), el campo difractado de primer orden desde cada borde es cero. Sin embargo, ha de tenerse en cuenta un campo difractado de segundo orden derivado de las ecuaciones de Maxwell y que puede verse como resultado del cambio rápido del campo GO. Este campo difractado, conocido como difracción inclinada, está dado por

$$\mathbf{E}_{inc} = \hat{x} \frac{1}{jk} \frac{1}{d_i} \frac{\partial E_{GO}}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0^\circ \text{ ó } 180^\circ} D_{sp} \frac{e^{-jkS}}{\sqrt{S_i}} \quad (2.65)$$

donde D_{sp} es el coeficiente de difracción inclinada y está dado en [6]. En la región hacia atrás del patrón del plano-H, sólo se necesita incluir las contribuciones de las difracciones en los bordes del plano-E, puesto que éstas tienen magnitud mucho mayor que las difracciones inclinadas de los bordes en el plano-H. Esta contribución de los bordes del plano-E puede calcularse con una corriente equivalente [7] como describe la siguiente ecuación (ver Figura 2.11):

$$\mathbf{E}_{eq} = \frac{jk}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \hat{S} \times \vec{I}_m(y') \frac{e^{-jkS}}{S} dy' \quad (2.66)$$

donde S , con \hat{S} el vector unitario, es la distancia entre el punto de difracción instantánea y' y el punto de observación. h es la longitud del borde en el plano-E y $Im(y')$ es la corriente lineal magnética equivalente dada por:

$$Im(y') = -\hat{y} \cdot \frac{\vec{H}_i(y')}{Y_0} D_h \sqrt{8\pi/k} e^{-j\pi/4} \quad (2.67)$$

siendo $H_i(y')$ el campo incidente en y' , D_h el coeficiente de difracción para condición de frontera fuerte, e Y_0 la admitancia en el espacio libre. En resumen, el campo para el plano-H es la suma del campo GO (E_{GO}), el campo difractado inclinado (E_{inc}) y el campo de integración de la corriente equivalente (E_{eq}).

Técnica de expansión modal

La técnica de expansión modal ha sido aplicada en el pasado para cálculos de patrones copolares e impedancias de entrada para radiadores microstrip

Figura 2.11: Corriente magnética lineal equivalente para el cálculo del diagrama de radiación Plano H.

Figura 2.12: Campo eléctrico en el perímetro de un parche microstrip cuadrado para (a) Modo 10 y (b) Modo 02. El punto indica la alimentación.

sobre un plano infinito de tierra. Se utiliza aquí, junto con GTD, no sólo para la predicción copolar, sino también para el comportamiento crosspolar con un plano finito de tierra. Los campos debajo del parche pueden determinarse modelando el parche como una cavidad con paredes magnéticas perfectas, como se vió en secciones anteriores. Una vez calculados los campos en el interior de la región de la cavidad, la corriente magnética inducida en el perímetro de las paredes magnéticas puede determinarse y el campo radiado se calculará integrando esta corriente. Este campo radiado se puede usar para encontrar los campos difractados en los bordes del plano finito de tierra, de igual forma que en (2.63), (2.65) y (2.66).

Para un parche rectangular como se muestra en la Figura 2.7, el campo eléctrico en la dirección \hat{z} dentro de la cavidad (debajo del parche) puede separarse en diferentes modos y puede escribirse ¹:

$$E_{mn}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y') \quad (2.68)$$

donde C_{mn} son coeficientes que dependen de m , n , las dimensiones del parche a y b , la constante dieléctrica y el tamaño de la alimentación. Los detalles fueron descritos en la Sección 2.3. La función modal ϕ_{mn} viene dada por la

¹Puede demostrarse que sólo se necesita sumar hasta el cuarto término para obtener precisión.

siguiente ecuación:

$$\phi_{mn}(x, y) = \cos(m\pi x/A) \cos(n\pi y/B), \quad (2.69)$$

donde (x, y) es un punto arbitrario debajo del parche, y (x', y') es la localización de la alimentación. Para polarización lineal y modo fundamental de operación, el término dominante, $E_{mn} = E_{10}$, genera el campo copolar, mientras que el término E_{02} genera el campo cross-polar. El efecto del resto de los modos tanto para el campo copolar como crosspolar es menos significativo. Como ejemplo, los campos en los perímetros para los modos E_{10} y E_{02} se ilustran en la Figura 2.12, donde E_{02} tiene magnitud mucho menor que el modo E_{10} . Las flechas verticales en el modo E_{10} indican el campo de borde copolar, y las flechas horizontales en el modo E_{02} indican el campo de borde cross-polar. Los campos de borde con variación sinusoidal contribuyen, en ambos modos, muy poco al campo lejano puesto que sus efectos se cancelan entre sí. Nótese que las flechas cross-polares en la Figura 2.12 tienen sentidos opuestos. Esta es la razón por la que el campo cross-polar de un parche rectangular o cuadrado siempre presenta un nulo en dirección "broadside".

2.4.3 Resultados

Se han calculado los patrones de radiación, para los planos E y H, de un parche microstrip rectangular y se han comparado con los resultantes de mediciones como se muestra en las Figuras 2.13 y 2.14. Las dimensiones de la antena son (Figura 2.7):

$$\begin{aligned} a &= 5.2831cm & e &= 26.0965cm \\ b &= 3.6977cm & h &= 34.7900cm \end{aligned} \quad (2.70)$$

El espesor del sustrato es 0.3106 cm y su constante dieléctrica relativa es 2.55, la frecuencia de operación es 2.295 GHz. En las Figuras 2.15 y 2.16 se muestran el efecto del plano de tierra finito y diferentes difracciones en los bordes. Se ha incluido la doble difracción en todos los cálculos del patrón del plano E. La Figura 2.15 ilustra la diferencia entre los patrones para el plano-E cuando la radiación del parche se calcula suponiendo un plano de tierra infinito o un plano de tierra de dos longitudes de onda.

Así, puede observarse el error total que se introduce al realizar los cálculos suponiendo un plano de tierra infinito.

La Figura 2.16 muestra las diferencias de patrones para el plano-H, según se considere o no, para el cálculo de la radiación, la difracción inclinada, así como la contribución de la corriente equivalente de borde del plano-E. De esta forma, se aprecia la importancia de las difracciones de borde.

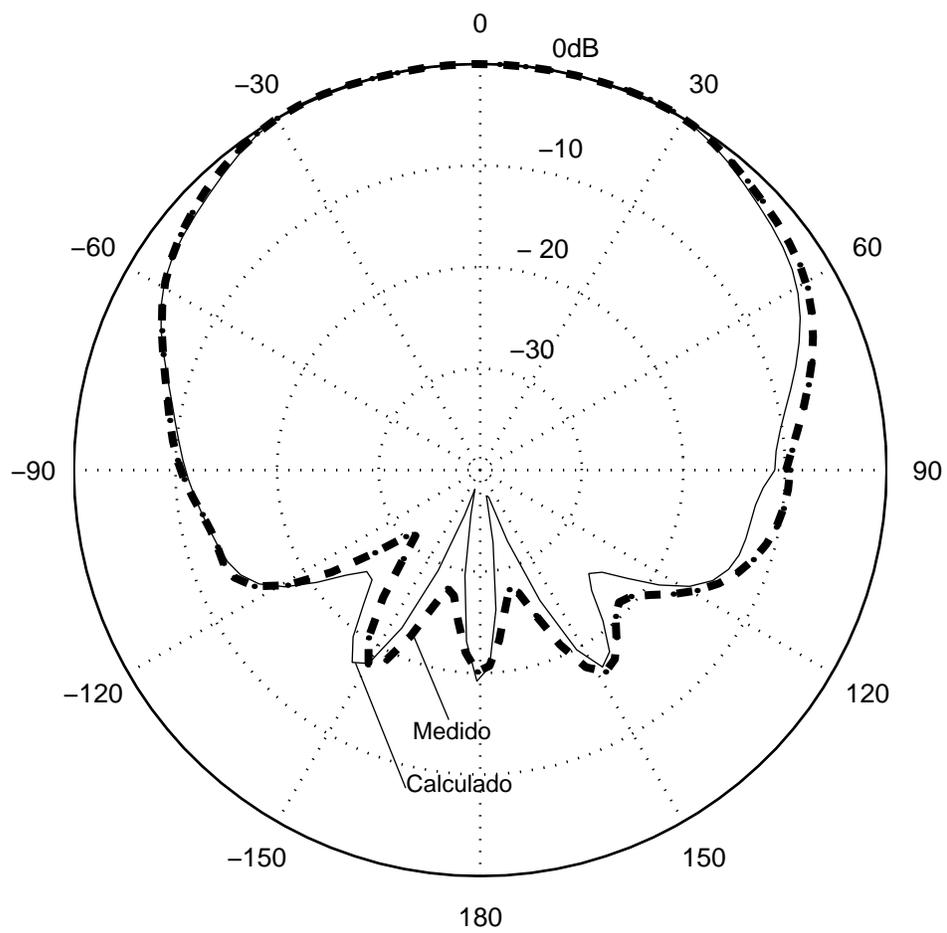


Figura 2.13: Diagrama de radiación plano-E.

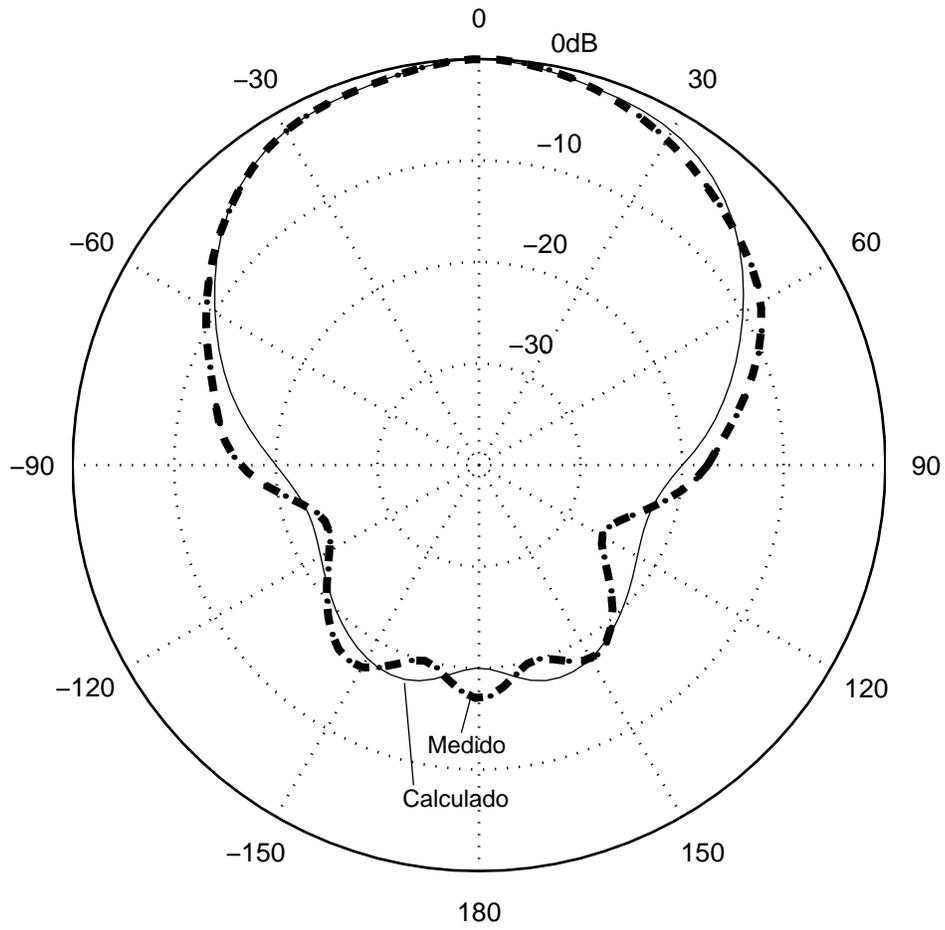


Figura 2.14: Diagrama de radiación plano-H.

Los cálculos en las Figuras 2.13-2.16 se han basado en la teoría de ranuras, que no proporciona información crosspolar. Véase [4] para notar la precisión de la predicción para campo crosspolar por la teoría de expansión modal.

Conclusiones

Se ha demostrado que la predicción de la radiación proporcionada por la teoría de ranura y la teoría de expansión modal, junto a la teoría geométrica uniforme de difracción GTD, se comporta correctamente. Se han incluido las difracciones de borde (GTD) en los cálculos para los planos E y H. En el plano-E, se han considerado las difracciones simples y dobles más la contribución del campo directo GO. En el plano-H, el campo total se ha determinado sumando las contribuciones de campo directo GO, difracción inclinada y campo de corriente equivalente de borde del plano-E. Los resultados experimentales muestran la bondad de las predicciones, en cuanto a la consideración de los efectos del plano de tierra finito, y ponen de manifiesto la necesidad de tal consideración cuando se requiere precisión en los patrones en regiones angulares anchas, así como en lóbulos hacia atrás.

2.5 Revisión de CAD para antenas microstrip.

2.5.1 Introducción

El software para diseño asistido por computador (CAD) se ha convertido en uno de los tópicos omnipresentes en los campos de ingeniería de microondas y antenas, a menudo no sólo debido a que facilitan el trabajo de los ingenieros, sino a que proporcionan una herramienta sin la que tal trabajo no sería posible. La forma ideal del software CAD de antenas es aquella que presenta una atractiva interfaz de usuario y está basada en modelos teóricos precisos y versátiles. Estas características han sido alcanzadas en gran medida en áreas tales como el análisis de circuitos de baja frecuencia (SPICE, etc) , y el análisis y optimización de circuitos de microondas pasivos y activos (Touchstone, SuperCompact, etc). Con estos productos de software, la confianza del usuario es grande y el diseño de prototipos conduce a la fabricación con un aceptable relación de error y pruebas. Por el contrario, el software CAD para antenas microstrip está muy atrasado, obligando frecuentemente a los diseñadores a costosas iteraciones experimentales, a veces, incluso para un sólo elemento radiante. Para arrays de elementos el coste de ajustes de pruebas y errores aumenta con el tamaño y complejidad del array, y ni siquiera existe garantía de que el proceso sea convergente.

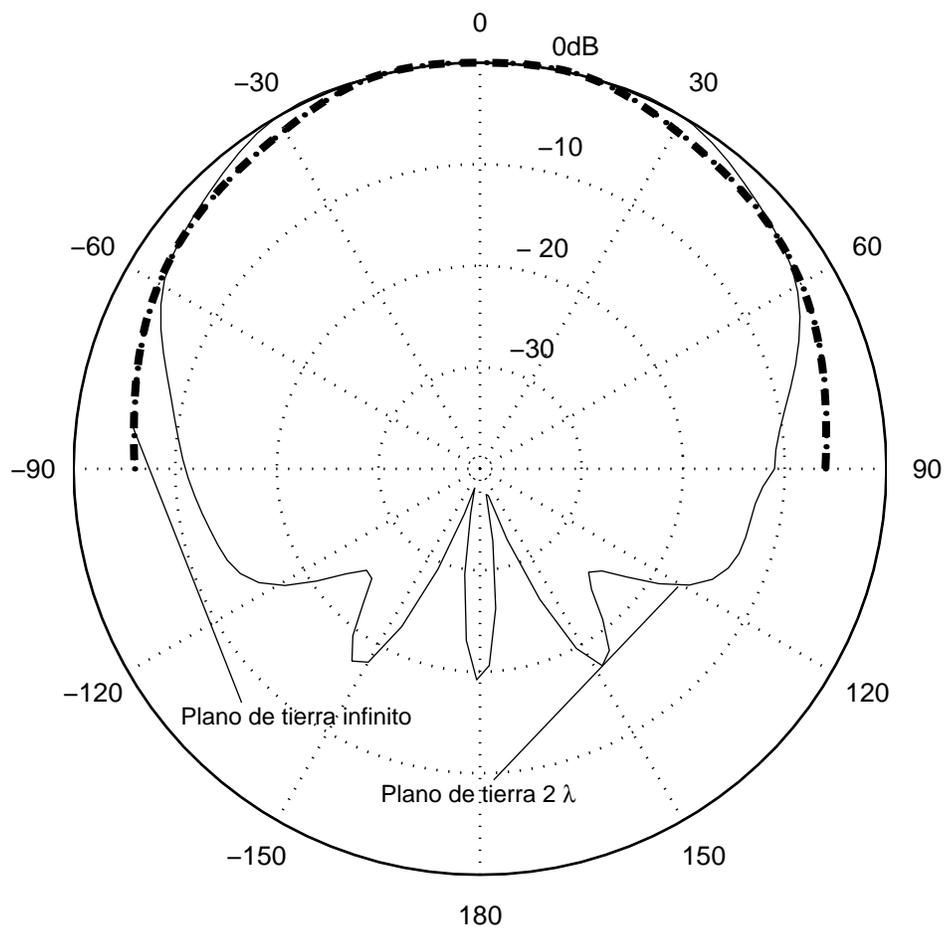


Figura 2.15: Comparación de los diagramas del plano-E para un parche que está sobre un plano de tierra de dos longitudes de onda y cuando está sobre un plano infinito de tierra

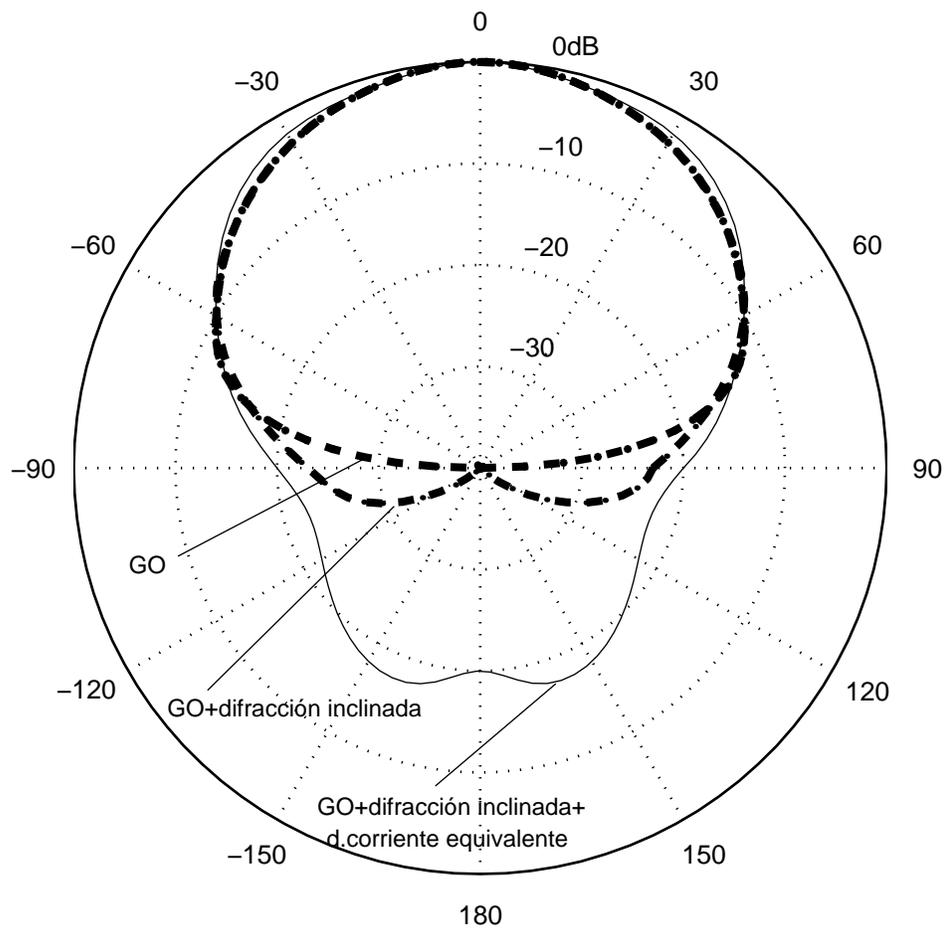


Figura 2.16: Diagrama de radiación del plano-H para diferentes contribuciones de borde.

Durante muchos años se han asociado a la tecnología de antenas microstrip la simplicidad de fabricación y su bajo coste, pero está claro que, al menos para los arrays, esto sólo ocurrirá con mejoras drásticas del software CAD. Debido a que no existe escasez de soluciones numéricas para problemas de antenas microstrip, uno puede preguntarse el porqué del mencionado atraso del CAD.

La realidad económica de que el mercado del software de antenas es relativamente reducido quizás explica porqué existe poco software comercializable para el diseño de cualquier tipo de antenas. Y en el caso de las antenas microstrip, puede deberse además a que tales antenas son relativamente nuevas y han recibido especial atención sólo en los últimos veinte años. Además, la geometría de las antenas microstrip es difícil de modelar a causa de la presencia de inhomogeneidades en el dieléctrico y de la gran variedad de técnicas de alimentación, así como de otras características geométricas. Esta última consideración hace el desarrollo de un paquete de análisis de antenas microstrip de propósito general extremadamente difícil. Finalmente, existen fuentes de error intrínsecas en los algoritmos numéricos, cuya totalidad resta precisión de manera importante.

En el ámbito académico sí ha sido prolífera la generación de soluciones analíticas y numéricas para una gran variedad de antenas microstrip y arrays, a menudo con gran originalidad y rigurosidad. Pero este trabajo es realizado, generalmente, para tesis o publicaciones, y el software está raramente escrito, validado o documentado por otros usuarios. Los investigadores en la industria son más prácticos, en el sentido de que desarrollan soluciones y las comparan para una geometría específica de antena, pero este software es considerado de su propiedad. El software de antenas que está disponible, por ejemplo NEC (código para antenas lineales), ESP (para modelado de líneas y láminas), TICRA (para diseño de antenas reflectoras), constituye una excepción.

2.5.2 Modelos de CAD y software comercial disponible.

Un modelo adecuado de antena puede emplearse para calcular todos los parámetros eléctricos necesarios de la antena bajo consideración, con suficiente precisión y eficiencia computacional, e interfaz para el usuario apropiada. Otra característica deseable puede ser la versatilidad para tratar variaciones de la geometría básica de la antena y proporcionar los valores de los parámetros para optimizar una determinada variable. En general, los modelos de CAD más sofisticados serán más precisos y versátiles, pero llevarán consigo un coste más elevado y requerirán más recursos de computación en comparación con modelos más simples. Como se discutió anteriormente, el tratamiento de antenas microstrip y arrays es complicado por varios factores,

y se han propuesto numerosas soluciones para diferentes estructuras, pero la mayoría de los modelos pueden englobarse en dos grupos: análisis simplificado (o reducido) y métodos de onda completa. A continuación, se exponen los modelos analíticos pertenecientes a estas dos categorías:

Análisis Reducido.

Por análisis reducido se entienden aquellos modelos de antenas microstrip que introducen una o más aproximaciones significativas para simplificar el problema. Estos incluyen los modelos de cavidad, que usan una aproximación de condición de frontera de pared magnética para la periferia del parche; los modelos de línea de transmisión, que modelan el parche como una sección de línea de transmisión con cargas en los bordes radiantes; y el modelo de redes multipuerta, que puede verse como una generalización del modelo de cavidad. Estos modelos fueron los primeros para el desarrollo de antenas microstrip, y han sido usados para diseños prácticos y también para disponer de una explicación intuitiva del funcionamiento de la antena microstrip. Entre las desventajas de tales modelos se incluye la limitada precisión para el caso de sustratos que no son delgados, y la incapacidad para manejar correctamente problemas relacionados con acoplamiento mutuo, efectos de redes de alimentación, efectos de ondas superficiales, y configuraciones de sustrato múltiple.

Análisis de onda completa.

Los modelos de antenas microstrip que consideran el sustrato dieléctrico de manera rigurosa se denominan soluciones de onda completa. Entre ellos se incluyen las soluciones del método de los momentos que utilizan la función exacta de Green para el sustrato dieléctrico, así como soluciones basadas en el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), y el método de los elementos finitos (FEM). Algunas de las características de los modelos de onda completa son la alta precisión y la capacidad para calcular todos los parámetros eléctricos relevantes para una amplia gama de geometrías de la antena, incluyendo configuraciones multisustrato, arrays con redes de alimentación, y varias configuraciones de elementos acoplados. La principal desventaja de las soluciones de onda completa es el elevado coste computacional.

Las soluciones del método de los momentos han recibido la mayor atención hasta la fecha, con una gran variedad de soluciones desarrolladas para geometrías específicas de la antena. Estas soluciones, generalmente, suponen el sustrato de dimensión infinita, y modelan la corriente eléctrica sobre

los parches y la red de alimentación en términos de funciones base . Tales modelados consumen mucho tiempo computacional, debido a integraciones numéricas del tipo integrales de Sommerfeld , en dominio espectral o espacial.

Las soluciones FDTD y FEM analizan la estructura completa de la antena, incluyendo componentes de dieléctrico y de metal. Esta aproximación proporciona un alto grado de versatilidad para el tratamiento de geometrías arbitrarias, incluyendo dieléctricos multisustrato e inhomogéneos, pero esto se consigue a costa de aumentar el tiempo de computación que es, típicamente, mucho mayor que el de soluciones del método de los momentos para geometrías comparables. En el caso de geometrías que puedan analizarse por el método de los momentos, estos tienen la ventaja computacional en comparación con los métodos FDTD y FEM puesto que el dieléctrico es tenido en cuenta con la función de Green, y sólo los conductores deben modelarse con funciones base. La diferencia puede ser especialmente significativa para los arrays, pero se hace menos crítica si se incrementa la potencia de las estaciones de trabajo. Las recientes técnicas híbridas que combinan resultados analíticos conocidos dentro de FDTD y FEM, realizan un esfuerzo para la reducción del problema computacional de estos métodos.

Software comercial disponible para CAD de antenas microstrip.

A continuación, se citan algunos de los paquetes de software disponibles en el mercado para el diseño de antenas y arrays microstrip, y se añade la compañía que los ha creado, su coste aproximado, y el modelo teórico que utilizan.

-ENSEMBLE (Boulder Microwave Technologies, Inc Boulder,CO; \$10000), es el más utilizado y con el que se trabaja en este proyecto, emplea soluciones del método de los momentos para antenas y pequeños arrays microstrip, incluyendo los efectos de redes de alimentación coplanares.

-MICROPATCH (Microstrip Designs, Inc Boulder,CO; \$300) se basa en métodos de segmentación multipuerta para elementos y arrays.

-PCAAD (Antenna Design Associates, Inc Leverett, MA; \$200) cuyo modelo teórico es el modelo de cavidad.

-PATVU (Sonnet Software, Inc Liverpool,NY; \$40000) emplea el método de los momentos.

Algunos otros, más recientes, son: HP Momentum (basado en el método de los momentos) y XFDTD (basado en el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo).

Capítulo 3

El método de los elementos finitos.

3.1 Métodos clásicos para problemas valor-frontera.

En esta Sección, en primer lugar, se definen los BVP, y se hace una revisión de dos métodos clásicos para su solución. Uno de ellos es el método variacional de Ritz y el otro es el método de Galerkin. Ambos constituyen la base del método de los elementos finitos moderno.

3.1.1 Problemas valor-frontera.

Un BVP típico puede definirse con una ecuación diferencial gobernante en un dominio Ω :

$$L\phi = f \tag{3.1}$$

junto a las condiciones de frontera en la frontera Γ que encierra al dominio. En (3.1), L es un operador diferencial, f es la función excitación, y ϕ es la magnitud desconocida. En problemas electromagnéticos, la ecuación diferencial puede ser desde una simple ecuación de Poisson hasta ecuaciones de ondas escalares o vectoriales. Igualmente, las condiciones de frontera vienen dadas por simples condiciones de Dirichlet y Neumann, o bien, por complicadas condiciones de impedancia y radiación o por condiciones de alto orden.

Una gran cantidad de problemas de importancia práctica en ingeniería no pueden ser resueltos analíticamente. Para solventar esta dificultad, se han desarrollado varios métodos de aproximación, entre ellos los métodos de Ritz y Galerkin han sido comúnmente utilizados.

3.1.2 El método de Ritz.

El método de Ritz, también conocido como método de Rayleigh-Ritz, es un método variacional en el que el BVP se formula en términos de una expresión variacional, que denominamos funcional, cuyo mínimo corresponde a la ecuación diferencial gobernante bajo las condiciones de frontera dadas. De este modo, la solución aproximada se obtiene minimizando el funcional con respecto a sus variables. Para ilustrar el procedimiento, definimos primero el producto interno como:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi \psi^* d\Omega \quad (3.2)$$

donde "*"denota el complejo conjugado. Con esta definición se puede demostrar que el operador L cumple:

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle \quad (3.3)$$

y es definido positivo, es decir,

$$\langle L\phi, \phi \rangle \begin{cases} > 0 & \phi \neq 0 \\ = 0 & \phi = 0 \end{cases}$$

y la solución a (3.1) puede obtenerse minimizando el funcional

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \langle L\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{\phi}, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \tilde{\phi} \rangle \quad (3.4)$$

con respecto a $\tilde{\phi}$, donde $\tilde{\phi}$ denota la función de prueba. El fundamento y la extensión a casos generales de interés en electromagnetismo de (3.4) son discutidos en [8].

Una vez hallado el funcional, la solución se obtiene según lo anterior. Por simplicidad, se asume que se trata de un problema de valores reales¹ y que $\tilde{\phi}$ en (3.4) puede aproximarse por:

$$\tilde{\phi} = \sum_{j=1}^N c_j v_j = \{c\}^T \{v\} = \{v\}^T \{c\} \quad (3.5)$$

donde v_j son las funciones de expansión definidas en el todo el dominio y c_j son coeficientes constantes a determinar. $\{ \}$ denota un vector columna y el superíndice T su transposición. Sustituyendo (3.5) en (3.4), se tiene:

$$F = \frac{1}{2} \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} L \{v\}^T d\Omega \{c\} - \{c\}^T \int_{\Omega} \{v\} f d\Omega \quad (3.6)$$

¹La formulación para problemas de valores complejos se describe en [8].

Para minimizar $F(\tilde{\phi})$ se toman derivadas parciales con respecto a c_i y se igualan a cero. De este modo, resulta un conjunto de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_i} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_i L\{v\}^T d\Omega \{c\} + \frac{1}{2} \{c\}^T \int_{\Omega} L v_i d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} (v_i L v_j + v_j L v_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i f d\Omega \\ &= 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (3.7)$$

que puede expresarse en forma matricial:

$$[S]\{c\} = \{b\} \quad (3.8)$$

siendo los elementos de la matriz S

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_i L v_j + v_j L v_i) d\Omega \quad (3.9)$$

y los de $\{b\}$

$$b_i = \int_{\Omega} v_i f d\Omega \quad (3.10)$$

Es evidente que $[S]$ es una matriz simétrica. Utilizando (3.3), S_{ij} puede expresarse:

$$S_{ij} = \int_{\Omega} v_i L v_j d\Omega \quad (3.11)$$

Así, se obtiene una solución para (3.1) resolviendo la ecuación matricial (3.8).

3.1.3 El método de Galerkin

El método de Galerkin pertenece a la familia de los métodos de residuo ponderado que, como su nombre indica, buscan la solución por ponderación del residuo de la ecuación diferencial. Siendo $\tilde{\phi}$ una solución aproximada a (3.1), al sustituir $\tilde{\phi}$ por ϕ en (3.1) resulta un residuo no nulo

$$r = L\tilde{\phi} - f \neq 0 \quad (3.12)$$

La mejor aproximación para $\tilde{\phi}$ será aquella que reduzca el residuo r , en cada punto de Ω , al mínimo valor. Los métodos de residuo ponderado imponen la condición

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

donde R_i es la integral del residuo ponderado y w_i es la función de peso elegida.

En el método de Galerkin, la función de peso es la utilizada en la expansión de la solución aproximada, es decir, suponiendo que la solución se expresa como en (3.5), las funciones de peso se eligen

$$w_i = v_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.14)$$

No se ilustra aquí este método², puesto que no se recurre a él en los problemas planteados en este proyecto.

3.1.4 Ejemplo.

Después de la breve revisión de los métodos de Ritz y Galerkin, se ilustran sus procedimientos de resolución aplicándolos a un problema valor-frontera simple y se introduce el método de los elementos finitos utilizando este ejemplo.

Descripción del problema.

El problema concreto que se va a considerar trata de encontrar el potencial estático ϕ entre dos planos infinitos paralelos. Un plano se sitúa en $x = 0$ con $\phi = 0$ voltios y el otro se coloca en $x = 1$ con $\phi = 1$ voltios. El espacio entre los planos se rellena con un medio de permitividad eléctrica constante ϵ F/m y una densidad de carga eléctrica $\rho(x) = -(x+1)\epsilon$. Este problema se describe matemáticamente mediante la ecuación de Poisson que se simplifica con la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = x + 1 \quad 0 < x < 1 \quad (3.15)$$

junto a las condiciones de frontera dadas por

$$\phi|_{x=0} = 0 \quad (3.16)$$

$$\phi|_{x=1} = 1 \quad (3.17)$$

La solución exacta al problema es

$$\phi(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \quad (3.18)$$

que se obtiene fácilmente integrando (3.15) dos veces y aplicando (3.16) y (3.17) para determinar las constantes de integración. Sin embargo, la mayoría

²Véase [8]

de los problemas prácticos no tienen una solución tan simple y, en muchos casos, sólo pueden obtenerse soluciones aproximadas. Por esta razón, se supone aquí desconocida la solución exacta y utilizamos los métodos de Ritz y Galerkin para encontrarla.

Solución por el Método de Ritz.

Como se mencionó anteriormente, en el Método de Ritz se formula el problema en términos de un funcional cuyo mínimo corresponde a la ecuación diferencial bajo las condiciones de frontera dadas. Para el problema definido en(3.15)-(3.17), puede demostrarse [8] que el funcional está dado por

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 (x+1)\tilde{\phi} dx \quad (3.19)$$

Mediante el procedimiento de Ritz se encontrará $\phi(x)$. Según este método, se expande $\tilde{\phi}$ en términos de polinomiales (nótese que las polinomiales son uno de los numerosos tipos de funciones de prueba),

$$\tilde{\phi}(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 \quad (3.20)$$

siendo $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ las constantes a determinar. Aplicando las condiciones de frontera (3.16) y (3.17), se obtiene $c_1 = 0$ y $c_2 = 1 - c_3 - c_4$, que reduce (3.20) a

$$\tilde{\phi}(x) = x + c_3(x^2 - x) + c_4(x^3 - x). \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.21) en (3.19) y resolviendo las integrales, se obtiene

$$F = \frac{2}{5}c_4^2 + \frac{1}{6}c_3^2 + \frac{1}{2}c_3c_4 - \frac{23}{60}c_4 - \frac{1}{4}c_3 + \frac{4}{3} \quad (3.22)$$

cuyas derivadas con respecto a c_3 y c_4 son

$$\frac{\partial F}{\partial c_3} = \frac{1}{3}c_3 + \frac{1}{2}c_4 - \frac{1}{4} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_4} = \frac{1}{2}c_3 + \frac{4}{5}c_4 - \frac{23}{60} \quad (3.24)$$

e igualando a cero se tienen dos ecuaciones lineales cuyas soluciones son $c_3 = \frac{1}{2}$ y $c_4 = \frac{1}{6}$, y el resultado es el mismo que el dado en (3.18). Se puede obtener la solución exacta en este caso porque la función de prueba empleada es capaz de representar la solución exacta, lo cual no es posible en la mayoría de los casos.

Figura 3.1: División del dominio (0,1) en tres subdominios.

Solución por el Método de Galerkin.

Se reconsidera el problema utilizando el Método de Galerkin. La ecuación del residuo ponderado para (3.15) es

$$\int_0^1 w_i \left(\frac{d^2 \tilde{\phi}}{dx^2} - x - 1 \right) dx = 0 \quad (3.25)$$

Usando la misma expansión (3.21) para $\tilde{\phi}$, y considerando $w_1 = x^2 - x$ y $w_2 = x^3 - x$, que son las funciones de expansión asociadas para c_3 y c_4 , se obtiene

$$\frac{1}{3}c_3 + \frac{1}{2}c_4 - \frac{1}{4} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{2}c_3 + \frac{4}{5}c_4 - \frac{23}{60} = 0 \quad (3.27)$$

cuyos resultados son, de nuevo, $c_3 = \frac{1}{2}$ y $c_4 = \frac{1}{6}$.

Solución usando Funciones de Expansión en Subdominios: El Método de los Elementos Finitos.

En los procedimientos seguidos anteriormente, se deduce que encontrar una función de prueba definida sobre el dominio completo que sea capaz de representar la solución verdadera del problema es un paso muy importante en los métodos de Ritz y Galerkin. Para la mayoría de los problemas que se plantean, esto es muy difícil o imposible y, en particular, para problemas en dos o tres dimensiones. Para solventar esta dificultad, se puede dividir el dominio completo en pequeños subdominios y emplear la función de prueba definida para cada subdominio. Generalmente, estas funciones de prueba son fáciles de encontrar puesto que los subdominios son pequeños y la función $\phi(x)$ tiene variaciones mucho menores en ellos. Para ilustrar este procedimiento, se reconsidera el problema definido por (3.15)-(3.17).

En primer lugar, se divide el dominio completo (0,1) en tres subdominios definidos por (x_1, x_2) , (x_2, x_3) y (x_3, x_4) , siendo los puntos extremos $x_1 = 0$ y

3.1. MÉTODOS CLÁSICOS PARA PROBLEMAS VALOR-FRONTERA.57

$x_4 = 1$ (Figura 3.1). Los otros dos puntos pueden ser, por ejemplo, $x_2 = \frac{1}{3}$ y $x_3 = \frac{2}{3}$. Se supone una variación lineal de $\phi(x)$ en cada subdominio definida por

$$\tilde{\phi}(x) = \phi_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \phi_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.28)$$

para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ e $i = 1, 2, 3$, siendo ϕ_i constantes a determinar. Nótese que ϕ_i representa el valor de $\phi(x)$ cuando $x = x_i$. A partir de las condiciones de frontera (3.16) y (3.17) se tiene que $\phi_1 = 0$ y $\phi_4 = 1$. Se puede determinar el resto de las constantes, ϕ_2 y ϕ_3 , empleando el método variacional de Ritz o el método de Galerkin.

Se aplicará el método de Ritz: se minimiza el funcional F . Para ello, se sustituye (3.28) en (3.19) y se obtiene

$$F = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x+1) \left(\phi_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + \phi_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) dx \right] \quad (3.29)$$

Evaluando las integrales resulta

$$F = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \left[\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 + \phi_{i+1} \left(\frac{2}{3} x_{i+1} + \frac{1}{3} x_i + 1 \right) + \phi_i \left(\frac{2}{3} x_i + \frac{1}{3} x_{i+1} + 1 \right) \right] \quad (3.30)$$

que puede escribirse como

$$F = 3\phi_2^2 + 3\phi_3^2 - 3\phi_2\phi_3 + \frac{4}{9}\phi_2 - \frac{22}{9}\phi_3 + \frac{49}{27} \quad (3.31)$$

tras sustituir los valores de x_i , ϕ_1 y ϕ_4 . Para minimizar F , se toman las derivadas parciales de F con respecto a ϕ_2 y ϕ_3 y se igualan a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_2} = 6\phi_2 - 3\phi_3 + \frac{4}{9} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_3} = -3\phi_2 + 6\phi_3 - \frac{22}{9} = 0 \quad (3.33)$$

de donde se obtiene que

$$\phi_2 = \frac{14}{81} \quad \text{y} \quad \phi_3 = \frac{40}{81}. \quad (3.34)$$

El resultado anterior también puede calcularse usando el método de Galerkin, en el cual se eligen las funciones de expansión implicadas en (3.28) como funciones de peso w_i para usar en (3.25), (véase [8]).

Una vez obtenida la solución en x_i , la solución en cualquier otro punto se calcula a partir de la interpolación lineal dada en (3.28). Nótese que aunque se han obtenido los valores exactos en x_i , existe una pequeña discrepancia en el resto de puntos, que disminuirá a medida que aumente el número de subdivisiones.

*El procedimiento de resolución que se ha descrito es idéntico al del MEF. El proceso que utiliza el método de Ritz se conoce como **método de elementos finitos de Ritz** y, más comúnmente, **método variacional de elementos finitos**, mientras que el que emplea el método de Galerkin se denomina **método de Galerkin de elementos finitos**. El MEF difiere de los métodos clásicos de Ritz y Galerkin en la formulación de la función de prueba. En los últimos, la función de prueba se formula como un conjunto de funciones base definidas en el **dominio completo**. Esta combinación debe ser capaz de representar, al menos aproximadamente, la solución verdadera y satisfacer las condiciones de frontera adecuadas. En el MEF, la función de prueba es una combinación de un conjunto de funciones base definidas en los **subdominios** en que se divide el dominio completo. Puesto que tales subdominios son pequeños las funciones base definidas en ellos pueden ser bastante simples.*

Para problemas simples en una dimensión con fronteras regulares, podrían utilizarse los métodos clásicos de Ritz y Galerkin. Sin embargo, para problemas en dos y tres dimensiones, y también para problemas con fronteras irregulares, resulta muy complicado y, a menudo, imposible, encontrar las funciones de prueba requeridas para el dominio completo. Además, los problemas complejos, de interés práctico, son resueltos con ayuda del computador y el *MEF* está especialmente diseñado para ello: se escribe un programa, que implemente el procedimiento de resolución, en un lenguaje de programación³ y se ejecuta para encontrar la solución.

En conclusión, es la idea de utilizar funciones base definidas en los subdominios la que hace posible abordar BVP complicados, y es el uso del computador lo que lo hace práctico. Por esta razón, el *MEF* se cataloga como uno de los métodos de *diseño asistido por computador (CAD)* más utilizados en la mayoría de los problemas de ingeniería, incluyendo análisis de estructuras, mecánica de fluidos, vibración, transferencia de calor y electromagnetismo.

³MATLAB 5.3.1. en este proyecto

3.2 Pasos básicos en el MEF.

El principio del método es reemplazar un dominio continuo completo por un número de subdominios en los que la función desconocida es representada por simples funciones de interpolación con coeficientes desconocidos. Así, el BVP original con un número infinito de grados de libertad se convierte en un problema con un número finito de grados de libertad, o en otras palabras, la solución del sistema completo se aproxima con un número finito de coeficientes desconocidos. Se obtiene un sistema de ecuaciones lineales ,aplicando el método variacional de Ritz o el procedimiento de Galerkin, cuya resolución permitirá determinar la solución del BVP. Así pues, el análisis de elementos finitos puede dividirse en los siguientes pasos:

- 1. Discretización o subdivisión del dominio.
- 2. Selección de las funciones de interpolación.
- 3. Formulación del sistema de ecuaciones.
- 4. Resolución del sistema de ecuaciones.

A continuación se describe con detalle cada paso.

3.2.1 Discretización del dominio.

La discretización del dominio Ω es el primero y, quizás, el más importante de los pasos en cualquier análisis de elementos finitos porque afecta a los requerimientos de almacenamiento en el computador, al tiempo de computación y a la precisión de los resultados numéricos. En este paso, el dominio completo Ω se divide en un número de pequeños dominios denotados por Ω_e ($e = 1, 2, 3, \dots, M$), siendo M el número total de subdominios, que denominamos usualmente elementos. Para una dimensión, el dominio es una línea recta o curva, los elementos son pequeños segmentos interconectados para formar la línea original (Figura 3.2(a)). Para un dominio en dos dimensiones los elementos son, generalmente, triángulos o rectángulos (Figura 3.2(b)). Evidentemente, los elementos rectangulares convienen para dominios rectangulares, mientras que, los elementos triangulares son más útiles en el caso de regiones irregulares. Para una solución en tres dimensiones, el dominio puede subdividirse en tetraedros o prismas rectos triangulares o rectangulares (Figura 3.2(c)). Los tetraedros son los más adecuados para discretizar volúmenes arbitrarios. Nótese que segmentos, triángulos y tetraedros son los elementos básicos en una, dos, y tres dimensiones que modelan líneas o superficies curvas con segmentos de línea rectos o trozos de superficie planares.

Figura 3.2: Elementos finitos básicos. (a) una dimensión. (b) dos dimensiones. (c) tres dimensiones.

En la mayoría de las soluciones de elementos finitos, el problema se formula en términos de la función desconocida ϕ en los vértices de los elementos. Tales vértices se denominan nodos. Para la implementación es necesario describir estos nodos. Una descripción completa de un nodo contiene sus coordenadas, número local y número global. El número local del nodo indica su posición en el elemento, mientras que el número global especifica su posición en el sistema entero. Mientras que la especificación de coordenadas es tarea bien conocida, la numeración de nodos y elementos requiere alguna estrategia. El resultado de la formulación de elementos finitos es, generalmente, una matriz a bandas cuya anchura está determinada por la máxima diferencia entre los números globales en dos nodos en un elemento. Así, si se emplea un método de resolución de sistemas con matrices a bandas, el almacenamiento requerido y el coste de procesamiento pueden reducirse considerablemente con la numeración apropiada de los nodos para minimizar la anchura de las bandas. Sin embargo, cuando la mencionada minimización es innecesaria, la numeración es arbitraria y, usualmente, elegida para simplificar la programación.

Generalmente, la discretización del dominio se considera una cuestión de preprocesamiento porque está completamente separada del resto de los pasos.

La mayoría de los paquetes de programas de elementos finitos son capaces de subdividir líneas, superficies y volúmenes arbitrarios en los elementos correspondientes y además proveer la numeración global óptima.

3.2.2 Selección de las funciones de interpolación.

El segundo paso del análisis mediante elementos finitos es seleccionar una función de interpolación que proporcione una aproximación de la solución desconocida dentro de un elemento. La interpolación elegida es, generalmente, una polinomial de primer orden (lineal), segundo orden (cuadrática), o más alto orden. Los polinomios de alto orden proporcionan más precisión, pero la formulación resultante suele ser más complicada. Por esto, la interpolación lineal es la más extendida. Una vez elegido el orden de la polinomial, la solución en un elemento, que llamamos e , puede expresarse:

$$\tilde{\phi}^e = \sum_{j=1}^n N_j^e \phi_j^e = \{N^e\}^T \{\phi_e\} = \{\phi^e\}^T \{N^e\} \quad (3.35)$$

donde n es el número de nodos en el elemento, ϕ_j^e el valor de en el nodo j del elemento, y N_j^e la función de interpolación, también conocida como función de expansión o función base. Al orden más alto de N_j^e se le llama orden del elemento. Una característica importante de las funciones N_j^e es que son distintas de cero sólo dentro del elemento e , fuera se anulan.

3.2.3 Formulación del Sistema de Ecuaciones.

El tercer paso, también de gran importancia en el análisis de elementos finitos, consiste en formular el sistema de ecuaciones. Con este propósito, se puede recurrir a los métodos descritos anteriormente: variacional de Ritz y Galerkin. Consideramos la formulación variacional de Ritz.

De nuevo, se plantea el problema definido en (3.1) y, por simplicidad, se asume que el problema es de valor real. El funcional F dado en (3.4) puede expresarse como

$$F(\tilde{\phi}) = \sum_{e=1}^M F^e(\tilde{\phi}^e) \quad (3.36)$$

donde M es el número de elementos que forman el dominio completo y

$$F^e(\tilde{\phi}^e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \tilde{\phi}^e L \tilde{\phi}^e d\Omega - \int_{\Omega_e} f \tilde{\phi}^e d\Omega \quad (3.37)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.37), se obtiene

$$F^e = \frac{1}{2} \{\phi^e\}^T \int_{\Omega_e} \{N^e\} L \{N^e\}^T d\Omega \{\phi^e\} - \{\phi^e\}^T \int_{\Omega_e} f \{N^e\} d\Omega \quad (3.38)$$

que puede escribirse en forma matricial:

$$F^e = \frac{1}{2} \{\phi^e\}^T [K^e] \{\phi^e\} - \{\phi^e\}^T \{b^e\} \quad (3.39)$$

siendo $[K^e]$ una matriz $n \times n$ y b^e un vector columna $n \times 1$ cuyos elementos vienen dados por

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} N_i^e L N_j^e d\Omega \quad (3.40)$$

y

$$b_i^e = \int_{\Omega_e} f N_i^e d\Omega. \quad (3.41)$$

Nótese que la matriz elemental $[K^e]$ es simétrica (por la propiedad del operador L dada en (3.3)). Sustituyendo (3.39) en (3.36), se tiene

$$F(\tilde{\phi}) = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \{\phi^e\}^T [K^e] \{\phi^e\} - \{\phi^e\}^T \{b^e\} \right) \quad (3.42)$$

y desarrollando el sumatorio y adoptando numeración global, esto puede escribirse como

$$F = \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K] \{\phi\} - \{\phi\}^T \{b\} \quad (3.43)$$

donde $[K]$ es una matriz simétrica $N \times N$ con N el número total de incógnitas o nodos, ϕ es un vector $N \times 1$ cuyos elementos son los coeficientes de expansión desconocidos, y b es un vector $N \times 1$ conocido. El sistema de ecuaciones se obtiene imponiendo el requerimiento de estacionariedad $\delta F = 0$, o equivalentemente, tomando derivada parcial de F con respecto a ϕ_i e igualando a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (K_{ij} + K_{ji}) \phi_j - b_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.44)$$

Puesto que $[K]$ es una matriz simétrica, $K_{ij} = K_{ji}$, y (3.44) se convierte en

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = \sum_{j=1}^N K_{ij} \phi_j - b_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.45)$$

o, en forma matricial,

$$[K] \{\phi\} = b. \quad (3.46)$$

3.2.4 Resolución del Sistema de Ecuaciones.

La resolución del sistema de ecuaciones es el paso final en un análisis de elementos finitos. El sistema resultante tiene una de las dos formas siguientes:

$$[K]\{\phi\} = \{b\} \quad (3.47)$$

o

$$[A]\{\phi\} = \lambda[B]\{\phi\} \quad (3.48)$$

La ecuación (3.47) es del tipo determinista, resultante de una ecuación diferencial inhomogénea o de condiciones de frontera inhomogéneas, o de ambas. En electromagnetismo, los sistemas deterministas están asociados, generalmente con problemas de *scattering*, radiación y otros problemas deterministas en los que existe una fuente o excitación. Por el contrario, (3.48) es del tipo autovalor, proveniente de una ecuación diferencial homogénea y condiciones de frontera homogéneas. En la mayoría de los casos en electromagnetismo, los sistemas de autovalores corresponden a problemas libres de fuentes, tales como propagación de ondas en guíaondas y resonancias en cavidades. En este caso, el vector conocido $\{b\}$ desaparece y la matriz $[K]$ puede escribirse como $[A] - \lambda[B]$, donde λ corresponde a los autovalores desconocidos.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones para $\{\phi\}$, podemos calcular los parámetros deseados, por ejemplo, capacidad, inductancia, impedancia de entrada y patrones de *scattering* o radiación. Esta etapa final, que suele denominarse post-procesamiento, también está separada del resto de los pasos.

3.3 Análisis del MEF 3D.

3.3.1 Problema valor-frontera 3D.

El problema a considerar está definido por la ecuación diferencial de segundo orden

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) + \beta \phi = f \quad (x, y, z) \in V \quad (3.49)$$

y las condiciones de frontera

$$\phi = p \quad \text{en } S_1 \quad (3.50)$$

y

$$(\alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) \cdot \hat{n} + \gamma \phi = q \quad \text{en } S_2 \quad (3.51)$$

$$S = S_1 + S_2$$

donde S denota la superficie que encierra al volumen V y \hat{n} es el vector unitario normal hacia fuera. Si α_x , α_y , y α_z tienen discontinuidades dentro de V , ϕ satisface las condiciones de continuidad dadas por

$$\phi^+ = \phi^- \quad \text{en } S_d \quad (3.52)$$

y

$$\begin{aligned} & (\alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} + \alpha_z^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial z}) \cdot \hat{n} \\ &= (\alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} + \alpha_z^- \frac{\partial \phi^-}{\partial z}) \cdot \hat{n} \quad \text{en } S_d \end{aligned} \quad (3.53)$$

siempre que no existan fuentes superficiales de ningún tipo en las interfaces de discontinuidad. S_d denota la interfaz de discontinuidad, el superíndice "+" indica que el punto de observación se aproxima a S_d desde la cara "+", análogamente el superíndice "-" para la cara "-", y \hat{n} es el vector unitario normal a S_d .

3.3.2 Formulación variacional.

El problema variacional equivalente para el problema planteado en el apartado anterior, está dado por

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) &= 0 \\ \text{con } \phi &= p \quad \text{en } S_1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \frac{1}{2} \iiint_V [\alpha_x (\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 + \alpha_y (\frac{\partial \phi}{\partial y})^2 + \alpha_z (\frac{\partial \phi}{\partial z})^2 + \beta \phi^2] dV \\ &+ \iint_{S_2} (\frac{\gamma}{2}) dS - \iiint_V f \phi dV \end{aligned} \quad (3.55)$$

que es válida para valores reales o complejos de $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$, y γ . Si todos estos parámetros son reales existe una forma alternativa para el funcional dada por

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \frac{1}{2} \iiint_V [\alpha_x |\frac{\partial \phi}{\partial x}|^2 + \alpha_y |\frac{\partial \phi}{\partial y}|^2 + \alpha_z |\frac{\partial \phi}{\partial z}|^2 + \beta |\phi|^2] dV \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{S_2} (\gamma |\phi|^2 - q \phi^* - q^* \phi) dS \\ &- \frac{1}{2} \iiint_V (f^* \phi + f \phi^*) dV \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nótese que si existen discontinuidades en α_x, α_y , y α_z , a (6) se le debe añadir la condición de continuidad (3.52). Para este problema, (3.50) y (3.52) son condiciones esenciales que deban ser impuestas explícitamente, mientras que (3.51) y (3.53) son condiciones naturales que se satisfacen automáticamente con la ecuación diferencial (3.49).

3.3.3 Aplicación a problemas de campos armónicos en el tiempo.

Descripción del problema.

Para el caso de campos armónicos en el tiempo, el problema del campo eléctrico se trata considerando

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 Z_0 \mathbf{J} \quad (3.57)$$

y de forma similar para el campo magnético

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J} \right) \quad (3.58)$$

Las condiciones de frontera que se encuentran normalmente son las aplicadas a superficies conductoras eléctricas,

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.59)$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.60)$$

y sus duales para superficies conductoras magnéticas,

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.61)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.62)$$

Otras condiciones que se pueden encontrar, aunque no a menudo, son las de tercer tipo, que pueden expresarse como

$$\frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \gamma_e \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{U} \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{\epsilon_r} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \gamma_h \hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{H}) = \mathbf{V} \quad (3.64)$$

donde γ_e y γ_h son parámetros conocidos, y \mathbf{U} y \mathbf{V} son vectores conocidos. Obviamente, estas dos ecuaciones pueden ser utilizadas para representar

condiciones de impedancia de frontera y condiciones de radiación de Sommerfeld. Las condiciones de continuidad que se aplican en las interfaces de separación de dos medios diferentes son

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^+ = \hat{n} \times \mathbf{E}^- \quad (3.65)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^+ = \hat{n} \times \mathbf{H}^- \quad (3.66)$$

que pueden ser escritas como

$$\frac{1}{\mu_r^+} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}^+) = \frac{1}{\mu_r^-} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{E}^-) \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{\epsilon_r^+} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}^+) = \frac{1}{\epsilon_r^-} \hat{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}^-) \quad (3.68)$$

Formulación variacional.

De acuerdo con el principio variacional, la solución para el campo eléctrico gobernado por (3.57), (3.59), (3.63), (3.65) y (3.67) puede obtenerse mediante la búsqueda del punto estacionario del funcional

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ & + \iint_{S_2} \left[\frac{\gamma_e}{2} (\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{U} \right] dS \\ & + j k_0 Z_0 \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \end{aligned} \quad (3.69)$$

bajo las condiciones dadas por (3.59) y (3.65). De forma similar, la solución para el campo magnético gobernado por (3.58), (3.60), (3.62), (3.64), (3.66), y (3.68) puede encontrarse buscando el punto estacionario del funcional

$$\begin{aligned} F(\mathbf{H}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right] dV \\ & + \iint_{S_2} \left[\frac{\gamma_h}{2} (\hat{n} \times \mathbf{H}) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{V} \right] dS \\ & - \iiint_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J}) dV \end{aligned} \quad (3.70)$$

bajo las condiciones dadas por (3.62) y (3.66).

Análogamente al caso escalar, los funcionales dados anteriormente son válidos para valores reales y complejos de $\epsilon_r, \mu_r, \gamma_e$, y γ_h . Si estos parámetros son reales se pueden utilizar los siguientes funcionales:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E})^* - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right] dV \\
& + \frac{1}{2} \iint_{S_2} [\gamma_e (\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E})^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}^*] dS \\
& + j k_0 Z_0 \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*) dV \quad (3.71)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{H}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H})^* - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right] dV \\
& + \frac{1}{2} \iint_{S_2} [\gamma_h (\hat{n} \times \mathbf{H}) \cdot (\hat{n} \times \mathbf{H})^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{V} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{V}^*] dS \\
& - \frac{1}{2} \iiint_V \left[\mathbf{H}^* \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{J})^* \right] dV \quad (3.72)
\end{aligned}$$

La diferencia entre los dos últimos funcionales y los dos anteriores es que estos últimos tienen un valor real. Así pues sus puntos estacionarios corresponden a sus máximos o mínimos, mientras que en los anteriores no existen tales máximos o mínimos puesto que son complejos. En análisis de guías de ondas y cavidades se prefieren (3.71) y (3.72). Sin embargo, por mantener la generalidad, se trabajará con los primeros.

3.4 Modos espurios. Elementos curl-conformes.

3.4.1 Introducción.

Los elementos curl-conformes son conocidos por resolver el problema de los modos espurios. En esta sección, se atiende la cuestión del origen de los modos espurios en la formulación mediante el *MEF* de problemas electromagnéticos. Se incluye una revisión de los varios enfoques presentes en la literatura para resolver el problema de los modos espurios. Se considera el papel de los procesos de formulación y discretización. Se mostrará como el empleo de elementos curl-conformes, también conocidos como elementos vectoriales, en conjunción con la formulación débil del doble rotacional, representa una forma consistente y adecuada para la discretización de problemas electromagnéticos en 3D. [10]

3.4.2 Origen de los Modos Espurios.

En primer lugar, se define lo que se entiende por *modo espurio* o *solución espuria*. En adelante, las soluciones espurias se refieren a aquellas soluciones numéricas que son aproximaciones de soluciones no físicas. Las soluciones no físicas son aquellas que no satisfacen las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno del problema. La definición anterior tiene pleno sentido en el contexto de un problema de autovalores y por ello, una solución espuria en este caso se denomina modo espurio. En el caso de un problema determinista, y considerando la solución como una combinación lineal de las autofunciones del problema de autovalores asociado, es más correcto decir que una solución está contaminada con modos espurios. Esto es así cuando la solución del problema determinista tiene componentes no nulas para algunas de las autofunciones no físicas (espurias) del problema de autovalores asociado.

De esta forma, se muestra claramente la relación entre los problemas deterministas y los problemas de autovalores, en lo que se refiere al tema de los modos espurios. Si en el problema de autovalores asociado a un problema determinista, se ha resuelto el problema de los modos espurios, entonces la solución determinista no se verá contaminada por soluciones espurias. Por otro lado, si el problema de autovalores asociado no está libre del problema de los modos espurios, entonces no es posible asegurar que la solución determinista no esté contaminada por soluciones espurias, dado que no se puede conocer *a priori* si algunas componentes espurias se excitarán o no.

Considerando la definición hecha previamente, el problema de los modos espurios puede resolverse, como se verá posteriormente, de dos formas: eliminando la aparición de soluciones no físicas en la formulación o, por el contrario, permitiendo la existencia de las soluciones no físicas aproximándolas correctamente de forma que, en el problema discretizado, los modos espurios obtenidos no se confundan con los modos físicos. La última opción corresponde al empleo de los elementos curl-conformes.

Históricamente, la aplicación del *MEF* a problemas electromagnéticos comenzó con formulaciones escalares, es decir, formulaciones en las que la incógnita a discretizar era una magnitud escalar, por ejemplo, aquellas utilizadas para el análisis del espectro de los modos de guías de ondas metálicas homogéneas. La aplicación del *MEF* a guías ondas más generales (inhomogéneas, anisotrópicas, etc.) condujo a formulaciones vectoriales, es decir, formulaciones donde la incógnita o incógnitas son magnitudes vectoriales. Se emplearon diferentes combinaciones de las componentes (cartesianas, polares, etc.) de los vectores campo eléctrico y campo magnético, incluyendo combinaciones de las componentes axiales (en la dirección de

propagación) y transversales (en la sección recta de la estructura de guiado) de éstos. Como una extensión de las formulaciones de elementos finitos escalares, dichas formulaciones fueron discretizadas directamente con elementos de Lagrange clásicos (también conocidos como elementos nodales⁴ utilizando una aproximación escalar diferente para cada una de las componentes (cartesianas, polares, etc.) de los vectores campo. Sin embargo, se mostró que este procedimiento sufría del problema de la contaminación por modos espurios que aparecen en el espectro dentro del rango de valores correspondientes a los modos físicos.

Algunos Conceptos Matemáticos Relacionados con los Modos Espurios.

En esta sección se explican algunas ideas matemáticas con el fin de explicar en detalle el origen de los modos espurios y sentar las bases de los distintos procedimientos empleados para combatirlos.

Considérense las ecuaciones de Maxwell en una región Ω sin fuentes. Por motivos de claridad en la exposición se considera el dominio inhomogéneo Ω dividido en medios homogéneos diferentes (es decir, el medio inhomogéneo se subdivide en subdominios homogéneos), caracterizados por los tensores permeabilidad $\underline{\underline{\mu}}_i$ y permitividad $\underline{\underline{\epsilon}}_i$, es decir, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$. De este modo, las relaciones constitutivas pueden expresarse como:

$$\mathbf{D} = \underline{\underline{\epsilon}}_i \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \underline{\underline{\mu}}_i \mathbf{H} \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.73)$$

por lo que las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en este caso de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \underline{\underline{\mu}}_i \mathbf{H} \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.74)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\mu}}_i \mathbf{H}) = 0 \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.75)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \underline{\underline{\epsilon}}_i \mathbf{E} \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.76)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}_i \mathbf{E}) = 0 \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.77)$$

y las condiciones de contorno en las interfaces entre los medios i y j , es decir, en Γ_{ij} , como:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.78)$$

⁴Elementos nodales es el término utilizado en la literatura para designar los elementos finitos escalares convencionales en contraposición a los elementos vectoriales. Usualmente, se refiere a los elementos de Lagrange, aunque también puede referirse a otros elementos escalares como los elementos finitos de Hermite.

$$\hat{n} \cdot (\underline{\underline{\mu}}_i \mathbf{H}_i - \underline{\underline{\mu}}_j \mathbf{H}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.79)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.80)$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}_i \mathbf{E}_i - \underline{\underline{\epsilon}}_j \mathbf{E}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.81)$$

Por simplicidad las condiciones de contorno consideradas son de pared eléctrica, Γ_E :

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{en } \Gamma_E \quad (3.82)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{en } \Gamma_E \quad (3.83)$$

o bien de pared magnética, Γ_H :

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{en } \Gamma_H \quad (3.84)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{en } \Gamma_H \quad (3.85)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a las superficies Γ_{ij}, Γ_E y Γ_H , en cada caso.

Conviene destacar que las relaciones de continuidad tangencial se deducen a partir de las ecuaciones del rotacional (3.74) y (3.76), mientras que la continuidad de las componentes normales se obtiene de las ecuaciones de la divergencia (3.75) y (3.77).

Las ecuaciones anteriores constituyen formalmente la formulación fuerte del problema cerrado consistente en el análisis de los modos resonantes de una cavidad (representada por el dominio Ω), lo que corresponde a un problema de valores propios. Se ha elegido el caso de una formulación de valores propios para ilustrar el problema de los modos espurios. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las conclusiones para otros casos (como problemas deterministas) son fácilmente extrapolables a partir de éste. Cuando $\omega = 0$, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están desacoplados. Se puede comprobar fácilmente que la única solución de las ecuaciones (3.74)-(3.85) (problema sin fuentes) es la solución trivial: $\mathbf{E} = \mathbf{H} = \bar{0}$. Cuando $\omega \neq 0$, las ecuaciones de Maxwell (3.74)-(3.77) no son independientes y, por tanto, las condiciones de contorno (3.78)-(3.85) son igualmente no independientes. En este caso, las ecuaciones de la divergencia (3.75) y (3.77) se deducen a partir de las ecuaciones del rotacional (3.74) y (3.76), respectivamente. Una dependencia análoga sucede con las condiciones de contorno (3.78)-(3.85), ya que éstas se deducen a partir de las ecuaciones de Maxwell del rotacional y la divergencia. Por tanto, algunas de las ecuaciones dependientes del conjunto (3.74)-(3.85) no precisan ser incluidas en la formulación del problema, ya que se hallan presentes implícitamente en las otras ecuaciones.

Sin embargo, las dependencias mencionadas anteriormente no son aplicables cuando $\omega = 0$. Por tanto, si algunas de las ecuaciones eliminadas

	\mathbf{V}	$\underline{\underline{f}}$	$\underline{\underline{g}}$	Γ_V	Γ_{V_d}
Form. H	\mathbf{H}	$\underline{\underline{\epsilon}}$	$\underline{\underline{\mu}}$	Γ_H	Γ_E
Form. E	\mathbf{E}	$\underline{\underline{\mu}}$	$\underline{\underline{\epsilon}}$	Γ_E	Γ_H

Tabla 3.1: Correspondencias para la formulación del doble rotacional

en la formulación del problema no están implícitas cuando $\omega = 0$, podrán existir soluciones adicionales para el caso $\omega = 0$, además de la trivial. Estas soluciones adicionales no son soluciones físicas porque no satisfacen todas las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, estas soluciones no físicas son soluciones matemáticamente válidas de la formulación obtenida de esta forma y aparecerán en el problema discretizado. Esta es la fuente más común de lo que se entiende por modos espurios⁵. En todo lo que sigue, el término modo espurio se refiere a las aproximaciones numéricas de las soluciones no físicas de frecuencia cero mencionadas anteriormente.

Para ilustrar lo expuesto anteriormente, se considera a continuación una formulación diferencial alternativa al conjunto original de ecuaciones (3.74)-(3.85). Esta formulación alternativa tiene únicamente uno de los campos como incógnita (\mathbf{E} o \mathbf{H}). El proceso se explica con detalle a continuación.

Con el fin de eliminar una de las incógnitas (\mathbf{E} o \mathbf{H}) del problema (3.74)-(3.85), el campo \mathbf{E} o el \mathbf{H} se obtiene a partir de (3.76) o (3.74) y luego se sustituye en (3.74) o (3.76), resultando una ecuación con términos en \mathbf{E} o \mathbf{H} como única incógnita. Se obtiene así el siguiente conjunto de ecuaciones, equivalente al conjunto (3.74)-(3.85):

$$\nabla \times (\underline{\underline{f_i^{-1}}} \nabla \times \mathbf{V}) = \omega^2 \underline{\underline{g_i}} \mathbf{V} \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.86)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{g_i}} \mathbf{V}) = 0 \quad \text{en } \Omega_i \quad (3.87)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Gamma_V \quad (3.88)$$

$$\hat{n} \times \underline{\underline{f_i^{-1}}} \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{V_d} \quad (3.89)$$

$$\hat{n} \cdot \underline{\underline{g_i}} \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{V_d} \quad (3.90)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.91)$$

$$\hat{n} \times (\underline{\underline{f_i^{-1}}} \nabla \times \mathbf{V}_i - \underline{\underline{f_j^{-1}}} \nabla \times \mathbf{V}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.92)$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{\underline{g_i}} \mathbf{V}_i - \underline{\underline{g_j}} \mathbf{V}_j) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{ij} \quad (3.93)$$

⁵Existen otro tipo de soluciones no físicas que también pueden aparecer en el problema discretizado, por ejemplo, debido al empleo de un conjunto dependiente de funciones base.

La ecuación (3.86) se conoce habitualmente como la ecuación diferencial del doble rotacional. Las formulaciones que hagan uso de ellas se denominarán formulaciones del doble rotacional.

En las ecuaciones anteriores el vector \mathbf{V} se refiere tanto al campo eléctrico \mathbf{E} como al campo magnético \mathbf{H} . De forma similar, Γ_V y Γ_{V_d} se refieren a Γ_E o a Γ_H dependiendo del tipo de formulación empleada. Las correspondencias se muestran en la Tabla 3.1.

Obsérvese que este proceso de sustitución solamente es válido para $\omega \neq 0$. Sin embargo, (3.86) conjuntamente con el resto de las ecuaciones (3.87)-(3.93), es equivalente al conjunto original de ecuaciones de Maxwell (3.74)-(3.85). Esta equivalencia es clara para $\omega \neq 0$. Para $\omega = 0$ puede demostrarse fácilmente que el conjunto de ecuaciones (3.86)-(3.93) sólo tiene la solución trivial: $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$, como ocurría con el conjunto (3.74)-(3.85). De este modo, la solución numérica de las ecuaciones (3.86)-(3.93) no proporcionará soluciones de modos espurios. Evidentemente, se tiene lo mismo para el problema (3.74)-(3.85).

Sin embargo, las formulaciones débiles empleadas en las formulaciones de elementos finitos no incluyen al conjunto completo de ecuaciones (3.86)-(3.93). Este conjunto contiene más ecuaciones (no independientes para $\omega \neq 0$ que incógnitas. La formulación débil habitual correspondiente a la ecuación diferencial del doble rotacional es la siguiente:

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{V}') \cdot \underline{\underline{f^{-1}}}(\nabla \times \mathbf{V}) d\Omega = \omega^2 \int_\Omega \mathbf{V}' \cdot \underline{\underline{g}} \mathbf{V} d\Omega \quad (3.94)$$

donde \mathbf{V}' es una función de test que satisface las condiciones de contorno adecuadas. La formulación débil dada por (3.94) constituye un problema de autovalores con ω^2 como el autovalor y \mathbf{V} (campo eléctrico o magnético) como la autofunción.

En la obtención de (3.94), se han empleado las ecuaciones (3.88), (3.89), (3.91) y (3.92). Por tanto las condiciones de contorno de estas ecuaciones están implícitas en (3.94). Las condiciones de contorno impuestas de esta forma se conocen como *condiciones de contorno naturales* de la formulación y se satisfacen en un sentido débil o distribucional.

Sin embargo, la condición de divergencia nula de (3.87), y sus condiciones de contorno asociadas, (3.90), (3.93), no están, explícita o implícitamente, presentes en (3.94), cuando $\omega = 0$. Continuando con el razonamiento expuesto anteriormente, pueden existir soluciones no físicas correspondientes al autovalor $\omega = 0$. Por tanto, estas soluciones espurias de frecuencia cero no satisfarán la condición de divergencia nula. Para el caso $\omega \neq 0$, la condición de divergencia nula sí está impuesta en un sentido distribucional o débil cuando se emplean elementos curl-conformes.

Se puede demostrar que la dimensión del espacio vectorial formado por estas soluciones de autovalor nulo es infinito, es decir, el autovalor cero es de multiplicidad infinita. Efectivamente, dado que satisface:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \forall \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla \phi \quad (3.95)$$

es decir, cualquier \mathbf{V} , que pueda derivarse como el gradiente de una función escalar ϕ , es decir $\mathbf{V} = -\nabla \phi$, satisfará (3.95) (rotacional nulo) y, por tanto, será un autovector válido que cumplirá (3.94), con autovalor $\omega^2 = 0$.

Obsérvese que las soluciones de la forma $\nabla \phi$ corresponden a soluciones estáticas de las ecuaciones de Maxwell cuando están presentes fuentes de carga (cargas libres). Sin embargo, este no es el caso considerado en los conjuntos (3.74)-(3.85) o (3.86)-(3.93) y las soluciones que se derivan de un potencial $\mathbf{V} = -\nabla \phi$ son soluciones físicamente no válidas del problema que se está considerando.

Es evidente, a partir de (3.95), que el espacio de los modos espurios es precisamente el espacio nulo del operador rotacional.

Por tanto, debido a la dimensión infinita del espacio nulo del operador rotacional, las aproximaciones no consistentes de las soluciones no físicas pertenecientes a este espacio, pueden proporcionar modos espurios en el problema discretizado, con autovalores numéricos distintos de cero que, en general, se hallarán dentro del rango de los autovalores de los modos físicos, contaminando así el espectro. En un problema determinista la solución se verá, por lo general (dependiendo de la excitación), contaminada por estas componentes espurias modeladas incorrectamente.

Esto es lo que ocurre cuando se utilizan elementos de Lagrange convencionales con continuidad en C^0 (C^0 matemáticamente se refiere al espacio de funciones continuas). Más adelante, en la Sección 3.4.3, se presentarán varias técnicas para evitar el problema de los modos espurios utilizando los elementos de Lagrange a la vez que se analizan brevemente sus ventajas y desventajas.

Por otro lado, es conocido el hecho de que los elementos curl-conformes, es decir, aquellos que sólo proporcionan continuidad tangencial, permiten resolver el problema de los modos espurios. Empleando este tipo de elementos, las soluciones no físicas correspondientes al autovalor cero de la formulación diferencial aparecen en el problema discretizado como modos espurios de autovalor cero. De esta forma, los modos espurios se distinguen fácilmente de las soluciones físicas, que tienen autovalores estrictamente positivos, es decir, los modos espurios no contaminan el espectro. Los elementos curl-conformes tiene también ventajas adicionales en cuanto a la discretización del campo electromagnético. Los elementos curl-conformes son consistentes con el comportamiento del campo electromagnético en la superficie de separación de

los diferentes medios. Las condiciones de contorno de Dirichlet del campo eléctrico o del campo magnético (relacionadas con la componente tangencial del campo a una determinada superficie, por ejemplo, las de pared eléctrica o pared magnética) se imponen fácilmente de forma directa aún cuando las paredes no sean paralelas a los ejes coordenados del problema. También el hecho de que los nodos no se hallen situados en los vértices del mallado, mejora la convergencia en problemas con esquinas. Las ventajas y desventajas de los elementos curl-conformes se analizan con más detalle en la Sección 3.4.3.

La siguiente cuestión parece obvia: ¿por qué los elementos curl-conformes aproximan bien los autovalores de frecuencia cero y los elementos de Lagrange no?

La clave reside en la capacidad de los elementos curl-conformes (y la incapacidad de los elementos de Lagrange) para aproximar en un mallado arbitrario los campos que derivan del gradiente de una función escalar, es decir, los campos de los modos espurios. A continuación, se explican las razones de este comportamiento.

Se demostró anteriormente que los modos espurios son soluciones estáticas que satisfacen:

$$\mathbf{V}_{esp} = -\nabla\phi \quad (3.96)$$

donde \mathbf{V}_{esp} representa el campo espurio, eléctrico o magnético.

La función escalar ϕ puede interpretarse como una función potencial que, aunque no sea necesario calcular, debe existir. Si se emplean elementos de Lagrange (con continuidad en C^0), la discretización del campo vectorial se lleva a cabo aproximando separadamente cada una de sus componentes (por ejemplo, sus componentes cartesianas). Por tanto, utilizando el procedimiento de ensamblado⁶ convencional del *MEF*, el campo vectorial discretizado \mathbf{V}_{esp} sería continuo en todo el dominio. Ahora bien, con el fin de que el campo \mathbf{V}_{esp} sea una función continua y de acuerdo con (3.96), la función potencial ϕ debe tener al menos derivadas de primer orden continuas, es decir, ϕ ha de ser una función de C^1 (C^1 matemáticamente se refiere a funciones continuas con derivadas de primer orden continuas). Sin embargo, no existe tal interpolación polinomial por trozos (elementos finitos) en mallados arbitrarios que tenga continuidad de sus primeras derivadas. Por tanto, existe una inconsistencia en el modelado de \mathbf{V}_{esp} , dado que, en el caso general, el potencial ϕ a partir del cual se deriva el campo, no existe.

De este modo, los elementos C^0 de Lagrange son, en el caso general, incapaces de modelar apropiadamente \mathbf{V}_{esp} , es decir, campos que derivan del gradiente de una función escalar, como en (3.96). La inconsistencia en el

⁶El procedimiento de ensamblado del *MEF* consiste en igualar los grados de libertad de los elementos vecinos asociados al mismo nodo físico del mallado.

modelado del espacio nulo del operador rotacional conduce a aproximaciones pobres del campo \mathbf{V}_{esp} , es decir, los modos espurios, aparecen con autovalores numéricos diferentes de cero, contaminando el espectro del operador.

Por otro lado, si se utilizan elementos curl-conformes para discretizar el campo (y, por tanto, \mathbf{V}_{esp}), no es preciso que el potencial ϕ pertenezca al espacio C^1 ; es suficiente la continuidad en el sentido del espacio C^0 . Efectivamente, el gradiente de una función de interpolación de elementos finitos que proporcione soluciones en el espacio C^0 tiene la continuidad tangencial pero no normal. Este es precisamente el tipo de continuidad impuesto por los elementos curl-conformes. Por tanto, para ser consistentes con (3.96), basta con que existan en el mallado funciones escalares (potenciales) en C^0 , no en C^1 . Este tipo de funciones polinomiales por trozos (elementos) con continuidad en el sentido de C^0 existen en mallados arbitrarios, por lo que el campo \mathbf{V}_{esp} y el potencial ϕ forman un par consistente. Por tanto, las soluciones espurias están bien aproximadas y los autovalores de los modos espurios aparecen como valores numéricamente nulos en el problema discretizado. De este modo, las soluciones espurias no afectan a las soluciones físicas, resolviéndose el problema de la contaminación por modos espurios.

El número de funciones de interpolación polinomiales C^0 en un mallado, es decir, el número de autovalores nulos en el problema discretizado, depende del orden y del tipo de funciones polinomiales implicadas en la discretización.

Nótese que en el caso de los elementos curl-conformes, los modos espurios no se eliminan. Ocurre precisamente la situación opuesta: los modos no físicos se modelan correctamente, de forma que aparecen como modos con autovalores numéricamente nulos, no interfiriendo, de este modo, con los modos físicos en el problema discretizado.

En resumen, se ha tratado el origen de los modos espurios en las formulaciones vectoriales de elementos finitos. Se ha demostrado cómo los modos espurios, o soluciones espurias, corresponden a aproximaciones numéricas de soluciones no físicas, es decir, soluciones que no satisfacen todas las ecuaciones de Maxwell. Estos modos no físicos, sin embargo, son soluciones matemáticamente válidas de la formulación del problema a resolver. Esto es debido a la falta de cumplimiento de algunas de las ecuaciones de Maxwell en la formulación de elementos finitos. Se ha repasado igualmente el papel de la discretización de los elementos finitos en el problema de los modos espurios (elementos de Lagrange frente a elementos curl-conformes). A continuación, se presentan brevemente algunas ideas iniciales con respecto a los modos espurios, que luego demostraron ser erróneas. Posteriormente, se describen las diferentes técnicas aparecidas en la literatura para resolver el problema de los modos espurios.

Algunas Ideas Iniciales Erróneas Referentes a los Modos Espurios.

Tras los detalles matemáticos de la sección anterior, se presentan aquí algunas ideas bastante extendidas entre los primeros investigadores de los modos espurios, que más tarde resultaron ser erróneas. Aún así, algunas de estas ideas se pueden ver en trabajos relativamente.

- El origen de los modos espurios se atribuyó inicialmente a la falta de imposición de la condición de contorno $\hat{n} \cdot \mathbf{H}$ o $(\hat{n} \cdot \mathbf{E})$ en paredes eléctricas (o magnéticas). Posteriormente esta idea se demostró que era errónea.
- Otra idea errónea es la suposición de que los modos espurios son una cuestión relacionada únicamente con problemas de autovalores. Sin embargo, se había demostrado que la solución determinista podía verse contaminada por componentes espurias no físicas (dependiendo de la excitación) cuando el problema de valores propios asociado sufría del problema de modelado incorrecto de las autofunciones correspondientes a los modos espurios.
- Durante algún tiempo se sugirió que el origen de los modos espurios estaba relacionado con un modelado inconsistente de los campos en las superficies de separación entre medios materiales diferentes, al utilizarse elementos de Lagrange. De este modo se supuso que los modos espurios aparecían sólo cuando se analizaban problemas con medios inhomogéneos. Pronto se comprobó que esta idea no era cierta. Las soluciones espurias están también presentes en problemas con medios homogéneos.

Como es bien sabido, la discretización directa de un vector utilizando elementos de Lagrange, es decir una aproximación escalar independiente para cada una de las componentes del vector, proporciona un modelo inconsistente de los campos eléctrico o magnético en las superficies de separación entre materiales diferentes. Los elementos de Lagrange imponen la continuidad entre los elementos de todos los componentes del campo, lo que no es consistente con el comportamiento del campo eléctrico (o magnético), que presenta discontinuidades en la componente normal a la frontera entre medios de diferente permitividad ϵ (o permeabilidad μ). Estas inconsistencias siempre pueden evitarse situando pares de nodos a ambos lados de la superficie de separación, y escribiendo ecuaciones explícitas para estos nodos con el fin de imponer el comportamiento correcto del campo en la discontinuidad. Sin embargo, esto complica excesivamente la implementación del *MEF*. Por otro lado, los elementos curl-conformes son

consistentes con el comportamiento del campo electromagnético: presentan continuidad de las componentes tangenciales a la vez que posibilitan el salto en las componentes normales.

Esto condujo a la idea equivocada de que existía una conexión entre el modelado inconsistente de los campos en la superficie de separación entre medios y los modos espurios. Hay que destacar, sin embargo, que el razonamiento efectuado al principio de esta sección referente al origen de los modos espurios, sigue siendo válido cuando el dominio Ω es homogéneo, es decir, cuando no existen inconsistencias, en el sentido indicado anteriormente. Si la conexión entre el modelado inconsistente y los modos espurios fuese cierta, los modos espurios no estarían presentes en las formulaciones con el campo magnético cuando todos los materiales tienen la misma permeabilidad μ . Sin embargo, es bien sabido que este no es el caso. La misma conclusión se obtiene para el caso de las formulaciones con el campo eléctrico cuando los medios tienen la misma permitividad ϵ .

- Durante largo tiempo se creyó, equivocadamente, que los elementos curl-conformes de primer orden, es decir, los llamados elementos de arista, eliminaban los modos espurios debido a la naturaleza solenoidal de su aproximación. Esta idea puede verse todavía reflejada en artículos fechados en 1991 y 1992. Como ya se ha explicado, la ecuación de divergencia, (3.87), no está implícita en la formulación débil de (3.94) para $\omega = 0$, es decir, para los modos espurios. Esto, junto al hecho de que las funciones de arista, son de divergencia nula, contribuyó a la creencia errónea de que los elementos de arista eliminaban los modos espurios debido a su naturaleza solenoidal.

En primer lugar, y como ya se ha expuesto, los modos espurios no son eliminados al emplear elementos curl-conformes (y, en particular los elementos de arista). Por el contrario, los modos espurios están presentes en el problema discretizado, pero corresponden a aproximaciones correctas de las soluciones no físicas de frecuencia cero. Por tanto, aparecen en el problema discretizado como modos asociados a autovalores nulos, no interfiriendo, de este modo, con las soluciones físicas.

Y, en segundo lugar, conviene resaltar que los elementos de arista no son globalmente de divergencia nula. Si los elementos de arista proporcionaran aproximaciones de divergencia nula en el dominio completo Ω , exhibirían necesariamente continuidad de la componente normal entre elementos. Los elementos de arista proporcionan aproximaciones de divergencia nula dentro de cada elemento pero la discontinuidad de la componente

normal entre elementos se traduce en funciones de Dirac (deltas) en las fronteras entre elementos y, por tanto, en divergencia no nula a nivel global. Además, si los elementos de arista proporcionaran aproximaciones de divergencia nula a nivel global, no podrían modelar correctamente los campos de divergencia no nula (las soluciones espurias), como realmente hacen. De hecho, los elementos curl-conformes de orden superior no tienen funciones de base solenoidales y proporcionan igualmente soluciones no contaminadas por modos espurios.

3.4.3 Solución del Problema de los Modos Espurios.

Desde el principio se observó que los modos espurios tenían divergencia no nula y esta propiedad fue utilizada para distinguirlos de los modos físicos. Este procedimiento puede considerarse como el primer intento de solucionar el problema de los modos espurios en el *MEF*. Obviamente esta técnica estaba lejos de ser la forma más adecuada de resolver el problema de los modos espurios. Además, no podía emplearse en problemas deterministas.

Como se deduce de la sección anterior, el problema de los modos espurios puede resolverse básicamente de dos formas: eliminándolos en la etapa de formulación o por medio de una correcta aproximación en el proceso de discretización (es decir, con el empleo de elementos curl-conformes).

La primera opción consiste básicamente en forzar el cumplimiento de la ecuación de la divergencia nula, con lo que los modos espurios son literalmente eliminados. Aunque la imposición de la divergencia nula puede hacerse, en principio, a nivel de la formulación o a nivel de la discretización, existen más técnicas correspondientes a las etapas de la formulación. De este modo las soluciones no físicas no son soluciones matemáticas de la formulación de partida y, por tanto, no aparecen modos espurios en el problema discretizado.

La segunda opción para resolver el problema de los modos espurios es justamente la contraria. En este caso, no se trata de imponer la solenoidalidad del campo, sino que permite la presencia de soluciones no físicas, confiándose en el proceso de discretización para hacer que estas no sean perjudiciales. Este último caso corresponde al empleo de elementos curl-conformes, en el que las soluciones no físicas de frecuencia cero aparecen como modos espurios asociados a autovalores numéricamente nulos en el problema discretizado. De este modo, los modos espurios son fácilmente reconocibles y no interfieren con los modos físicos, es decir, no existe contaminación del espectro. Se demostrará que esta última opción, es decir, el empleo de elementos curl-conformes, es la elección más adecuada para problemas vectoriales, especialmente en 3D.

El tema del papel de la formulación en la solución del problema de los

modos espurios se aborda a continuación y el papel desempeñado por la discretización se presenta posteriormente, prestándose especial atención a las características de los elementos curl-conformes.

En la Etapa de Formulación.

En esta sección se describen brevemente varias técnicas aparecidas en la literatura para la solución del problema de los modos espurios en las formulaciones vectoriales de elementos finitos. Todas ellas tienen en común la imposición del carácter solenoidal del campo, (3.87), a nivel de la formulación débil del problema, difiriendo en la forma de llevarlo a cabo.

Un método riguroso de imponer las condiciones sobre la divergencia es el empleo de *multiplicadores de Lagrange*. Sin embargo, esta técnica no ha gozado de demasiada aceptación en el tipo de problema que se trata aquí, probablemente debido a su carácter matemático y a la complejidad de la formulación resultante (es necesario añadir más incógnitas a las originales). Por otro lado, el llamado *método de penalización*, que puede verse como una versión simplificada del método de los multiplicadores de Lagrange, se ha convertido en una técnica muy extendida para la imposición de la condición de divergencia nula en las formulaciones vectoriales de elementos finitos.

En el método de penalización, la condición de divergencia nula se impone añadiendo un término de penalización multiplicado por un número real positivo, s , en la formulación débil del problema. En este caso (formulación débil (3.94), se tendría:

$$\int (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{V}'}}) \cdot \underline{\underline{f}}^{-1}(\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{V}}}) d\Omega + s \int (\nabla \cdot \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\mathbf{V}'}})(\nabla \cdot \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}) d\Omega = \omega^2 \int \underline{\underline{\mathbf{V}'}} \cdot \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} d\Omega \quad (3.97)$$

donde $\underline{\underline{g}}$ se omite generalmente en el término de penalización cuando $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ es continuo. El campo $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ es continuo para materiales homogéneos magnéticamente ($\mu = \text{const}$) cuando $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \vec{H}$, o para materiales homogéneos eléctricamente ($\epsilon = \text{const}$) cuando $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \mathbf{E}$.

El multiplicador s , conocido como factor de penalización, no constituye una nueva incógnita (como ocurría en el método de los multiplicadores de Lagrange), sino que se considera fijado *a priori*.

Se puede demostrar que la formulación de (3.97) posee dos conjuntos de soluciones. Las soluciones del primer conjunto son de divergencia nula, y se corresponden con las soluciones (modos) físicas. Las soluciones del segundo conjunto son de rotacional nulo y se corresponden con los modos espurios. Las soluciones del primer conjunto son independientes del factor s , mientras que las soluciones del segundo conjunto dependen de s . Para el caso de los modos espurios, la frecuencia de resonancia, es decir, el autovalor, aumenta

con el factor de penalización. De este modo, los modos espurios pueden detectarse observando los modos cuyos autovalores varían con s . Y lo que es más importante, los autovalores espurios pueden desplazarse fuera del rango de los modos físicos de interés aumentando el valor del factor de penalización.

El método de penalización se aplicó inicialmente a varios problemas, principalmente problemas de autovalores, es decir, guíaondas en 2D y cavidades en 3D. También se utilizó en problemas deterministas. El método de penalización presenta varias ventajas: no hay necesidad de incógnitas adicionales, las matrices son dispersas, y puede aplicarse a problemas en 3D. Sin embargo, la elección del factor de penalización adecuado es difícil. Si el factor de penalización es muy alto, entonces los autovalores espurios son desplazados fuera del rango de los autovalores físicos de interés, pero la exactitud de los autovalores físicos se ve seriamente afectada. Por otro lado, si el factor de penalización es muy bajo, entonces los modos espurios aparecen en el espectro mezclados entre los modos físicos. Además, la elección del valor óptimo del factor de penalización depende del modo. En muchos casos, se hace necesario recurrir a un complejo procedimiento de optimización. La elección del parámetro de penalización en problemas deterministas es igualmente muy crítica.

La filosofía del resto de los métodos presentados en esta sección consiste en formular el problema de forma que las soluciones no físicas no sean soluciones matemáticamente válidas de la formulación obtenida. Estos métodos eliminan los modos espurios del espectro (es decir, los modos espurios no aparecerán en el problema discretizado), a diferencia del método de penalización que tan sólo desplaza los modos espurios a la parte superior del espectro. Los métodos aquí presentados eliminan los modos espurios imponiendo la condición de divergencia nula. De este modo, la única solución válida para $\omega = 0$ es la solución trivial, $\mathbf{V} = 0$.

Existe una familia de métodos, denominados por algunos autores como *métodos de reducción*, que emplean la condición de divergencia nula para reducir el número de grados de libertad del problema. A continuación, se describen algunos de ellos.

En algunos tipos de problemas, es posible obtener una de las componentes de campo haciendo uso de la condición de divergencia nula, es decir, de la ecuación (3.87). Este es el caso del análisis de estructuras de guiado y cavidades axisimétricas, en las que se conoce la variación del campo con una de las coordenadas del problema. Por ejemplo, en el caso de una estructura de guiado en la que todos los materiales tengan la misma permeabilidad μ , la componente longitudinal de campo magnético puede obtenerse de las

componentes transversales, haciendo uso de (3.87), es decir:

$$H_z = \frac{1}{j\beta} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \quad (3.98)$$

donde β es la constante de propagación en la dirección longitudinal.

De este modo, se tiene en cuenta la condición de divergencia por lo que se eliminan los modos espurios de la formulación. Este tipo de métodos si bien eliminan los modos espurios, tienen serios inconvenientes. En primer lugar, no se puede emplear, en general, en problemas 3D, donde no se conoce *a priori* la variación del campo con respecto a las coordenadas del problema. Por otro lado, si la condición de divergencia nula se utiliza en la formulación una vez discretizada ésta, el proceso requiere de la inversión de diversas matrices dispersas, con lo que se pierde la dispersidad del sistema original. Si, por el contrario, se fuerza la condición de divergencia nula en la formulación del problema continuo (antes del proceso de discretización), se obtiene una formulación débil en función de las componentes transversales que, una vez discretizada, da lugar a un sistema de ecuaciones con matrices dispersas. Sin embargo, como ya se apuntó, la formulación en este caso requiere elementos con continuidad C^1 , Como se ha mencionado en la sección anterior, no existen aproximaciones con continuidad global C^1 en mallados arbitrarios, cuando se emplean elementos convencionales de Lagrange (con continuidad C^0). Sólo con el empleo de mallados especiales se pueden obtener mallados de base con continuidad global C^1 , a partir de elementos de Lagrange. En el caso general de mallados arbitrarios, es necesario el empleo de elementos de Hermite de, al menos, orden 5, para conseguir la continuidad en el sentido de C^1 .

Otro tipo de técnica para eliminar los modos espurios es la introducción de un potencial vector Ψ , de tal forma que $\mathbf{V} = \nabla \times \Psi$. La expresión anterior se sustituye en la formulación débil de doble rotacional (3.94) y se emplean elementos de Lagrange convencionales para la discretización de Ψ . De este modo, se satisface de forma automática la solenoidalidad del campo \mathbf{V} y, por tanto, los modos espurios son eliminados. El problema viene, como en el caso anterior, de la necesidad de continuidad C^1 entre elementos.

Otra forma de imponer la solenoidalidad del campo consiste en construir funciones de base de divergencia nula a nivel global, a partir de combinaciones lineales de las funciones de base de los elementos finitos originales. Para ello, se obtiene una base de autovectores del espacio correspondiente al autovalor nulo del operador divergencia. La discretización del operador divergencia se hace utilizando las funciones de base de los elementos finitos por lo que los autovectores obtenidos quedan en función de éstas. El número de autovectores de divergencia nula es menor que el número de funciones de

base de elementos finitos originales, por lo que la solución del problema se obtiene mediante la resolución de un nuevo sistema de autovalores de dimensión menor que el del sistema original. De esta forma, los modos espurios no aparecen pero a costa de tener que resolver dos sistemas de autovalores. La idea de usar aproximaciones de divergencia nula fue propuesta por primera vez para el análisis de los modos resonantes de cavidades en 3D. El procedimiento es algo diferente al anterior y la imposición de la divergencia nula se hace mediante la introducción de nuevas relaciones entre las incógnitas del problema, a través de las denominadas *matrices de conexión*. Sin embargo, esta técnica no parece haber sido objeto de posteriores desarrollos, dado que no han aparecido posteriormente en la literatura trabajos de investigación en esta línea.

Otra opción completamente diferente a las anteriores es hacer uso de formulaciones con potenciales en vez de con los campos. Las formulaciones con potenciales están fuera de los objetivos del presente proyecto, dado que las formulaciones utilizadas en el mismo tienen como incógnita el campo eléctrico o el campo magnético. Por ello, el tema de las formulaciones con potenciales no se va a tratar aquí.

En resumen, atendiendo a todas las consideraciones mencionadas anteriormente, se puede concluir que no existe un método satisfactorio que resuelva en la etapa de formulación, el problema de los modos espurios, especialmente en 3D. La familia de métodos conocida como métodos de reducción no es válida para problemas generales en 3D, ya que no se conoce *a priori* la variación del campo. Los métodos que imponen la divergencia nula mediante un término de penalización se pueden aplicar en el caso general de problemas en 3D, pero tienen el problema de la elección del factor de penalización. La elección de dicho factor es crítica y depende de cada caso concreto, lo que impide la automatización del método. Otros métodos requieren resolver dos problemas de autovalores o conducen a formulaciones que necesitan el empleo de elementos complicados con continuidad C^1 en el proceso de discretización. El caso de las formulaciones con potenciales no se considera aquí, dado que las formulaciones que constituyen el objetivo de este proyecto son aquellas con los campos eléctrico y/o magnético.

En la Etapa de Discretización.

En la presente sección se aborda el papel desempeñado por el proceso de discretización en la cuestión de contaminación por modos espurios. A continuación, se presentan dos métodos, haciendo especial énfasis en el segundo que es el empleado en el presente proyecto. El primer método mantiene la filosofía general de los métodos presentados en la anteriormente, es decir, ha-

cer que las soluciones no físicas (los modos espurios) no puedan existir, siendo de esta manera eliminadas. En este caso, se impone igualmente la condición de divergencia nula del campo, pero en la etapa de discretización. La segunda técnica consiste en el empleo de los elementos curl-conformes (introducidos en la Sección 3.4.1 en la discretización de los campos. Posteriormente, se verá que los elementos curl-conformes, además de resolver elegantemente el problema de los modos espurios, tienen otra serie de ventajas que los convierten en la opción más adecuada para la discretización del campo eléctrico o magnético en formulaciones vectoriales. Igualmente, se incluye un breve repaso de las características de dichos elementos, en comparación con los elementos de Lagrange.

Como se acaba de explicar, la primera opción para la resolución del problema de los modos espurios en la fase de discretización consiste en el empleo de elementos de divergencia nula. Existe un intento de implementación de esta técnica para el caso de un único elemento. Sin embargo, no parece que se haya progresado en esta línea de investigación. Por otro lado, estos hipotéticos elementos de divergencia nula comparten con los elementos de Lagrange muchas de las inconsistencias de éstos en el modelado del campo, como se aclarará más tarde en esta sección.

La segunda opción consiste en el empleo de formulaciones del problema que permitan la existencia de soluciones no físicas y dejar que el proceso de discretización se ocupe de que los modos espurios no contaminen el espectro. Este es el caso del empleo de elementos curl-conformes en el que las soluciones no físicas son modeladas correctamente en el problema discretizado, de forma que aparecen como autovectores asociados al autovalor correspondiente al problema continuo. En el caso que nos ocupa, los modos espurios corresponden a aproximaciones numéricas de soluciones estáticas (de frecuencia nula) de la formulación. Por tanto, el modelado correcto de dichas soluciones estáticas se traduce en modos espurios de autovalor numéricamente nulo en el problema discretizado. De este modo, los modos espurios no se mezclan en el espectro con los modos físicos que corresponden a autovalores estrictamente positivos. Ello permite el empleo de formulaciones vectoriales clásicas (como la del doble rotacional (3.94).

El número de autovalores nulos que se obtienen en el problema discretizado puede conocerse de antemano y coincide, en base a lo explicado en la Sección (3.4.2) (véase (3.96)), con la dimensión del espacio finito formado por los gradientes de los potenciales soportados por el mallado que se utilice. La dimensión de este espacio corresponderá al número de potenciales independientes del mallado menos uno. El motivo es que la solución de campo correspondiente a un potencial constante en todo el mallado es la solución trivial, $\mathbf{V} = 0$. Por tanto, uno de los gradientes, el que deriva de la solución

de potencial constante, es desechado.

El número de potenciales independientes soportados por un mallado depende lógicamente de éste y de la interpolación (polinómica) empleada en la discretización. Como regla general, se puede decir que para un mismo mallado, cuanto mayor es el orden de la aproximación polinómica empleada (el grado del elemento finito), mayor es el número de funciones potenciales existentes, y por tanto, mayor es el número de autovalores nulos obtenidos. El razonamiento anterior coincide con la intuición; cuanto mayor es el número de grados de libertad del problema, mayor es el número de autovalores nulos. Para poder prever el número de autovalores nulos en un determinado caso, es necesario especificar el tipo concreto, no sólo el orden, de la aproximación polinómica empleada en la discretización.

El empleo de los elementos curl-conformes, además de la solución del problema de la contaminación por modos espurios, presenta una serie de ventajas adicionales respecto a cualquiera de los métodos presentados en esta sección y en la sección precedente. Las mencionadas ventajas se resumen a continuación.

Hasta ahora, los métodos presentados tienen en común el empleo de los elementos de Lagrange, que discretizan por separado cada una de las componentes escalares del campo. Por tanto, se fuerza de forma explícita la continuidad de todas las componentes del campo⁷. Esta continuidad de todas las componentes provoca inconsistencias en el modelado del campo en las interfaces entre medios materiales diferentes, donde el campo eléctrico o magnético presenta discontinuidades de sus componentes normales. Incluso en el caso de emplearse los hipotéticos elementos de divergencia nula mencionados anteriormente, la continuidad de las componentes normales vendría forzada de forma explícita, dado que en caso contrario el salto de las componentes normales se traduciría en divergencia no nula a nivel global en el dominio completo. Siempre es posible evitar las inconsistencias en el modelado del campo en las interfaces entre materiales situando pares de nodos a ambos lados de las interfaces y escribiendo relaciones lineales entre los grados de libertad de los elementos situados a ambos lados de las interfaces. Sin embargo, esto hace que no se pueda utilizar el proceso convencional de ensamblado en el *MEF* que consiste en la igualdad de grados de libertad de elementos vecinos asociados al mismo nodo físico del mallado, por lo que se complica excesivamente la implementación.

Por otro lado, los elementos curl-conformes son consistentes con el comportamiento del campo electromagnético, dado que fuerzan la continuidad tangencial entre elementos a la vez que permiten el salto de las componentes

⁷No se considera aquí el caso de las formulaciones con potenciales.

normales. De este modo, no se producen inconsistencias en el modelado del campo (eléctrico o magnético) en las interfaces entre elementos.

Los elementos div-conformes tienen continuidad en el sentido del operador divergencia, es decir, continuidad de la componente normal, en contraposición a los elementos curl-conformes que presentan continuidad de la componente tangencial. De este modo, los elementos div-conformes son adecuados para la discretización de las inducciones eléctrica, \mathbf{D} , y magnética, \mathbf{B} , mientras que los elementos curl-conformes son apropiados para la discretización de los campos eléctrico, \mathbf{E} , y magnético, \mathbf{H} . Por tanto, los elementos div-conformes, junto con los elementos curl-conformes, proporcionan un esquema consistente de aproximación de las diferentes magnitudes vectoriales del campo electromagnético, a diferencia de los elementos de Lagrange que constituyen el modelo apropiado para aproximar las magnitudes escalares.

Los elementos div-conformes fueron propuestos por Raviart y Thomas para problemas elípticos de segundo orden en 2D. Nédélec, en 1980, hizo la extensión a 3D para el caso de tetraedros y hexaedros, en sus dos versiones, div-conformes y curl-conformes. La versión curl-conforme es conocida como la primera familia de elementos de Nédélec, o simplemente elementos de Nédélec. Desde entonces han aparecido diversos tipos de elementos curl-conformes en la literatura, entre los que cabe citar aquellos de Hano, Mur, la segunda familia de Nédélec basada en el trabajo de Brezzi, y los denominados *covariant projection elements*, entre otros. Aunque existe una gran variedad de elementos cabe distinguir entre los elementos de orden completo y los elementos de orden mixto. Existen otro tipo de elementos curl-conformes, pero la mayoría de ellos son equivalentes a los mencionados anteriormente.

Los elementos de orden mixto, a diferencia de los denominados elementos de orden completo, no proporcionan el mismo orden de aproximación en todas las direcciones del espacio. En concreto, un elemento de orden k , proporciona, en una determinada dirección del espacio, una aproximación de orden $k-1$ únicamente para la componente del vector en esa dirección, y de orden k para el resto de componentes. De esta forma, particularizando a la frontera del elemento, la aproximación del campo es de orden $k-1$ para la componente tangencial a la frontera del elemento, y de orden k para la componente normal. Todo ello es fruto de la satisfacción de ciertas condiciones por parte del espacio de funciones base vectoriales, que hace que el espacio de funciones de base vectoriales del elemento de grado k no sea el espacio de polinomios vectores de orden k , sino un espacio intermedio entre los correspondientes al orden k y al orden $k-1$. Como ejemplo, considérese el elemento triangular de grado 1, es decir, el triángulo de arista. En este caso, la aproximación es de grado 0 para la componente tangencial a las aristas (la frontera) a lo largo de éstas. Sin embargo, la componente normal a las

aristas es aproximada linealmente. Igualmente, la componente tangencial a las aristas es aproximada linealmente a lo largo de la dirección normal a las aristas. El objetivo detrás de la satisfacción de las mencionadas condiciones está relacionado con la eficiencia en la obtención de los modos físicos frente a los espurios.

Los elementos curl-conformes se aplicaron primero a problemas de corrientes de Eddy, y posteriormente a una gran variedad de problemas hasta nuestros días, entre ellos, el estudio de estructuras de guiado, modos resonantes de cavidades, problemas de *scattering* y radiación, etc.

Antes de continuar con la descripción de las características generales de los elementos curl-conformes, se hacen algunos comentarios sobre un caso particular de éstos, los denominados elementos de arista.

La denominación "elementos de arista" se ha empleado durante mucho tiempo para designar de forma general al tipo de elementos que proporcionan continuidad de la componente tangencial y salto de la componente normal, es decir, lo que en la actualidad se entiende por elementos curl-conformes, en contraposición con los elementos de Lagrange que proporcionan continuidad tangencial y normal. Posteriormente, el término "elementos de arista" ha visto progresivamente reducido su ámbito a los elementos curl-conformes de primer grado. A continuación, se da una explicación a este cambio en la terminología. Los primeros elementos curl-conformes implementados fueron los correspondientes a aproximaciones polinómicas de primer grado. Los grados de libertad de los elementos curl-conformes de primer grado se definen en función de la componente del campo tangencial a las aristas, por tanto, parece lógico asociar dichos grados de libertad a nodos situados en las aristas de los elementos. De ahí, el término elementos de arista. Posteriormente, fueron haciendo aparición implementaciones de los elementos de arista de orden superior, que tenían grados de libertad asociados a otras entidades geométricas del elemento como caras, volumen, etc, además de a las aristas. Por tanto, el término elemento de arista no parece el apropiado para designar a los elementos curl-conformes en general, sino tan sólo a los de primer grado. Por ello, en la actualidad la denominación "elemento de arista" se emplea para referirse a los elementos curl-conformes de primer grado, independientemente de la geometría del elemento, triángulo, rectángulo, hexaedro, tetraedro, etc. Es interesante observar que el triángulo de arista de primer grado corresponde a la versión en $H(\text{curl})$ de las funciones empleadas en la discretización de la corriente eléctrica en el contexto del método de los momentos, que fueron propuestas por S.M.Rao, con posterioridad a las primeras publicaciones sobre elementos conformes en $H(\text{div})$ y $H(\text{curl})$. Además, los elementos de arista presentan algunas propiedades particulares no compartidas por el resto de los elementos curl-conformes de orden superior. En este sentido, los elementos de

arista pertenecen a una familia más amplia de objetos geométricos, conocida como *formas de Whitney*.

Además de las ventajas mencionadas hasta ahora, los elementos curl-conformes poseen otras características que los hacen igualmente apropiados para la discretización del campo electromagnético, como son, la facilidad para imponer condiciones de contorno en fronteras de geometría arbitraria, la mejora de la convergencia en problemas con esquinas, o el cálculo de ciertas magnitudes directamente a partir de los grados de libertad. Todas estas ventajas son fruto de la participación en la definición de los grados de libertad asociados a nodos en la frontera, únicamente de la componente del campo tangencial a la frontera. O lo que es lo mismo, la componente del campo tangencial a una arista, cara, etc., de un elemento sólo depende de los grados de libertad asociados a esa arista, cara, etc., del elemento. De esta forma, la formulación de elementos finitos, una vez discretizada con los elementos curl-conformes, queda en función únicamente de las componentes tangenciales del campo eléctrico y/o magnético, análogamente a lo que ocurre físicamente en las ecuaciones de Maxwell originales. Por ejemplo, las componentes de campo que intervienen principalmente en el teorema de unicidad, el principio de equivalencia, etc., son precisamente las componentes tangenciales.

De igual forma, en las condiciones de contorno del tipo pared eléctrica, (3.82), o pared magnética, (3.84), tan sólo intervienen las componentes tangenciales del campo. Por tanto, las condiciones de contorno del tipo mencionado anteriormente, se imponen fácilmente igualando a cero los grados de libertad correspondientes asociados a la frontera, es decir, como simples condiciones de Dirichlet homogéneas sobre los grados de libertad. En el lado opuesto se encontrarían los elementos de Lagrange que, cuando las fronteras no son paralelas a algunos de los ejes coordenados, necesitan imponer, sobre los grados de libertad asociados a las fronteras, condiciones de contorno en relación lineal. Otro ejemplo de la condición de contorno, en este caso inhomogénea, corresponde a la imposición de un campo conocido en una determinada superficie, por ejemplo, cuando se excita una de las puercas (estructura de guiado) en un problema de discontinuidades. Si el plano no es paralelo a alguno de los planos coordenados, la imposición de las condiciones de contorno con elementos de Lagrange implica la imposición de relaciones lineales entre los grados de libertad.

Otra característica de los elementos curl-conformes que merece la pena resaltar es la capacidad para obtener con facilidad, como post-procesos, algunas magnitudes electromagnéticas de interés. Ejemplos son: la intensidad de la corriente, el vector de Poynting normal a una determinada superficie, etc. En el caso del cálculo de la corriente en los conductores, ésta puede obtenerse, mediante el uso de la ley de Ampere, como la circulación del campo

magnético sobre el conductor. Por tanto, considerando la formulación con campo magnético, las corrientes se calculan básicamente sumando los valores de los grados de libertad asociados al conductor.

Como desventajas de los elementos curl-conformes se cita en ocasiones el hecho de que el número de grados de libertad de un mallado con elementos curl-conformes es mayor que el correspondiente al caso de elementos de Lagrange (considerando elementos del mismo grado), por lo que las dimensiones de las matrices del problema discretizado son mayores en el primer caso. Efectivamente, aunque la discretización de un vector con elementos de Lagrange requiere 3 (para 3D) ó 2 (para 2D) aproximaciones diferentes, es decir, 3 ó 2 grados de libertad por nodo, frente a un grado de libertad por nodo de los elementos curl-conformes, el número total de grados de libertad en un mallado es mayor en el caso de los elementos curl-conformes. A ello colabora la menor conectividad de los elementos curl-conformes, cuyos nodos se encuentran compartidos por un número menor de elementos que en el caso de los elementos de Lagrange. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, debido precisamente a la menor conectividad de los elementos curl-conformes, éstos dan lugar a matrices más dispersas (anchura de banda menor) que los elementos de Lagrange, con las consiguientes ventajas que ello representa en recursos computacionales (memoria y CPU). De esta forma, mediante el uso de resolvedores específicos para matrices dispersas, aún en el caso de trabajar con matrices de dimensiones mayores, el uso de elementos curl-conformes resulta ventajoso en términos de recursos computacionales.

En resumen, se han presentado las principales características de los elementos curl-conformes, mostrándose éstos como la opción más ventajosa para la discretización del campo eléctrico o magnético en formulaciones vectoriales. Como se ha mostrado anteriormente, los elementos curl-conformes resuelven elegantemente el problema de contaminación por modos espurios sin necesidad de modificar las formulaciones del problema. Además, cuentan con una serie de ventajas adicionales frente a otros métodos propuestos en la literatura para la eliminación de los modos espurios. Algunos de estos métodos no son válidos para problemas 3D (métodos de reducción), pero en cualquier caso todos los procedimientos vistos para la etapa de formulación requieren modificar la formulación débil del problema para hacer frente a los modos espurios. Ello lleva consigo la necesidad de discretizar con elementos C^1 o la pérdida de dispersidad de las matrices, etc. Igualmente, debido al empleo de elementos de Lagrange (o hipotéticos elementos de divergencia nula), se impone la continuidad del campo entre elementos lo que lleva a inconsistencias en el modelado de las interfaces entre diferentes medios, a implementaciones dificultosas de las condiciones de contorno en fronteras de geometría arbitraria, etc. Por otro lado, los elementos curl-conformes pro-

porcionan, de forma natural al trabajar con las componentes tangenciales del campo, aproximaciones consistentes con el comportamiento del campo, lo que los convierte en la opción preferida para la discretización de formulaciones vectoriales de campo.

3.5 Análisis de Problemas Abiertos.

El análisis de problemas abiertos, es decir, aquellos en los que el dominio es infinito, siempre ha sido considerado como uno de los talones de Aquiles del *MEF*, en comparación con otros métodos. Como ya se ha apuntado anteriormente en este proyecto, el *MEF* puede verse como la aplicación por subdominios de los métodos variacionales a la formulación diferencial que modela el problema físico. En nuestro caso, la formulación diferencial viene dada por las ecuaciones de Maxwell (o ecuaciones derivadas de éstas) donde las incógnitas son típicamente las diferentes magnitudes del campo electromagnético (o los potenciales). Como consecuencia, y a diferencia de otros métodos que trabajan con las fuentes del problema en lugar de con los campos, el *MEF* implica la discretización de toda la región donde existe campo. En muchos problemas prácticos los campos se encuentran confinados en una región finita. Ejemplos de esto último son las cavidades de microondas o las estructuras de guiado, cerradas por conductores perfectos. Sin embargo, en muchos otros casos los campos existen en una región infinita, es decir, el dominio del problema Ω es infinito; son los denominados problemas abiertos. Ejemplos típicos son los problemas de *scattering* y radiación. Por tanto, la implementación clásica del *MEF* en la que se discretiza el dominio completo es imposible desde el punto de vista práctico. De este modo, el análisis mediante el *MEF* de problemas abiertos requiere algunas modificaciones respecto a la metodología clásica para problemas cerrados. A continuación se resumen las distintas técnicas que han aparecido en la literatura con objeto de adaptar el *MEF* a problemas abiertos.

La primera opción y la más sencilla de implementar es cerrar el dominio del problema mediante una frontera artificial (tipo conductor perfecto o similar) lo suficientemente alejada de forma que no interfiera con los campos en la región de interés. Esta opción es demasiado restrictiva y, en cualquier caso, conduce a discretizaciones con un número muy elevado de incógnitas, con el consiguiente gasto en recursos computacionales (almacenamiento y tiempos de CPU).

El resto de técnicas se basan en la subdivisión del dominio infinito en dos regiones: la región de interés en la que el campo posee variaciones significativas, y otra segunda región que comprende el resto del dominio infinito

original. Ambas regiones están separadas por una frontera ficticia S que habitualmente comprende las fuentes e inhomogeneidades del problema, de forma que la región externa es homogénea. Dentro de los métodos de elementos finitos que se basan en la división del dominio original en dos regiones, se pueden distinguir a su vez dos grupos.

En el primer grupo se realiza una discretización no convencional de la región externa mediante el uso de *elementos finitos* [11], *condensación recursiva* [16], *escalado infinitesimal* [12], o el empleo de transformaciones geométricas como el *conformal mapping*. Este tipo de métodos se aplican casi exclusivamente a problemas estáticos y cuasi-estáticos.

Los métodos del segundo grupo sólo discretizan la región interior a S , es decir, se trunca el dominio infinito original en un dominio finito. De este modo, se puede emplear una discretización con elementos convencionales. La representación del campo en la región interna debe ligarse con la adecuada representación del campo en la región externa. La clave reside en imponer la oportuna condición de contorno sobre S , de forma que simule la infinitud del dominio original del problema. En otras palabras, la solución de las ecuaciones de Maxwell en la región interna a S , junto con la condición de contorno sobre S , debe proporcionar una buena aproximación de la solución de campo del problema abierto original. Además de la precisión de la solución obtenida, existen igualmente otros requerimientos para la condición de contorno sobre S . Así, sería deseable que la condición de contorno fuera tal que pudiera truncarse el dominio original cerca de las fuentes, con objeto de reducir el número de nodos de los mallados (cuestión especialmente importante en 3D). Asimismo, es importante que no se altere la dispersidad de las matrices originales del *MEF*, en particular, su estructura en banda, de forma que puedan emplearse resolvedores específicos existentes para este tipo de matrices, con la mejora en eficiencia que ello conlleva respecto al empleo de resolvedores convencionales para matrices llenas.

Algunos autores se refieren a estos métodos, en los que se trunca el dominio original mediante la correspondiente condición de contorno, como *picture-frame methods* (en la terminología anglosajona) porque, como en la foto de un paisaje, la solución se obtiene sólo en una porción del total. Es importante recalcar que ello no implica que no se pueda calcular la solución fuera de dicha porción, es decir, en la región externa, como se verá más adelante. Existen varios criterios de clasificación de este tipo de métodos. Un criterio que tiene relevancia desde el punto de vista numérico es aquél que atiende al carácter local o no local de la condición de contorno sobre S , empleada para truncar el dominio original del problema. De este modo, se distingue entre los métodos basados en condiciones de contorno locales, y aquellos basados en condiciones no locales.

Los métodos con condiciones de contorno no locales proporcionan un esquema de truncamiento numéricamente exacto, válido tanto para el campo lejano como para el campo cercano. Ello se logra haciendo uso del Principio de Equivalencia que conduce a una representación del campo exterior en forma integral a partir de fuentes equivalentes y la función de Green. El carácter no local de la condición de contorno viene dado por la representación del campo en forma integral, que liga el valor del campo en un punto genérico (de S en particular) con los valores del campo en todos los puntos sobre dicha frontera S . Por tanto, se destruye la dispersidad de las matrices originales del MEF , dado que se obtiene un sistema de ecuaciones denso, o al menos, parcialmente denso. Por otro lado, debido al carácter exacto de la condición de contorno, válida incluso para campo cercano, la frontera S puede colocarse muy cerca de las fuentes originales del problema, con las ventajas en eficiencia derivadas del empleo de mallados con un número relativamente bajo de nodos.

Dentro de las técnicas basadas en el caso de condiciones de contorno no locales cabe distinguir dos familias de métodos en función del tipo de funciones de base empleadas en la discretización de las fuentes equivalentes (cargas y/o corrientes) del problema.

Una primera familia de métodos hace uso de funciones de base idénticas (o del mismo tipo) a las empleadas en la discretización de la región interna encerrada por S . Dichos métodos se conocen habitualmente como *métodos de elementos finitos híbridos* (o simplemente *métodos híbridos*). Los primeros trabajos en la aplicación del MEF a problemas abiertos pertenecen a esta categoría ([13] para la ecuación de Laplace y [17] para la ecuación de Helmholtz). Básicamente, como se explicó anteriormente, los métodos híbridos hacen uso del Principio de Equivalencia para llegar a una representación integral del campo exterior en función de fuentes equivalentes sobre la frontera artificial S . Las mencionadas fuentes se expresan en función de la correspondiente incógnita física del problema (el campo, el potencial, etc). Dado que la incógnita del problema se discretiza mediante elementos finitos, las fuentes y, por tanto, la condición de contorno integral sobre S , quedan igualmente discretizadas empleando las funciones de base de los elementos finitos. De este modo, debido a la flexibilidad del MEF , la geometría de la frontera S puede ser, en principio, arbitraria. Además, dado el carácter exacto de la condición de radiación de la representación integral del campo, la frontera S se puede situar muy cerca de las fuentes originales del problema, obteniéndose sistemas de ecuaciones con un número relativamente bajo de incógnitas. El inconveniente proviene de la pérdida de dispersidad de las matrices provocada por el carácter integral de la condición de contorno implementada. En concreto, el sistema de ecuaciones resultante presenta matrices con un bloque lleno de $N \times N$, donde N se refiere al número de grados de libertad asocia-

dos a nodos sobre S . Ello hace que el proceso de resolución del sistema sea costoso desde el punto de vista computacional cuando el número de grados de libertad es elevado. Desde los primeros trabajos de [13] y [17] los métodos híbridos se han aplicado a una gran variedad de problemas, con diferentes formulaciones y tipos de elementos, véase como ejemplos, [14, 15, 18].

Dentro de los métodos de elementos finitos híbridos, algunos autores distinguen a su vez entre los denominados FEM/MoM (elementos finitos y método de los momentos), FEM/BEM (elementos finitos y elementos de contorno), [19], y métodos $FE - BI$ (elementos finitos con integral sobre la frontera), [14, 20, 21]⁸. Sin embargo, las diferencias entre ellos son más formales que conceptuales, dado que los tres diferentes tipos de métodos híbridos citados comparten la representación del campo exterior en forma integral.

En el caso del FEM/MoM sería mejor hablar de $MoM - FEM$ dado que su metodología es idéntica a la de un método de los momentos, en el que el problema interno se caracteriza mediante elementos finitos. Los métodos $FE - BI$ se presentan como el caso contrario. La metodología de éstos es la de un método de elementos finitos convencional, con la particularidad de que la condición de contorno en la frontera externa es del tipo integral. Por último, el denominado $FEM - BEM$, en el caso particular de su aplicación a problemas abiertos, puede considerarse englobado dentro de los métodos $FE - BI$, como se explica posteriormente.

En el FEM/MoM , y como es habitual en el método de los momentos, los problemas interno y externo se desacoplan haciendo uso del Principio de Equivalencia mediante el empleo de fuentes (cargas o corrientes) equivalentes en la frontera entre las regiones interna y externa. La diferencia con el método de los momentos es que el problema interno se resuelve empleando elementos finitos. Ambos problemas, interno y externo, se acoplan mediante la satisfacción de la continuidad de las componentes tangenciales del campo. Todo ello conduce a un sistema de ecuaciones en el que las fuentes equivalentes aparecen como incógnitas del problema. Habitualmente, la discretización de las regiones interna (elementos finitos) y externa (método de los momentos) es tal que es idéntica o muy parecida sobre la frontera entre ambas regiones. Sin embargo, no siempre es así. En [22] se emplea una expansión diferente en la discretización de la integral sobre la frontera S para los problemas interno y externo. Ello da lugar a una mayor flexibilidad permitiendo emplear un número menor de nodos en la discretización de la ecuación integral que en la

⁸En la terminología anglosajona, FEM se refiere a *finite element method*, MoM a *method of moments*, BEM a *boundary element method* y $FE - BI$ a *finite element boundary integral*.

discretización de elementos finitos de la región interna, con la correspondiente mejora en la eficiencia del método. En otros casos, se utilizan métodos híbridos que aunque se consideran $FEM - MoM$ tienen, sin embargo, una metodología que se separa de la descrita previamente. Como ejemplo puede citarse [23], en el que se hace un método de los momentos con formulación volumétrica, donde el método de los elementos finitos interviene meramente en el cálculo de las corrientes equivalentes del volumen, haciendo uso de un mallado con un número bajo de nodos.

Los denominados métodos $FE - BI$ discretizan, como es habitual en elementos finitos, un determinado dominio finito sujeto a condiciones de contorno en la frontera. La diferencia con un método de elementos convencional es que la condición de contorno en la frontera viene dada en forma integral. De este modo, en los métodos $FE - BI$ no existen dos problemas, interno y externo, sino más bien un problema interno donde la integral sobre la frontera actúa de condición a satisfacer. Por ello, las fuentes equivalentes no aparecen aquí como incógnitas del problema, a diferencia de lo que sucedía con el $FEM - MoM$. La discretización de la condición de contorno integral se hace siguiendo la metodología de elementos finitos. Por ello, el método denominado $FEM - BEM$ aplicado a problemas abiertos puede englobarse dentro de los métodos $FE - BI$.

El BEM , [24], consiste en la aplicación de la metodología de discretización de elementos finitos a operadores integrales. El BEM , cuyo desarrollo teórico es paralelo al de los métodos de ecuación integral, constituye un método con entidad propia, no solamente empleado junto con otros métodos para el análisis de problemas abiertos. De hecho, constituye una alternativa al MEF en problemas no abiertos donde no existan inhomogeneidades, etc.; [25] y [26] son ejemplos de aplicación del BEM a diversos problemas electromagnéticos. Tanto el BEM como su hibridación con el FEM , el denominado FEM/BEM , han visto en el análisis de discontinuidades una de sus primeras aplicaciones, por ejemplo, [26]. Sin embargo, el análisis de discontinuidades no puede considerarse en sí mismo como un problema abierto propiamente dicho. Por todo ello, el FEM/BEM se considera aquí englobado dentro de los denominados métodos $FE - BI$.

La segunda familia de métodos que emplean condiciones de contorno no locales usan una expansión en términos de autofunciones para la discretización de las fuentes equivalentes. El método *unimoment* [27] es la técnica más extendida dentro de los métodos que utilizan expansión mediante autofunciones. El método *unimoment* se aplicó originalmente a problemas 2D de *scattering* y radiación y desde entonces se ha utilizado ampliamente en el análisis de antenas y de *scattering* de objetos complejos. En el método *unimoment* las fuentes equivalentes sobre S se aproximan mediante una com-

binación lineal de N autofunciones Φ_m ($m=1\dots N$) del operador de Helmholtz. El campo en la región interior a S se obtiene de la solución mediante el *MEF* de N sistemas dispersos de ecuaciones, correspondientes a N problemas interiores, cada uno de ellos con un valor distinto de la autofunción Φ_m como condición de Dirichlet sobre S . El campo interior se calcula, por tanto, como la combinación lineal de las soluciones de campo de los N problemas interiores citados, donde los coeficientes de la combinación lineal son los mismos que los empleados en la expansión de las fuentes equivalentes. Los mencionados coeficientes se calculan resolviendo un sistema denso de ecuaciones de dimensiones $N \times N$, en el que los coeficientes son las incógnitas del sistema. Dicho sistema se obtiene de la imposición de la continuidad del campo y de las fuentes equivalentes sobre S .

La ventaja del método *unimoment* reside en que la dimensión del sistema denso de ecuaciones que se ha de resolver es mucho menor que en el caso de los denominados métodos de elementos finitos híbridos. Esto es debido a que el número de funciones que se necesitan para discretizar las fuentes sobre S es mucho mayor que en el caso de emplear funciones de base convencionales del *MEF* que en el caso de utilizar una expansión en términos de autofunciones. En contrapartida, se requiere que la frontera S , donde se realiza la expansión de autofunciones, sea un contorno o superficie que corresponda a una coordenada espacial constante sobre la que el operador de Helmholtz sea separable (formas típicas de la frontera S son la circunferencia en 2D y la esfera en 3D). Por tanto, el método no resulta eficiente, en general, en el caso de problemas con geometría arbitraria, en particular, en aquellos problemas en que se tienen formas "alargadas". Ello se debe a la necesidad de mallar toda la región interior a la circunferencia o esfera que contiene a todas las inhomogeneidades y fuentes originales del problema, "malgastándose", de esta forma, un gran número de nodos en aquellas regiones homogéneas sin fuentes contenidas dentro de S . Esta desventaja del método es especialmente notoria en problemas en 3D. Los métodos de elementos finitos híbridos son más flexibles y eficientes en este sentido, dado que permiten elegir la frontera S de forma arbitraria y, de modo que ésta puede hacerse conforme a la región de interés del problema, con el consiguiente ahorro en el número de nodos del mallado. Existen diversas técnicas que tratan de paliar algunas de las limitaciones del método *unimoment*, en particular, el problema mencionado de la necesidad de elegir como frontera externa S aquella que se corresponda con una coordenada espacial constante en la que el operador de Helmholtz sea separable. Entre ellas cabe destacar el denominado *método de elementos finitos con condiciones de contorno extendidas*, y el método *bymoment*.

La segunda categoría de los denominados *picture-frame methods* está formada por aquellos métodos que conducen a condiciones de contorno locales

sobre S y cuya filosofía es la siguiente. Si se pretende conservar la dispersidad y estructura en banda de las matrices propias del MEF , es necesario proporcionar una relación local entre los valores de campo en S , de forma que se pueda obtener el valor de campo en un punto genérico de S a partir de ,solamente, los valores de campo en los puntos vecinos. Así, por ejemplo, si S es una esfera lo suficientemente alejada de una antena de modo que se encuentra claramente en la zona de campo lejano, los campos eléctrico y magnético son localmente ortogonales y sus intensidades están relacionadas por la impedancia del medio (condición de radiación de Sommerfeld). Ello permite obtener una condición de contorno global sobre S , si bien su implementación conduciría a métodos ineficientes, en el sentido de que es necesario mallar toda la región del espacio delimitada por S . Existen otro tipo de condiciones de contorno que permiten situar la frontera artificial S más cerca de las fuentes originales del problema. En cualquier caso, las condiciones de contorno locales no son exactas, incluso en el sentido numérico. La razón es que, teóricamente, no puede haber relación local entre los campos, excepto en la zona de campo lejano en el infinito.

Sin embargo, sí se pueden obtener relaciones locales entre los campos a costa de realizar ciertas aproximaciones sobre la condición de radiación exacta. En este sentido, las condiciones de contorno locales tan sólo consideran en S ondas propagándose en sentido saliente (es decir, de dentro hacia afuera). Las condiciones de contorno locales deben, por tanto, cancelar las posibles reflexiones en S , es decir, deben comportarse como absorbentes perfectos. De ahí que las condiciones locales sean también conocidas como *condiciones de contorno absorbentes* (*Absorbing Boundary Conditions —ABCs—* en la terminología anglosajona). Las limitaciones de las *ABCs* provienen justamente de las hipótesis hechas en su obtención. De este modo, la frontera externa S debe colocarse a una cierta distancia de las fuentes originales del problema, para que la aproximación hecha sobre la condición de radiación sea lo suficientemente precisa, lo que conduce a sistemas de ecuaciones con gran número de incógnitas (especialmente en 3D). Igualmente, existen efectos no deseables cuando la frontera externa S presenta esquinas reentrantes, fruto de que las hipótesis relativas a la presencia en S de ondas propagándose únicamente en sentido saliente, no es válida en esta situación.

La investigación en la disciplina de las *ABCs* comienza en el campo de la matemática aplicada con el trabajo de Engquist y Majda, en el que se desarrollaron condiciones de contorno absorbentes escalares para problemas en 2D. Posteriormente, e inspirado en el trabajo de Engquist y Majda, Mur desarrolló una *ABC* escalar de segundo orden , válida igualmente en 3D. Bayliss y Turkel derivaron una metodología diferente de la de Engquist y Majda para la obtención de condiciones locales de radiación, que fue más

tarde aplicada a la ecuación escalar de Helmholtz. No fue hasta finales de los 80 cuando la investigación sobre *ABCs* abandonó los foros matemáticos para empezar a ser conocida y utilizada por ingenieros de diversas disciplinas, en particular por aquellos ocupados en la resolución de problemas electromagnéticos. Así, se mostró el análisis de un problema de *scattering* en 2D empleando el *MEF*, junto con una condición de contorno de Bayliss-Turkel en la frontera. Desde entonces la investigación sobre el empleo de las *ABCs* para el análisis mediante el *MEF* de problemas abiertos, ha experimentado un gran desarrollo tanto en problemas 2D como 3D. Ejemplo de aplicación de *ABCs* escalares es [28], y de *ABCs* vectoriales [29]. Debido al carácter aproximado de las condiciones de contorno locales, muchos de los análisis basados en *ABCs*, posteriores a los primeros trabajos de Turkel, incorporan procedimientos (habitualmente experimentos numéricos) con el objeto de comprobar *a posteriori* la validez de la condición de contorno absorbente implementada.

En los últimos años han aparecido diversas técnicas, que podrían clasificarse como técnicas numéricas, para la obtención de condiciones de contorno locales, como una alternativa a las *ABCs* analíticas descritas anteriormente. Entre ellas cabe citar las denominadas *condiciones de contorno absorbentes numéricas* (o *Numerical Absorbing Boundary Conditions* —*NABCs*— en la terminología anglosajona) y al método de la *Measured Equation of Invariance* —*MEI*— que aquí denominaremos método de *MEI*. Ambos métodos tienen en común el postulado de la existencia de combinaciones lineales que relacionan los grados de libertad asociados a nodos sobre la frontera S con sus vecinos, y el posterior cálculo de los coeficientes de la combinación lineal. Igualmente, ninguno de los dos métodos se basa en el comportamiento en campo lejano de las ondas salientes a S por lo que, a diferencia de las *ABCs* convencionales, la frontera S puede colocarse cerca de las fuentes originales con la consiguiente reducción del número de incógnitas del mallado. Las diferencias entre ellos residen en la forma de obtener dichos coeficientes además de en otros detalles de implementación. En el caso de las *NABCs*, los coeficientes de la combinación lineal se obtienen forzando el cumplimiento de las relaciones lineales postuladas, para varias soluciones de campo conocidas de la ecuación de onda (por ejemplo, ondas planas). Bajo ciertas hipótesis, se puede demostrar la equivalencia de las *NABCs* y algunas de las condiciones de contorno absorbentes analíticas mencionadas anteriormente cuando h (el tamaño de los elementos finitos del mallado) tiende a cero, es decir, cuando la distancia entre los nodos de la frontera S se aproxima a cero. Las *NABCs* se han aplicado a diversos problemas, tanto escalares como vectoriales, en 2D y 3D.

Por otro lado, en el método de *MEI*, al igual que en las *NABCs*, se fuerza

el cumplimiento de las relaciones entre los grados de libertad asociados a la frontera externa S para varias soluciones conocidas de la ecuación de onda. Sin embargo, en este caso las soluciones de campo empleadas (conocidas como *funciones de medida*) se generan numéricamente a partir de los denominados *metrones* y la correspondiente función de Green actuando sobre dichos metrones. Los metrones son un conjunto de corrientes, es decir, en el caso general, un conjunto de fuentes equivalentes. Habitualmente, los metrones se sitúan no directamente sobre la frontera S , sino sobre una superficie (o contorno) accesoria con objeto de evitar la singularidad de la función de Green. Por ejemplo, en el caso de un problema de *scattering* los metrones se considerarían típicamente sobre el objeto dispersor. La potencia del método se basa en el postulado de la invarianza con la excitación, es decir, los coeficientes calculados son independientes (en la práctica, casi independientes) de la elección de los metrones. De este modo, y a diferencia de las *NABCs*, las soluciones empleadas en el cálculo de los coeficientes (las funciones de medida) son específicas de la particular geometría del problema. La información geométrica viene dada por la función de Green. Por ejemplo, el análisis de una línea microtira abierta se puede realizar discretizando con elementos finitos tan sólo la microtira y el área que la rodea. La zona de dieléctrico entre la tira conductora y el plano inferior de masa, y el plano de masa en sí, no tendrían porqué ser discretizados si la función de Green empleada en la generación de las funciones de medida incorpora dicha información, es decir, si la función de Green utilizada corresponde a la del dieléctrico con el plano de masa incorporado. En resumen, la función de Green empleada en la generación de las funciones de medida a partir de los metrones debe cumplir las condiciones de contorno externas a la malla de elementos finitos. Nótese que, aunque la condición de contorno proporcionada por el método es local, debido al uso de la función de Green, la frontera S puede situarse muy cerca de las fuentes originales del problema. El método de MEI ha sido objeto en los últimos años de una activa investigación por parte de sus propios autores y otros y se ha aplicado a una gran variedad de problemas en electrostática, en el análisis de las características de guiado de estructuras planares así como en el análisis de discontinuidades, en la predicción de sección radar y en la caracterización de antenas.

Otro método relativamente reciente que cabe destacar también en la obtención de condiciones de contorno locales es el denominado *método de los operadores complementarios* (o *complementary operators method* en la terminología anglosajona).

Una alternativa a los métodos citados hasta ahora consiste en el empleo de una capa de material con pérdidas encerrando las fuentes, inhomogeneidades, etc., del problema. De esta forma, se puede considerar un conductor perfecto

para truncar (cerrar) el dominio original infinito, o lo que es lo mismo, se puede emplear la condición de pared eléctrica como condición en la frontera externa S , sin afectar significativamente a la solución. Esta idea, que no es nueva, no había sido ampliamente utilizada por el alto nivel de reflexiones producido en la interfaz con el medio con pérdidas. La elección de un material de bajas pérdidas, si bien conseguía minimizar las reflexiones, tenía el serio inconveniente de la necesidad de considerar una región con pérdidas lo suficientemente grande para que las ondas alcanzaran la pared conductora suficientemente atenuadas, lo que se traducía en mallados con gran número de incógnitas. Sin embargo, la situación cambió a raíz de la aparición del denominado concepto de *Perfectly Matched Layer* —*PML*—, propuesto por Berenguer en 1994. La *PML* de Berenguer fue presentada en el marco del método de las diferencias finitas pero en la actualidad se emplea igualmente con el *MEF*. La *PML* es una capa de material con pérdidas diseñada de tal forma que absorbe las ondas planas con frecuencia y ángulos arbitrarios. Berenguer la diseñó introduciendo modificaciones en las ecuaciones de Maxwell de manera que se podían dar las especificaciones de un material con pérdidas tal que no se produjeran reflexiones. Así, por ejemplo, en el caso de un problema de *scattering* el objeto dispersor se rodea de dicho material actuando físicamente como una condición de contorno absorbente. Por último, el problema se cierra mediante pared conductora, que dada la atenuación existente en el material con pérdidas, produce niveles de reflexión que pueden considerarse despreciables. Posteriormente otros autores han profundizado en diversos aspectos de la *PML* de Berenguer.

Sin embargo, la *PML* de Berenguer había sido obtenida modificando las ecuaciones de Maxwell originales, lo que se traducía en un material que era "no maxwelliano". Como alternativa a la *PML* de Berenguer, se propone una metodología diferente para la obtención del material absorbente perfecto, que conduce a un medio material maxwelliano, aunque anisotrópico. Existe una comparación entre ambos materiales: la *PML* de Berenguer y la *PML* anisotrópica. Algunas áreas activas de investigación en este campo son la introducción de *PMLs* conformes a determinadas superficies o contornos, *PMLs* causales, la absorción de ondas evanescentes (al corte), o la búsqueda de *PMLs* que sean físicamente realizables.

Capítulo 4

Aplicación del MEF a MPA.

4.1 Introducción.

En este Capítulo se analiza la antena microstrip parche mediante el método de los elementos finitos. La formulación propuesta se implementará mediante funciones MATLAB, a las que se hace referencia con el fichero.m que las contiene y que se incluyen en el anexo, al final de este proyecto. La ejecución del programa formado por todas las funciones proporciona la simulación del comportamiento de la antena, desde el punto de vista de los campos electromagnéticos en su interior y también, a partir de éstos, de los campos radiados, impedancia de entrada, eficiencia de radiación, directividad, ganancia y ancho de banda.

Se analizará una antena microstrip con parche rectangular, cuyos parámetros característicos se cargarán en **antena.m**. De esta forma, el usuario puede elegir:

- dimensiones de la cavidad que forma la antena encapsulada en el plano de tierra.
- número de elementos para el análisis MEF, en cada dirección del espacio.
- permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del sustrato dieléctrico.
- frecuencia de trabajo.
- dimensiones del parche.
- localización del cable coaxial de alimentación.

Como se vió en el Capítulo 3, la aplicación del MEF puede dividirse en cuatro pasos básicos. Los dos primeros se consideran en la segunda sección de este capítulo; esto es, la discretización del volumen y la selección de las funciones base. Se trata de un problema en tres dimensiones, para el que se utilizarán elementos curl-conformes de primer orden, es decir, elementos

de arista, que asignan los grados de libertad a las aristas del elemento en lugar de a sus nodos. La conveniencia de tales elementos se basa, principalmente, en su capacidad para la eliminación de los modos espurios, aunque presentan otras ventajas frente a los elementos nodales tradicionales: evitan las dificultades en la imposición de las condiciones de frontera en las interfaces de los materiales así como en superficies conductoras, y reducen los problemas en bordes de conductores y dieléctrico y en esquinas, debidos a las singularidades de los campos asociadas a estas estructuras.

En la Sección 4.3 se realizan los pasos básicos del MEF correspondientes a la formulación y resolución del sistema de ecuaciones. En la Sección 3.5, se expusieron las diferentes técnicas para el análisis de problemas abiertos, concluyendo en la preferencia de los métodos híbridos y, en concreto, del método FE-BI, que se empleará aquí. El procedimiento es el de un método de elementos finitos convencional, con la particularidad de que la condición de contorno en la frontera externa es del tipo integral. La ventaja más importante es que la condición de contorno es tal que el dominio original puede truncarse cerca de las fuentes, con la consiguiente reducción en el número de elementos de los mallados. Además, proporcionan un esquema de truncamiento numéricamente exacto, válido tanto para el campo lejano como para el campo cercano y, al contrario que con los métodos que no son híbridos, permiten elegir la frontera de forma arbitraria, y de modo que ésta puede hacerse conforme a la región de interés del problema. Así pues, con este método se conseguirá máxima eficiencia y flexibilidad.

4.2 Elementos de arista. Funciones base.

Se considera el prisma rectangular mostrado en la Figura 4.1, en el que la dimensión de las caras viene dada por las longitudes l_x , l_y y l_z en las direcciones x, y y z , respectivamente, y cuyo centro se localiza en (x_c^e, y_c^e, z_c^e) . Por definición de los elementos de arista, se asigna una constante a la componente tangencial del campo en cada arista del elemento y las componentes del campo en el interior del elemento pueden expresarse

$$E_x^e = \sum_{i=1}^4 N_{xi}^e E_{xi}^e, \quad E_y^e = \sum_{i=1}^4 N_{yi}^e E_{yi}^e, \quad E_z^e = \sum_{i=1}^4 N_{zi}^e E_{zi}^e \quad (4.1)$$

donde

Figura 4.1: Elemento Prisma Rectangular.

$$\begin{aligned}
N_{x1}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) \\
N_{x2}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) \\
N_{x3}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) \\
N_{x4}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) \\
N_{y1}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) \\
N_{y2}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) \\
N_{y3}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) \\
N_{y4}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) \\
N_{z1}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) \\
N_{z2}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) \\
N_{z3}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) \\
N_{z4}^e &= \frac{1}{l_y^e l_z^e} (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Si los números de las aristas se definen como en la Tabla 4.1, la expansión (4.1) puede escribirse en notación vectorial como

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^{12} \mathbf{N}_i^e E_i^e \tag{4.3}$$

donde

$$\mathbf{N}_i^e = N_{xi}^e \hat{x}, \quad \mathbf{N}_{i+4}^e = N_{yi}^e \hat{y}, \quad \mathbf{N}_{i+8}^e = N_{zi}^e \hat{z} \tag{4.4}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$. Es fácil ver que las funciones base vectoriales definidas en (4.4) tienen divergencia nula, esto es, $\nabla \cdot \mathbf{N}_i^e = 0$, y rotacional distinto

Arista i	Nodo i_1	Nodo i_2
1	1	2
2	4	3
3	5	6
4	8	7
5	1	4
6	5	8
7	2	3
8	6	7
9	1	5
10	2	6
11	4	8
12	3	7

Tabla 4.1: Definición de aristas para un prisma rectangular.

de cero. Además, se observa que la componente tangencial del campo en una cara del elemento viene dada por las componentes tangenciales de los campos en las aristas de dicha cara. Así pues, la expansión dada en (4.3) no sólo garantiza la continuidad tangencial en las aristas, sino también en las superficies de los elementos.

El proceso de discretización del volumen se implementa en el fichero **genaris.m**, de manera que se tendrá el número de elementos de arista que se desee. Dichos elementos quedan caracterizados por sus tres coordenadas cartesianas de menor valor. Se generan sus aristas, y se almacenan los datos necesarios para la conversión de numeración local a numeración global, y viceversa, así como para la localización del elemento que contiene a un punto determinado. Además, se asocian el cable de alimentación, las paredes de la cavidad y el parche con los elementos que los contienen, puesto que éste es imprescindible para funciones posteriores.

Evaluación de matrices elementales.

Una vez seleccionados el tipo de elementos y las funciones base que se emplearán en el análisis, se procede, como se vió en el Capítulo 3, a la formulación variacional del problema y su posterior discretización, dando lugar a un sistema de ecuaciones. Sin embargo, resulta interesante adelantar aquí algunas matrices elementales, puesto que cuando se utilizan los elementos y las funciones base vectoriales expuestas anteriormente, la discretización mediante elementos finitos de la ecuación de onda vectorial da lugar a matrices determinadas que pueden expresarse como función exclusiva de las dimen-

siones del elemento. Dichas matrices contienen las dos integrales siguientes:

$$E_{ij}^e = \iiint_{V^e} (\nabla \times \mathbf{N}_i^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j^e) dV \quad (4.5)$$

$$F_{ij}^e = \iiint_{V^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{N}_j^e dV \quad (4.6)$$

Para el caso de elementos prismas rectangulares, sustituyendo (4.4) en (4.5), resulta que

$$[E^e] = \begin{bmatrix} E_{xx}^e & E_{xy}^e & E_{xz}^e \\ E_{yx}^e & E_{yy}^e & E_{yz}^e \\ E_{zx}^e & E_{zy}^e & E_{zz}^e \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} [E_{xx}^e] &= \iiint_{V^e} \left(\frac{\partial \{N_x^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N_x^e\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{N_x^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N_x^e\}^T}{\partial z} \right) dV \\ &= \frac{l_x^e l_z^e}{6 l_y^e} [K_1] + \frac{l_x^e l_y^e}{6 l_z^e} [K_2] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} [E_{yy}^e] &= \iiint_{V^e} \left(\frac{\partial \{N_y^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N_y^e\}^T}{\partial z} + \frac{\partial \{N_y^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N_y^e\}^T}{\partial x} \right) dV \\ &= \frac{l_x^e l_y^e}{6 l_z^e} [K_1] + \frac{l_y^e l_z^e}{6 l_x^e} [K_2] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} [E_{zz}^e] &= \iiint_{V^e} \left(\frac{\partial \{N_z^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N_z^e\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N_z^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N_z^e\}^T}{\partial y} \right) dV \\ &= \frac{l_y^e l_z^e}{6 l_x^e} [K_1] + \frac{l_x^e l_z^e}{6 l_y^e} [K_2] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$[E_{xy}^e] = [E_{yx}^e]^T = - \iiint_{V^e} \frac{\partial \{N_x^e\}}{\partial y} \frac{\{N_y^e\}^T}{\partial x} dV = - \frac{l_z^e}{6} [K_3] \quad (4.10)$$

$$[E_{xz}^e] = [E_{zx}^e]^T = - \iiint_{V^e} \frac{\partial \{N_x^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N_z^e\}^T}{\partial x} dV = - \frac{l_y^e}{6} [K_3] \quad (4.11)$$

$$[E_{yz}^e] = [E_{zy}^e]^T = - \iiint_{V^e} \frac{\partial \{N_y^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N_z^e\}^T}{\partial y} dV = -\frac{l_x^e}{6} [K_3] \quad (4.12)$$

con

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para la integral en (4.6), se tiene

$$[F^e] = \begin{bmatrix} F_{xx}^e & 0 & 0 \\ 0 & F_{yy}^e & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz}^e \end{bmatrix}$$

donde

$$[F_{pp}^e] = \iiint_{V^e} \{N_p^e\} \{N_p^e\}^T dV = \frac{l_x^e l_y^e l_z^e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

con $p = x, y, z$.

4.3 Formulación y Resolución del problema.

El principio general del método FE-BI utilizado es introducir una frontera ficticia que encierre la estructura con sus inhomogeneidades, fuentes... En el interior de la frontera se utiliza el método de los elementos finitos para formular los campos, mientras que en la región exterior los campos se representan mediante una integral de frontera. En primer lugar, se formulan los campos en la región exterior que será el espacio libre sobre el plano de tierra y, puesto que es homogénea, los campos pueden formularse en términos de integrales de frontera con la función de Green apropiada.

Figura 4.2: Geometría de la cavidad encapsulada en un plano de tierra.

En principio, (Apartado 4.3.1) se aborda el problema considerando la cavidad que constituye la antena sin el parche, y sin la alimentación interna. Los resultados serán útiles para la estructura completa de la antena (Apartado 4.3.2), de forma este problema tendrá una resolución inmediata.

4.3.1 Cavidad encapsulada en un plano de tierra.

La geometría específica a considerar se ilustra en la Figura 4.2, y se denotará el espacio sobre la cavidad como V_∞ y el interior de la cavidad como V . Se supone que la cavidad está rellena con un material inhomogéneo con permitividad eléctrica relativa ϵ_r y permeabilidad magnética relativa μ_r .

Formulación de la Integral de Frontera

El campo eléctrico en el espacio libre superior al plano de tierra satisface la ecuación de ondas vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -jk_0 Z_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in V_\infty \quad (4.13)$$

Para encontrar los campos radiados, se introduce la función diádica de Green $\overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que satisface la ecuación diferencial inhomogénea

$$\nabla \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\overline{G}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}' \in V_\infty \quad (4.14)$$

donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ denota la función delta de Dirac. Aplicando el producto escalar de (4.13) con $\overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ e integrando en todo el volumen V_∞ , se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\infty} \{[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dV \\ = -jk_0 Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV \end{aligned} \quad (4.15)$$

siendo V_S el volumen que contiene la fuente de corriente \mathbf{J} . Aplicando la segunda identidad de Green del vector diádico

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\infty} [(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \overline{\overline{G}}_e - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_e)] dV \\ = \iint_{S_\infty} [(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \overline{\overline{G}}_e) + (\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \overline{\overline{G}}_e] dS \end{aligned} \quad (4.16)$$

a (4.15) resulta

$$\begin{aligned} \iiint_{V_\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV \\ = -jk_0 Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV - \iint \{[\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \\ \cdot [\nabla \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + [\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dS \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde S_∞ es la superficie que encierra a V_∞ y \hat{n} el vector unitario hacia fuera normal a la superficie. Sustituyendo (4.14) en lo anterior, y notando que

$$\iiint_{V_\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \overline{\overline{G}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (4.18)$$

para \mathbf{r}' interior a V_∞ e intercambiando los sistemas de coordenadas primados y no primados, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -jk_0 Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \iint \{[\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \\ \cdot [\nabla' \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] + [\hat{n}' \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dS' \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde se usa ∇' para indicar que el operador ∇ sólo se aplica sobre las coordenadas primadas.

Ahora, se considera la integral de superficie sobre S_∞ que está formada por el plano xy completo y una superficie hemisférica cuyo radio se aproxima a ∞ . Si la fuente del campo se encuentra dentro de una distancia finita desde el origen tal que el campo satisface la condición de radiación de Sommerfeld y si $\overline{\overline{G}}_e$ se elige para satisfacer esta condición, la parte de la integral de superficie correspondiente a la superficie hemisférica se desprecia. Así pues, (4.19) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -jk_0 Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ & - \iint_{\text{plano } xy} \{[\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \\ & + [\hat{n}' \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dS'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Además, puesto que la componente tangencial del campo eléctrico $\hat{n} \times \mathbf{E}$ se anula en el plano de tierra, y $\overline{\overline{G}}_e$ se elige tal que $\hat{n}' \times \overline{\overline{G}}_e = 0$ en el plano xy , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -jk_0 Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ & + \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS' \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde S_a el área planar de la apertura de la cavidad y en ella $\hat{n}' = -\hat{z}$.

Falta encontrar $\overline{\overline{G}}_e$ que satisfaga (4.14), la condición de radiación de Sommerfeld, y la condición de frontera $\hat{n}' \times \overline{\overline{G}}_e = 0$ en $z' = 0$. El resultado es la conocida función diádica de Green de tipo eléctrico en la mitad del espacio, dada por

$$\overline{\overline{G}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_i) + 2\hat{z}\hat{z}G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_i) \quad (4.22)$$

donde $\overline{\overline{G}}_0$ es la función diádica de Green en el espacio libre definida por

$$\overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.23)$$

con

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4.24)$$

y

$$\bar{\bar{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad (4.25)$$

En (4.22), $\mathbf{r}'_i (= x'\hat{x} + y'\hat{y} - z'\hat{z})$ denota la posición de la imagen de $\mathbf{r}' (= x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z})$. Sustituyendo (4.22) en (4.21), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -jk_0Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ & +jk_0Z_0 \iiint_{V_S} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot [\bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_i) + 2\hat{z}\hat{z}G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_i)] dV' \\ & +2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS' \end{aligned} \quad (4.26)$$

El primer término en el lado derecho es el campo radiado por \mathbf{J} en el espacio libre, por ello lo denotamos como \mathbf{E}^{inc} . El segundo término es el campo radiado por la corriente imagen de \mathbf{J} , y puesto que este campo es el mismo que el campo original reflejado por el plano de tierra (fuera de la apertura), se denota como \mathbf{E}^{ref} . El tercer término es debido al campo en la apertura. Con estas identificaciones, (4.26) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{ref}(\mathbf{r}) \\ & +2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS'. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Con la intención de relacionar la apertura eléctrica y los campos magnéticos, se toma el rotacional de (4.27),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \nabla \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{E}^{ref}(\mathbf{r}) \\ & +2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla \times \nabla' \times \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dS' \end{aligned} \quad (4.28)$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \nabla \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{E}^{ref}(\mathbf{r}) \\ & -2k_0^2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \end{aligned} \quad (4.29)$$

ó

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -jk_0Z_0\mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) - jk_0Z_0\mathbf{H}^{ref}(\mathbf{r}) \\ & -2k_0^2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \end{aligned} \quad (4.30)$$

para $z > 0$. Si z se aproxima a cero, se obtiene la relación deseada entre la apertura eléctrica y los campos magnéticos:

$$\begin{aligned} \hat{z} \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{z=0+} &= -2jk_0 Z_0 \hat{z} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ &- 2k_0^2 \hat{z} \times \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Formulación de elementos finitos

Suponiendo que no existen fuentes en la cavidad, el campo eléctrico en el interior de la cavidad satisface la ecuación de ondas vectorial

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{r} \in V. \quad (4.32)$$

En las paredes de la cavidad, la componente tangencial del campo eléctrico se anula; así pues,

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{en las paredes de la cavidad} \quad (4.33)$$

En la apertura de la cavidad, puede obtenerse una condición de frontera equivalente a partir de la ecuación integral (4.31). Puesto que los campos tangenciales eléctricos y magnéticos deben ser continuos en la apertura de la cavidad, esto es,

$$\hat{z} \times \mathbf{E}|_{z=0+} = \hat{z} \times \mathbf{E}|_{z=0-} \quad (4.34)$$

$$\hat{z} \times [\nabla \times \mathbf{E}]_{z=0+} = \hat{z} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right]_{z=0-} \quad (4.35)$$

(4.31) puede escribirse ¹

$$\hat{z} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right]_{z=0-} + P(\mathbf{E}) = \mathbf{U}^{\text{inc}} \quad (4.36)$$

donde

$$P(\mathbf{E}) = 2k_0^2 \hat{z} \times \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \overline{\overline{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (4.37)$$

$$\mathbf{U}^{\text{inc}} = -2jk_0 Z_0 \hat{z} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \quad (4.38)$$

El problema variacional equivalente ² a éste viene dado por

¹Condición de contorno de tercer tipo.

²Se demuestra en [8]

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{E}) &= 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{en las paredes de la cavidad} \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ &\quad - \iint_{S_a} \left[\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot P(\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}^{inc} \right] dS. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sustituyendo las expresiones para P y \mathbf{U}^{inc} , resulta

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ &\quad - k_0^2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \left\{ \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \overline{\overline{G_0}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right\} dS \\ &\quad + 2jk_0 Z_0 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) dS \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aparentemente, el funcional dado en (4.41) contiene sólo el campo eléctrico y está preparado para la discretización. Sin embargo, antes nótese la dificultad existente en la evaluación de la integral de superficie que incluye la función diádica de Green en el espacio libre debido a la singularidad asociada a las derivadas de G_0 . Esta dificultad puede evitarse si se transfieren las derivadas fuera de G_0 . Para ello, se denota la superficie integral como F_S , que puede expresarse

$$F_S = -k_0^2 \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \overline{\overline{G_0}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] dS \quad (4.42)$$

siendo $\mathbf{M} = \hat{z} \times \mathbf{E}$. Sustituyendo la expresión para $\overline{\overline{G_0}}$ resulta

$$\begin{aligned} F_S &= -k_0^2 \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \left[\iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] dS \\ &\quad - \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\iint_{S_a} \nabla \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right] dS. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dado que $\nabla G_0 = -\nabla' G_0$, y a partir de

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' [G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}')] - G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (4.44)$$

(4.43) puede escribirse

$$\begin{aligned}
F_S = & -k_0^2 \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] dS \\
& + \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \iint_{S_a} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') dS' \right] dS \\
& - \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \nabla \iint_{S_a} \nabla' \cdot [G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}')] dS' \right\} dS. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la última integral, ésta se convierte en

$$- \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \oint_{C_a} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}_c dC' \right] dS \quad (4.46)$$

donde C_a es el perímetro de S_a y \hat{n}_c es el vector unitario normal a C_a y pertenece al plano de la apertura. Nótese que $\mathbf{M} \cdot \hat{n}_c = (\hat{z} \times \mathbf{E}) \cdot \hat{n}_c = (\hat{n}_c \times \hat{z}) \cdot \mathbf{E} = -\hat{\tau} \cdot \mathbf{E}$, donde $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangencial a C_a contenido en el plano de la apertura. Debido a la condición de frontera, $\hat{\tau} \cdot \mathbf{E} = 0$, la integral (4.46) se anula. Así pues,

$$\begin{aligned}
F_S = & -k_0^2 \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] dS \\
& + \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\nabla \iint_{S_a} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right] dS. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Por el mismo procedimiento, esto puede escribirse

$$\begin{aligned}
F_S = & -k_0^2 \iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \left[\iint_{S_a} \mathbf{M}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right] dS \\
& + \iint_{S_a} [\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})] \left[\iint_{S_a} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dS' \right] dS \quad (4.48)
\end{aligned}$$

cuya singularidad principal es dos órdenes menor que antes. Sustituyendo lo anterior en (4.41), el funcional F queda

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\
& - k_0^2 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \left\{ \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right\} dS \\
+ & \iint_{S_a} \{ \nabla \cdot [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \} \left\{ \iint_{S_a} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] dS' \right\} dS \\
& + 2jk_0 Z_0 \iint_{S_a} [\hat{z} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) dS \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Para discretizar F , el volumen de la cavidad se subdivide en un número de pequeños volúmenes elementales, tales como tetraedros o prismas rectangulares. Como ya se vió, estos últimos son los que se emplean aquí. Utilizando las funciones base vectoriales, el campo en el interior de cada elemento puede expandirse como

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^n E_i^e \mathbf{N}_i^e = \{E^e\}^T \{\mathbf{N}^e\} = \{\mathbf{N}^e\}^T \{E^e\} \quad (4.50)$$

donde n es el número de términos de la expansión, E_i^e son los coeficientes de expansión desconocidos, y \mathbf{N}_i^e son las funciones base vectoriales elegidas para el elemento e . Para discretizar las integrales de superficie, es necesario expandir también los campos en la superficie. De hecho, la expansión de los campos en la superficie está implícita en la expansión de los campos en el volumen dada en (4.50). Sin embargo, por claridad en la presentación, se escribirá aquí la expansión de los campos en la superficie explícitamente. Debido a la discretización del volumen, la apertura de la cavidad se divide en un número de pequeños trozos superficiales. En el interior de cada trozo superficial, el campo puede expandirse como

$$\hat{z} \times \mathbf{E}^S = \sum_{i=1}^{n_s} E_i^S \mathbf{S}_i^S = \{E^S\}^T \{\mathbf{S}^S\} = \{\mathbf{S}^S\}^T \{E^S\} \quad (4.51)$$

donde n_s es el número de términos de la expansión, E_i^S son los coeficientes de expansión desconocidos, y \mathbf{S}_i^S son las funciones base vectoriales elegidas. Obviamente para tener una expansión compatible $\mathbf{S}_i^S = \hat{z} \times \mathbf{N}_i^S$.

Sustituyendo (4.50) y (4.51) en (4.49), resulta

$$F = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^M \{E^e\}^T [K^e] \{E^e\} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{M_s} \sum_{t=1}^{M_s} \{E^s\}^T [P^{st}] \{E^t\} - \sum_{s=1}^{M_s} \{E^s\}^T \{b^s\} \quad (4.52)$$

siendo M el número total de elementos de volumen y M_s el número total de elementos superficiales que forman la apertura de la cavidad. Las matrices y el vector elementales están dados por

$$[K^e] = \iiint_{V^e} \left[\frac{1}{\mu_r^e} \{ \nabla \times \mathbf{N}^e \} \cdot \{ \nabla \times \mathbf{N}^e \}^T - k_0^2 \epsilon_r^e \{ \mathbf{N}^e \} \cdot \{ \mathbf{N}^e \}^T \right] dV \quad (4.53)$$

$$[P^{st}] = 2 \iint_{S^s} \{ \nabla \cdot \mathbf{S}^s \} \left\{ \iint_{S^t} \{ \nabla' \cdot \mathbf{S}^t \}^T G_0 dS' \right\} dS - 2k_0^2 \iint_{S^s} \{ \mathbf{S}^s \} \cdot \left\{ \iint_{S^t} \{ \mathbf{S}^t \}^T G_0 dS' \right\} dS \quad (4.54)$$

$$\{b^s\} = -2jk_0 Z_0 \iint_{S^s} \{ \mathbf{S}^s \} \mathbf{H}^{inc} dS \quad (4.55)$$

donde V^e es el volumen del elemento y S^s es el área del trozo superficial. Utilizando la notación de numeración global, 4.52 puede expresarse como

$$F = \frac{1}{2} \{E\}^T [K] \{E\} + \frac{1}{2} \{E\}^T [P] \{E\} - \{E\}^T \{b\} \quad (4.56)$$

siendo $[K]$ y $[P]$ matrices cuadradas $N \times N$, ensambladas a partir de $[K^e]$ y $[P^{st}]$ respectivamente, con N el número total de elementos de arista. $\{E\}$ es un vector columna $N \times 1$ que representa los campos en las aristas y $\{b\}$ es un vector $N \times 1$ conocido que tiene en cuenta la excitación superficial. De acuerdo con el procedimiento de Ritz, tomando la derivada parcial de F con respecto al campo en cada arista E_i e igualando a cero la expresión resultante, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$[A] \{E\} = \{b\} \quad (4.57)$$

donde $[A] = [K] + [P]$. Este sistema puede resolverse tras imponer las condiciones de frontera, es decir, igualar a cero los campos tangenciales de las aristas (coeficientes de expansión) pertenecientes a las paredes de la cavidad o al parche.

Aclaraciones previas a la implementación.

-Funciones base vectoriales superficiales en la apertura de la cavidad.

Se va a determinar cuáles son las funciones base vectoriales \mathbf{S}_i^S . Se vió en la ecuación (4.51) que $\mathbf{S}_i^S = \hat{z} \times \mathbf{N}_i^S$. Dado que éstas funciones sirven para la expansión del campo en la apertura de la cavidad ($z = 0$), sólo es necesario tener en cuenta \mathbf{S}_i^S con $i = 3, 4, 6, 8$; ya que, para $i = 9, 10, 11, 12$, \mathbf{N}_i es paralela a \hat{z} con lo que $\mathbf{S}_i^S = 0$, y, para $i = 1, 2, 5, 7$, \mathbf{N}_i se anula ($z - z_c + \frac{l_z^e}{2} = 0$).

Las funciones \mathbf{S}_i^S con $i = 3, 4, 6, 8$ resultan:

$$\mathbf{S}_3^e = N_3^e \hat{y} = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) \hat{y} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{S}_4^e = N_4^e \hat{y} = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) \hat{y} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{S}_6^e = -N_6^e \hat{x} = -\frac{1}{l_y^e l_z^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) \hat{x} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{S}_8^e = -N_8^e \hat{x} = -\frac{1}{l_y^e l_z^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) \hat{x} \quad (4.61)$$

-Integrales de superficie con singularidades debidas a la Función de Green.

La evaluación de las integrales de la ecuación (4.54) requiere un esfuerzo adicional, puesto que el integrando puede hacerse ∞ . Dicha ecuación consta de dos sumandos y, cada uno de ellos, está formado por dos integrales de superficie, formando parte una de ellas del integrando de la otra. Una se extiende sobre un elemento s y, la otra, sobre el elemento t . Puesto que en el integrando aparece la Función de Green en el espacio libre G_0 que viene dada por:

$$G_0 = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \quad (4.62)$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, ocurrirá que si los elementos s y t coinciden o tienen algún punto de conexión, las coordenadas primadas y no primadas se igualarán, anulando así el denominador de la Función de Green. Para evitar ésto, se hace necesario evaluar las integrales de forma numérica sobre puntos distintos. Para ello, se utiliza el método de cuadratura Gaussiana con un número de puntos de evaluación $n=4$, para la integral sobre el elemento s , y $n=3$ para el elemento t .

-Imposición de las condiciones de contorno.

Antes de resolver el sistema de ecuaciones, es necesario imponer las condiciones de contorno. Puesto que la condición de contorno de tercer tipo

(4.36) ya ha sido considerada e introducida en el sistema, no necesita ningún tratamiento adicional. Así pues, sólo hay que tener en cuenta la condición de tipo Dirichlet, consistente en anular las componentes tangenciales del campo eléctrico en las superficies conductoras. Dichas componentes son, precisamente, los grados de libertad del problema, esto es, los coeficientes de expansión E_i ; habrá que igualar a cero los que correspondan a aristas contenidas en las paredes de la cavidad o en el parche. Para hacer esto con una arista genérica i , $E_i = 0$, el sistema de ecuaciones (matriz A , vector independiente b) se modificará de la siguiente forma:

$$A_{ii} = 1, \quad b_i = 0, \quad A_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i. \quad (4.63)$$

Para que conserve la simetría, se tienen que anular también los coeficientes de A correspondientes a la columna i , y esto implicará que los nuevos elementos de b sean:

$$b_l \leftarrow b_l - K_{li}0 \quad \forall l \neq i, \quad (4.64)$$

es decir, no cambiarían.

-Ensamblaje.

La explicación del proceso de ensamblaje de las matrices elementales para formar el sistema de ecuaciones a resolver en el caso de elementos nodales, es muy extensa y se encuentra en algunos libros del método de elementos finitos, por ejemplo [8]. Aunque aquí no se utilizan elementos nodales, sino elementos de arista el procedimiento es idéntico, salvo que las numeraciones se hacen sobre aristas, en lugar de sobre nodos. Por ésto, aquí sólo se incluye la regla general que resumiría el proceso:

Para ensamblar las matrices elementales K^e en una matriz global K , se añaden los elementos K_{ij}^e a $K_{n(i,e),n(j,e)}$, siendo $n(i,e)$ y $n(j,e)$ los números globales de las aristas con números locales respectivos i y j pertenecientes al elemento e . De forma similar, los vectores elementales b^e se ensamblan en b por adición de b_i^e a $b_{n(i,e)}$.

Las funciones MATLAB que determinan las matrices para formar el sistema de ecuaciones (4.57), son las siguientes:

-matelem1: Calcula la matriz K^e , que está dada en la ecuación (4.53).

-matglob1: Realiza el ensamblaje de las matrices elementales K^e para formar la matriz global K .

-matelem2: Devuelve el resultado de la ecuación (4.54), esto es, las matrices elementales P^{st} , correspondientes a todas las combinaciones de elementos superficiales s, t .

-matglob2: Determina la matriz P ensamblando las matrices elementales P^{st} .

Figura 4.3: Geometría de un array microstrip parche en una cavidad

4.3.2 Antena parche microstrip en la cavidad.

En el apartado anterior se ha considerado una cavidad en un plano de tierra donde la excitación estaba en la región exterior. A continuación, se plantea el problema con la fuente de excitación en la región interior, de forma que se convertirá en un problema de radiación. La estructura específica se ilustra en la Figura 4.3, donde una antena o array microstrip parche reside sobre el sustrato de la cavidad en el plano de tierra. La formulación de este problema es similar a la del apartado anterior, excepto que, en este caso, la excitación es debida a fuentes interiores a la cavidad. El funcional para los campos en la cavidad está dado por

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\
 & + \iiint_V \left[j k_0 Z_0 \mathbf{J}^{int} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_r} \mathbf{M}^{int} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right] dV \\
 & - \frac{1}{2} \iint_{S_a} \mathbf{E} \cdot P(\mathbf{E}) dS
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

donde $(\mathbf{J}^{int}, \mathbf{M}^{int})$ son las fuentes de corriente interna eléctrica y magnética debidas a las alimentaciones de la antena. La formulación de elementos finitos para este problema es la misma que en el apartado anterior, excepto que $\{b\}$ proviene de la fuente interna, y puede obtenerse mediante ensamblaje a partir de $\{b^e\}$ dado por

$$\{b^e\} = \iiint_{V^e} \left[\frac{1}{\mu_r^e} \mathbf{M}^{int} \cdot \{\nabla \times \mathbf{N}^e\} - jk_0 Z_0 \mathbf{J}^{int} \cdot \{\mathbf{N}^e\} \right] dV. \quad (4.66)$$

Modelado de la alimentación y carga de la antena.

En el análisis de antenas, siempre surge el problema de modelar sus alimentaciones, así como sus impedancias de carga. Aquí se considera este problema en el contexto de la formulación de elementos finitos.

A. Alimentación coaxial.

Se discuten aquí dos tipos de modelos para la simulación de un cable coaxial, que, como ya se ha visto, es comúnmente usado como alimentación de la antena. Para sustratos delgados, el coaxial puede reemplazarse por un filamento de corriente, y, en este caso, la contribución al vector $\{b^e\}$ es simplemente

$$\{b^e\} = -jk_0 Z_0 I l \iint \hat{z} \cdot \{\mathbf{N}^e\} \delta(x - x_f) \delta(y - y_f) dx dy \quad (4.67)$$

siendo I la corriente eléctrica del filamento, l su longitud, y (x_f, y_f) específica su posición. Para sustratos gruesos, el conductor interno del coaxial se modela como una línea conductora y se introduce una corriente magnética equivalente sobre la apertura de la alimentación coaxial. Esto es similar al tratamiento para la apertura de la cavidad, salvo que la región de espacio libre es reemplazada por la guía coaxial.

La ecuación (4.67) se resuelve con la función implementada en el fichero **matelem3.m**, y el vector global resultante del ensamblaje se calcula en **matglob3.m**.

B. Impedancia de carga.

Una impedancia de carga de Z_L ohmios puede modelarse como una línea de conductividad finita que una el parche y la base de la cavidad. Suponiendo una línea de longitud l y sección transversal s , la conductividad de la línea requerida para representar la carga será $\sigma = l/(Z_L s)$. De esta forma, su contribución a la matriz $[K_e]$ es

$$[K_e] = \frac{jk_0 Z_0 l}{Z_L s} \iiint_V \{\mathbf{N}^e\} \cdot \{\mathbf{N}^e\}^T dv \quad (4.68)$$

donde se integra en el volumen de la línea. Siempre que la línea sea muy delgada, esto se reduce a

$$[K^e] = \frac{jk_0 Z_0 l^2}{Z_L} \iint \{\mathbf{N}^e\} \cdot \{\mathbf{N}^e\}^T \delta(x - x_L) \delta(y - y_L) dx dy \quad (4.69)$$

donde (x_L, y_L) especifica la posición de la impedancia de carga. Si la línea delgada coincide con la arista i , sólo contribuye a K_{ii} y esta contribución es $jk_0 Z_0 l^2 / Z_L$. La condición de cortocircuito ($Z_L = 0$) puede representarse mediante dos aproximaciones: Una de ellas es modelarla con una línea de alta conductividad, y la otra es, simplemente, igualar a cero el campo eléctrico a lo largo de la línea. La solución final no se ve afectada por la elección del modelo.

Campo radiado e Impedancia de entrada.

Para el diseño de antenas interesan, generalmente, la impedancia de entrada y el patrón de radiación. La impedancia de entrada se determina fácilmente como el voltaje observado en el punto de alimentación debido a una corriente eléctrica unitaria situada entre el parche y el plano de tierra. El patrón de radiación puede obtenerse evaluando el campo radiado en zona lejana, dado por

$$\mathbf{H}^{rad}(\mathbf{r}) = jk_0 Y_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \iint_{S_a} (\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\varphi}\hat{\varphi}) \cdot [\hat{z} \times \mathbf{E}(x', y')] \cdot e^{jk_0 \sin \theta (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} dx' dy' \quad (4.70)$$

Las funciones **condcont** y **resultMEF** proporcionan las matrices con las condiciones de contorno impuestas y así preparadas para ser incluidas en el sistema de ecuaciones, y el vector resultante del sistema de ecuaciones tras añadirle los elementos correspondientes a aristas sobre las que se impone la condición de contorno. A partir de esto, es posible calcular (ecuación (4.3)) el campo eléctrico en un punto cualquiera perteneciente al volumen de la antena; se implementa este cálculo en la función **Exyz**, que llama a la función **elemento** para localizar al elemento que contiene al punto en cuestión.

Se ha creado la función principal **campo-eléctrico** que, una vez cargados los datos, realiza las llamadas a todas las funciones mencionadas anteriormente, de manera que implementa todos los pasos del método y devuelve el campo eléctrico en un punto cualquiera contenido en el volumen de la antena. Para disminuir los requerimientos de memoria, esta función aprovecha la característica de dispersión de las matrices intermedias resultantes.

Capítulo 5

Resultados.

En este Capítulo, se presentan numerosos resultados del análisis de diversas antenas microstrip de parche rectangular, aplicando la formulación del MEF descrita en el Capítulo anterior, con objeto de mostrar su validez.

5.1 Convergencia y precisión del MEF. Otros métodos.

5.1.1 Resultados del MEF. Convergencia.

Con el fin de estudiar la convergencia del método, se utiliza inicialmente el programa diseñado empleando diversos mallados, y eligiendo como resultado la impedancia de entrada¹.

Puesto que a priori, debido a las nociones generales conocidas sobre la antena microstrip de parche, se intuye la menor variación de los campos electromagnéticos en el interior de la cavidad en la dirección z con respecto a la variación en las direcciones x e y , se escogerán los mallados con igual número de elementos en las direcciones x e y , y la mitad de elementos para la dirección z .

La antena que se analiza en este caso (véase Figura 5.1) tiene las siguientes características: dimensiones de la cavidad $e = 5.1$ cm., $h = 7.5$ cm. y $t = 0.08779$ cm., dimensiones del parche $a = 5.0$ cm. y $b = 3.4$ cm., permitividad eléctrica del sustrato $\epsilon_r = 2.17$. El cable coaxial de alimentación se coloca

¹En análisis de antenas microstrip, se considera a la impedancia de entrada el parámetro más sensible a errores en las soluciones numéricas.

Figura 5.1: Geometría de la antena microstrip utilizada para simulación.

Divisiones	Elementos	Grados de libertad	$R_{in,MEF}$	Error relativo(%)
5x5x4	100	302	50.6	117.94
6x6x3	108	726	42.4	76.68
7x7x4	196	983	37.1	52.91
8x8x4	256	1340	33.2	36.32
9x9x5	405	2580	30.1	19.28
10x10x5	500	3710	26.2	8.07
12x12x6	864	5184	22.5	0.90

Tabla 5.1: Tabla de Convergencia de la Resistencia de entrada (Ω) en la frecuencia de resonancia del modo fundamental, valor medido $R_{in} = 22.3\Omega$.

en $x_f = 1.22$ cm. e $y_f = 0.85$ cm., y se considera una impedancia de carga de 50Ω situada en $x_L = -2.2$ cm. e $y_L = -1.5$ cm.

En la Tabla 5.1 aparecen los resultados para la resistencia de entrada en la frecuencia de resonancia (2 GHz), según la generación de distintos mallados.

La Figura 5.2 presenta la velocidad de convergencia de la resistencia de entrada, según el número de grados de libertad. Se observa que los resultados son razonablemente precisos, según el refinamiento de los mallados (aunque tales mallados implican tiempos de ejecución y requerimientos de memoria elevados). No obstante, debe mencionarse que para otras frecuencias y, en particular para las de resonancia de otros modos, se pierde precisión. Esto es lo que ocurriría en problemas de autovalores, conforme a la teoría del error del MEF: los modos de mayor orden requieren mallados más refinados, para obtener la misma precisión, que en el caso de modos de menor orden. Así,

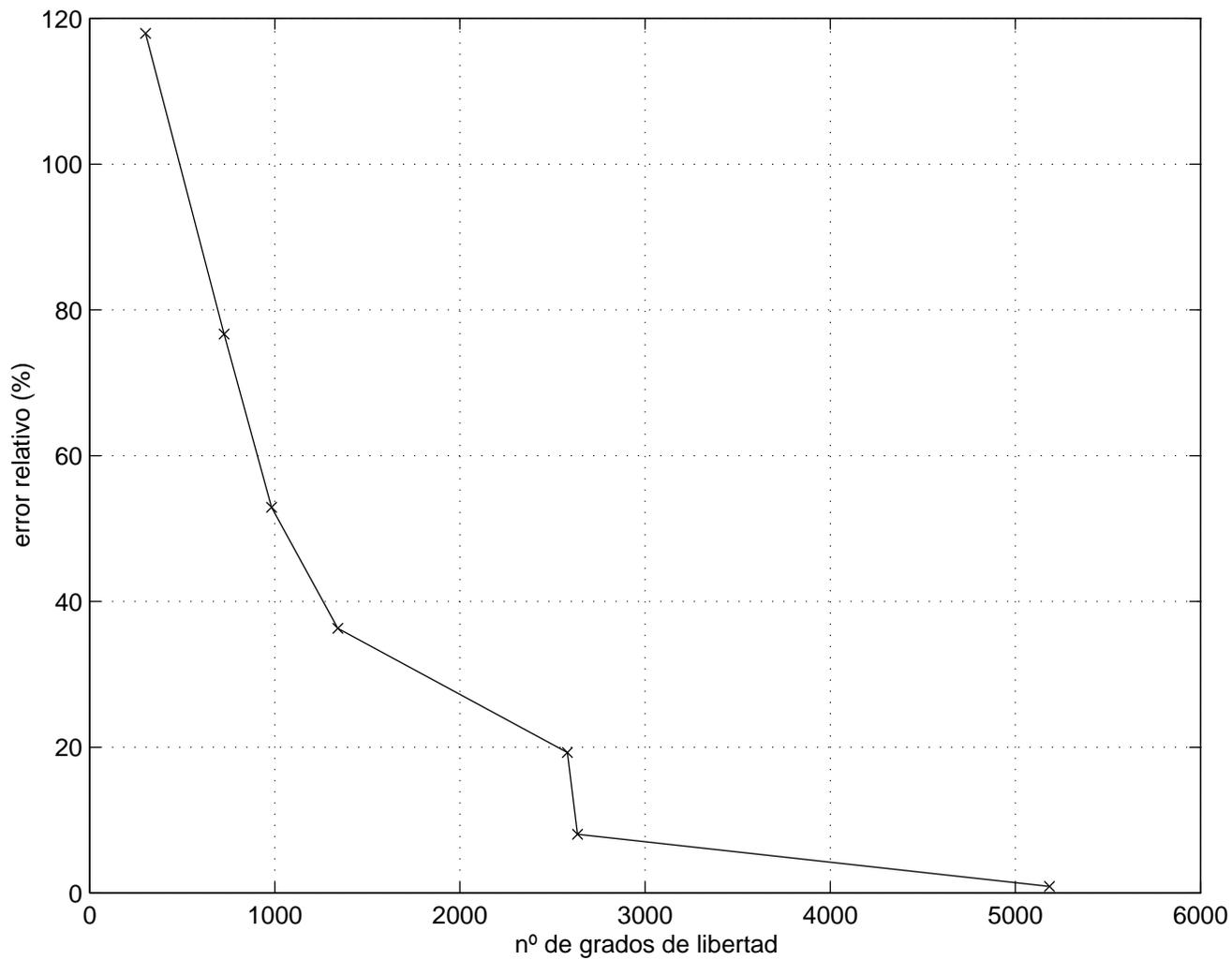


Figura 5.2: Velocidad de Convergencia de la Resistencia de entrada en la frecuencia de resonancia del modo fundamental.

Frecuencia (GHz)	R_{in} medida	R_{in} MEF	Error relativo(%)
1.2	1	0.5	-50.0
1.4	1	0.7	-30.0
1.6	1.5	1	-33.33
1.8	3	4	33.33
1.9	8	11	37.5
2	22.3	22.5	0.8969
2.1	6.5	6.1	-6.1538
2.2	2	2	0
2.4	1	0.5	-50.0
2.6	1	0.5	-50.0
2.7	2	2.7	35.0
2.8	5	11	120.0
2.9	22	24.5	11.36
3	17	12.2	-28.24
3.1	8	8	0
3.2	6	6.5	8.33
3.3	7	7	0
3.4	7.5	9	20.0
3.5	10	12	20.0
3.6	13	9.6	-26.15
3.8	3	2.5	-16.67

Tabla 5.2: Comparación entre resistencia de entrada medida y obtenida con análisis MEF, para distintos valores de la frecuencia, mallado: 12x12x6.

en la Tabla 5.2, se muestran los resultados para distintas frecuencias.

5.1.2 Comparación con otros métodos.

En el apartado anterior se ha visto que los resultados obtenidos con el MEF, para un mallado 12x12x6, tienen gran precisión en la frecuencia del modo fundamental de resonancia y que, dicha precisión disminuye considerablemente para otras frecuencias. Por ésto, se considera interesante, para decidir la bondad de estos resultados, hacer comparaciones con los resultados que se obtienen según otros métodos, en función de la frecuencia. Estos métodos serán: el modelo teórico de cavidad (formulación en el capítulo 2) y el método de los momentos (utilización del programa ENSEMBLE). Las comparaciones se ilustran en las Figuras 5.3 y 5.4. Se considera la misma antena que en el apartado anterior (véase página 121).

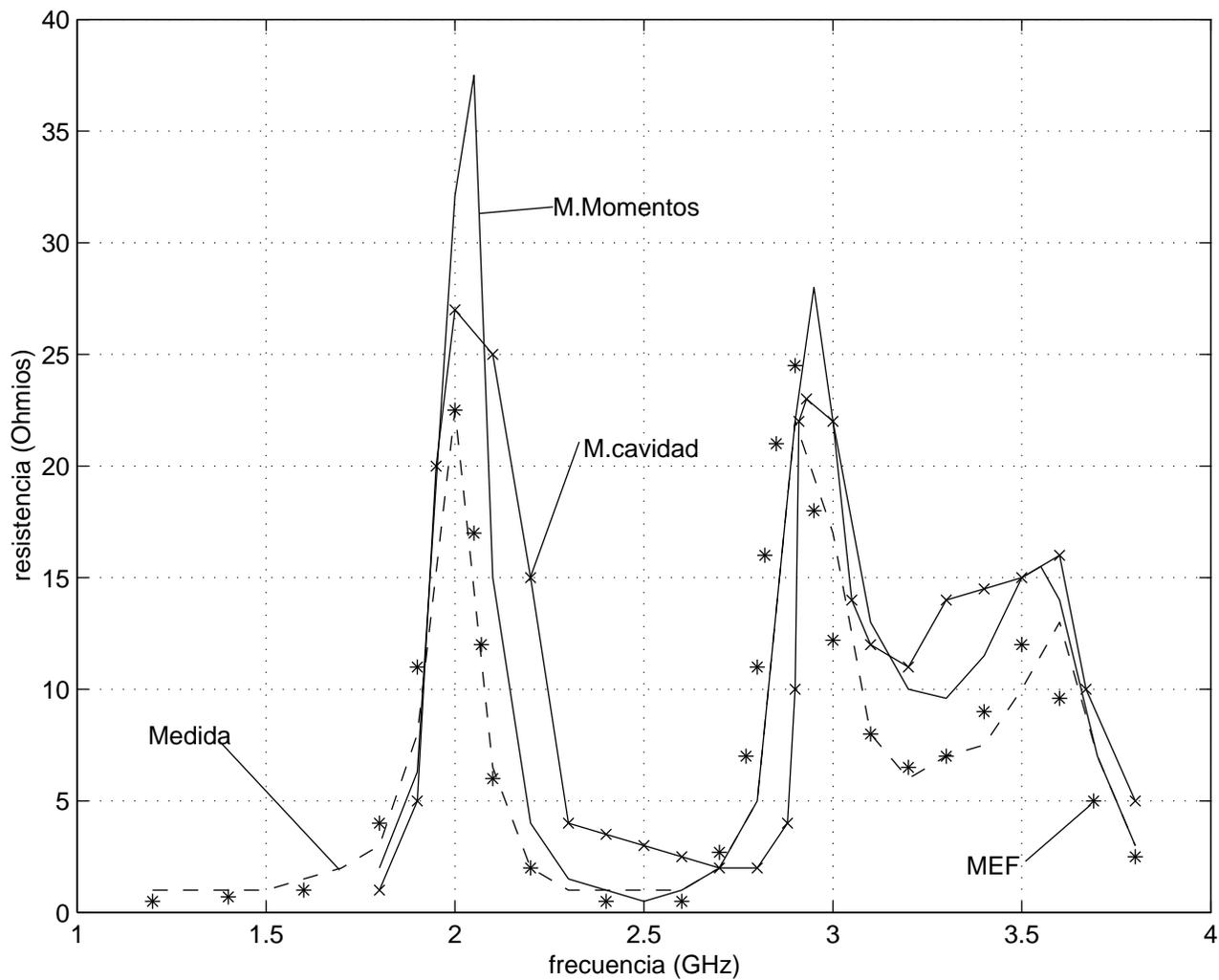


Figura 5.3: Resistencia de entrada según resultados: experimentales, MEF, método de los momentos y modelo de cavidad.

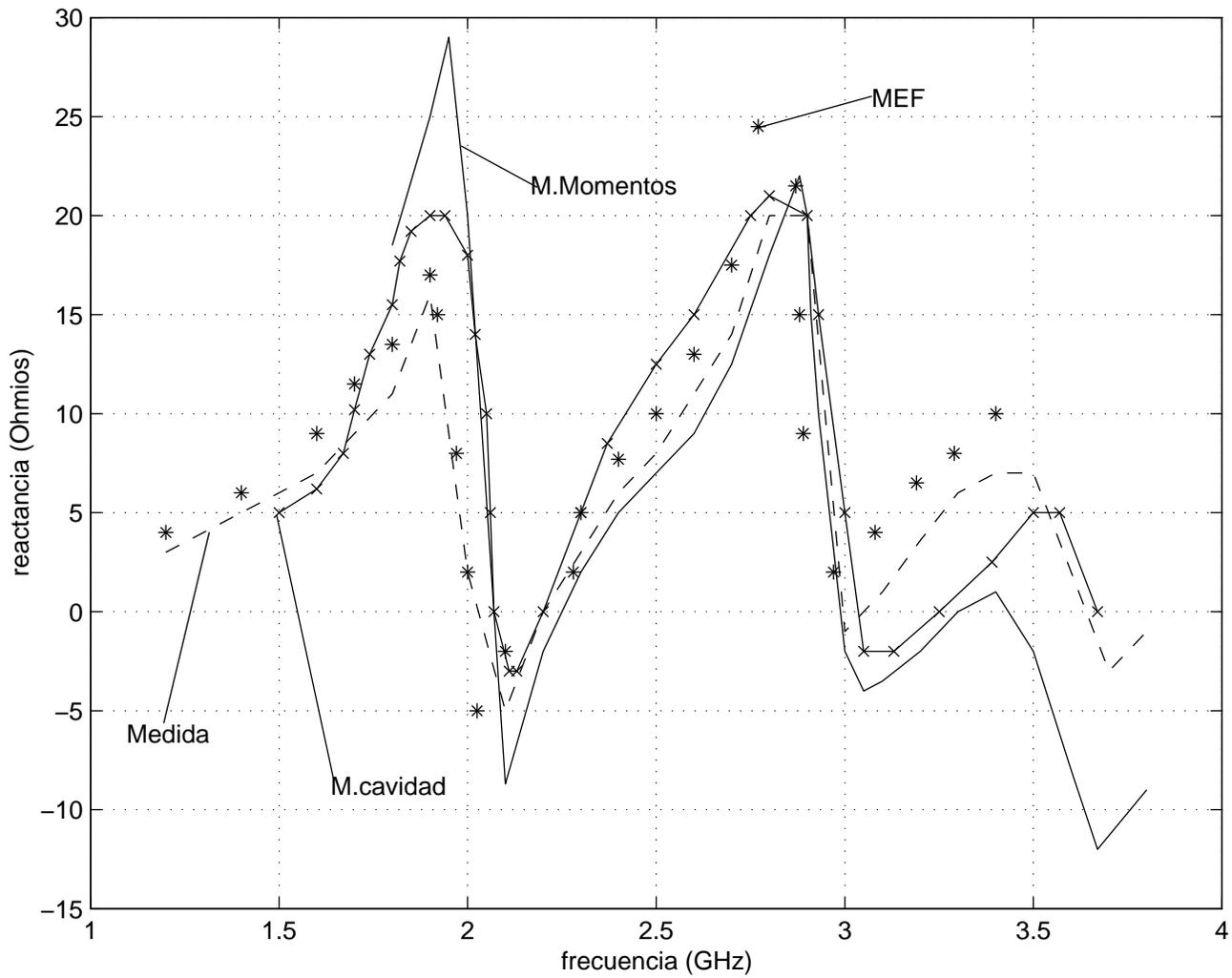


Figura 5.4: Reactancia de entrada según resultados: experimentales, MEF, método de los momentos y modelo de cavidad.

Figura 5.5: Configuración de la antena con sustrato finito.

5.1.3 Efecto del sustrato finito.

Tanto el modelo teórico de cavidad, como otros métodos más rigurosos, tales como el método de los momentos, consideran la dimensión del sustrato infinita; sólo tienen en cuenta las dimensiones del parche y proporcionan, por tanto, los mismos resultados para cualquier tamaño de la cavidad encapsulada en el plano de tierra.

En el Capítulo 2 se estudió el efecto del plano finito de tierra en los campos radiados: Los diagramas de radiación se modifican para ángulos grandes y se estima la radiación hacia atrás. La hipótesis de plano de tierra finito lleva consigo la de sustrato finito; esta última se resume en la inclusión de las dimensiones de la cavidad en el estudio. El MEF sí tiene en cuenta las dimensiones de la cavidad, puesto que la discretización y aproximación de los campos mediante funciones de base se realiza en todo el volumen de la cavidad y se imponen las condiciones de frontera sobre las paredes de la misma. Se comprueba que la suposición de plano de tierra infinito no tiene efecto sobre la impedancia de entrada. A continuación, se muestran los resultados obtenidos (Figuras 5.6 y 5.7) para sustrato finito (MEF) e infinito (Modelo de cavidad, ENSEMBLE(Método de los Momentos)...), para una antena (véase Figura 5.5) de dimensiones $a = 5.2831$ cm, $b = 3.6977$ cm, $e = 26.0925$ cm, $h = 34.7900$ cm, espesor del sustrato $t = 0.3106$ cm y su constante

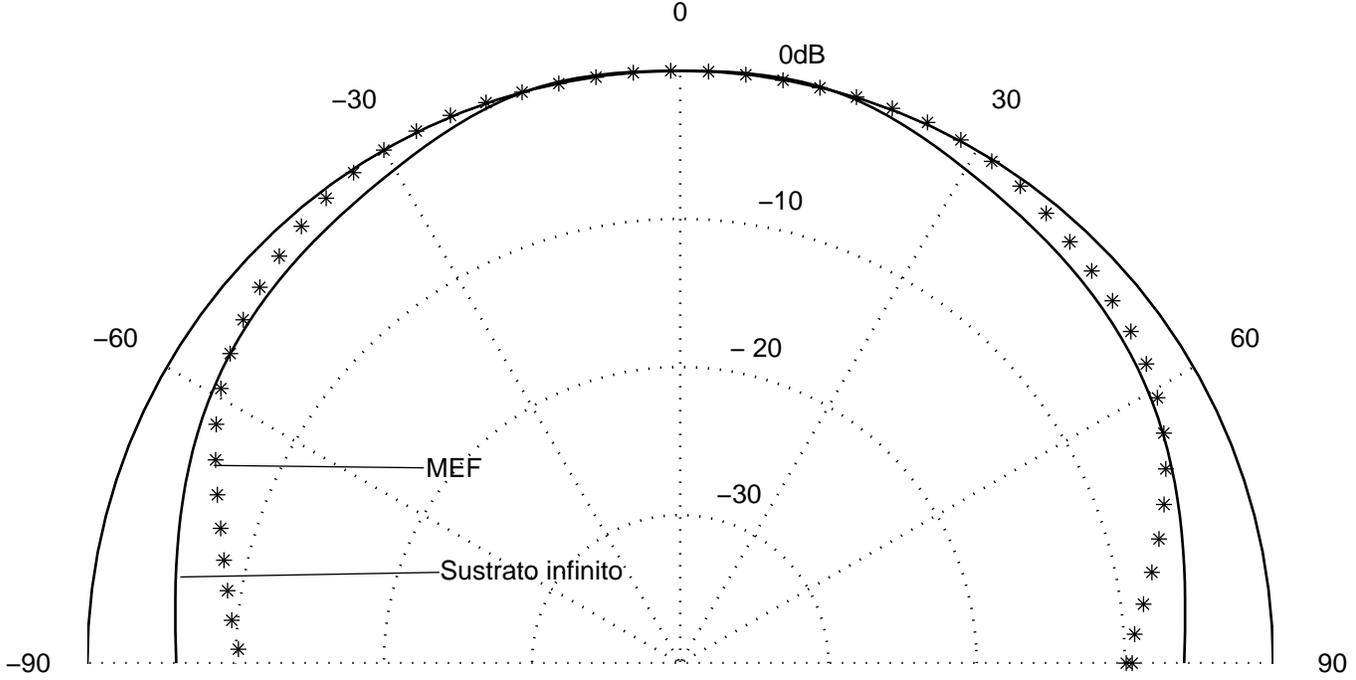


Figura 5.6: Comparación de diagramas de radiación Plano E, correspondientes a análisis con sustrato finito y al MEF.

dieléctrica relativa $\epsilon_r = 2.55$ y frecuencia de operación $f = 2.295$ GHz. En los diagramas se aprecian las diferencias en las regiones correspondientes a ángulos superiores a 60° .

5.1.4 Sustrato eléctricamente grueso.

Se ha demostrado la precisión de los resultados obtenidos con el MEF para el caso de antenas con sustrato dieléctrico eléctricamente delgado. Se recuerda que el espesor eléctrico del sustrato se mide con el cociente t/λ_d , con $\lambda_d = c/(f_r\sqrt{\epsilon_r})$. En este apartado, se usa el MEF para analizar antenas con sustrato eléctricamente grueso. Esto resulta muy interesante si se tiene

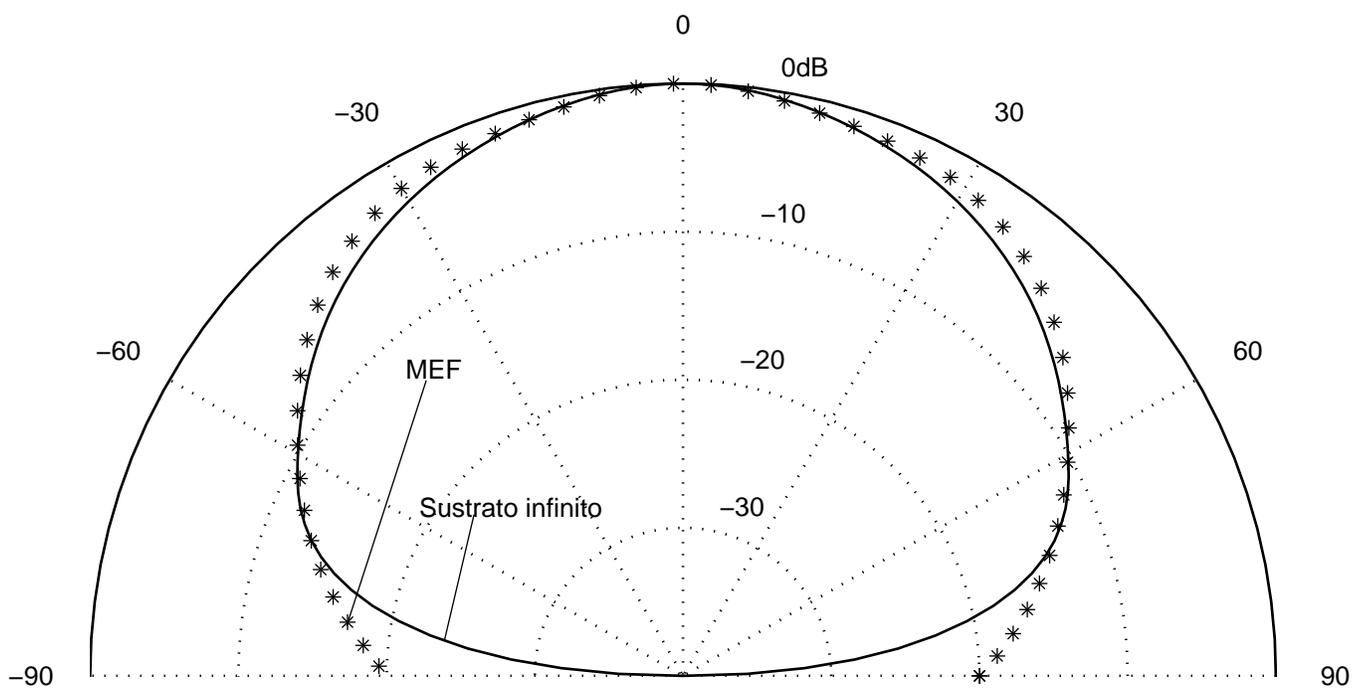


Figura 5.7: Comparación de diagramas de radiación Plano H, correspondientes a análisis con sustrato finito y al MEF.

en cuenta que este tipo de problemas no pueden abordarse con los métodos de análisis reducido (por ejemplo, el modelo de cavidad), como se vió en el Capítulo 2; e independientemente del método utilizado, son útiles por varias razones:

-Las aplicaciones de las antenas tienen cada vez mayor frecuencia de operación y, consecuentemente, menor longitud de onda, de forma que las antenas con sustrato eléctrico delgado pasan a tener sustrato eléctrico grueso.

-Las antenas microstrip tienen un inherente ancho de banda estrecho, resultando así inútiles para aplicaciones de anchura de banda amplia. Sin embargo, existen métodos que permiten aumentar el ancho de banda y, para ello, siempre incrementan el volumen de la antena, bien por extensión de la superficie radiante, o bien por aumento del espesor del sustrato.

El análisis experimental [30] utilizado se realizó sobre antenas con $\epsilon_r = 2.33$, alimentación coaxial localizada en $x' = a/2$ e $y' = 0.15$ cm. La dimensión a es aproximadamente una y media veces la dimensión b , con un plano de tierra mucho mayor cuyo efecto se hace despreciable. A continuación, se realizan las comparaciones entre los resultados obtenidos con el MEF y los resultados experimentales, para la impedancia de entrada y los diagramas de radiación.

Impedancia de entrada.

Los datos experimentales de la impedancia de entrada ($Z=R+jX$) resultan de una interpolación que suavizó la curva eliminando rizados y oscilaciones debidos a reflexiones internas en los equipos de medida. Se muestran en la Figura 5.8, junto a los obtenidos con el MEF. La antena considerada tiene un espesor eléctrico de sustrato $t/\lambda_d = 0.110$.

Puede verse que la reactancia no es nula cuando la resistencia alcanza el máximo, es decir, en la frecuencia de resonancia. Esto es debido a que aparece una componente inductiva como consecuencia de que el cable coaxial atraviesa un sustrato de mayor espesor eléctrico.

Diagramas de radiación.

Se tienen las mediciones de los patrones de radiación para los planos E y H, y se comparan con los obtenidos mediante el MEF (Figuras 5.9 y 5.10). Se observa que son muy similares a los correspondientes para sustratos eléctricos delgados, aunque en el caso experimental del plano E aparecen algunas asimetrías para sustratos eléctricos gruesos.

Se ha comprobado, con los resultados de la impedancia y los patrones de radiación, que el MEF no pierde precisión al tratar problemas con sustrato

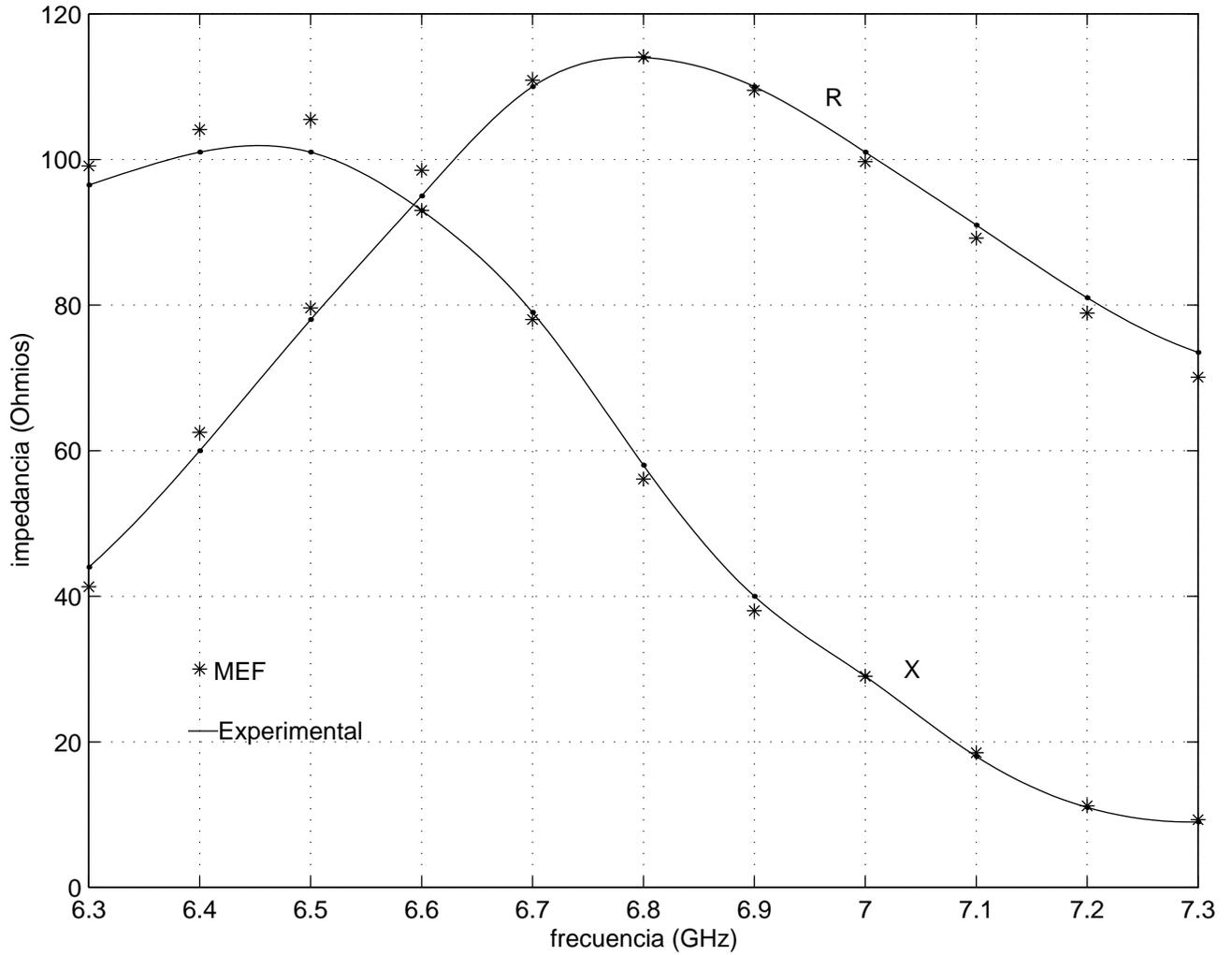


Figura 5.8: Comparación entre la impedancia de entrada medida y la obtenida con análisis MEF para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm., y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$.

eléctrico grueso. Esto constituye una ventaja del MEF frente a otros métodos, como los de análisis reducido.

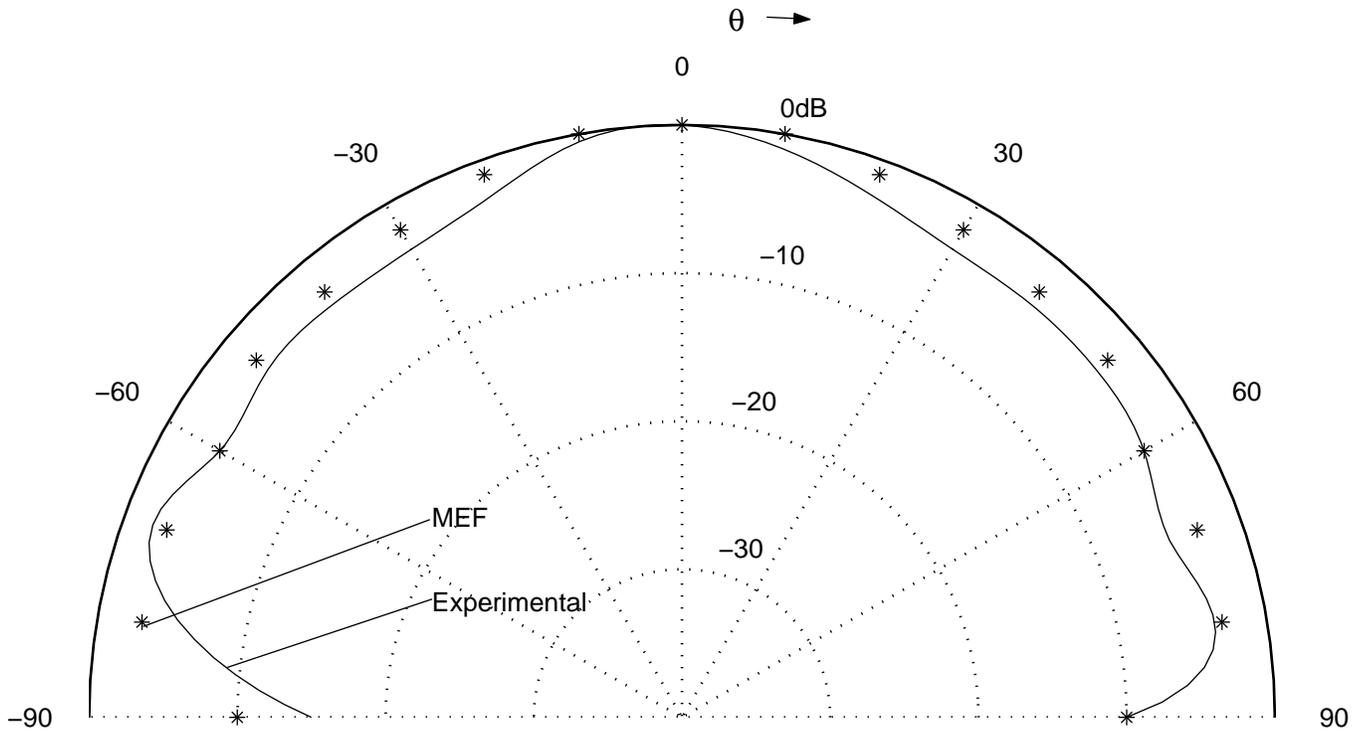


Figura 5.9: Diagramas de radiación Plano E medido y obtenido con análisis MEF, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm., y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$.

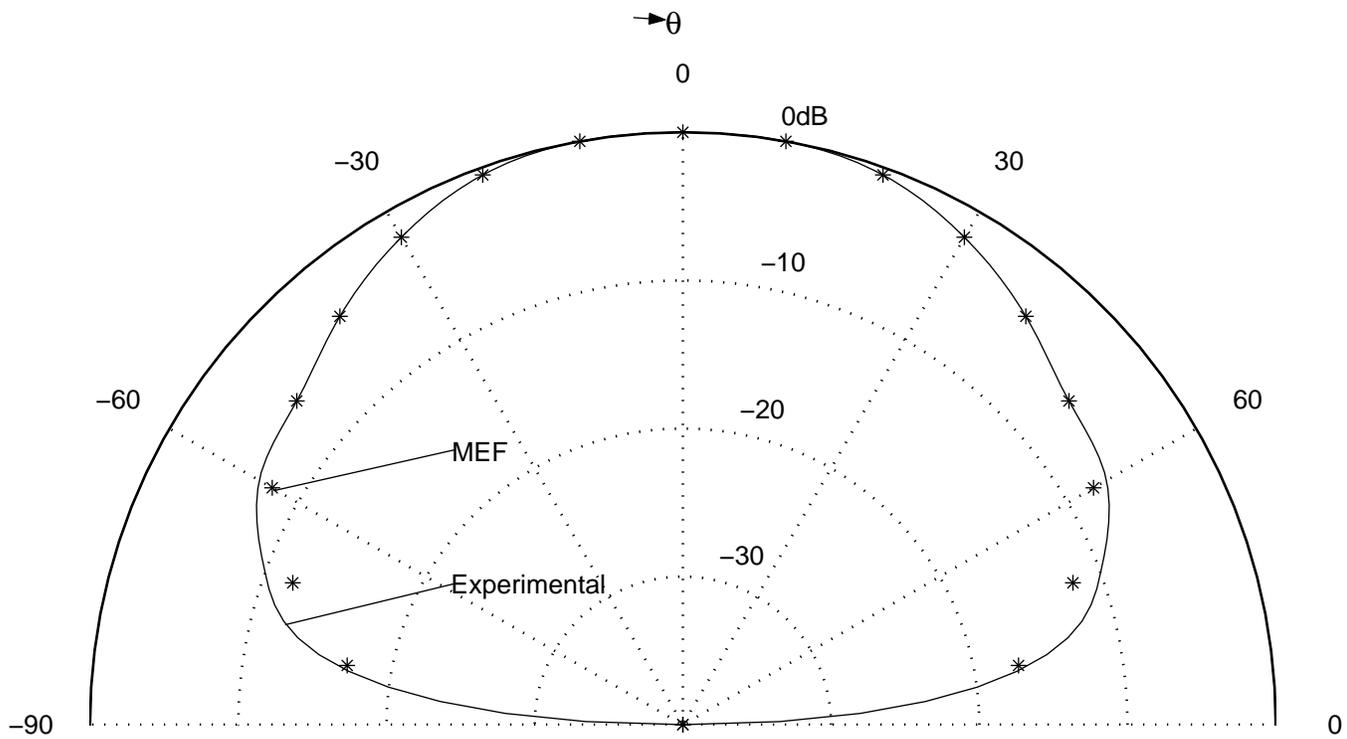


Figura 5.10: Diagramas de radiación Plano H medido y obtenido con análisis MEF, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.7$ cm., $b = 1.1$ cm., y sustrato eléctrico grueso con $t = 0.3175$ cm. y $\epsilon_r = 2.33$.

5.2 Estudio detallado de la antena MPA con MEF.

Se ha demostrado la precisión de los resultados proporcionados por el MEF para la frecuencia de resonancia del modo fundamental TM_{10} . Éstos resultados son los campos en puntos pertenecientes al volumen de la cavidad, y la impedancia de entrada. En el Capítulo 2 se expuso la formulación necesaria para determinar, a partir de los datos mencionados, parámetros de la antena tales como pérdidas, eficiencia, ganancia, ancho de banda..., de manera que en este capítulo se pretende obtener todos estos resultados (utilizando los proporcionados por el MEF) para antenas de distintas características (espesor del sustrato, permitividad eléctrica...) analizando su sensibilidad. Además de las funciones del Capítulo anterior, se han utilizado: **rad**, **pot-dielectrico** y **pot-radiada**.

5.2.1 Impedancia de entrada.

Se recuerda que la impedancia de entrada puede calcularse como el voltaje observado en el punto de alimentación, debido a una corriente eléctrica unitaria situada entre el parche y el plano de tierra. En las Figuras 5.11 y 5.12 se muestran los resultados para la impedancia de entrada, sin considerar una impedancia de carga. Ésta se tiene en cuenta en las Figuras 5.13 y 5.14 y representa la presencia de un cable coaxial de impedancia 50Ω .

5.2.2 Diagramas de radiación.

En las Figuras 5.15 y 5.16, se muestran los diagramas de radiación obtenidos para distintos valores de t y ϵ_r . Estos diagramas son sensibles (en el caso del Plano E) a variaciones de ϵ_r , y no se modifican según t .

5.2.3 Potencias.

Con objeto de determinar posteriormente la eficiencia de radiación, se van a calcular aquí las magnitudes relativas de potencia disipada en el metal, en el dieléctrico y por radiación. Se ilustran, en las Figuras 5.17, 5.18 y 5.19, las cantidades P_c/P_T , P_d/P_T y P_r/P_T respectivamente, considerando distintos valores de ϵ_r y t . Se observa que, las pérdidas en el conductor son mayores que las debidas al dieléctrico, para ambos valores de ϵ_r . La razón P_c/P_T decrece rápidamente con el incremento de la frecuencia.

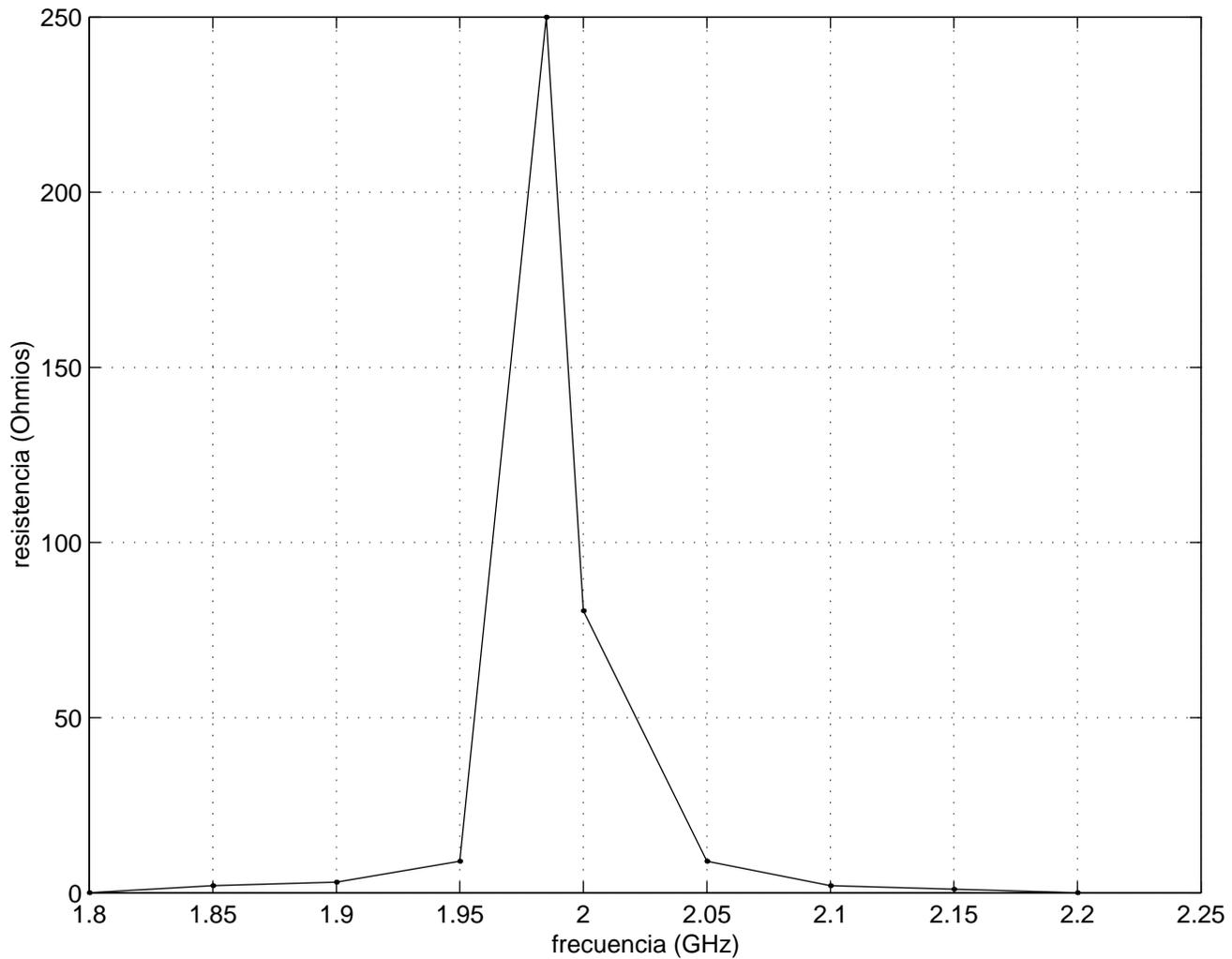


Figura 5.11: Resistencia de entrada de una antena microstrip de parche rectangular sin impedancia de carga y $a = 5$ cm, $b = 3.4$ cm, $e = 5.1$ cm, $h = 7.5$ cm, $t = 0.08779$ cm, $x' = 1.22$ cm, $y' = 0.85$ cm, $\epsilon_r = 2.17$.

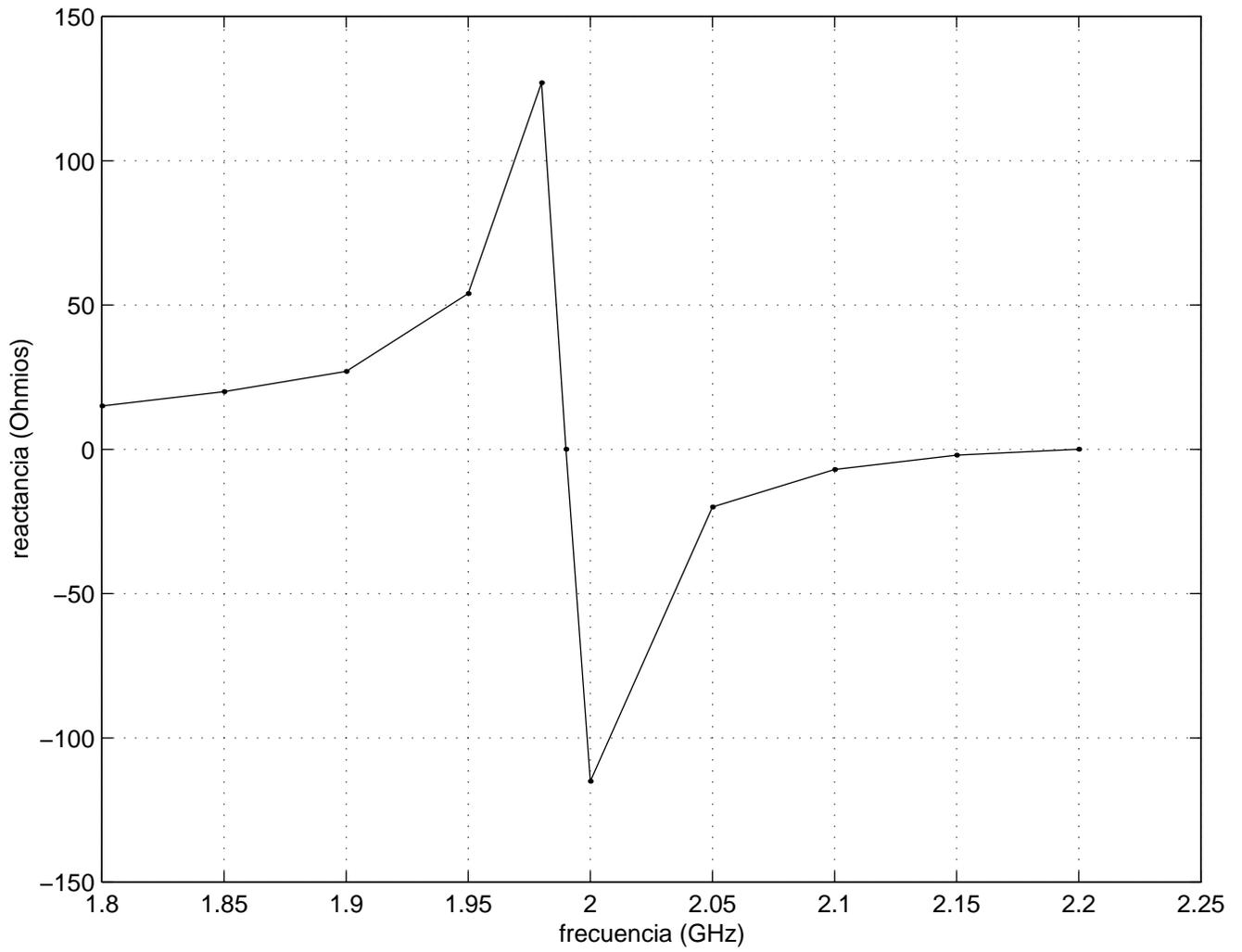


Figura 5.12: Reactancia de entrada (antena de la Figura 5.11).

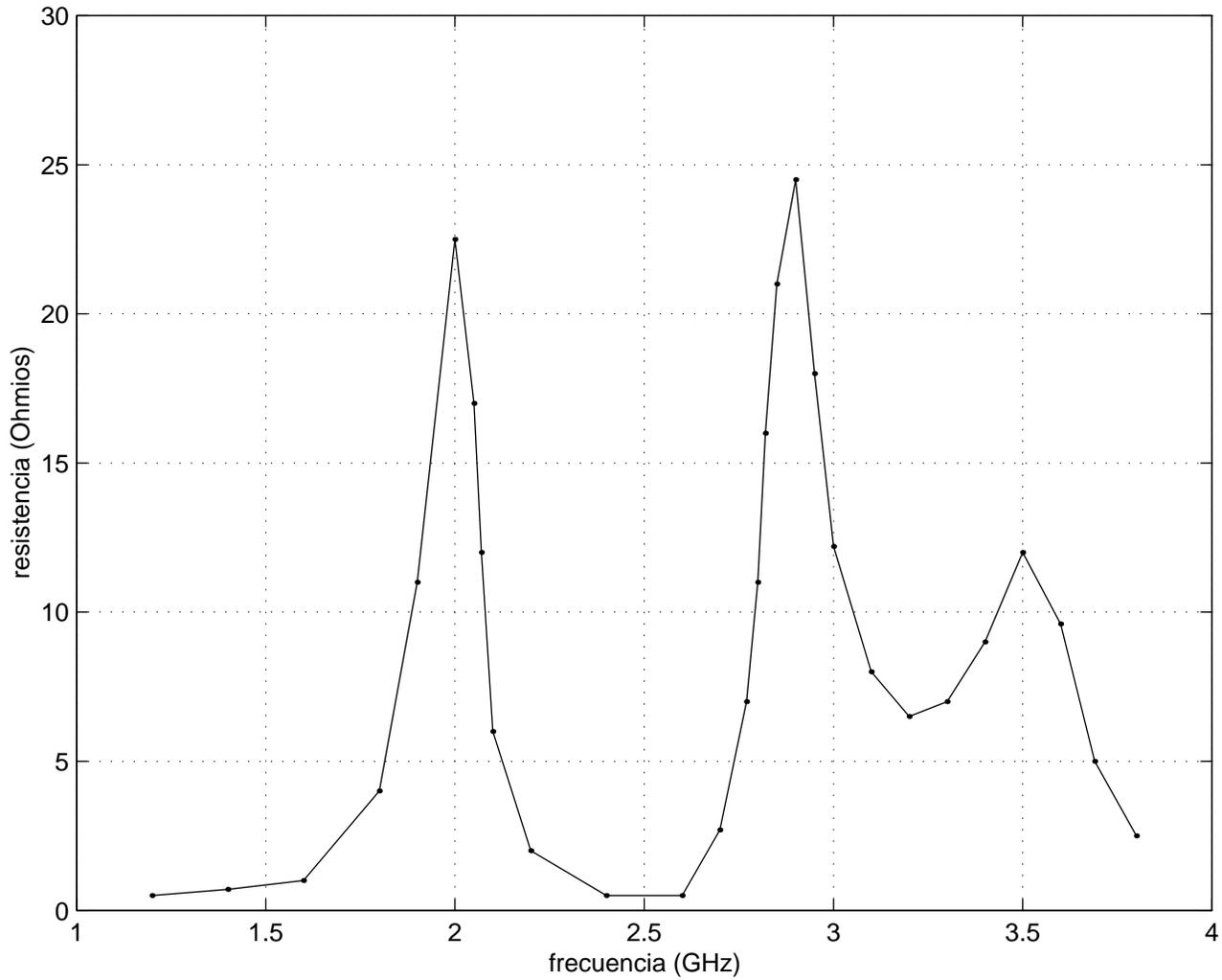


Figura 5.13: Resistencia de entrada de la antena microstrip parche (ver parámetros en Figura 5.11) con impedancia de carga de 50Ω situada en $x_L = -2.2$ cm, $y_L = -1.5$ cm.

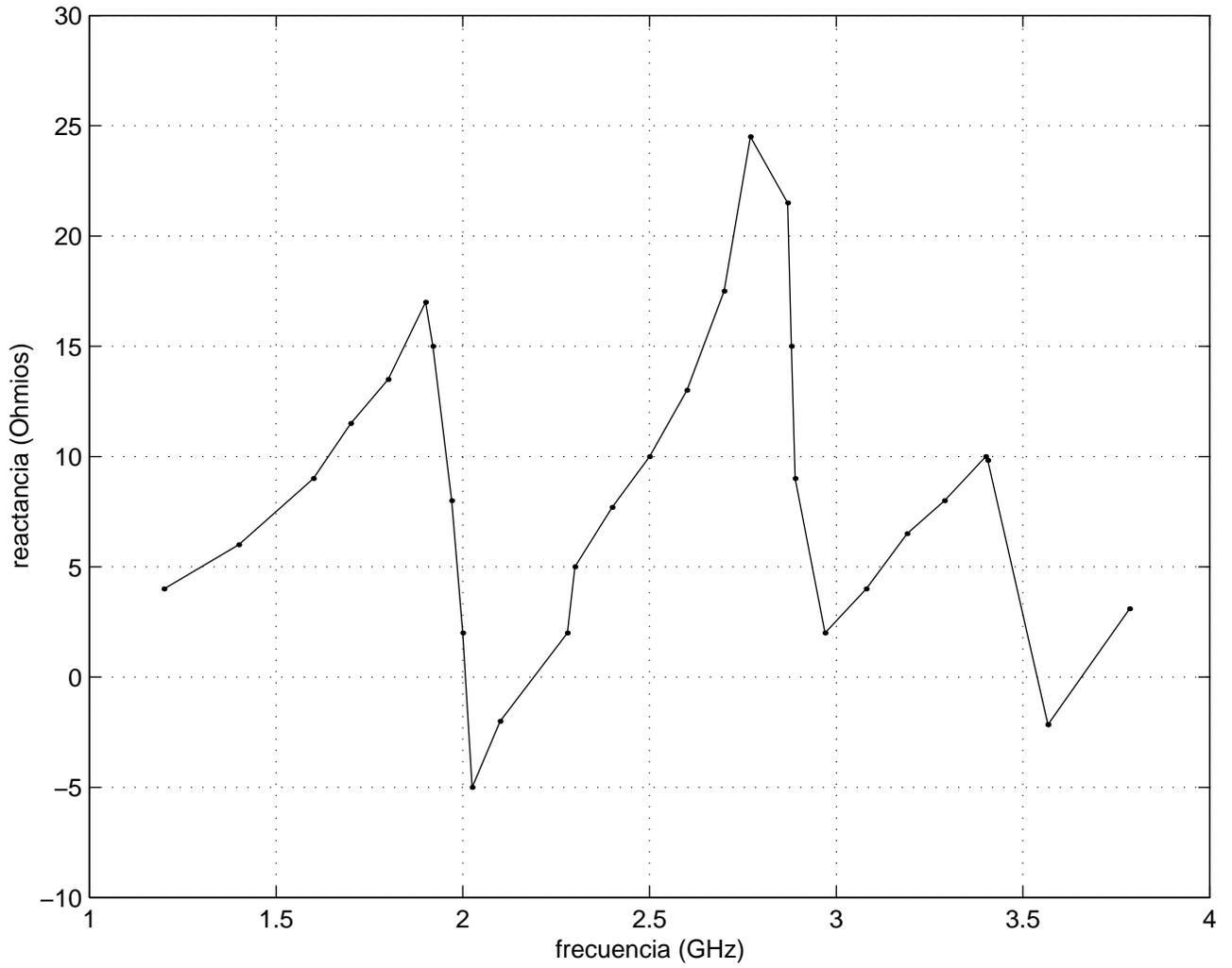


Figura 5.14: Reactancia de entrada de la antena con parche cargado de la Figura anterior.

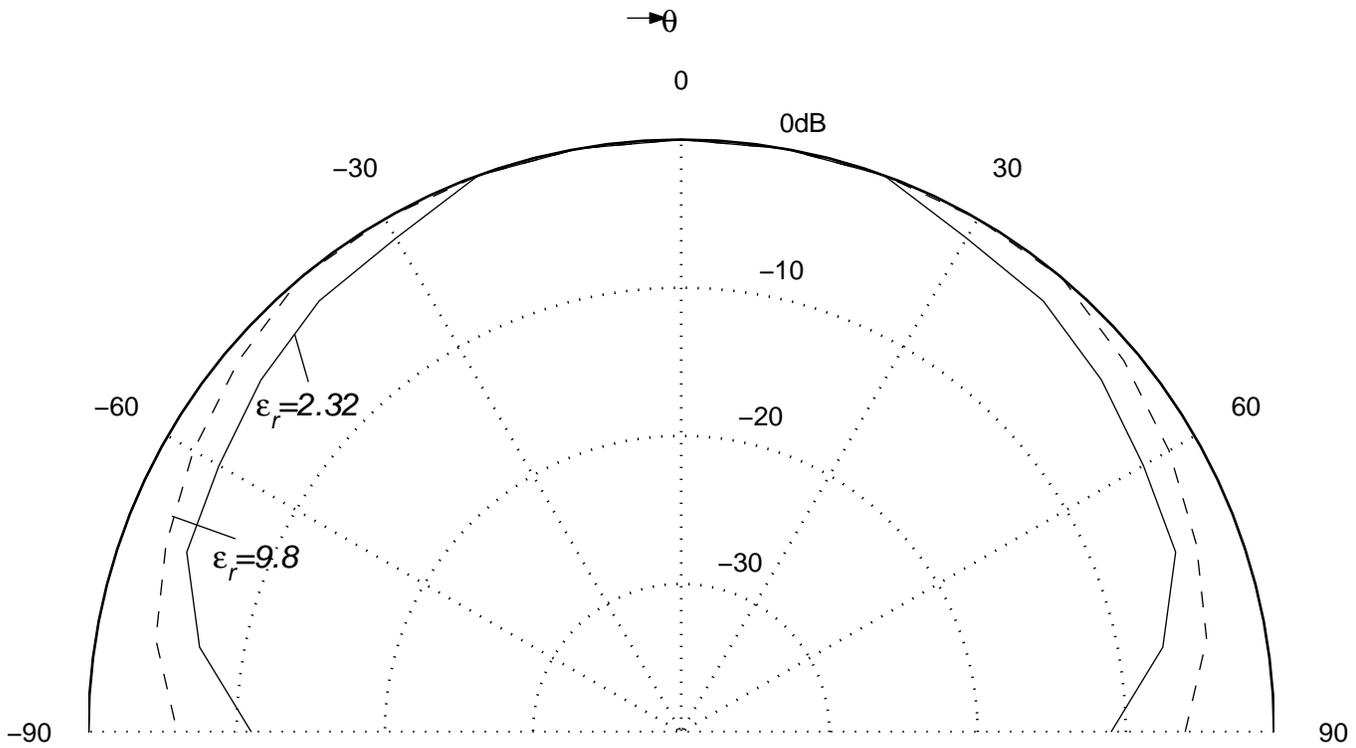


Figura 5.15: Diagrama de radiación Plano E, para una antena microstrip de parche rectangular con $a/b = 1.5$, $f = 1$ GHz; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.

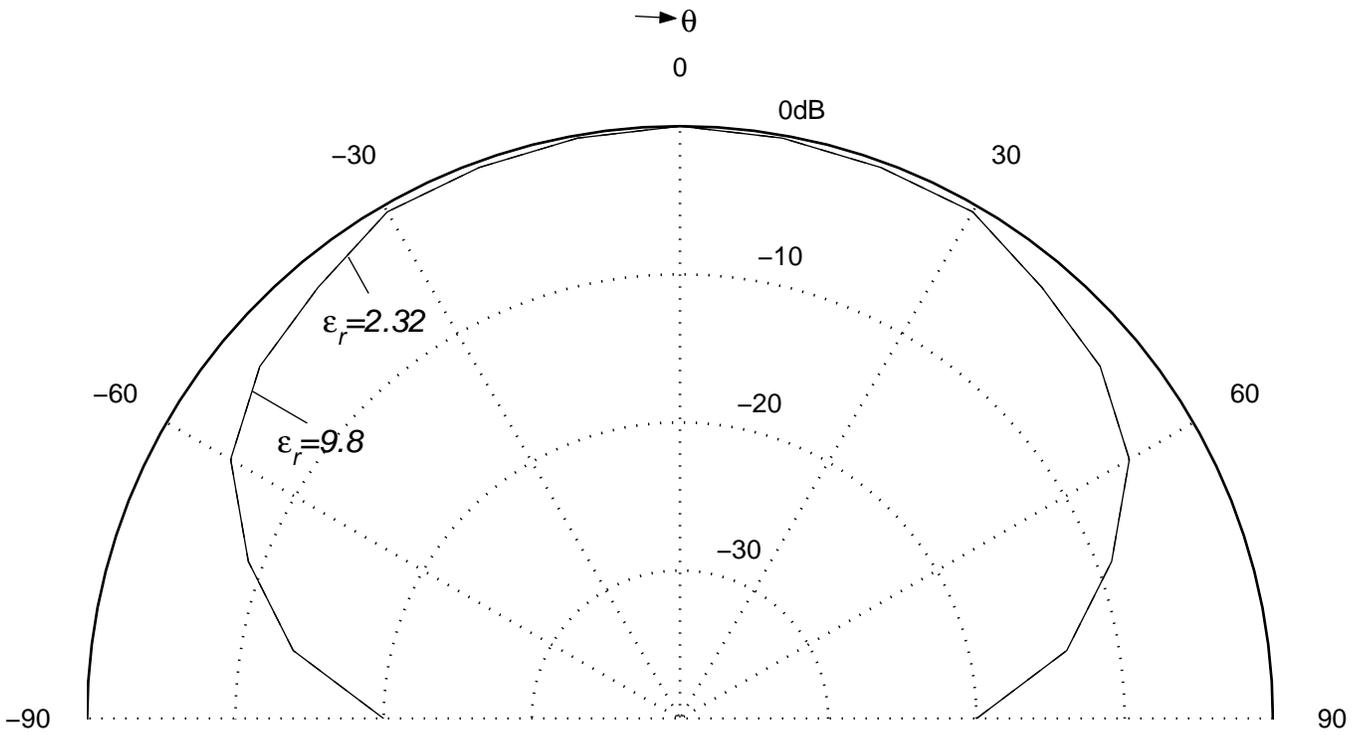


Figura 5.16: Diagrama de radiación Plano H, para la antena de la Figura 5.15.

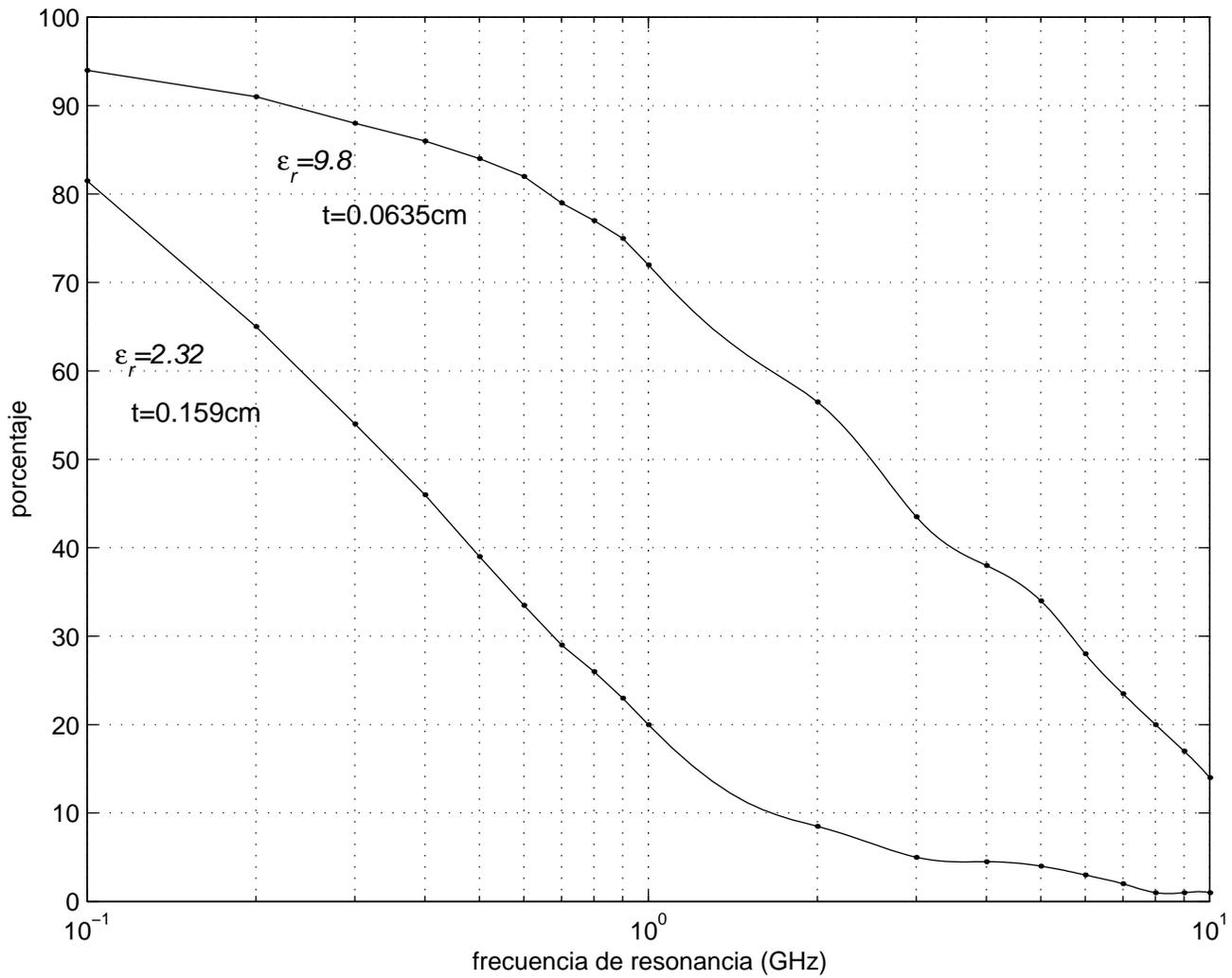


Figura 5.17: Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a pérdidas en el conductor P_c , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.159 \text{ cm}$; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.0635 \text{ cm}$.

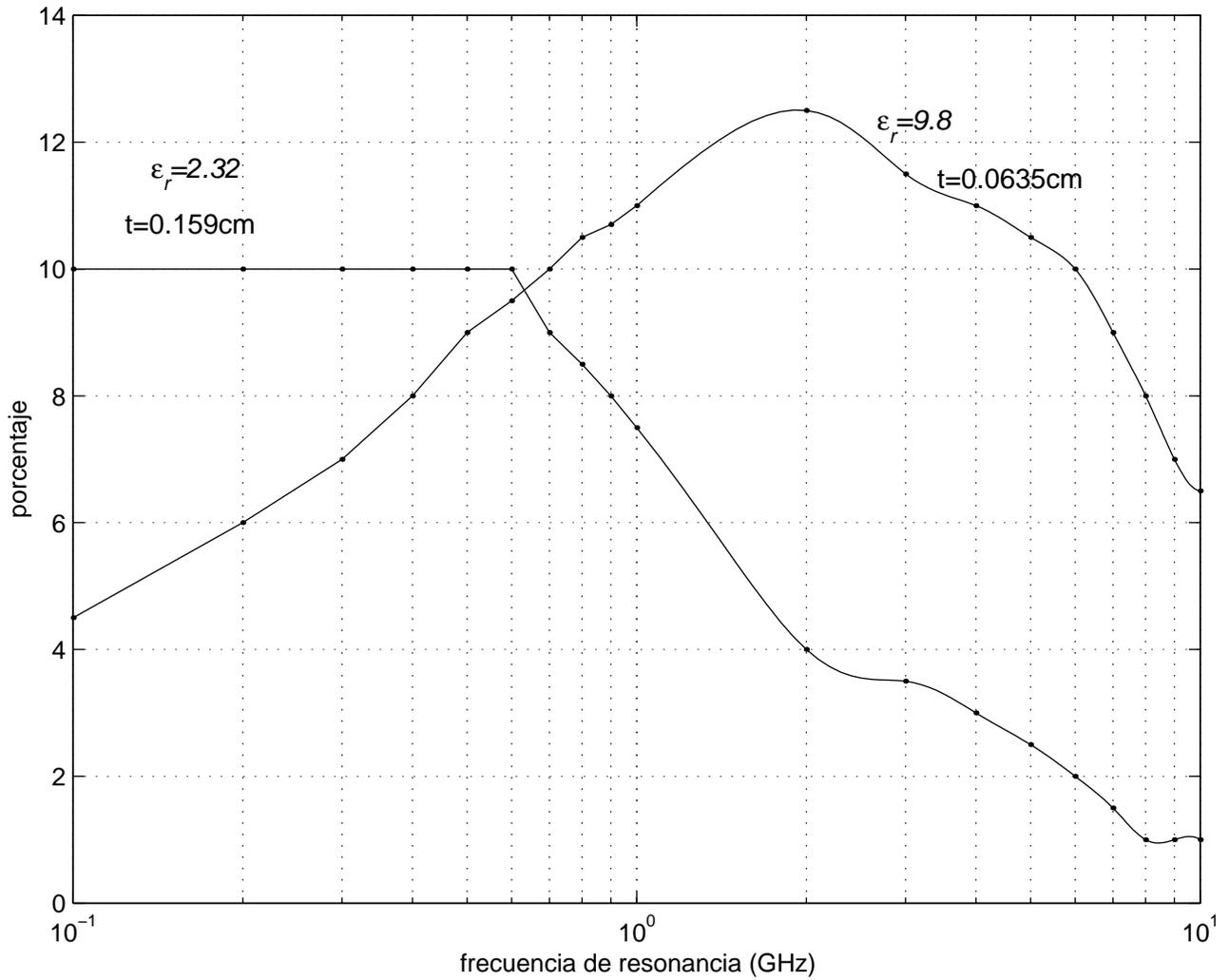


Figura 5.18: Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a pérdidas en el dieléctrico P_d , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.159$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.0635$ cm.

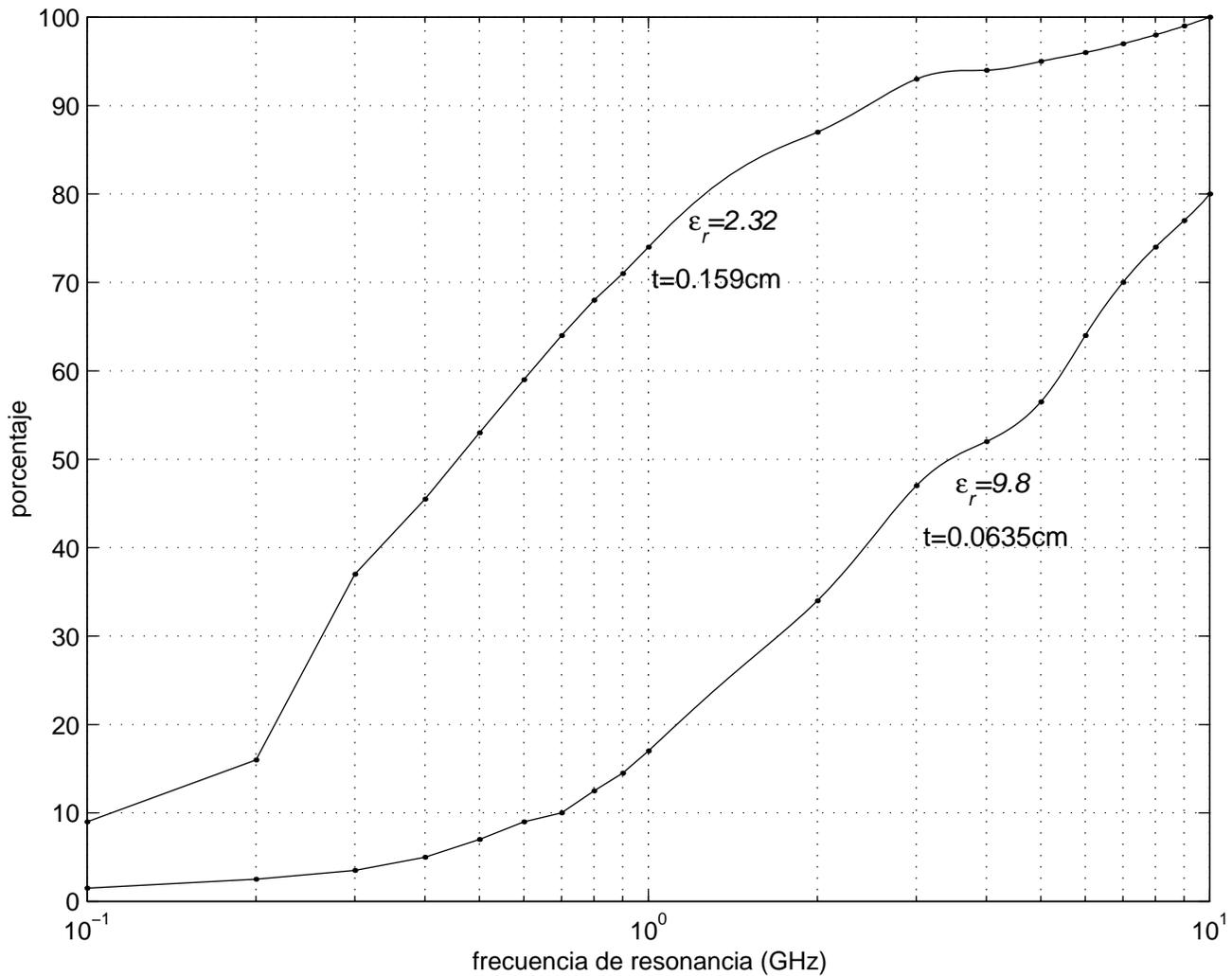


Figura 5.19: Porcentaje de las pérdidas totales P_T que corresponden a radiación P_r , en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.159$ cm; $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.0635$ cm.

5.2.4 Eficiencia de radiación.

En las Figuras 5.20 y 5.21 se muestra la eficiencia de radiación $e = P_r/P_T$ en función de la frecuencia de resonancia, para distintos valores de ϵ_r y t . En general, la eficiencia de radiación se incrementa con el espesor del sustrato y decrece con el aumento de ϵ_r .

5.2.5 Directividad y Ganancia.

La directividad D de una antena se define como el cociente entre la densidad de potencia en la dirección del lóbulo principal y la densidad de potencia media, mientras que la ganancia viene dada por $G = eD$. En la Figura 5.22, se muestran las directividades en función de la frecuencia de resonancia, apreciándose su insensibilidad a variaciones del espesor del sustrato y de la frecuencia de resonancia. Se ilustra la ganancia en las Figuras 5.23 y 5.24.

5.2.6 Factor de calidad. Ancho de banda.

En las Figuras 5.25-5.28 se muestran el factor de calidad y el ancho de banda para distintos casos, apreciándose el estrecho ancho de banda en cualquiera de ellos, como ya se apuntó anteriormente. Para $\epsilon_r = 2.32$ el ancho de banda se incrementa con el espesor del sustrato excepto para frecuencias menores que 7 GHz. El comportamiento es más complicado para $\epsilon_r = 9.8$, puesto que existe, en el rango de frecuencias más bajas, un mayor ancho de banda para el sustrato más delgado.

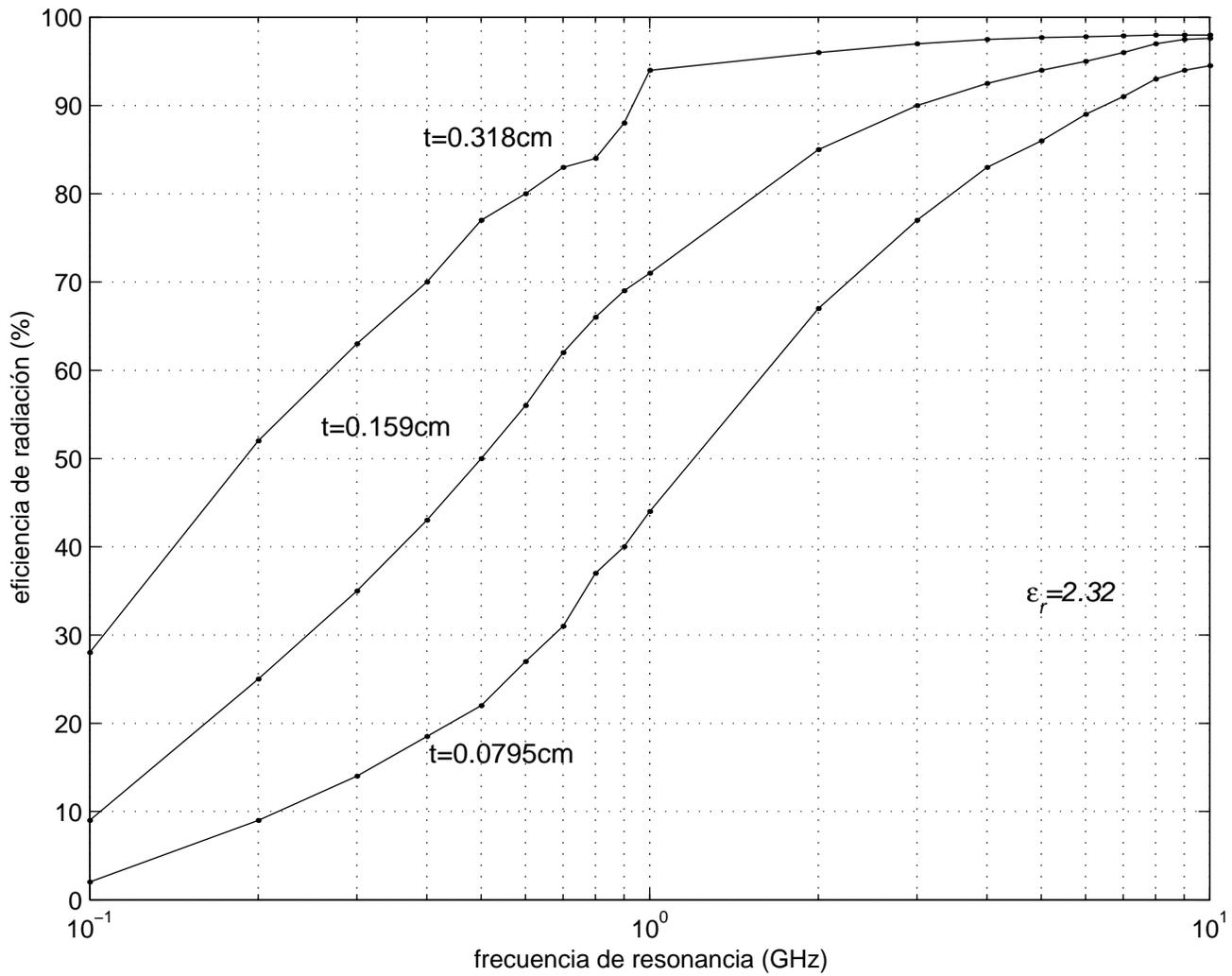


Figura 5.20: Eficiência de radiação em função da frequência de ressonância, para uma antena microstrip de parcho rectangular com $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.

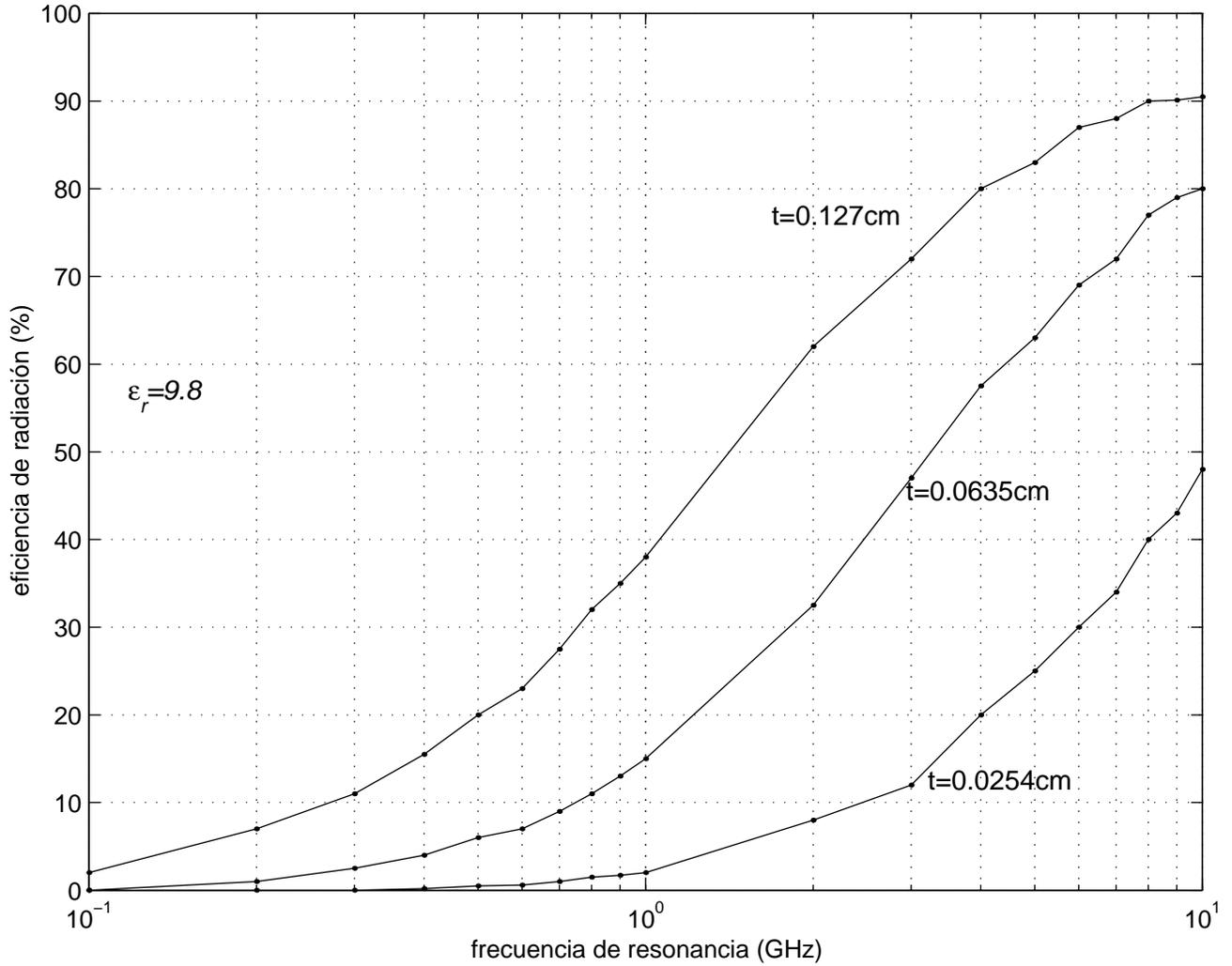


Figura 5.21: Eficiencia de radiación en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.

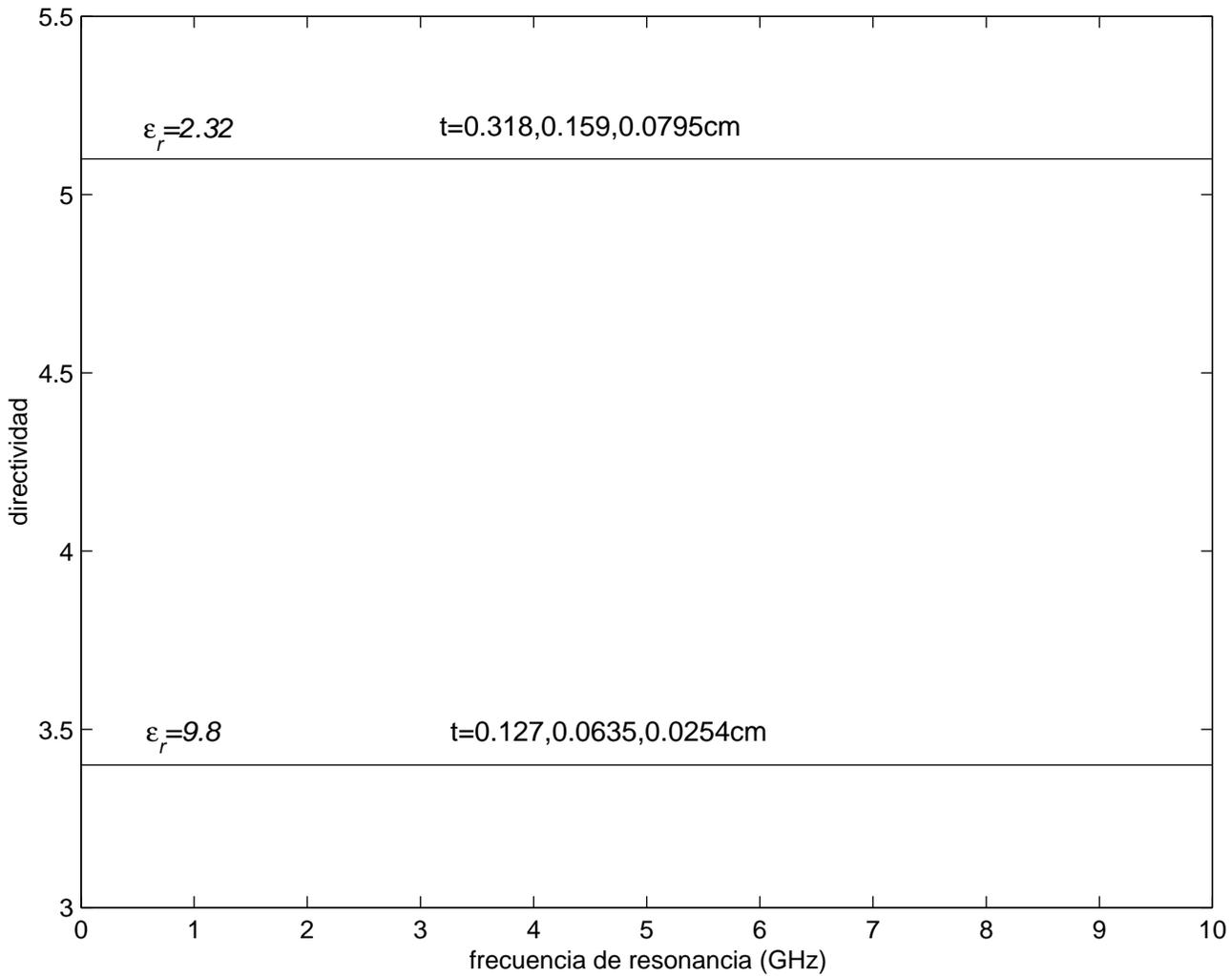


Figura 5.22: Directividad (valores absolutos) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $a = 1.5b$; $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm; $\epsilon_r = 9.8$, $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.

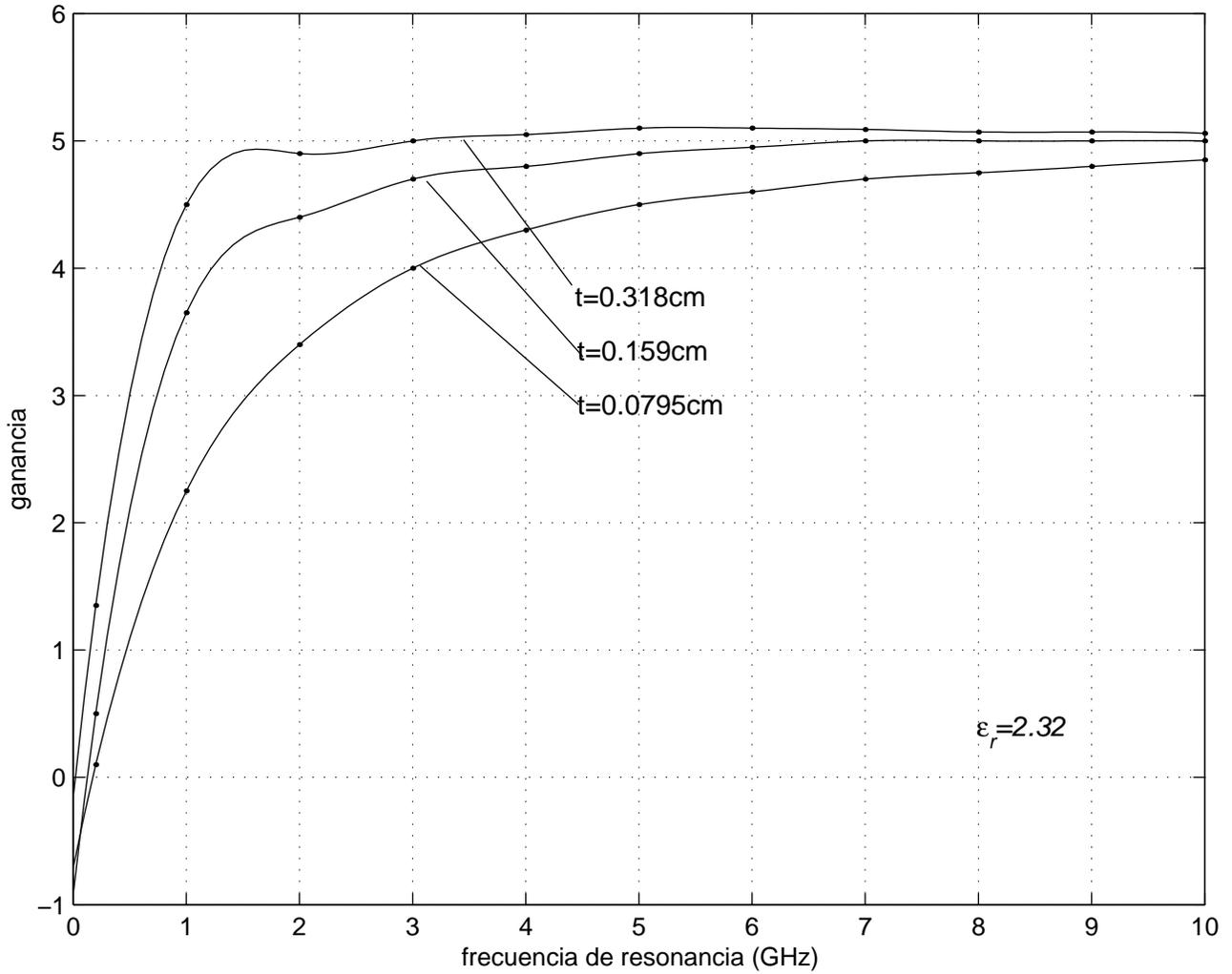


Figura 5.23: Ganancia (dB) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.

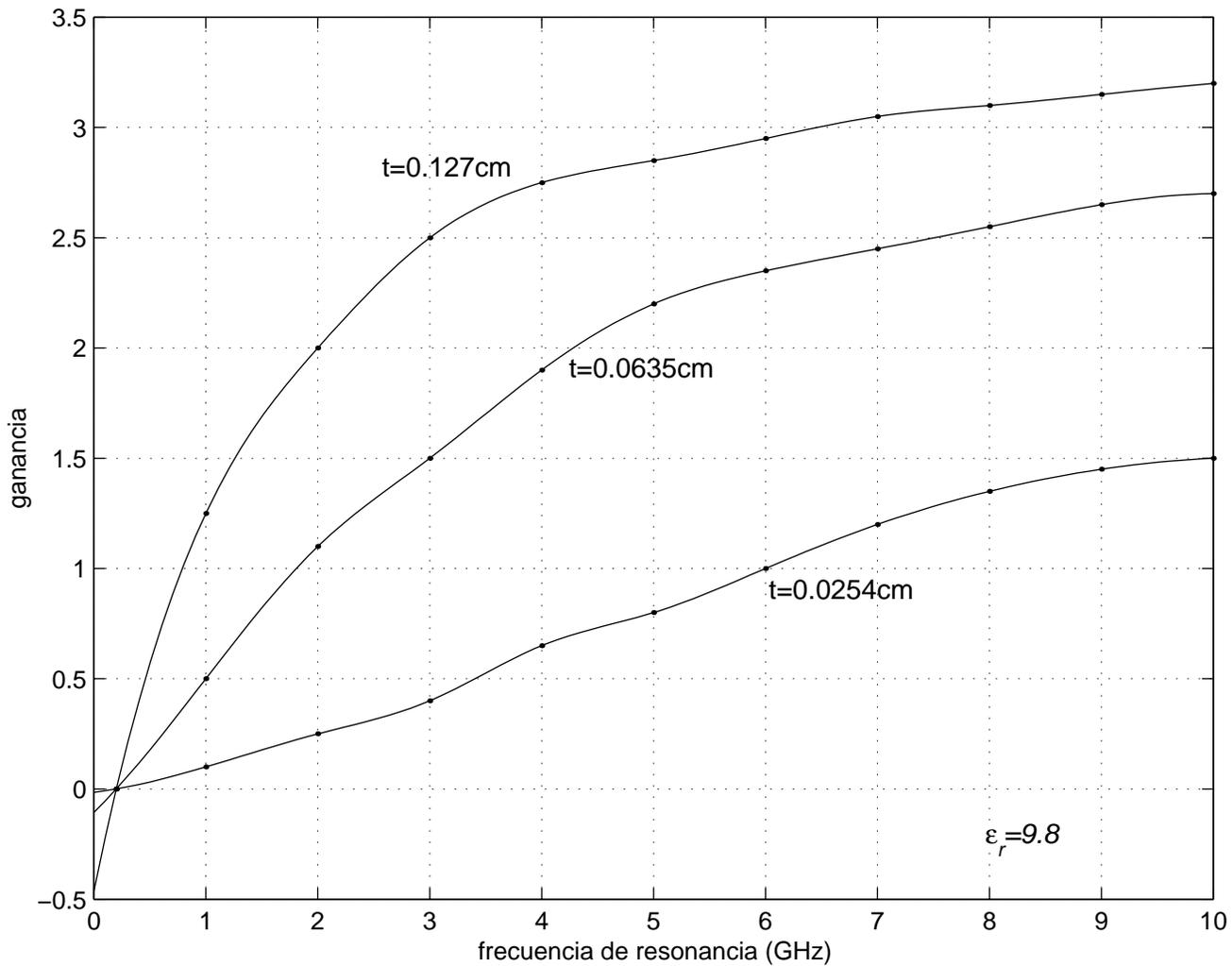


Figura 5.24: Ganancia (dB) en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.

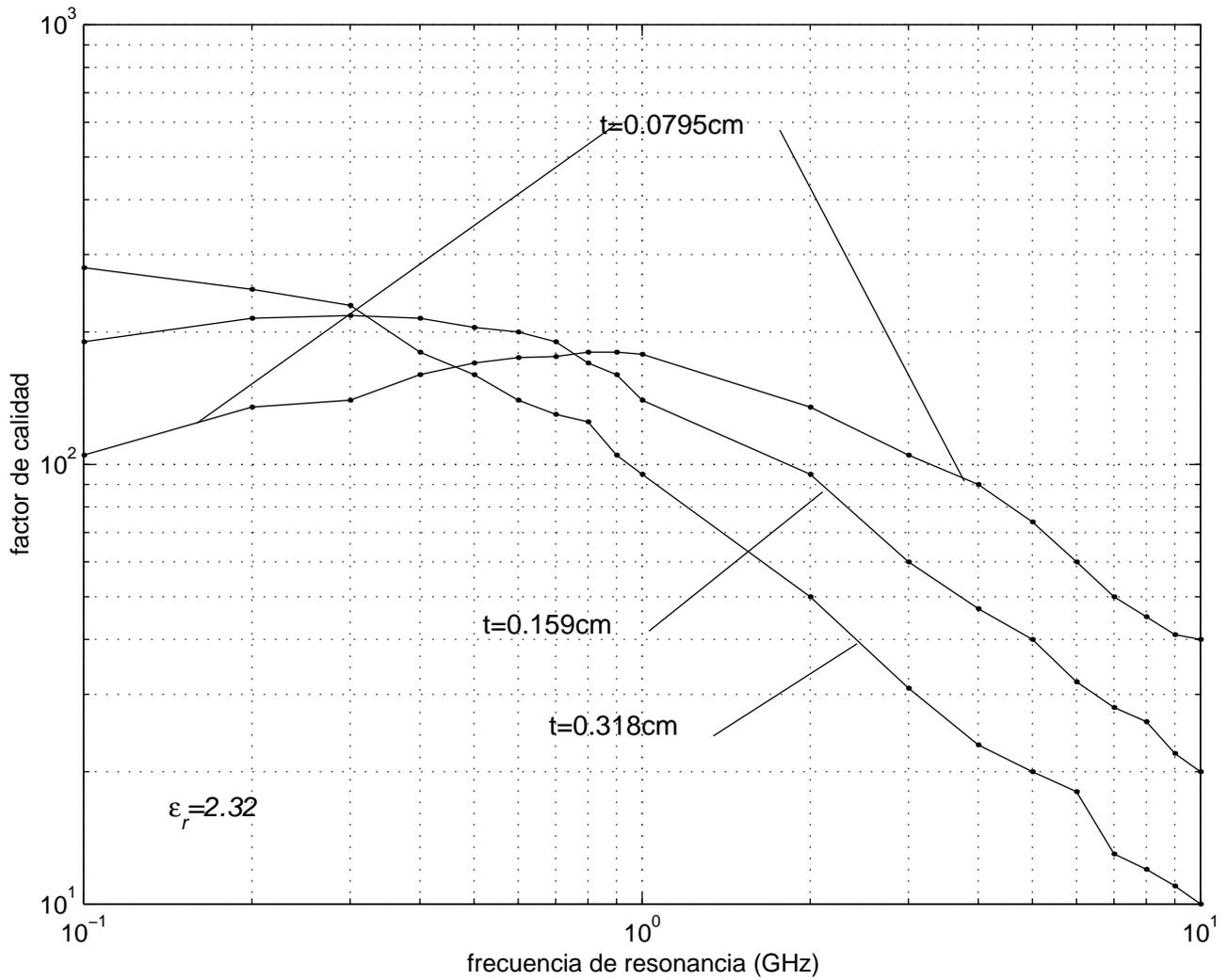


Figura 5.25: Factor de calidad Q en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 2.32$ y $t = 0.318, 0.159, 0.0795$ cm.

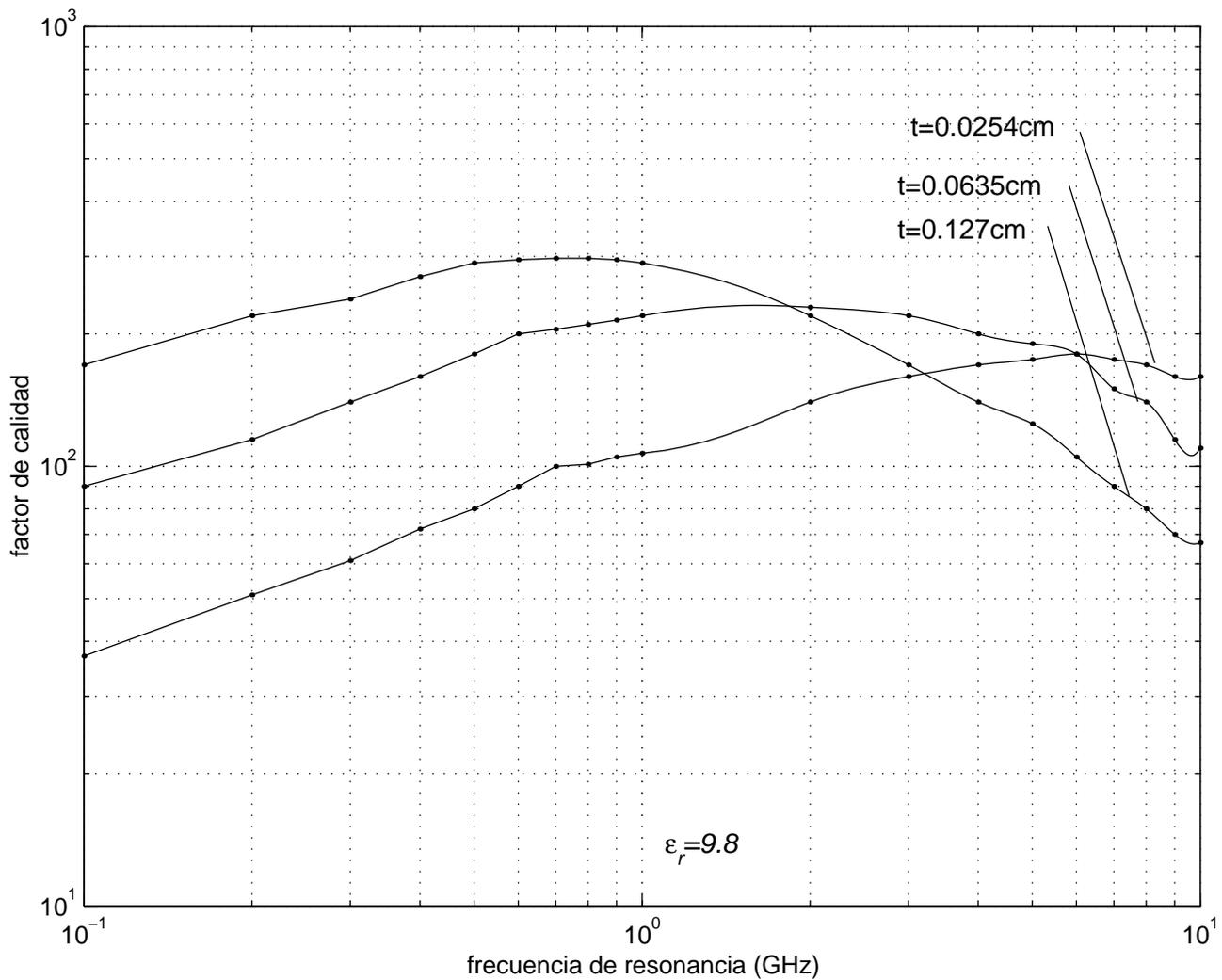


Figura 5.26: Factor de calidad Q en función de la frecuencia de resonancia, para una antena microstrip de parche rectangular con $\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m, $\delta = 0.0005$, $a = 1.5b$, $\epsilon_r = 9.8$ y $t = 0.127, 0.0635, 0.0254$ cm.

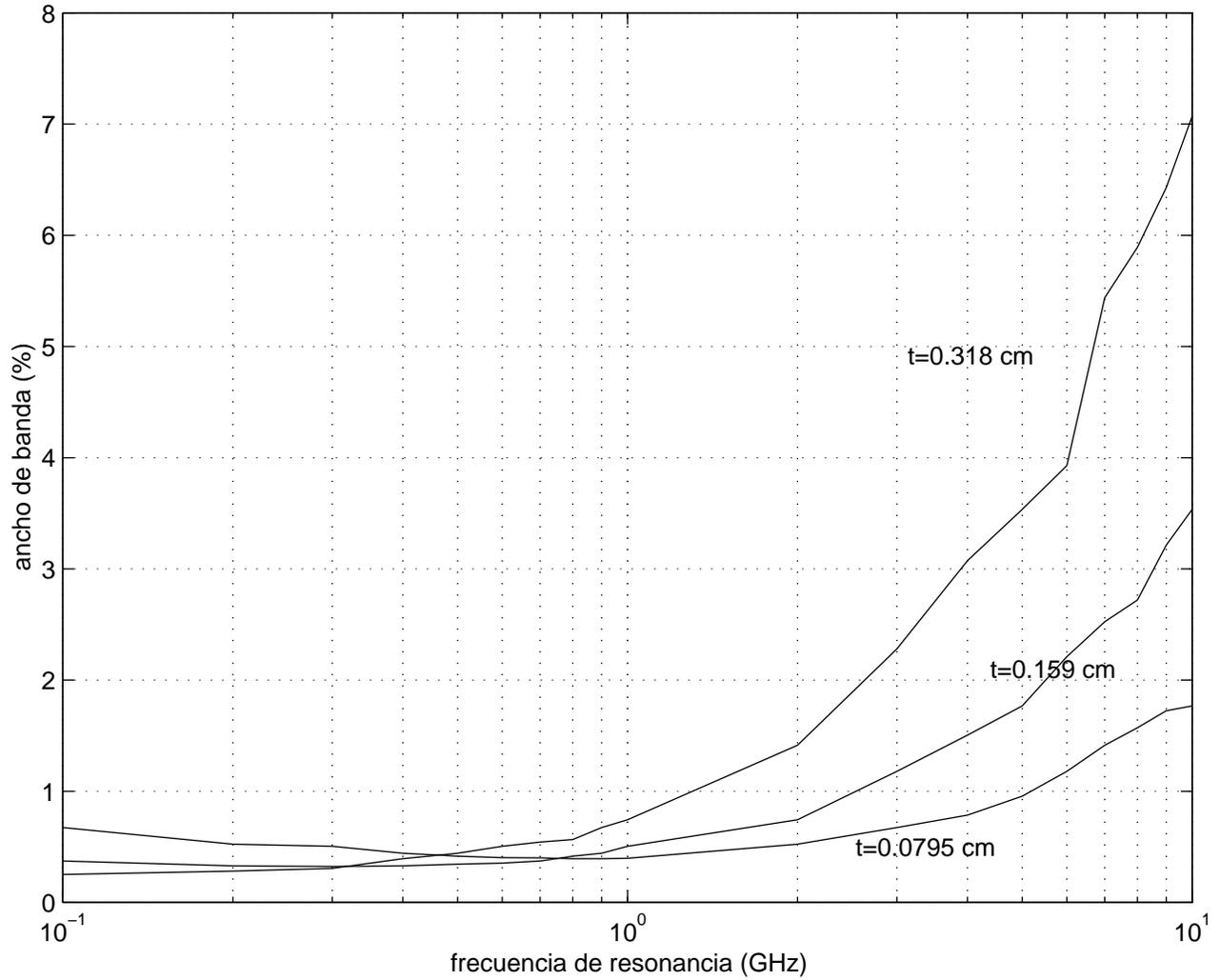


Figura 5.27: Ancho de banda en función de la frecuencia de resonancia para la antena de la Figura 5.25 ($\epsilon_r = 2.32$).

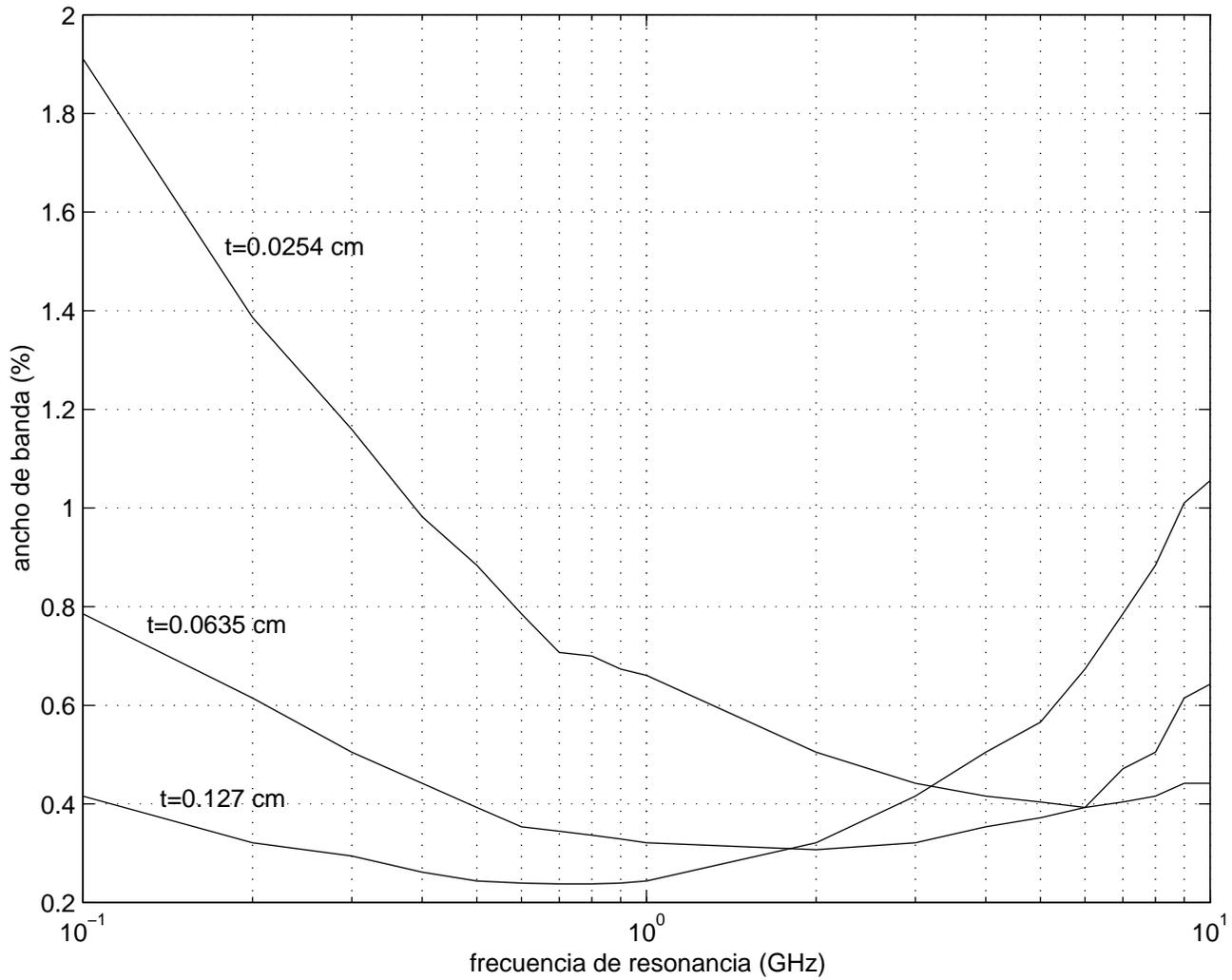


Figura 5.28: Ancho de banda en función de la frecuencia de resonancia para la antena de la Figura 5.26 ($\epsilon_r = 9.8$).

Capítulo 6

Conclusiones.

Se ha logrado resolver el problema del análisis de las antenas microstrip mediante el MEF de forma precisa. No obstante, se debe cuestionar si se ha conseguido eficiencia, puesto que los mallados requeridos para tener precisión requieren un elevado tiempo de ejecución en las simulaciones. En la implementación MATLAB se han aprovechado las características de dispersión de las matrices implicadas en el procedimiento de resolución, disminuyendo así los requerimientos de memoria; pero la necesidad de incluir condiciones de contorno de tipo integral en un problema de tipo abierto lleva consigo el cálculo de matrices complicadas que implican tiempos de ejecución demasiado grandes. Se propone, por ello, la optimización del código en este sentido.

Cabe destacar la versatilidad del método propuesto, dado que permite al usuario variar numerosos parámetros de la antena que se desea analizar, y abre futuras líneas de investigación para mejora de las características eléctricas de la antena según sus parámetros físicos.

Apéndice A

Funciones MATLAB

antena

```
function [ne]=antena(dimx,dimy,dimz,nex,ney,nez,pme,pee,f,xf,...
yf,I,px,py)
%Carga todos los datos necesarios para caracterizar la antena
%que el usuario desea analizar.
%Se declaran todos los parámetros de la antena como variables
%globales para eliminar la necesidad de definirlos en el resto de
%las funciones.
%Dimensiones de la cavidad en las tres direcciones del espacio:
%dimx,dimy,dimz (m.) para direcciones x,y,z respectivamente.
global dimx;global dimy;global dimz;
%Número de elementos a utilizar en el análisis MEF, en las tres
%direcciones del espacio.: nex,ney,nez, para direcciones
%x,y,z respectivamente.
global nex;global ney;global nez;
global lx;global ly;global lz;
global ne;
%permeabilidad magnética relativa del sustrato dieléctrico (pme).
%permitividad eléctrica relativa del sustrato dieléctrico (pee).
global pme;global pee;
%frecuencia de operación (f).
global f;
%coordenadas del cable coaxial de alimentación (xf,yf),
%suponiendo el origen de coordenadas en el centro del parche.
global xf; global yf;
```

```

%intensidad de la corriente de alimentación (I).
global I;
global ko;global Zo;
%dimensiones del parche en las direcciones x e y (px y py,
%respectivamente).
global px;global py;
global pmo;global peo;
%Se calcula el resto de parámetros necesarios para el análisis:
%número total de elementos (ne).
ne=nex*ney*nez;
%dimensiones del elemento prisma rectangular.
lx=dimx/nex;ly=dimy/ney;lz=dimz/nez;
%número de onda en el vacío (ko).
ko=(2*pi*f)/(2.99792458e8);
%impedancia intrínseca en el vacío (Zo).
Zo=376.7303;
pmo=4*pi*1e-7;%permeabilidad magnética del vacío.
peo=8.854185e-12;%permitividad eléctrica del vacío;

```

campo-electrico

```
function [E]=campo-electrico(x,y,z)
```

```

%Una vez cargados todos los datos necesarios con la función
%antena, la ejecución de la función campo_eléctrico devuelve
%el vector campo eléctrico en un punto cualquiera (x,y,z) que
%pertenezca al volumen de la cavidad. En primer lugar, realiza
%las llamadas a las funciones necesarias para discretizar
%el volumen y para formar el sistema de ecuaciones. Puesto que
%las matrices generadas son dispersas (elevado número de
%elementos nulos) y de grandes dimensiones, se irán almacenando
%sólo sus elementos no nulos para disminuir los requerimientos
%de memoria, y así algunas operaciones se realizarán sobre un
%número de elementos mucho menor, con la disminución en tiempo
%de ejecución que ello conlleva. En segundo lugar, llama a las
%funciones que imponen las condiciones de contorno y resuelve el
%sistema de ecuaciones. Finalmente, invoca a las funciones que
%calculan el vector campo eléctrico en el punto (x,y,z) como
%expansión de las funciones base ponderadas con los coeficientes

```

%(grados de libertad) ya conocidos. (Cada una de las funciones %llamadas aquí está explicada en el código correspondiente).

```

[nglob,correl,coord,par]=genaris;
[ke]=matelem1;
[kensambl]=matglob1(nglob,ke);
skensambl=sparse(kensambl);
clear kensambl;

[Pst]=terminopst;
rPst=real(Pst);
iPst=imag(Pst);
[RPensambl]=matglob2(nglob,rPst);
[IPensambl]=matglob2(nglob,iPst);
Pensambl=RPensambl+(i*IPensambl);
sPensambl=sparse(Pensambl);
clear Pensambl;

[be]=matelem3(coord);
[bensambl]=matglob3(nglob,correl,be);

sA=sPensambl+skensambl;
clear sPensambl;
clear skensambl;
fA=full(sA);

[A,bensambl]=condcont(fA,bensambl,par);

E_aristasc=A\bensambl;

[E_aristacc]=resultMEF(E_aristasc,par,nglob);

[E]=Exyz(x,y,z,nglob,E_aristacc);

```

genaris

```

function [nglob,correl,coord,par]=genaris
global dimx;global dimy;global dimz;
global nex;global ney;global nez;global ne;
global xf;global yf;global px;global py;

```

```

global lx;global ly;global lz;
%Salidas:
%nglob:tabla cuya entrada nglob(i,j) representa el número
%global de la arista i del elemento j (i es el número local
%de la arista.
%correl:vector cuyo recorrido proporciona ordenadamente de
%menor a mayor los números de los elementos que contienen
%el cable de alimentación.
%coord:vector de 4 elementos que son las coordenadas x e y
%máximas y mínimas que caracterizan a todos los elementos
%que contienen al cable.
%par:vector cuyos elementos son los números globales ordenados
%de las aristas contenidas en el parche o en las paredes de la
%cavidad.

%Se discretiza el volumen mediante los elementos de arista (el
%origen de coordenadas se sitúa en el centro del parche).
%arista es un array de celdas, cuyo elemento arista(i,e) es
%un vector que caracteriza, mediante sus coordenadas, la arista
%i del elemento e.
%Puesto que cada arista mantiene constantes dos de sus coordena_
%das y variable la otra, a esta última se la distinguirá dándole
%el valor de dicha coordenada en el punto medio de la arista.
%Las coordenadas x,y,z seguidas de min o max son las coordenadas
%que caracterizan al elemento. Ejemplo: ymin es la coordenada y
%de menor valor en el elemento correspondiente a la cara del
%prisma limitada por las aristas 5,6,9,11, véase Figura 4.1.

e=1;
s=1;encontrado=0;

for zmin=-dimz:lz:-lz
    zmax=zmin+lz;
    for ymin=-dimy/2:ly:(dimy/2)-ly
        ymax=ymin+ly;
        for xmin=-dimx/2:lx:(dimx/2)-lx
            xmax=xmin+lx;
            %Se genera el elemento e, almacenando las coordenadas de
            %sus 12 aristas.
            arista(1,e)={[xmax-lx/2 ymin zmin]};
            bix(1:4,e)=xmin;bsx(1:4,e)=xmax;biy(1,e)=ymin;bsy(1,e)=ymin;

```

```

biz(1,e)=zmin;bsz(1,e)=zmin;

arista(2,e)={[xmax-lx/2 ymax zmin]};
biy(2,e)=ymax;bsy(2,e)=ymax;biz(2,e)=zmin;bsz(2,e)=zmin;
arista(3,e)={[xmax-lx/2 ymin zmax]};
biy(3,e)=ymin;bsy(3,e)=ymin;biz(3,e)=zmax;bsz(3,e)=zmax;
arista(4,e)={[xmax-lx/2 ymax zmax]};
biy(4,e)=ymax;bsy(4,e)=ymax;biz(4,e)=zmax;bsz(4,e)=zmax;
arista(5,e)={[xmin ymax-ly/2 zmin]};
biy(5:8,e)=ymin;bsy(5:8,e)=ymax;
bix(5,e)=xmin;bsx(5,e)=xmin;biz(5,e)=zmin;bsz(5,e)=zmin;
arista(6,e)={[xmax ymax-ly/2 zmin]};
bix(6,e)=xmax;bsx(6,e)=xmax;biz(6,e)=zmin;bsz(6,e)=zmin;
arista(7,e)={[xmin ymax-ly/2 zmax]};
bix(7,e)=xmin;bsx(7,e)=xmin;biz(7,e)=zmax;bsz(7,e)=zmax;

arista(8,e)={[xmax ymax-ly/2 zmax]};
bix(8,e)=xmax;bsx(8,e)=xmax;biz(8,e)=zmax;bsz(8,e)=zmax;
arista(9,e)={[xmin ymin zmax-lz/2]};
biz(9:12,e)=zmin;bsz(9:12)=zmax;
bix(9,e)=xmin;bsx(9,e)=xmin;biy(9,e)=ymin;bsy(9,e)=ymin;
arista(10,e)={[xmax ymin zmax-lz/2]};
bix(10,e)=xmax;bsx(10,e)=xmax;biy(10,e)=ymin;
bsy(10,e)=ymin;
arista(11,e)={[xmin ymax zmax-lz/2]};
bix(11,e)=xmin;bsx(11,e)=xmin;biy(11,e)=ymax;
bsy(11,e)=ymax;
arista(12,e)={[xmax ymax zmax-lz/2]};
bix(12,e)=xmax;bsx(12,e)=xmax;biy(12,e)=ymax;
bsy(12,e)=ymax;
%Vemos si hay aristas en este elemento que pertenezcan
%al parche o a las paredes de la cavidad.
%Coordenadas de las fronteras del parche.
u=-px/2;v=px/2;
w=-py/2;g=py/2;
for q=1:12
    if ((biz(q,e)==0)&(bsz(q,e)==0)&(bix(q,e)>=u)&...
        (bsx(q,e)<=v)...
        &(biy(q,e)>=w)&(bsy(q,e)<=g))|((bix(q,e)...
        ==(-dimx/2))&...
        (bsx(q,e)==(-dimx/2))|((biy(q,e)==...

```

```

        (-dimy/2))&...
        (bsy(q,e)==(-dimy/2))|((biz(q,e)==-dimz)...
        &(bsz(q,e)==-dimz))|...
        ((bix(q,e)==(dimx/2))&(bsx(q,e)==(dimx/2)))...
        |((biy(q,e)==(dimy/2))&(bsy(q,e)==(dimy/2)))

        R(q,e)=1;
        %R(q,e)=1: la arista q del elemento e está contenida
        %en el parche o en las paredes de la cavidad.
    else
        R(q,e)=0;
    end
end

%Se comprueba si el elemento e contiene a la corriente
%de alimentación.

if ((xmin<xf)&(xmax>xf)&(ymin<yf)&(ymax>yf))
    coord=[xmin xmax ymin ymax];
    correl(s)=e;
    s=s+1;
    encontrado=1;
end

    e=e+1;
end

end

end

k=1;

%Se convierte la numeración local en numeración global:
%Para cada elemento, se numeran sus aristas asignándoles un

```

%número global comprobando si coinciden con aristas ya numeradas y, en tal caso, se les asignaría el mismo número global.

```

for numel=1:ne
    for i=1:12
        repetida=0;
        for el=1:numel-1
            for j=1:12

                if arista{i,numel}==arista{j,el}
                    nglob(i,numel)=nglob(j,el);
                    repetida=1;break
                end
            end
            if repetida==1
                break
            end
        end
        if repetida==0
            nglob(i,numel)=k;
            k=k+1;
        end
    end
end
f=1;
%En despar se almacenan los números globales de las aristas
%contenidas en el parche o en las paredes de la cavidad.

for p=1:ne
    for o=1:12

        if R(o,p)==1
            despar(f)=nglob(o,p);
            f=f+1;

        end
    end
end

%par es despar ordenado.

```

```

par(1)=1;
for b=1:length(despar)
    enc=find(par==despar(b));
    if (isempty(enc)==1)
        men=find(par<despar(b));
        if (isempty(men)==0)
            ind=max(men);
            aux1=par;
            if (length(aux1)>=ind+1)
                for d=(ind+1):(length(aux1))

                    par(d+1)=aux1(d);

                end
            end
            par(ind+1)=despar(b);

        else
            par(length(par)+1)=despar(b);
        end
    end
end

end

```

matelem1

```
function [ke]=matelem1
```

%Devuelve la matriz ke 12x12 que está dada en la ecuación (4.53).

%Se utilizan los resultados de la evaluación de matrices elementales
 %de la Sección 4.2 para formar las matrices rel y fel, que se
 %suman añadiéndoles las constantes de la ecuación (4.53).

```

k1=[2 -2 1 -1;-2 2 -1 1;1 -1 2 -2;-1 1 -2 2];
k2=[2 1 -2 -1;1 2 -1 -2;-2 -1 2 1;-1 -2 1 2];
k3=[2 1 -2 -1;-2 -1 2 1;1 2 -1 -2;-1 -2 1 2];
global lx;,global ly;global lz;

```

```

global pme;global pee;global ko;

rxx=((lx*lz/(6*ly))*k1)+((lx*ly/(6*lz))*k2);
ryy=((lx*ly/(6*lz))*k1)+((ly*lz/(6*lx))*k2);
rzz=((ly*lz/(6*lx))*k1)+((lx*lz/(6*ly))*k2);
rxy=-(lz/6)*k3;
rxz=-(ly/6)*k3;
ryz=-(lx/6)*k3;
rel(1:4,1:4)=rxx;
rel(1:4,5:8)=rxy;
rel(5:8,1:4)=rxy';
rel(5:8,5:8)=ryy;
rel(1:4,9:12)=rxz;
rel(9:12,1:4)=rxz';
rel(9:12,9:12)=rzz;
rel(5:8,9:12)=ryz;
rel(9:12,5:8)=ryz';

fpp=(lx*ly*lz/36)*[4 2 2 1;2 4 1 2;2 1 4 2;1 2 2 4];
fel=zeros(12,12);
fel(1:4,1:4)=fpp;
fel(5:8,5:8)=fpp;
fel(9:12,9:12)=fpp;
ke(((1/pme)*rel)-((ko^2)*pee*fel));

```

matglob1

```
function [Kensambl]=matglob1(nglob,ke)
```

```
%Devuelve la matriz Kensambl resultante del ensamblaje de las
%matrices elementales ke.
```

```
%Puesto que todos los elementos tienen dimensiones y caracte-
%rísticas del medio iguales,todas las matrices ke serán
%idénticas y no será necesario obtenerlas dentro del bucle
%de manera particular para cada elemento.
```

```
global ne;
```

```

%naristg es el número total de aristas, que será el numero
% de incógnitas del sistema de ecuaciones resultante del MEF.
naristg=max(max(nglob));

%la matriz Kensambl es cuadrada naristg x naristg.
%Se recorren todas las combinaciones (i,j) locales de todos los
%elementos, considerando sus números globales (m,n), y se acumu-
%lan en el elemento (m,n) de la matriz Kensambl los valores de
%la matriz elemental ke correspondientes a las aristas (i,j)
%cuyos números globales son (m,n).
Kensambl=zeros(naristg,naristg);

for i=1:12
    for j=1:12
        for e=1:ne

            m=nglob(i,e);n=nglob(j,e);

            Kensambl(m,n)=Kensambl(m,n)+ke(i,j);

        end
    end
end

```

terminopst

```

function [Pst]=terminopst
%Devuelve el resultado de la ecuación (4.54), que consta
%de dos sumandos y cada uno de ellos está formado por dos
%integrales de superficie, formando parte una del integrando
%de la otra. Una de ellas se extiende sobre el elemento s y
%la otra sobre el elemento t. Dado que si los elementos s y
%t coinciden o tienen algún punto de conexión, la función de
%Green en el espacio libre presenta singularidades, se hace
%necesario evaluar las integrales de forma numérica sobre
%distintos puntos. Para ello, se utiliza el método de cuadra-
%tura Gaussiana con un número de puntos de evaluación n=4 para
%la integral sobre el elemento s y n=3 para el elemento t.
%Pst es un array de celdas y cada elemento s,t es la matriz de

```

```
%la ecuación (4.54) evaluada para los elementos s,t.
%Se vió en el Capítulo 4 que se reducen a cuatro las funciones
%de expansión a considerar para la evaluación de la matriz Pst.
%Así, esta matriz será de tamaño 4x4 y, por simplicidad se toma-
%rán sus índices m,n=1,2,3,4 correspondientes a los subíndices
%de las funciones de expansión originales 3,4,6,8 respectiva-
%mente.
```

```
e=1;
global lx;global ly;
global dimx;global dimy;
```

```
%En esta función se hace una numeración concreta para los ele-
%mentos superficiales, que quedan caracterizados por las coor-
%denadas x e y mínimas de sus aristas.
```

```
for ymin=0:ly:dimy-ly
    for xmin=0:lx:dimx-lx
        coord(e,1)=xmin;
        coord(e,2)=ymin;
        e=e+1;
    end
end
e=e-1;
```

```
global ko;
```

```
%raíces del método de cuadratura Gaussiana para n=3, serán los
%puntos para la evaluación del integrando para el elemento t.
```

```
uvt=[-0.7745966692 0 0.7745966692];
```

```
%Idem con n=4 para el elemento s.
```

```
uvs=[-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116];
```

```
%coeficientes cuadratura Gaussiana
```

```
wt=[0.5555555556 0.8888888889 0.5555555556];%n=3
```

```
ws=[0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451];%n=4
```

```
int1=0;
```

```
%Para todas las combinaciones s,t de elementos superficiales,
%se calculan los límites de las integrales, es decir, las fron-
%teras de los elementos superficiales.
```

```
for s=1:e
```

```

for t=1:e
    xmin=coord(s,1);
    ymin=coord(s,2);
    xtmin=coord(t,1);
    ytmin=coord(t,2);
    xmax=xmin+lx;ymax=ymin+ly;
    xtmax=xtmin+lx;ytmax=ytmin+ly;
    int2=zeros(4,4);
    sumint2=zeros(4,4);
    %k,l,is,j son los índices para la evaluación de las dos
    %integrales por cuadratura Gaussiana.
    %Las integrales se convierten en un sumatorio y cada
    %combinación de k,l,is,j corresponde a un sumando.
    for k=1:4
        for l=1:4
            for is=1:3
                for j=1:3
                    %Cambio de variable de los integrandos.
                    %Variables xsp,ysp (no primadas):elemento s.
                    %Variables xp,yp (primadas):elemento t.

                    xsp=((xmax-xmin)*uvs(k)+xmax+xmin)/2;
                    xp=((xtmax-xtmin)*uvt(is)+xtmax+xtmin)/2;
                    ysp=((ymax-ymin)*uvs(l)+ymax+ymin)/2;
                    yp=((ytmax-ytmin)*uvt(j)+ytmax+ytmin)/2;

                    %Definición de la parte exponencial del integrando
                    %Función de Green.

                    R=sqrt(((xsp-xp)^2)+((ysp-yp)^2));
                    fexp(s,t)=(1/(4*pi*R))*exp(-i*ko*R);

                    %funciones base habiendo sustituido coordenadas
                    %de los puntos centrales del elemento por las
                    %de los bordes.

                    s1=[ymax-ysp ysp-ymin xsp-xmax xmin-xsp];
                    s2=[ytmax-yp yp-ytmin xp-xtmax xtmin-xp];

```

```

%sumando de la integral correspondiente a Pst1.
sumint=ws(k)*ws(l)*wt(is)*wt(j)*fexp(s,t);

%Pst2 tiene sólo los siguientes elementos
%distintos de cero y dependen de las fun-
%ciones base, que se evalúan en s1 y s2.
%sumint2 es una matriz 4x4, cuyos elemen-
%tos son los sumandos para formar Pst2.

sumint2(1,1)=sumint*s1(1)*s2(1);
sumint2(1,2)=sumint*s1(1)*s2(2);
sumint2(2,1)=sumint*s1(2)*s2(1);
sumint2(2,2)=sumint*s1(2)*s2(2);
sumint2(3,3)=sumint*s1(3)*s2(3);
sumint2(3,4)=sumint*s1(3)*s2(4);
sumint2(4,3)=sumint*s1(4)*s2(3);
sumint2(4,4)=sumint*s1(4)*s2(4);

int1=int1+sumint;
int2=int2+sumint2;
    end
  end
end
end

%todos los elementos de Pst1 son iguales en módulo,
%sólo varía su signo según las funciones base.

Pst1{s,t}=((lx^2/8)*int1)*[1 -1 -1 1;-1 1 1 -1;-1 1 1 -1;...
    1 -1 -1 1];
cte2=-((ko*lx)^2)/8;
Pst2{s,t}=cte2*int2;
Pst{s,t}=Pst1{s,t}+Pst2{s,t};
end
end

```

matglob2

```
function [Pensambl]=matglob2(nglob,Pst)

%Pensambl es la matriz P, que aparece en la ecuación (4.56)
%resultante del ensamblaje de las matrices elementales Pst.

global dimx;global dimy;global dimz;
global lx;global ly;global lz;
global nex;global ney;global nez;
nes=nex*ney;global ne;

naristg=max(max(nglob));

%relacionamos nomenclatura global con nomenclatura en superficie,
%puesto que las aristas superficiales 1,2,3,4 corresponden a las
%aristas 3,4,6,8 de los elementos a las que pertenecen.
%nglobsup será una matriz cuya fila i son los números globales
%de las aristas con nomenclatura en superficie i, de todos los
%elementos superficiales.

nglobsup(1,:)=nglob(3,ne-nes+1:ne);
nglobsup(2,:)=nglob(4,ne-nes+1:ne);
nglobsup(3,:)=nglob(6,ne-nes+1:ne);
nglobsup(4,:)=nglob(8,ne-nes+1:ne);
Pensambl=zeros(naristg,naristg);

%Para toda combinación de elementos superficiales s,t, se conside-
%ran todas las combinaciones k,l de sus aristas cuyos números glo-
%bales son m,n, de forma que el elemento k,l de la matriz Pst se
%acumula en Pensambl(m,n).
for s=1:nes
    for t=1:nes
        %aux=imag(Pst{s,t});
        %aux=real(Pst{s,t});
        for k=1:4
            for l=1:4

                m=nglobsup(k,s);n=nglobsup(l,t);
                Pensambl(m,n)=Pensambl(m,n)+aux(k,l);
            end
        end
    end
end
```

```

        end
    end
end

```

```

%Existe un ahorro muy importante en tiempo de ejecución si se
%separan las partes real e imaginaria de las matrices elementales
%Pst y se ensamblan por separado.

```

matelem3

```

function [be]=matelem3(coord)

```

```

%Se obtiene el término independiente elemental {be} debido
%a la alimentación. Véanse ecuaciones (4.66) y (4.67).
global xf;global yf;global dimz;

```

```

%El integrando será no nulo sólo para las funciones base
%en dirección z, por tanto, los 8 primeros elementos de be
%son cero y sólo son no nulos los elementos 9 al 12.

```

```

be(1:8)=0;

```

```

global lx;global ly;global lz;

```

```

%coord(1) y coord(3) son las coordenadas x e y mínimas de
%los elementos que contienen al cable de alimentación, de
%tal forma que xc,yc son las coordenadas x e y del centro
%de dichos elementos.

```

```

xc=coord(1)+(lx/2);
yc=coord(3)+(ly/2);

```

```

global ko;
global Zo;

```

```

global I;

```

```

l=dimz;
cte=-i*ko*Zo*I*l*(1/(ly*lz));

```

```

%El resultado de la integral será el integrando evaluado en
%xf,yf.
be(9)=cte*(xc+(lx/2)-xf)*(yc+(ly/2)-yf);
be(10)=cte*(xf-xc+(lx/2))*(yc+(ly/2)-yf);
be(11)=cte*(xc+(lx/2)-xf)*(yf-yc+(ly/2));
be(12)=cte*(xf-xc+(lx/2))*(yf-yc+(ly/2));

```

matglob3

```

function [bensambl]=matglob3(nglob,correl,be)

%bensambl (vector columna de naristg elementos) es el resultado
%del ensamblaje de los vectores be elementales. Será no nulo
%para las aristas en dirección z de los elementos que contienen
%al cable (éstos están dados por correl).
%Se considera cada arista global k y se comprueba si existe,
%para los elementos que contienen al cable, alguna arista m
%en dirección z y, si se encuentra, be(m) se colocará en
%bensambl(k).
global nez;
naristg=max(max(nglob));
bensambl=zeros(naristg,1);

%Nótese que be no varía según el elemento, por tanto, no cambiará
%dentro del bucle.

for s=1:(length(correl))
    for k=1:naristg
        m=find(nglob(:,correl(s))==k);
        if (isempty(m)==0)
            bensambl(k)=bensambl(k)+be(m);
        end
    end
end
end

```

condcont

```

function [A,bensambl]=condcont(A,bensambl,par)

```

```
%Antes de resolver el sistema de ecuaciones con la matriz A
%y el vector b, hay que añadir las condiciones de contorno.
%Esto puede conseguirse, como se demostró en el Capítulo 4,
%eliminando las filas y columnas de A y los elementos de
%bensambl que correspondan a aristas contenidas en el parche
%en las paredes de la cavidad (indicadas en par).
```

```
%Esta función devuelve la matriz A y el vector bensambl con las
%condiciones de contorno impuestas y preparados así para formar
%el sistema de ecuaciones a resolver.
```

```
for j=1:(length(par))
    m=(par(j))-(1*(j-1));
    A(m,:)=[];
    A(:,m)=[];
    bensambl(m)=[];
end
```

resultMEF

```
function [E_aristacc]=resultMEF(E_aristasc,par,nglob)
```

```
%E_aristasc es el resultado del sistema de ecuaciones,
%en el que se han eliminado las aristas sobre las que se
%impone la condición de contorno de Dirichlet, consistente
%en anular las componentes tangenciales del campo eléctrico
%en las superficies conductoras eléctricas (parche y paredes
%de la cavidad).
```

```
%Esta función devuelve E_aristacc, que es el vector resultante
%de añadir a E_aristasc las aristas (con valores correspondien-
%tes nulos) eliminadas anteriormente.
```

```
le=max(max(nglob));
h=1;k=1;
for l=1:le
```

```
    if ((k<=(length(par)))&(l==par(k)))
```

```

        E_aristacc(1)=0;
        k=k+1;
    else
        E_aristacc(1)=E_aristasc(h);
        h=h+1;
    end

end

end

```

Exyz

```
function [E]=Exyz(x,y,z,nglob,E_aristacc)
```

```

%Devuelve el vector campo eléctrico E en un punto cualquiera
%de coordenadas x,y,z, perteneciente al volumen de la antena.
%Véase ecuación (4.3), donde se tiene la expresión del campo
%en un elemento como expansión de las funciones base vectoria-
%les ponderadas por los coeficientes que ya se tienen en E_aristacc
%(de forma global). Según esto, para calcular el campo en cualquier
%punto, primero será necesario localizar al elemento e que contiene
%al punto x,y,z. Para ello se llama a la función elemento.

```

```
[e,xmin,ymin,zmin]=elemento(x,y,z);
```

```

%Se tiene el elemento e, caracterizado por sus coordenadas, que
%contiene al punto x,y,z.

```

```

global lx;global ly;global lz;
xmax=xmin+lx;
ymax=ymin+ly;
zmax=zmin+lz;

```

```

%La matriz N (S*cte) almacena, como filas, a las funciones base
%vectoriales que se han expresado en función de las coordenadas
%del elemento e y del punto x,y,z.

```

```

cte=1/(ly*lz);
S=[((ymax-y)*(zmax-z)) 0 0;
  ((y-ymin)*(zmax-z)) 0 0;

```

```

    ((ymax-y)*(z-zmin)) 0 0;
    ((y-ymin)*(z-zmin)) 0 0;
    0 ((zmax-z)*(xmax-x)) 0;
    0 ((z-zmin)*(xmax-x)) 0;
    0 ((zmax-z)*(x-xmin)) 0;
    0 ((z-zmin)*(x-xmin)) 0;
    0 0 ((xmax-x)*(ymax-y));
    0 0 ((x-xmin)*(ymax-y));
    0 0 ((xmax-x)*(y-ymin));
    0 0 ((x-xmin)*(y-ymin))];
N=cte*S;

%Para calcular los coeficientes de expansión en el elemento e,
%se determinan los números globales de sus aristas (ag).

ag=nglob(:,e);

%Se obtienen, con la numeración global, los coeficientes de
%E_aristacc y se guardan en E_loc con numeración local, de
%forma que ya se tiene lo necesario para la expansión del campo.

for j=1:12

    E_loc(j)=E_aristacc(ag(j));
end
E=[0 0 0];
for m=1:12
    aux=E_loc(m)*N(m,:);
    E=E+aux;
end

```

elemento

```

function [elto,xmin,ymin,zmin]=elemento(x,y,z)

%Devuelve el número del elemento (elto), y las coordenadas para
%caracterizarlo (xmin,ymin,zmin), al que pertenece el punto x,
%y,z.

global dimx;global dimy;global dimz;

```



```

%ocupa la apertura de la cavidad, y se calculará sumando las
%contribuciones de cada elemento superficial. Dichas contribu-
%ciones tienen que calcularse de forma numérica usando los re-
%sultados del campo eléctrico devueltos por la función Exyz.
%Para la integración se utilizará el método de cuadratura
%gaussiana.

```

```

%Generación de elementos superficiales.

```

```

e=1;
global lx;global ly;global dimx;global dimy;
for ymin=(-dimy/2):ly:((dimy/2)-ly)
    for xmin=(-dimx/2):lx:((dimx/2)-lx)
        coord(e,1)=xmin;
        coord(e,2)=ymin;
        e=e+1;
    end
end
e=e-1;
global nex;global ney;global nez;nes=nex*ney;global ne;
global ko;

```

```

uvt=[-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116];

```

```

wt=[0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451];%n=4
pmx=0;
pmy=0;

```

```

for t=1:e

```

```

    xtmin=coord(t,1);
    ytmin=coord(t,2);
    xsmax=xsmin+lx;ysmax=ysmin+ly;
    xtmax=xtmin+lx;ytmax=ytmin+ly;

```

```

    rcptex=0;icptex=0;
    rcptey=0;icptey=0;

```

```

    %Se calcula la contribución del elemento superficial t.

```

```

for k=1:4
    for l=1:4

        xp=((xtmax-xtmin)*uvt(k)+xtmax+xtmin)/2;

        yp=((ytmax-ytmin)*uvt(l)+ytmax+ytmin)/2;

        fexp=exp((-i*ko*(sin(theta)))*((xp*(cos(phi)))...
            +(yp*(sin(phi)))));

        %Llamada a la función Exyz para que evalúe el
        %campo en los puntos que requiere el método de
        %cuadratura gaussiana.

        cpo=Exyz(xp,yp,0,nglob,Ecc);

        %Se halla el integrando de (4.70). Es un vector
        %cuyas componentes son números complejos.

        prod=[-cpo(2) cpo(1) 0];
        intc=fexp*prod*wt(k)*wt(l);
        rprodx=real(intc(1));
        iprodx=imag(intc(1));
        rprody=real(intc(2));
        iprody=imag(intc(2));

        rcptex=rcptex+rprodx;
        icptex=icptex+iprodx;
        rcptey=rcptey+rprody;
        icptey=icptey+iprody;
    end
end

pmx=pmx+(abs(rcptex+i*icptex));
pmy=pmy+(abs(rcptey+i*icptey));

end

%Transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas

```

```

%esféricas.
Htheta=(pmx*cos(phi)*cos(theta)+(pmy*cos(theta)*sin(phi));
Hphi=-(pmx*sin(phi)+(pmy*cos(phi));

Etheta=376.7303*Hphi;
Ephi=-376.7303*Htheta;

```

pot-dielectrico

```

function [pot_diel]=pot_dielectrico(nglob,Ecc,delta)

%Devuelve el valor de las pérdidas en el dieléctrico.
%Para ello, calcula la integral dada por la ecuación (2.20).
%Esta integral se extiende sobre todo el volumen que
%ocupa la cavidad, y se calculará sumando las contribuciones
%de cada elemento. Dichas contribuciones tienen que calcular-
%se de forma numérica usando los resultados del campo eléc-
%trico devueltos por la función Exyz.
%Para la integración se utilizará el método de cuadratura
%gaussiana.
%delta es la tangente de pérdidas en el dieléctrico.
%Generación de elementos.
e=1;
global lx;global ly;global lz;
global dimx;global dimy;global dimz;

for zmin=(-dimz):lz:-lz
    for ymin=(-dimy/2):ly:((dimy/2)-ly)
        for xmin=(-dimx/2):lx:((dimx/2)-lx)
            coord(e,1)=xmin;
            coord(e,2)=ymin;
            coord(e,3)=zmin;

```

```

        e=e+1;
    end
end
end
e=e-1;

global pee;global f;
global peo;
w=2*pi*f;
pe=peo*pee;

uvt=[-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116];

wt=[0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451];%n=4

inte=0;
intt=0;

for t=1:e

    xmin=coord(t,1);
    ymin=coord(t,2);
    zmin=coord(t,3);
    xmax=xmin+lx;ymax=ymin+ly;

    %Se calcula la contribución del elemento t.

    for k=1:4
        for l=1:4
            for s=1:4
                xp=((xmax-xmin)*uvt(k)+xmax+xmin)/2;

                yp=((ymax-ymin)*uvt(l)+ymax+ymin)/2;

                zp=((zmax-zmin)*uvt(s)+zmax+zmin)/2;

                %LLamada a la función Exyz para que evalúe el
                %campo en los puntos que requiere el método de
                %cuadratura gaussiana.
            end
        end
    end
end

```

```

        cpo=Exyz(xp,yp,zp,nglob,Ecc);

        %Se halla el integrando de (2.20).

        intp=wt(k)*wt(l)*wt(s)*((abs(cpo(3)))^2);
        inte=inte+intp;
    end
end
end
intt=intt+inte;

end

pot_diel=(w*pe*delta/2)*intt;

```

pot-radiada

```

function [pot_rad]=pot_radiada(nglob,Ecc)

%Devuelve la potencia radiada.
%Para ello, calcula la integral dada por la ecuación (2.22).
%Esta integral se extiende sobre una superficie esférica
%que se dividirá en elementos superficiales. Se calculará
%la potencia en cada elemento superficial.forma numérica
%usando los resultados del campo eléctrico lejano devueltos
%por la función rad.
%Para la integración se utilizará el método de cuadratura
%gaussiana.

%Generación de elementos superficiales.
e=1;
global lx;global ly;global dimx;global dimy;

```

```

for tmin=0:pi/10:pi;
    for fmin=0:2*pi/10:2*pi;
        coord(e,1)=tmin;
        coord(e,2)=fmin;
        e=e+1;
    end
end
e=e-1;

global Zo;

uvt=[-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116];

wt=[0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451];%n=4

for t=1:e

    ttmin=coord(t,1);
    ftmin=coord(t,2);
    ttmax=ttmin+(pi/10);ftmax=ftmin+(2*pi/10);

    %Se calcula la contribución del elemento superficial t.

    for k=1:4
        for l=1:4

            tp=((ttmax-ttmin)*uvt(k)+ttmax+ttmin)/2;

            fp=((ftmax-ftmin)*uvt(l)+ftmax+ftmin)/2;

            %Llamada a la función rad para que evalúe el
            %campo lejano en los puntos que requiere el método de
            %cuadratura gaussiana.

            cpo=rad(tp,fp,nglob,Ecc);

```

```
%Se halla el integrando de (2.22).  
  
moduloc=((abs(cpo(1)))^2+(abs(cpo(2)))^2;  
intc=moduloc*(sin(tp)*wt(k)*wt(l);  
inte=inte+intc;  
end  
end  
  
intt=intt+inte;  
  
end  
pot_rad=(1/4*Zo)*intt;
```


Bibliografía

- [1] Keith R.Carver, James W.Mink, "Microstrip Antenna Technology' , *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, no.1, pp.2-24, Jan.1981.
- [2] Y.T. Lo, D. Solomon y W.F. Richards, "Theory and experiment on microstrip antennas", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-27, no.2, pp.137-145, Mar. 1979.
- [3] James, J.R. y Hall, P.S.: "The Handbook of Microstrip Antennas", *IEE, Peter Peregrinus*, 1990.
- [4] John Huang, "The Finite Ground Plane Effect on the Microstrip Antenna Radiation Patterns", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-31, no.4, pp. 649-653, July 1983.
- [5] P. Hammer, D. Van Bochaute, D. Vershraeven y A. Van DeCapelle, "A model for Calculating the Radiation Field of Microstrip Antennas", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-27, no. 2, pp. 267-270, Mar. 1979.
- [6] C.A. Mentzer, L. Peters y R.C. Rudduck, "Slope diffractions and its application to horns", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-23, pp. 153-159, Mar. 1979.
- [7] C.E. Ryan y L. Peters, "Evaluation of edge-diffraction fields including equivalent currents for the caustic regions",*IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-27, pp. 292-299, May 1969.
- [8] Jianming Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics", *John Wiley Sons,inc.*, 1993.
- [9] Peter P. Silvester y Giuseppe Pelosi, "Finite Elements for Wave Electromagnetics", *IEEE Press*, 1994
- [10] L.E. García Castillo, "Técnicas eficientes en la aplicación del método de los elementos finitos a problemas electromagnéticos", *Tesis Doctoral. E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad Politécnica de Madrid*, 1998.

- [11] P. Bettès, "Infinite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 54-64, 1997.
- [12] H. Hurwitz Jr., "Infinitesimal scaling - a new procedure for modeling exterior field problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 20, no. 5, pp. 1918-1923, Sept. 1984.
- [13] P. P. Silvester y M. S. Hsieh, "Finite-element solution of 2-D dimensional exterior field problems", *IEE Proceedings-H*, vol. 118, no. 12, pp. 1743-1747, Dec. 1971.
- [14] J.M. Jin y J. L. Volakis, "A hybrid finite element method for scattering and radiation by microstrip patch antennas and arrays residing in a cavity", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 11, pp. 1598-1604, Nov. 1991.
- [15] J. Gong, J. L. Volakis, A. C. Wong y H. T. G. Wang, "A hybrid finite element-boundary integral method for the analysis of cavity-backed antennas of arbitrary shape", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 9, pp. 1233-1241, Sept. 1994.
- [16] P. P. Silvester, D. A. Lowther, C. J. Carpenter, y E. A. Wyatt, "Exterior finite elements for 2-dimensional field problems with open boundaries", *IEE Proceedings*, vol. 124, pp. 1267-1270, 1977.
- [17] B. H. McDonald y A. Wexler, "Finite element solution of unbounded field problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 20, no. 12, pp. 841-847, 1972.
- [18] W. E. Boyse y A. Seidl, "A hybrid finite element method for 3-D scattering using nodal and edge elements", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 10, pp. 1436-1442, Oct. 1994.
- [19] K. D. Paulsen, D. R. Lynch, y J. W. Strohbehn, "Three-dimensional finite, boundary and hybrid element solutions of de Maxwell equations for lossy dielectric media", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 36, no.4, pp. 682-693, Apr. 1998.
- [20] X. Yuan, " Three dimensional electromagnetic scattering from inhomogeneous objects by the hybrid moment and finite element method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 38, no. 8, pp. 1053-1058, Aug. 1990.

- [21] J. M. Jin y J. L. Volakis, "A finite-element boundary integral formulation for scattering by three-dimensional cavity-backed apertures", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 97-104, 1991.
- [22] T. Cwik, "Coupling finite element and integral equation solutions using decoupled boundary meshes", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, no. 12, pp. 1496-1504, Dec. 1992.
- [23] Ü Pekel y R. Mittra, "A first-order hybrid FEM/MoM approach for the analysis of two-dimensional structures", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 8, no.2, pp. 66-70, Feb. 1995.
- [24] C. A. Brebbia, "The Boundary Element Method for Engineers", *Pentech Press*, 1978.
- [25] S. Kagami y I. Fukai, "Application of boundary-element method to electromagnetic field problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, no. 4, pp. 455-461, Apr. 1984.
- [26] M. Koshiba y M. Suzuki, "Application of the boundary-element method for waveguide discontinuities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, no. 2, pp. 301-307, Feb. 1986.
- [27] K. K. Mei, "Unimoment Method of solving antenna and scattering problems", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 22, pp. 760-766, 1974.
- [28] E. Sumbar, F. E. Vermeulen y F. S. Chute, "Implementation of radiation boundary conditions in the finite element analysis of electromagnetic wave propagation", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, pp. 267-273, 1991.
- [29] A. Chatterjee, J. M. Jin, y J. L. Volakis, "Edge-based finite elements and vector ABC's applied to 3-D scattering", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, no. 2, pp. 221-226, Feb. 1993.
- [30] E. Chang, S. A. Long, W. F. Richards, "An experimental investigation of electrically thick rectangular microstrip antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 6, pp. 767-772, 1986.
- [31] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, "Análisis Numérico", *Grupo Editorial Iberoamericana*.