

ESTIMADORES DE FRECUENCIA

2.1. INTRODUCCIÓN

Un paso crucial en el proceso de demodulación de transmisiones por ráfagas es la estimación rápida de los parámetros de sincronización como los “*offsets*” de la frecuencia portadora, fase y temporización. Para ello es necesario utilizar estimadores potentes y genéricos para receptores digitales de altas prestaciones que puedan tener la capacidad de utilizar distintos esquemas de modulación (BPSK, QPSK, OQPSK, 8PSK) y distintos modos. En este capítulo se van a tratar solo los estimadores del “*offset*” de frecuencia portadora.

Los estimadores de frecuencia de portadora son unos módulos muy importante en los receptores digitales. La presencia de errores de frecuencia grandes y relación señal-ruido

(SNR) baja hace que la estimación de frecuencia sea bastante difícil de realizar con éxito. El estimador de frecuencia de máxima verosimilitud (MLE) óptimo se basa en la localización del pico del periodograma. Sin embargo, los requerimientos computacionales hacen esta aproximación bastante prohibitiva incluso con una implementación FFT.

Un estimador basado en la estimación de la densidad espectral de potencia, fue primero propuesto por Fitz para una portadora sin modulación. Una variante del algoritmo de Viterbi capaz de eliminar la modulación de datos por un método no lineal para señales MPSK, fue propuesta mas tarde por Luise. El rendimiento de estos métodos a una SNR baja, esta cercano a la cota de Cramer-Rao (CRB) para una portadora de frecuencia desconocida. El offset de frecuencia máximo que puede estimarse por el algoritmo de Fitz es $R_s/(2M)$, donde R_s es el régimen de símbolo, M es el número máximo de auto correlaciones que se realizan para poder hacer la estimación.

Bajo la suposición que la fase de la portadora tiene una pendiente constante igual al error que se comete en frecuencia angular, otro estimador fue propuesto por Tretter, el cual se basaba en la realización de una regresión lineal en los valores de la fase de la señal recibida. Este algoritmo es ML a altas SNR . Este algoritmo se acerca mucho al MLE a altas SNR , puede estimar una frecuencia máxima de $R_s/(2M)$ y rinde bien a valores altos de la relación señal-ruido. El cambio de fase en el tiempo es proporcional al error en frecuencia. Por otro lado, Kay tuvo la misma idea y propuso un estimador de frecuencia ponderando la suma de las diferencias de fase sobre un cierto numero de símbolos consecutivos, lo cual es equivalente al algoritmo de Tretter. Chuang también presentó un algoritmo basado en estimaciones diferenciales de símbolos.

A continuación se tratarán algunos de los algoritmos nombrados en esta sección.

2.2. ESTIMADOR DE KAY

El estimador de máxima verosimilitud (MLE) alcanza la cota de Cramer-Rao a SNR suficientemente altas. Como se ha dicho anteriormente, este estimador resulta prohibitivo por la carga computacional que requiere, por lo que se tiende a considerar otros métodos mas simples.

El estimador que se presenta a continuación esta fuertemente motivado en la idea de Tretter y es mucho más simple computacionalmente que el periodograma siendo su rendimiento bueno a $SNRs$ moderadamente altas.

Se hacen las siguientes suposiciones:

La temporización de símbolo es conocida.

Las muestras discretas en el tiempo se toman de la salida del filtro receptor.

La forma del pulso satisface el criterio de Nyquist para las interferencias entre símbolos.

Se considera que la señal recibida consiste en una senoide compleja con ruido blanco gaussiano:

$$x_t = Ae^{j(w_0 t + q)} + n_t \quad t = 0, 1, 2, \dots, L_0 - 1$$

La amplitud A , la frecuencia w_0 , y la fase θ son deterministas pero constantes desconocidas. La frecuencia w_0 es el parámetro que se quiere estimar. El ruido n_t se supone que es un proceso gaussiano blanco complejo y de media cero con $n_t = n_{1t} + jn_{2t}$. n_{1t}, n_{2t} son dos variables aleatorias gaussianas reales con media cero, varianza $s_n^2/2$ (s_n^2 es la varianza de n_t) e incorreladas entre si.

El termino de ruido puede ser representado como ruido de fase a SNR altas:

$$x_t = Ae^{j(w_0 t + q + u_t)}$$

donde u_t es un ruido gaussiano blanco de media cero y varianza $s_n^2/2A^2$. Por tanto la fase de x_t se puede modelar como:

$$\angle x_t = w_0 t + q + u_t \quad t = 0, 1, 2, \dots, L_0 - 1$$

Uno de los métodos que se propusieron anteriormente consistía en estimar w_0 y θ usando un estimador de mínimos cuadrados equivalente a usar un MLE. Esta aproximación daba la idea que la estimación de frecuencia y fase era equivalente a una regresión lineal de los datos de la fase. El problema que se encontró fue que la fase necesita estar “desenrollada” para poder realizar esas estimaciones. Aparte de tener que añadirle muchas operaciones, es difícil de realizar a SNRs bajas. Kay propuso un estimador como versión mejorada de un estimador por correlación o un estimador de predicción lineal.

Como solo se va a hacer una estimación de la frecuencia, se va a evitar desenrollar la fase considerando los datos de fase diferencial

$$\Delta_t = \angle x_{t+1} - \angle x_t = w_0 + u_{t+1} - u_t$$

Esta diferencia es equivalente a realizar una autocorrelación

$$\Delta_t = \angle x_{t+1} - \angle x_t = \angle x_t^* x_{t+1}$$

Queda claro que el problema radica en estimar la media, w_0 , de un proceso de ruido gaussiano y coloreado. El MLE de w_0 , que es equivalente a un estimador de mínima varianza para el resultado de la ecuación anterior, se encuentra minimizando una cierta función de coste, resultando la expresión:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2p} \sum_{t=0}^{L_0-2} w_t \Delta_t$$

donde w_t es una función peso que tiene la forma:

$$w_t = \frac{1.5L_0}{L_0^2 - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{t - \left(\frac{L_0}{2} - 1 \right)}{\frac{L_0}{2}} \right]^2 \right\}$$

Esta función de peso es una ventana que es simétrica en el punto $t = L_0/2 - 1$. Esta ventana procura que el estimador de Kay alcance la cota de Cramer-Rao.

2.3. ESTIMADOR DE LOVELL Y WILLIAMSON

El algoritmo propuesto por Lovell y Williamson es una modificación del algoritmo de Kay, basado en las diferencias de fase entre muestras consecutivas.

Considerando la señal ya muestreada, el problema que se presenta es estimar el offset de frecuencia de la oscilación compleja.

$$x(k) = c_k e^{j(2pf_d kT_s + q)} + n(k)$$

donde $\{c_i\}$ son símbolos de amplitud unidad, q es la fase de la portadora, y $\{n(k)\}$ son las variables aleatorias gaussianas complejas independientes y idénticamente distribuidas con media cero y varianza $1/(E_s/N_0)$

La dependencia respecto de los símbolos puede ser eliminada multiplicando por c_k^* , denominando $z(k) \triangleq x(k)c_k^*$ se tiene

$$z(k) = e^{j(2pf_d kT_s + q)} + n(k)c_k^*$$

donde $n(k)c_k^*$ es estadísticamente equivalente a $n(k)$.

Siguiendo la misma aproximación del modelo para relaciones señal-ruido altas que en el algoritmo de Kay, se considera

$$z(k) = e^{j(2pf_d kT_s + q + u_k)}$$

siendo u_k el término correspondiente al ruido.

Como el parámetro que se desea estimar es la frecuencia y no la fase, se va a considerar únicamente la diferencia de fase entre símbolos consecutivos.

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \angle x_k - \angle x_{k-1} \\ \Delta_k &= 2pf_d T_s + u_k - u_{k-1} \end{aligned}$$

En este algoritmo el offset de frecuencia se estima como:

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{L_0-1} w(k)^{L\&W} e^{j\Delta_k} \right\} = \frac{1}{2pT_s} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{L_0-1} w(k)^{L\&W} e^{j\{\arg(z(k)) - \arg(z(k-1))\}} \right\}$$

Siendo la ventana:

$$w(k)^{L\&W} = \frac{6k(L_0 - k)}{[L_0(L_0^2 - 1)]}$$

A diferencia de las ventanas, este algoritmo y el de Kay son equivalentes a altas relaciones señal-ruido. Esto se puede demostrar aplicando las propiedades de intercambio de los operandos de ángulo y suma bajo la condición de funcionamiento a altas relaciones señal-ruido (como se puede ver en el apartado 3.4 para el estimador de Kay).

2.4. ESTIMADOR DE FITZ

El siguiente estimador alternativo que se va a ver fue propuesto por Fitz. Se trata de un estimador basado en la autocorrelación al igual que los que se van a presentar a continuación, como el algoritmo de Luise & Reggiannini y el de Mengali & Morelli.

En este algoritmo el offset de frecuencia de portadora se presenta como:

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \sum_{m=1}^M \arg\{R(m)\}$$

donde M es un parámetro de diseño que representa el número de correlaciones.

Una explicación intuitiva del algoritmo de Fitz es la siguiente: como se dijo este algoritmo se basa en la autocorrelación de las muestras de la señal recibida una vez que se ha eliminado la modulación multiplicando por los símbolos conjugados del preámbulo.

La función autocorrelación que se aplica va a ser la misma para los algoritmos posteriores:

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} z(k) z^*(k-m), \quad 1 \leq m \leq M$$

Suponiendo que la relación señal-ruido $\text{SNR} \gg 1$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$R(m) = e^{j2pmf_d T_s} [1 + jg(m)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \arg\{R(m)\} &= [2pmf_d T_s + m(m)]_{-p}^{+p} \\ m(m) &\hat{=} \arg[1 + jg(m)] \end{aligned}$$

Ahora se supone que $2pmf_d T_s$ esta dentro del intervalo $\pm \pi$ para que la operación de modulo- $2p$ sea inefectiva en la ecuación anterior. Entonces, $\arg\{R(m)\}$ puede verse como una medida ruidosa de $2pmf_d T_s$ y el problema de estimación de f_d se puede aproximar suavizando los estadísticos de $\arg\{R(m)\}$ para así mejorar el proceso de estimación. En este proyecto no se ha utilizado ninguna función de peso en este algoritmo, aunque la literatura documenta aplicaciones en las que se utiliza una función de suavizado.

Como ocurre con el algoritmo de Luise & Reggiannini, el rango de estimación y el papel que juega el parámetro M son de total interés. Anteriormente se ha visto que una condición crítica para que $\arg\{R(m)\}$ sea una estimación insesgada es que $2pmf_d T_s$ sea interno al intervalo $\pm \pi$. Así que esto se debe cumplir para cualquier índice m entre 1 y M , e implica que f_d debe limitarse a $1/2MT_s$. En conclusión, el estimador de Fitz tiene un rango de estimación que es igual a la mitad del rango de estimación del algoritmo de Luise & Reggiannini para el mismo parámetro M .

2.5. ESTIMADOR DE LUISE Y REGGIANNINI

Al igual que en el anterior se busca una técnica eficiente para la recuperación rápida del error de frecuencia presente en la portadora basada en la eliminación de la distorsión que introduce el canal y/o de la modulación de datos de la señal recibida. Como hizo Fitz, este algoritmo se deriva de la teoría de estimación de máxima verosimilitud, y su realizaciones del error en la ausencia de ruido esta muy cerca de la cota de Cramer-Rao para estimadores insesgados. Este algoritmo, por sus características, se puede aplicar a dos sistema de comunicaciones diferentes como son un enlace típico de satélite con sistema TDMA y los sistemas radio celulares móviles terrestres con las características descritas por las recomendaciones GSM europeas de señal y canal.

Una vez recibida la señal y muestreada se considera el problema de la estimación de la frecuencia f_d de la oscilación compleja $e^{j2pf_d t}$:

$$z_k = e^{j(2pf_d kT_s + q)} + n_k \quad 1 \leq k \leq L_0$$

donde $T_s \leq (2f_d)$ es el intervalo de muestreo, q es una fase aleatoria desconocida con densidad de probabilidad uniforme y $v_k = v_{k1} + jv_{k2}$ siendo v_{k1}, v_{k2} secuencias aleatorias gaussianas de media cero.

Para hallar la expresión que presenta la frecuencia estimada se tiene que maximizar una función que viene dada por:

$$F = \sum_{k=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{L_0} z_k z_m^* e^{-j2pf_d T_s (k-m)}$$

donde la condición que debe cumplir es:

$$\text{Im} \left\{ \sum_{m=1}^{L_0-1} m(L_0 - m) R(m) e^{-j2pf_d m T_s} \right\} = 0$$

$$R(m) \cong \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m+1}^{L_0} z_k z_{k-m}^* \quad 0 \leq m \leq L_0 - 1$$

$R(m)$ representa la autocorrelación estimada de la secuencia z_m , por tanto el primer termino puede considerarse como la DFT de la autocorrelación estimada, ponderada por una función parabólica de enventanado $w(m)=m(L_0 - m)$, $m=1,2,...,L_0$. Esta función “[rinde cuentas](#)” al hecho que, en la vecindad de $m=0$, la autocorrelación $R(m)$ lleva poco o nada de información del “*offset*” de frecuencia porque se deriva de muestras de la señal estrechamente espaciadas. Por otro lado, cuando m se aproxima a L_0 , $R(m)$ llega a ser una estimación pobre de la autocorrelación de z_m , porque el numero de términos de la suma es pequeño.

En una implementación subóptima, $w(m)$ puede ser sustituido por una secuencia rectangular formada por todo unos para $m=0,1,2,...,M$ y $M=L_0-1$, para descartar las estimaciones de las autocorrelaciones no fiables cercanas a $m=L_0$, mientras retiene las buenas muestras de autocorrelación cercanas a $m=1$. Se obtiene la siguiente estrategia modificada de estimación:

$$\text{Im}\left\{\sum_{m=1}^M R(m)e^{-j2pf_d mT_s}\right\}=0$$

Para un canal ideal sin ruido, $R(m)=e^{j2pf_d mT_s}$ y $\hat{f}_d = f_d$ es todavía una solución trivial de la estrategia modificada de estimación. Cuando el ruido está presente, tanto la estrategia real como la modificada difieren, pero con una buena elección de M , la distancia cuadrático media se espera que sea insignificante a medida que la relación portadora-ruido (CNR) aumenta.

Bajo la suposición de CNR alta y desviación de frecuencia pequeña ($Mf_d T_s \ll 1$) y reemplazando la exponencial anterior por su expansión truncada de las series de Taylor al término lineal se obtiene:

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{2pT_s} \frac{\sum_{m=1}^M \text{Im}\{R(m)\}}{\sum_{m=1}^M m \text{Re}\{R(m)\}}$$

$$\sum_{m=1}^M \text{Im}\{R(m)\} \cong M \arg\left\{\sum_{m=1}^M R(m)\right\}$$

$$\sum_{m=1}^M m \text{Re}\{R(m)\} \cong \frac{M(M+1)}{2}$$

donde $\arg(z)$ representa el argumento del numero complejo z , tomado en el intervalo $[-p, p)$, y al final la ecuación del estimador que se obtiene:

$$\hat{f}_d \cong \frac{1}{pT_s(M+1)} \arg\left\{\sum_{m=1}^M R(m)\right\}$$

donde se representa la forma final del algoritmo de estimación de frecuencia. $\hat{f}_d$ se determina correctamente siempre que el argumento de la suma no exceda de $\pm p$. Esto limita el rango de operación del esquema de recuperación de frecuencia al intervalo:

$$|f_d| < [(M+1)T_s]^{-1}$$

donde no existe la posibilidad de que surjan problemas de ambigüedad.

Este estimador es una generalización de un algoritmo similar propuesto por Fitz, obtenido de la ecuación anterior con $M=1$. Como se mencionó anteriormente, existe otro algoritmo de estimación de frecuencia muy aproximado al ML y similar a éste propuesto por Fitz. Sin embargo, este último tiene menores prestaciones sobre el esquema de recuperación de frecuencia.

2.6. ESTIMADOR DE MENGALI Y MORELLI

El método que Mengali y Morelli proponen presenta algunas ventajas sobre los métodos propuestos por Fitz, y Luise y Reggiannini (L&R). Una de las ventajas es que el umbral E_b/N_0 a partir del cual los errores cuadráticos medios empiezan a separarse de la cota de Cramer-Rao es mucho más pequeño que en el resto de algoritmos, y dada una

precisión de estimación, su rango de adquisición de frecuencia es mucho mas grande que en el caso de Fitz y L&R.

Se supone una modulación PSK M-aria y un ruido blanco gaussiano (AWGN) con densidad espectral de potencia (PSD) “two-sided” $N_0/2$. El filtrado está dividido entre el transmisor y el receptor de forma que la respuesta global del canal sea Nyquist, es decir, cumpla el criterio de Nyquist para evitar en la medida de lo posible las interferencias entre símbolos (ISI). La temporización es ideal pero la referencia local del receptor tiene un error de f_d Hz. Esta cantidad es pequeña en comparación con la tasa de símbolos. Por otro lado, la relación E_b/N_0 es mucho mas grande que la unidad. Las restricciones de arriba son solo temporales, en las simulaciones, por ejemplo, los errores de frecuencia van a ser del orden del 20% de la tasa de símbolo $1/T_s$.

Filtrando la onda recibida en un filtro adaptado y muestreando en los tiempos apropiados se obtiene:

$$x(k) = c_k e^{j(2\pi f_d k T_s + \phi)} + n(k)$$

donde $\{c_k\}$ son símbolos de amplitud unidad, ϕ es la fase de la portadora, y $\{n(k)\}$ son las variables aleatorias gaussianas complejas independientes y idénticamente distribuidas con media cero y varianza $1/(E_s/N_0)$. Parece a simple vista que $x(k)$ depende de $\{c_k\}$. Sin embargo, la dependencia puede ser eliminada multiplicando $x(k)$ por c_k^* , debido a la propiedad $c_k c_k^* = 1$. De hecho, si se denomina $z(k) \triangleq x(k) c_k^*$, se tiene

$$z(k) = e^{j(2\pi f_d k T_s + \phi)} + n(k) c_k^*$$

donde $n(k) c_k^*$ es estadísticamente equivalente a $n(k)$. Por lo tanto, $z(k)$ se puede tratar como una senoide compleja con ruido blanco gaussiano y el problema es encontrar un estimador de f_d basada en la observación de unas cuantas muestras consecutivas $\{z(k), 0 \leq k \leq L_0 - 1\}$. Este es el problema tratado en los algoritmos anteriormente nombrados. Se considera una solución diferente.

El estimador propuesto aprovecha las correlaciones de las muestras

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} z(k) z^*(k-m), \quad 1 \leq m \leq M$$

donde M es un parámetro de diseño no mayor de $L_0/2$.

Para explicar el método se va a reescribir la ecuación de la señal $z(k)$ de la forma

$$z(k) = e^{j(2pf_d k T_s + q)} [1 + n(k)]$$

$$n(k) \triangleq n(k) c_k^* e^{-j(2pf_d k T_s + q)}$$

Se puede apreciar que $n(k)$ tiene las mismas propiedades estadísticas que $n(k)$. Sustituyendo se obtiene:

$$R(m) = e^{j2pf_d k T_s} [1 + g(m)]$$

$$g(m) \triangleq \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} [n(k) + n^*(k-m) + n(k)n^*(k-m)]$$

Para $E_s/N_0 \gg 1$, la amplitud de $n(k)$ es menor que la unidad con una alta probabilidad por lo que el término $n(k)n^*(k-m)$ puede despreciarse. Si suponemos que $\gamma(k) = \gamma_R(k) + j\gamma_I(k)$ y $\arg\{R(m)\}$ como el principal valor del argumento de $R(m)$, se obtiene

$$\arg\{R(m)\} \approx [2pmf_d T_s + g_I(m)]_{2p} \quad 1 \leq m \leq M$$

donde $[x]_{2\pi}$ es el valor de x en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Esta ecuación establece una relación entre f_d y $\arg\{R(m)\}$. Desafortunadamente, es altamente no lineal y difícil de manejar, se necesitaría un proceso que desarrollara la fase para poder transformar esta ecuación en una lineal pero a bajas relaciones E_s/N_0 es muy difícil de realizar.

Lo que se hace es seguir otro razonamiento que es paralelo a la aproximación realizada por Kay. La idea es relacionar el offset de frecuencia con los incrementos de fase

$$\phi(m) \triangleq [\arg\{R(m)\} - \arg\{R(m-1)\}]_{2\pi}$$

mejor que a $\arg\{R(m)\}$.

De hecho, desarrollando la formula anterior, los incrementos de fase se pueden expresar como

$$f(m) \approx 2pf_d T_s + g_I(m) - g_I(m-1), \quad 1 \leq m \leq M$$

siempre que $|2pf_d T_s| < p$ y las variables aleatorias $\gamma_I(m)$ sean lo suficientemente pequeñas. Claramente, esta ultima ecuación relaciona $\phi(m)$ con f_d de modo lineal y el problema que queda es estimar una constante, $2pf_d T_s$, de las medidas con ruido $\{\phi(m)\}$. En particular, al estimador de máxima similitud (*MLE*) de f_d se puede llegar con los métodos antes vistos y el resultado que se obtiene es:

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \sum_{m=1}^M w(m) \times [\arg\{R(m)\} - \arg\{R(m-1)\}]_{2p}$$

donde $w(m)$ es una función suave cuya ecuación se presenta a continuación

$$w(m) \triangleq \frac{3[(L_0 - m)(L_0 - m + 1) - M(L_0 - M)]}{M(4M^2 - 6ML_0 + 3L_0^2 - 1)}.$$

Si se inspecciona bien a fondo la ecuación de $R(m)$ se ve que la computación del argumento de $R(m)$ requiere $M(2L_0 - M - 1)/2$ multiplicaciones complejas. Dependiendo de los parámetros M y L_0 , este algoritmo puede llegar a tener la misma complejidad que el estimador *ML*.

Para hacer las operaciones mas simples, observando que la amplitud de $z(k)$ a altas relaciones E_b/N_0 esta cercana a la unidad y $R(m)$ se puede aproximar a

$$\bar{R}(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^M \exp\{j[\arg\{z(k)\} - \arg\{z(k-m)\}]\}, \quad 1 \leq m \leq M.$$

En esta ecuación no hay multiplicaciones y $\arg\{z(k)\}$ puede tomarse de una ROM.

2.7. NOTAS FINALES

En este capítulo se ha visto el fundamento teórico de diferentes algoritmos de estimación del offset de frecuencia portadora mediante la técnica de ayuda de datos.

El primer algoritmo que se ha presentado es el algoritmo de Kay (1989) que ha servido como base para los demás algoritmos de estimación. El siguiente algoritmo que se propuso fue el algoritmo de Fitz (1991), que utiliza autocorrelaciones de la secuencia recibida para la estimación del error, a diferencia del de Kay y del de Lovell y Williamson (1992), que utilizan las diferencias de fase entre muestras consecutivas. Posteriormente, aparecieron los algoritmos de Luise y Reggiannini (1994) y de Mengali y Morelli (1997), siendo éstos últimos los que presentan mejores resultados a costa de una mayor complejidad.