

MEDIDA DE LAS PRESTACIONES DE LOS ESTIMADORES

3.1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es una función fundamental en los sistemas de comunicaciones digitales modernos. Su función es estimar ciertos parámetros de la señal, como la frecuencia portadora, la fase de la portadora y el tiempo de muestreo, los cuales son necesarios para en los procesos de demodulación y de detección de datos. En este proyecto, el objetivo es el estudio de algunos de los algoritmos que se utilizan en la estimación de la frecuencia portadora.

En este capítulo nos concentraremos en la evaluación de los estimadores de frecuencia portadora para modulaciones PSK. Se compararán los cinco algoritmos *data-aided* analizados teóricamente en el capítulo anterior. Para comparar el rendimiento de estos

algoritmos de estimación, se tendrán en cuenta cuatro criterios de medida de las prestaciones:

- Precisión de la estimación.
- Rango de estimación.
- Umbral (la relación señal-ruido por debajo de la cual tienden a producirse importantes errores de estimación).
- Complejidad de la implementación.

Estas prestaciones no son compatibles entre sí, por lo que en muchas aplicaciones dependiendo del objetivo que se quiera alcanzar habrá que sacrificar unas con respecto a otras.

3.2. PRECISIÓN DE LA ESTIMACIÓN

Es importante poder hacer un estudio sobre la precisión que se puede conseguir con las distintas operaciones de sincronización. Establecer límites a tal precisión es un objetivo muy importante para proporcionar criterios y poder así evaluar las prestaciones de los estimadores actuales.

En teoría de la estimación de parámetros existe una herramienta muy útil a la hora de utilizarla como un límite de la precisión y es la denominada cota de Cramer-Rao (*CRB*), que da límites inferiores fundamentales a la varianza de cualquier estimador de parámetros.

El problema que se plantea con el uso de esta herramienta es encontrar el significado de algunas cotas de Cramer-Rao en el área de la sincronización. En muchos casos de interés práctico, la computación de la verdadera *CRB* es una tarea absorbente; de hecho, las cotas que se obtienen no son exactamente *CRBs*. No obstante, como tienen las mismas estructuras que las verdaderas *CRBs*, se denominan cotas de Cramer-Rao modificadas (*MCRB*).

A continuación se va a introducir el concepto de *MCRB* y se indicará su relación con la *CRB*. También se verá bajo que suposiciones ambas cotas coinciden.

Se supone que la onda recibida tiene una envolvente compleja:

$$r(t) = s(t) + w(t),$$

la cual es observada durante un intervalo de tiempo T_0 . En esta ecuación, $s(t)$ es la señal que transporta la información y $w(t)$ representa un ruido blanco aditivo complejo con densidad espectral de potencia $2N_0$ de dos bandas.

Las características básicas de la señal $s(t)$ son conocidas, como la frecuencia de portadora nominal, el formato de modulación, el intervalo de señalización, etc, pero sólo unos pocos parámetros típicos no se conocen como son la fase portadora θ , el tiempo de símbolo t , el error de frecuencia portadora ν y los datos transmitidos. Nos concentraremos en el subconjunto de parámetros $\{\theta, t, \nu\}$ para el cálculo de la cota de Cramer-Rao modificada.

Para simplificar, nos vamos a limitar a la estimación de un solo elemento de $\{\theta, t, \nu\}$ normalmente denominado λ , el cual se va suponer que va a ser determinista (no aleatorio). Todos los demás parámetros incluidos los datos se van a agrupar en un vector aleatorio \mathbf{u} con una función de densidad de probabilidad $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ conocida no dependiente de λ . Una representación exacta de la onda recibida $r(t)$ requiere espacios vectoriales de dimensión infinita pero se va suponer que un vector de dimensión finita \mathbf{r} puede representar a $r(t)$ con precisión aceptable.

Si $\hat{\lambda}(r)$ es cualquier estimador insesgado de λ , un límite inferior a la varianza del error $\hat{\lambda}(r) - \lambda$ es dada por la fórmula de Cramer-Rao:

$$CRB(\mathbf{I}) = \frac{1}{E_r \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(r/\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \right]^2 \right\}}$$

donde E_r es la esperanza estadística respecto a \mathbf{r} , y $\mathbf{p}(r/\lambda)$ es la función de densidad de probabilidad de \mathbf{r} para una λ dada.

Para obtener $CRB(\lambda)$ se necesita $p(r/\lambda)$ que se representa como:

$$p(r/\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(r/u, \lambda) p(u) du,$$

donde $p(r/u, \lambda)$ es la función de densidad de probabilidad condicional de \mathbf{r} dada \mathbf{u} y λ , es fácilmente disponible, al menos para canales gaussianos aditivos. Desafortunadamente, en la mayoría de los casos, la realización de $CRB(\lambda)$ no puede llevarse a cabo.

Una solución es recurrir a un límite diferente que es la denominada cota de Cramer-Rao modificada:

$$MCRB(\lambda) = \frac{1}{E_{r,u} \left\{ \left[\frac{\partial \ln p(r/u, \lambda)}{\partial \lambda} \right]^2 \right\}}$$

Aunque ambas tienen la misma estructura, la segunda es mucho más fácil de calcular. De hecho, para un canal gaussiano, la densidad de probabilidad en esta última es una función exponencial bien conocida y la esperanza se puede calcular fácilmente.

La diferencia entre CRB y $MCRB$ se ve claramente en un simple ejemplo. Supongamos que \mathbf{r} tiene L_0 componentes:

$$r_k = \mathbf{I} + u + w_k, \quad k = 1, 2, \dots, L_0$$

donde \mathbf{u} es un parámetro escalar "indeseable" y w_k representa un ruido aditivo. Los $\{w_k\}$ son independientes y variables aleatorias gaussianas igualmente distribuidas con media cero y desviación estándar σ_w . El parámetro \mathbf{u} es gaussiano con media cero y desviación estándar σ_u , y es independiente de $\{w_k\}$.

Así, las funciones de densidad de probabilidad $p(r/u, \lambda)$ y $p(u)$ son:

$$p(r/u, \lambda) = \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=1}^L (r_k - u - \lambda)^2 \right]}$$

$$p(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}$$

Mientras que $p(r/\lambda)$ tiene la forma:

$$p(r/\lambda) = C e^{\left[-\frac{1}{2s_w^2} \sum_{k=1}^{L_0} (r_k - \lambda)^2 + \frac{s_u^2}{2s_w^2} \frac{1}{L_0 s_u^2 + s_w^2} \left(\sum_{k=1}^{L_0} (r_k - \lambda) \right)^2 \right]}$$

donde C es una constante independiente de λ . De esta manera, sustituyendo se obtiene que:

$$CRB(\mathbf{I}) = s_u^2 + \frac{s_w^2}{L_0}$$

$$MCRB(\mathbf{I}) = \frac{s_w^2}{L_0}$$

De aquí se ve claramente que $MCRB(\mathbf{I})$ es menor que $CRB(\mathbf{I})$, lo cual significa que $MCRB$ normalmente es un límite más holgado que CRB . Entonces, la pregunta que surge es, si las $MCRBs$ son suficientemente rigurosas para su uso en aplicaciones prácticas.

A continuación se va a ver cuál es la expresión de $MCRB$ en la estimación de la frecuencia portadora.

La señal se modela:

$$s(t) = e^{j(2\pi\nu(t-t_0)+\theta)} \sum_i c_i g(t - iT_s - \tau),$$

donde ν es el offset de la frecuencia portadora de su valor nominal, θ es la fase de portadora en cierto tiempo de referencia $t = t_0$, τ representa una desviación en el tiempo de

símbolo, T_s es el espacio entre símbolos, $c \triangleq \{c_i\}$ datos complejos y $g(t)$ es el pulso de señal.

Se hacen algunas suposiciones sobre las propiedades estadísticas de θ , τ , v y c . El instante de tiempo τ en \mathbf{u} esta uniformemente distribuida entre 0 y T_s . La función de densidad de probabilidad de θ en \mathbf{u} no necesita ser especificada porque no afecta al resultado final. Los símbolos $\{c_i\}$ son variables aleatorias independientes con media cero, por lo que:

$$E\{c_k c_i^*\} = \begin{cases} C_2 & i = k \\ 0 & e.o.c. \end{cases},$$

siendo C_2 un valor constante positivo.

Como se dijo anteriormente, una representación exacta de $r(t)$ requeriría un espacio de dimensión infinita y se había optado como solución utilizar el vector \mathbf{r} . A medida que el número de dimensión de \mathbf{r} tiende a infinito, la función de densidad de probabilidad $\mathbf{p}(r/u,?)$ se puede reemplazar por:

$$f(\mathbf{I}, u) = e^{\left[-\frac{1}{2N_0} \int_{t_0}^T |r(t) - s(t)|^2 dt \right]},$$

Con estos cambios se obtiene:

$$MCRB(\mathbf{I}) = \frac{N_0}{E_u \left\{ \int_{t_0}^T \left| \frac{\partial s(t)}{\partial \mathbf{I}} \right|^2 dt \right\}},$$

Esta es la expresión general aplicable a cualquiera de los parámetros vistos anteriormente. Para el caso particular de la estimación de frecuencia se considera $\mathbf{I} = \mathbf{n}$ y $u = u_n$. La esperanza de esta expresión depende de la posición de t_0 en el intervalo de observación T_0 , siendo t_0 el instante de referencia para la fase.

Desarrollando:

$$\int_{T_0} \left| \frac{\partial s(t)}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dt = 4\mathbf{p}^2 \int_{T_0} (t - t_0)^2 |m(t)|^2 dt$$

$$E_{u_n} \left\{ \int_{T_0} \left| \frac{\partial s(t)}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \right\} = 4\mathbf{p}^2 \int_{T_0} (t - t_0)^2 E_{u_n} \left\{ |m(t)|^2 \right\} dt,$$

$$E_{u_n} \left\{ |m(t)|^2 \right\} \triangleq \frac{2E_s}{T_s}$$

siendo

$$m(t) \triangleq \sum_i c_i g(t - iT_s - \mathbf{t})$$

Como se ha visto anteriormente $MCRB(\mathbf{n})$ es inversamente proporcional a la esperanza que se muestra a continuación. Debido a que $MCRB$ es una cota inferior, interesa su valor máximo que se consigue escogiendo el instante de referencia de la fase t_0 en el punto medio del intervalo de observación T_0 .

$$E_{u_n} \left\{ \int_{T_0} \left| \frac{\partial s(t)}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \right\} = \frac{8\mathbf{p}^2 E_s}{T_s} \int_{T_0} (t - t_0)^2 dt = \frac{2\mathbf{p}^2 E_s}{3T_s} (L_0 T_s)^3.$$

Finalmente, la cota de Cramer-Rao modificada obtenida es:

$$MCRB(\mathbf{n}) = \frac{3}{2\mathbf{p}^2 L_0^3 T_s^2} \frac{1}{SNR}$$

Lo que se ha dicho es que $MCRB(\mathbf{I}) \leq CRB(\mathbf{I})$. La igualdad solo tiene lugar cuando el logaritmo de la función sustituta de la función de densidad de probabilidad, $f(\mathbf{I}, u)$, es una función lineal de \mathbf{I} , o bien, si la integral:

$$\int_{T_0} |r(t) - s(t)|^2 dt$$

es proporcional a \mathbf{I} .

En el caso de una señal QPSK la cota de Cramer-Rao modificada coincide con la cota de Cramer-Rao.

Una vez introducida la cota de Cramer-Rao modificada, se va a utilizar ésta como medida de referencia en el estudio de la precisión de los estimadores.

A continuación se analiza cada uno de los algoritmos de estimación, tomando como base los resultados obtenidos para el cálculo de la varianza de la frecuencia estimada para el caso de modulación PSK con $R_s = 250$ símbolos/s.

Para el cálculo de la varianza de la frecuencia estimada se han tomado como parámetros distintas longitudes de preámbulo, errores de frecuencia, relaciones señal-ruido y en algunos algoritmos se ha tenido en cuenta el parámetro M (número de correlaciones que se realizan entre las muestras).

Algoritmo de Kay

La figura 3.1 muestra los resultados del cálculo de la varianza de la frecuencia estimada para el algoritmo de Kay cuando no existe error de frecuencia en el receptor. El único efecto que se tiene en cuenta es el que produce el ruido introducido por el canal.

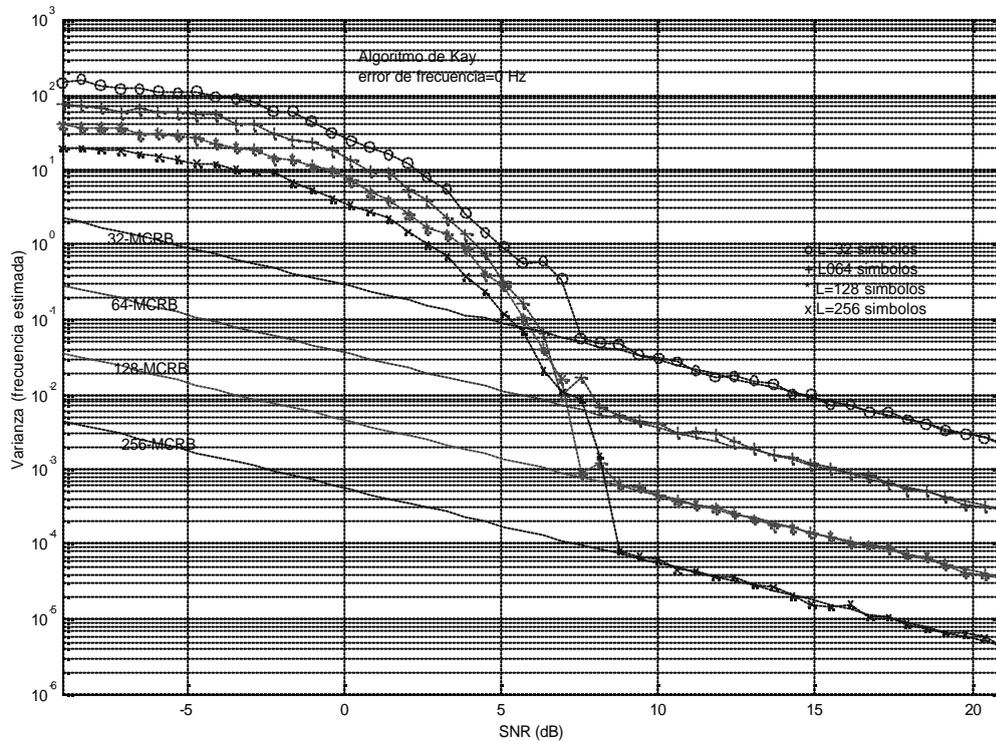


Figura 3.1. Precisión del algoritmo de Kay respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Independientemente de la longitud del preámbulo, la varianza de las estimaciones alcanzan la cota de Cramer-Rao. A medida que la longitud del preámbulo va aumentando el umbral se va desplazando hacia una relación señal-ruido más alta, situándose alrededor de los 6 dB.

A continuación se va a mostrar el resultado que se obtiene introduciendo un error de frecuencia de 14 Hz ($0.056/T_s$).

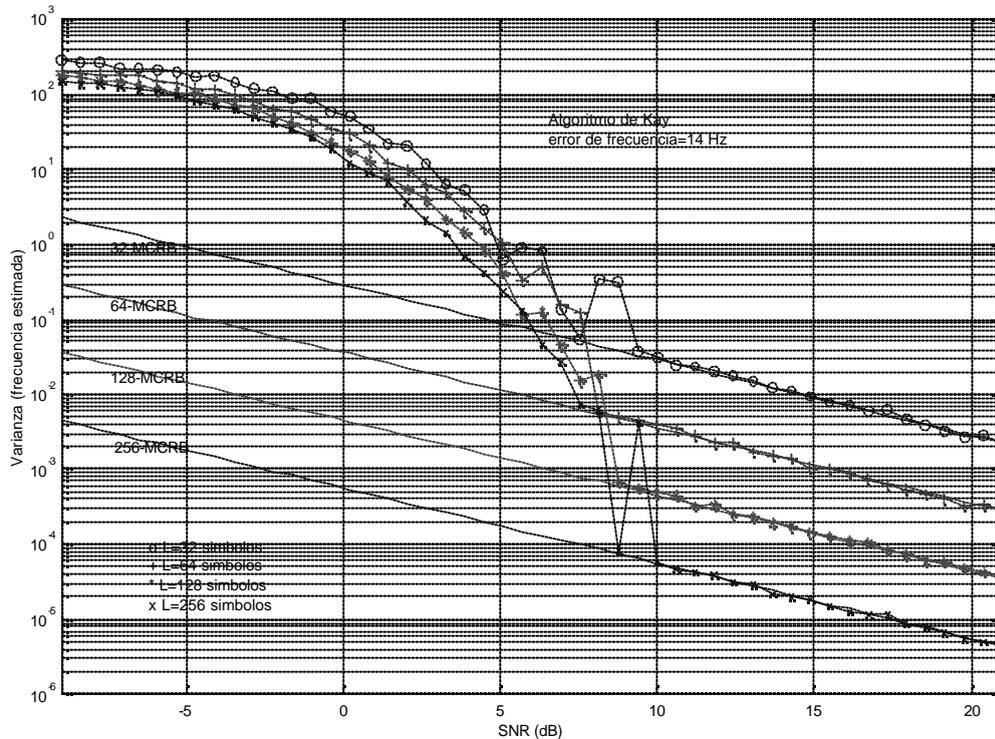


Figura 3.2. Precisión del algoritmo de Kay con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Esta gráfica, al igual que la anterior, ilustra la precisión de la estimación del algoritmo de Kay para distintas longitudes del preámbulo en un sistema de transmisión PSK. Se puede observar que se alcanza la cota de Cramer-Rao modificada para distintas longitudes del preámbulo y errores en frecuencia al igual que el umbral, el cual no se disminuye a medida que aumenta el tiempo de observación $T_0 = L \times T_s$.

Al igual que ocurre en el caso anterior, en el que no se introduce error de frecuencia, el umbral permanece alrededor de los 6 dB de relación señal-ruido.

Aparentemente, para este algoritmo, la precisión de la estimación no depende del error de frecuencia, siempre que se encuentre dentro del rango de adquisición.

Algoritmo de Luise y Reggiannini

A continuación se analiza el algoritmo de Luise y Reggiannini, el cuál a diferencia del anterior se basa en autocorrelaciones y necesita un nuevo parámetro, M , que representa el número de correlaciones que realiza para la estimación del error de frecuencia.

En estos cálculos de la varianza, se ha fijado el valor de M , variándose la longitud del preámbulo.

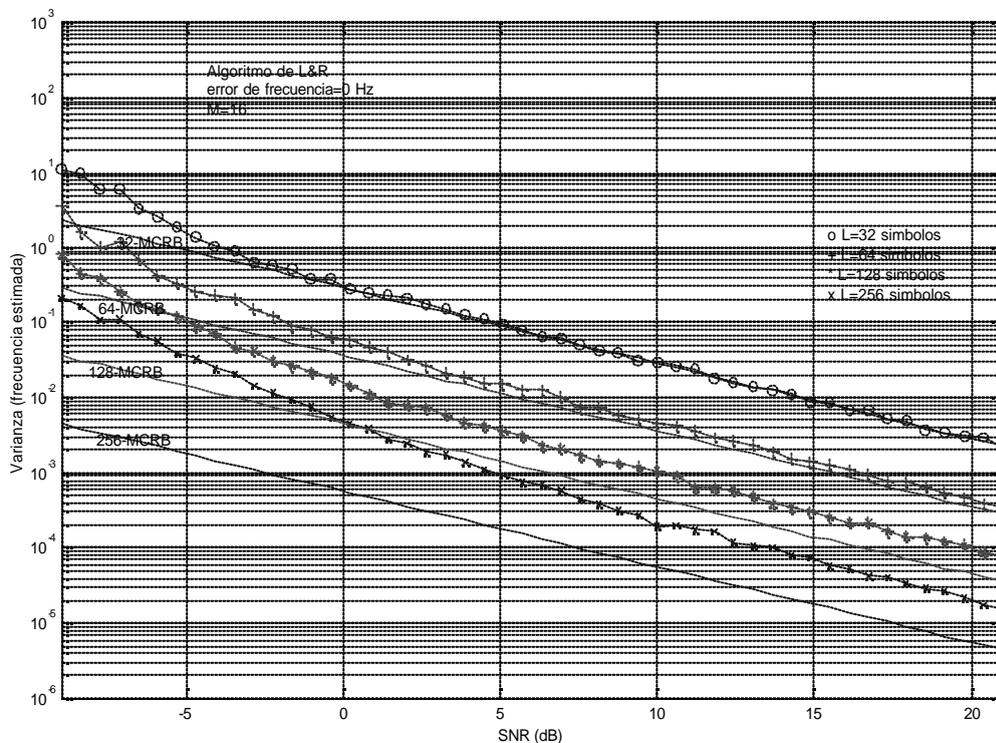


Figura 3.3. Precisión del algoritmo de Luise y Reggiannini con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

El algoritmo L&R alcanza la cota cuando el número de correlaciones que se realizan es igual a la mitad de la longitud del preámbulo $M = L_0/2$. Sin embargo, el rango de estimación correspondiente es muy pequeño, el cual es insuficiente en muchas aplicaciones. En este algoritmo, la precisión y el rango de estimación son características contradictorias y es necesario establecer un compromiso entre ellas.

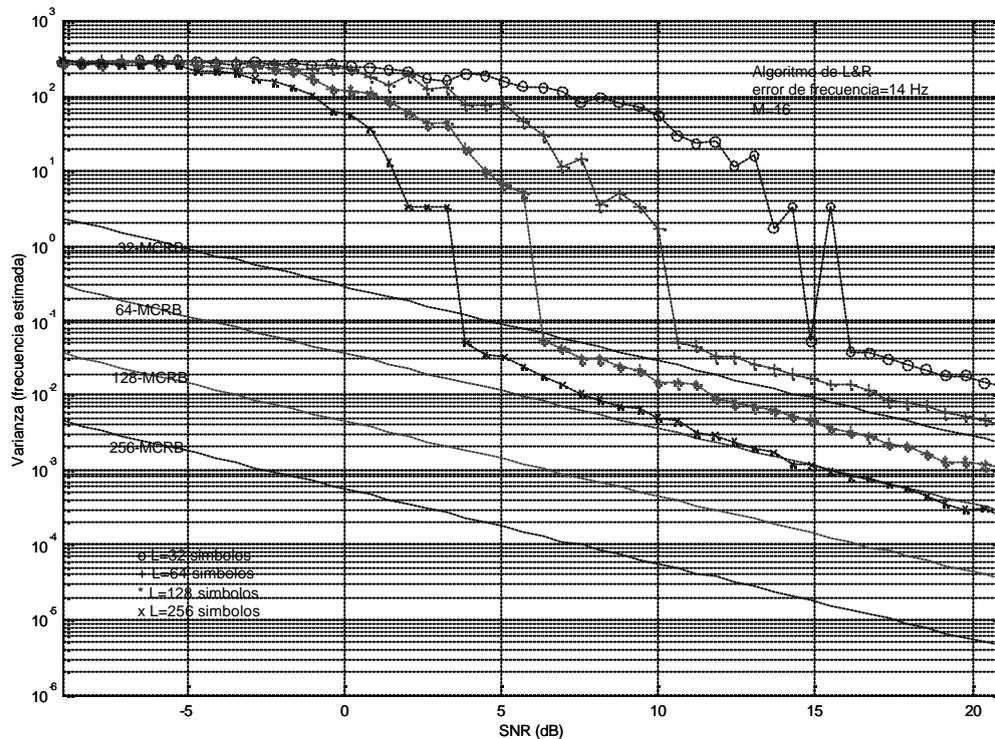


Figura 3.4. Precisión del algoritmo de Luise y Reggiannini con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Estas dos gráficas representan la precisión del algoritmo de Luise y Reggiannini para algunos valores de L_0 (longitud del preámbulo), siendo el error de frecuencia introducido igual a cero en la figura 3.3 y 14 Hz en la figura 3.4. El parámetro de diseño M tiene como valor 16 para cualquier preámbulo, con la intención de tener el mismo rango de estimación en todos los casos.

Se puede ver que con $L=32$ (correspondiéndose con $M = L/2$) se alcanza la cota de Cramer-Rao en el caso de error de frecuencia 0 Hz, sin embargo en el caso de la existencia de error de frecuencia no se alcanza la cota de Cramer-Rao.

A medida que aumenta la longitud de preámbulo las estimaciones se van separando cada vez más de la cota de Cramer-Rao modificada y sin embargo, parece lógico pensar que el umbral va disminuyendo, siempre que se emplee un valor de M adecuado. Esto significa que el algoritmo de L&R puede operar a relaciones señal-ruido bajas siempre que se utilicen intervalos de observación suficientemente grandes.

En la figura 3.3 es difícil encontrar la posición exacta del umbral dado que la curva varía con pendientes muy pequeñas.

Algoritmo de Fitz

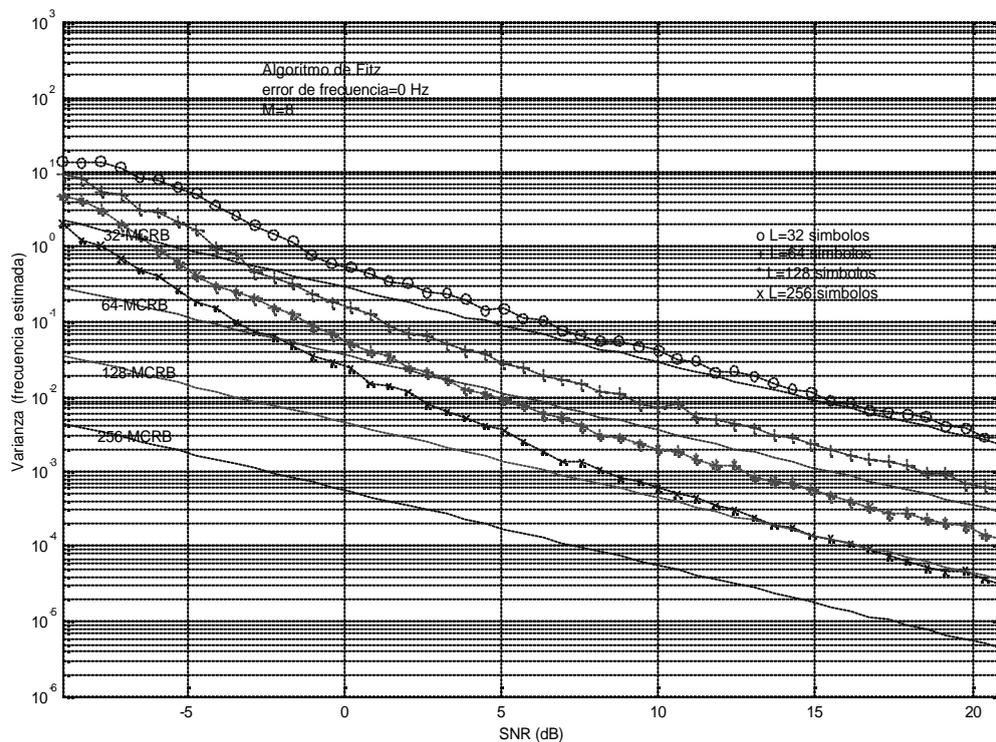


Figura 3.5. Precisión del algoritmo de Fitz con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

La figura 3.5 representa la precisión que consigue el algoritmo de Fitz tomando $M=8$ que es el número de correlaciones que utiliza para calcular la estimación del error de frecuencia con el objetivo de abarcar el mismo rango que en el caso anterior, con lo que al disminuir el número de correlaciones la estimación que consigue es peor.

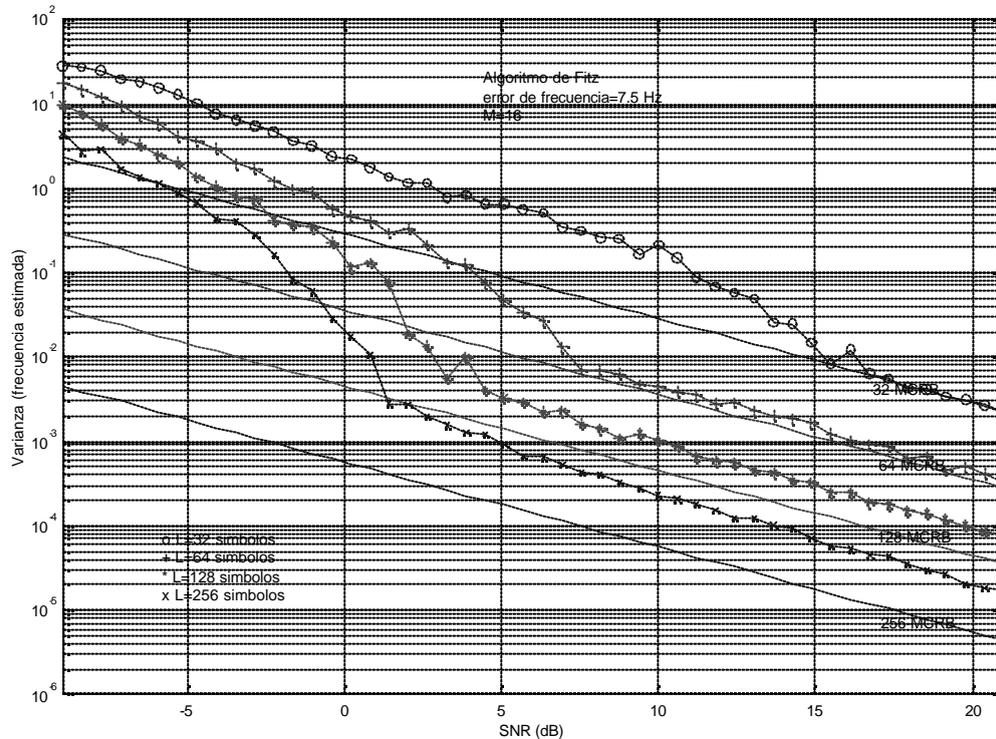


Figura 3.6. Precisión del algoritmo de Fitz con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Esta gráfica, sin embargo, representa la precisión de este algoritmo cuando el número de correlaciones es 16 y se introduce un error de frecuencia de 7.5 Hz ($0.03/T_s$). Se observa que con una longitud de preámbulo de 32 símbolos se alcanza la cota de Cramer-Rao modificada y a medida que aumenta la longitud la diferencia entre la varianza y la cota de Cramer-Rao modificada se va haciendo más notoria.

Otra cuestión importante a tomar en cuenta es el umbral, a medida que se toman más símbolos para la estimación es lógico pensar que el umbral disminuye si M toma un valor igual a $L_0/2$.

Al tomar $M=16$, el rango de estimación es la mitad que en el caso de Luise y Reggiannini, por lo que si se intenta estimar un error de frecuencia más grande este algoritmo va a ser incapaz realizar la estimación.

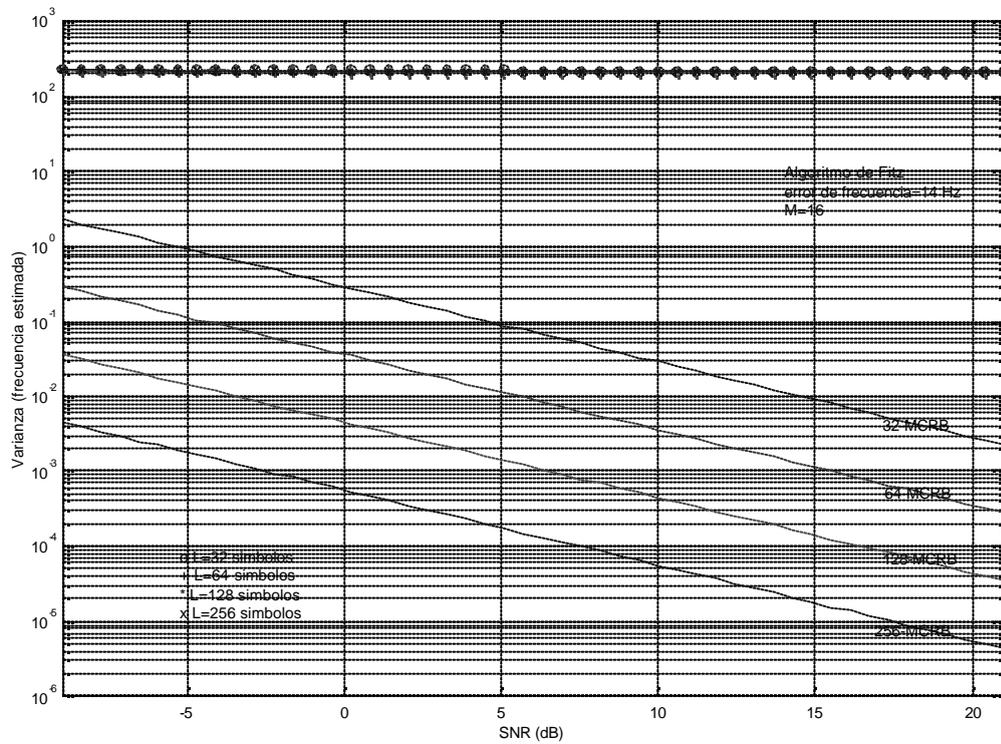


Figura 3.7. No convergencia del algoritmo de Fitz cuando estima un error de frecuencia fuera de rango.

En este caso los parámetros del algoritmo de Fitz se han ajustado tomando los mismos valores que el algoritmo de Luise y Reggiannini en la figura 3.4. Como se puede observar el algoritmo de L&R tiene un rango de estimación más grande (aproximadamente el doble).

Algoritmo de Mengali y Morelli

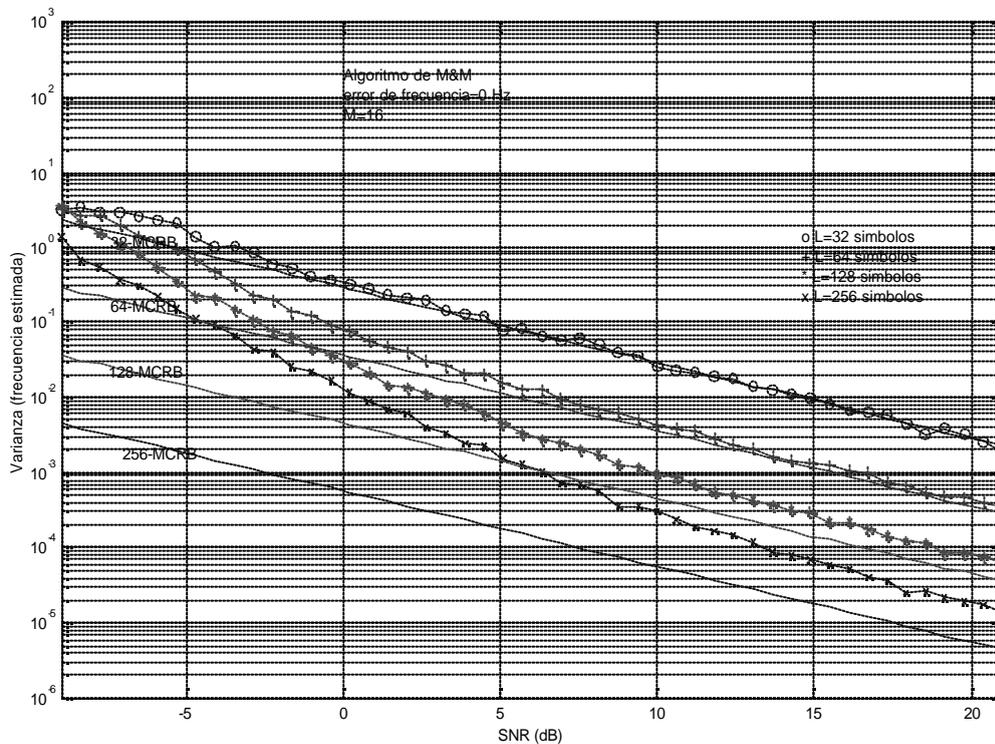


Figura 3.8. Precisión del algoritmo de Mengali y Morelli con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

En esta gráfica se ve claramente que cuando el parámetro M tiene como valor $L_0/2$ se alcanza la cota de Cramer-Rao y a medida que la longitud de preámbulo va aumentando, quedando fijo el valor de M , se va separando cada vez más de esta.

Como se puede observar no se distingue la posición exacta del umbral por lo que se van a representar dos gráficas más, una de ellas para ilustrar como el umbral va disminuyendo a medida que el número de muestras para realizar la estimación va aumentando y la siguiente para mostrar que este algoritmo tiene un rango de estimación bastante grande e independiente de M , aunque esta cuestión se verá en la sección posterior.

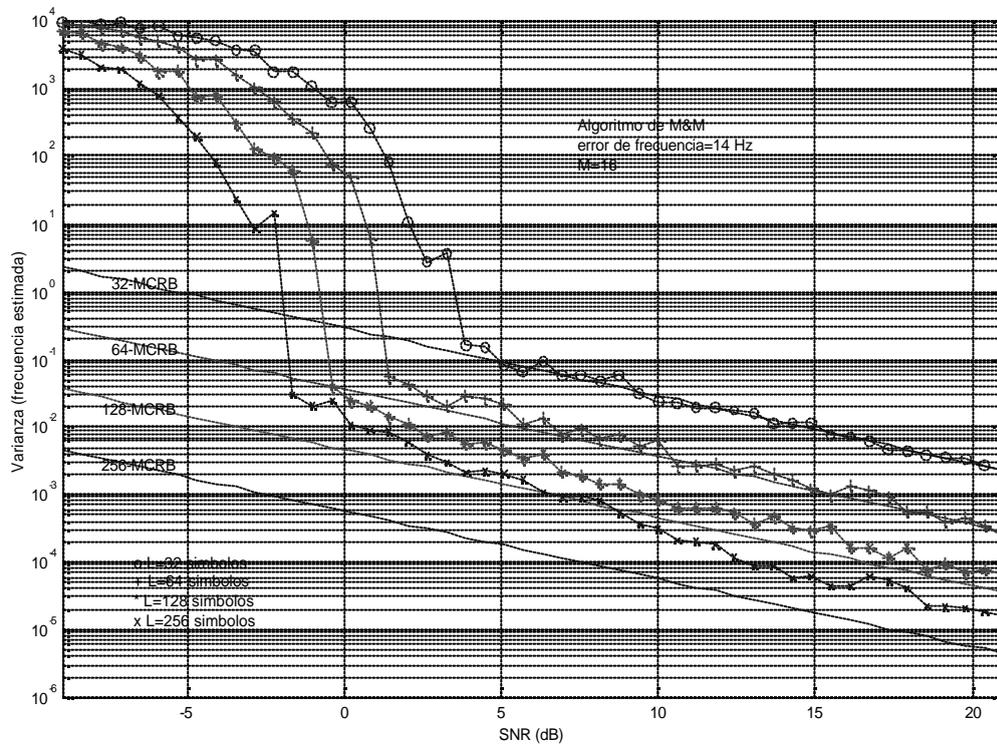


Figura 3.9. Precisión del algoritmo de Mengali y Morelli con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Para $M = L_0/2$ el algoritmo alcanza la cota de Cramer-Rao modificada.

Se puede suponer que el umbral, a medida que el número de símbolos aumenta, va apareciendo cada vez más cercano a 0 dB, por lo que permite trabajar a relaciones señal-ruido pequeñas al igual que en el caso de los algoritmos de L&R y de Fitz. La diferencia con estos es que para una precisión de estimación dada, el algoritmo de M&M tiene un rango de adquisición bastante más elevado que el que estos algoritmos son capaces de permitir.

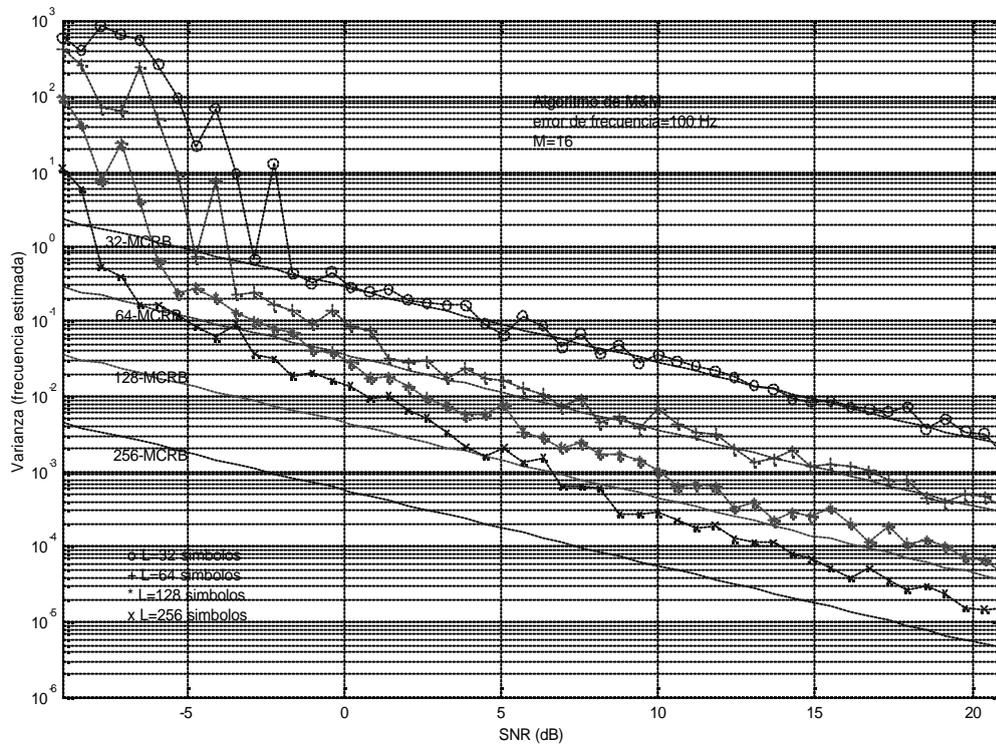


Figura 3.10. Precisión del algoritmo de Mengali y Morelli con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Este algoritmo es capaz de estimar un error de frecuencia de 100 Hz ($0.4/T_s$) y para este error, cuando $M = L_0/2$ alcanza la cota de Cramer-Rao modificada y el umbral a medida que va aumentando la longitud del preámbulo se va desplazando hacia la izquierda, es decir, hacia relaciones señal-ruido más bajas.

El rango del algoritmo de M&M alcanza aproximadamente el 45 % de $1/T_s$, aunque a la hora de realizar simulaciones se ha tomado como máximo errores del orden del 20 % de $1/T_s$.

Algoritmo de Lovell y Williamson

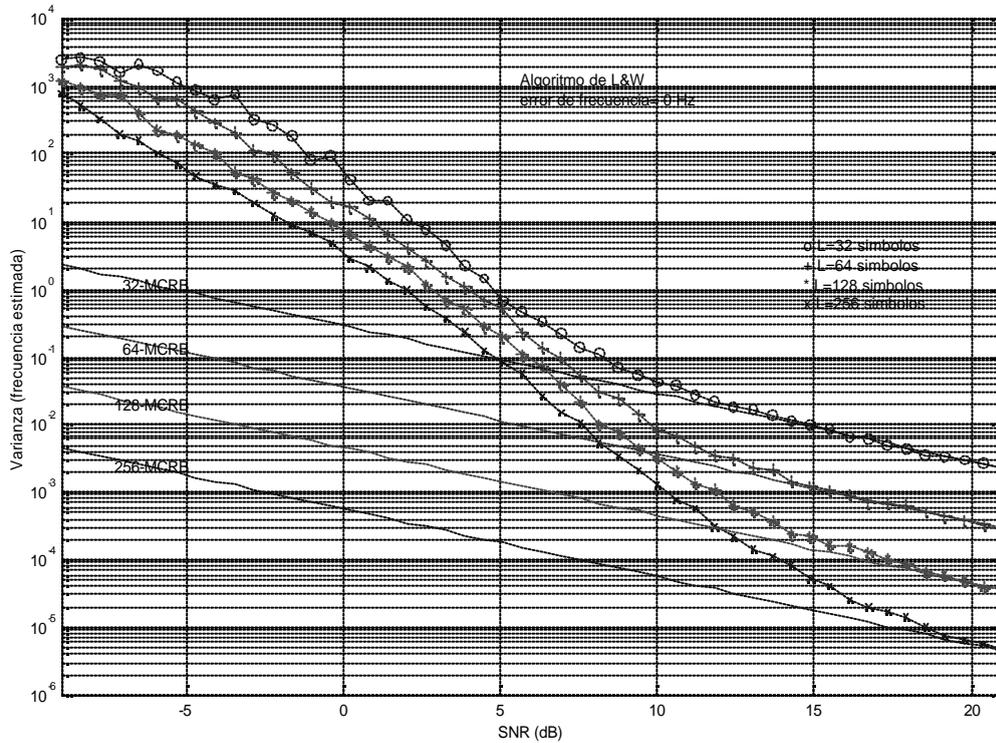


Figura 3.11. Precisión del algoritmo de Lovell y Williamson con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Como se puede apreciar, la varianza de la estimación alcanza la cota de Cramer-Rao modificada independientemente de la longitud del preámbulo y del error de frecuencia, siempre que esté dentro del rango.

El umbral es difícil de precisar porque la curva cae con poca pendiente aunque se hace evidente que aumenta con la longitud del preámbulo.

A continuación se va a ver cómo es la precisión de este algoritmo con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada y con un error de frecuencia introducido.

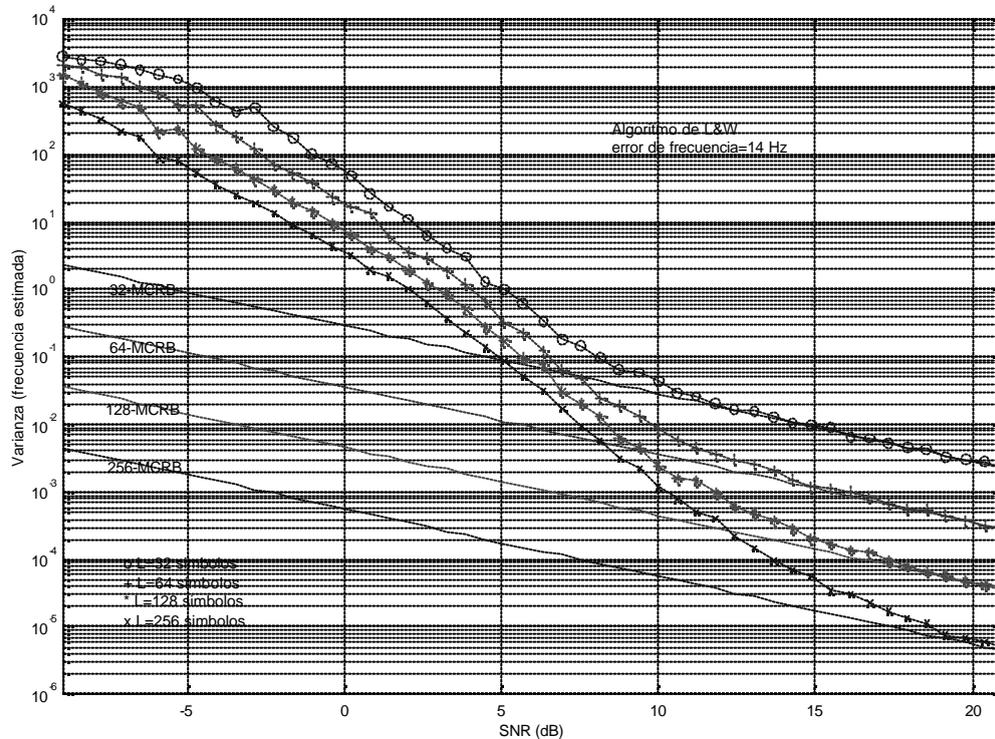


Figura 3.12. Precisión del algoritmo de Lovell y Williamson con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

El error que se introduce es de 14 Hz ($0.056/T_s$), y como se puede observar es capaz de alcanzar la cota de Cramer-Rao a relaciones señal-ruido altas independientemente del aumento de la longitud del preámbulo.

En cuanto al umbral se refiere, ocurre aproximadamente a los 12 dB de relación señal-ruido y a medida que aumenta la longitud del preámbulo este se va desplazando hacia la derecha, es decir, hacia relaciones señal-ruido más altas.

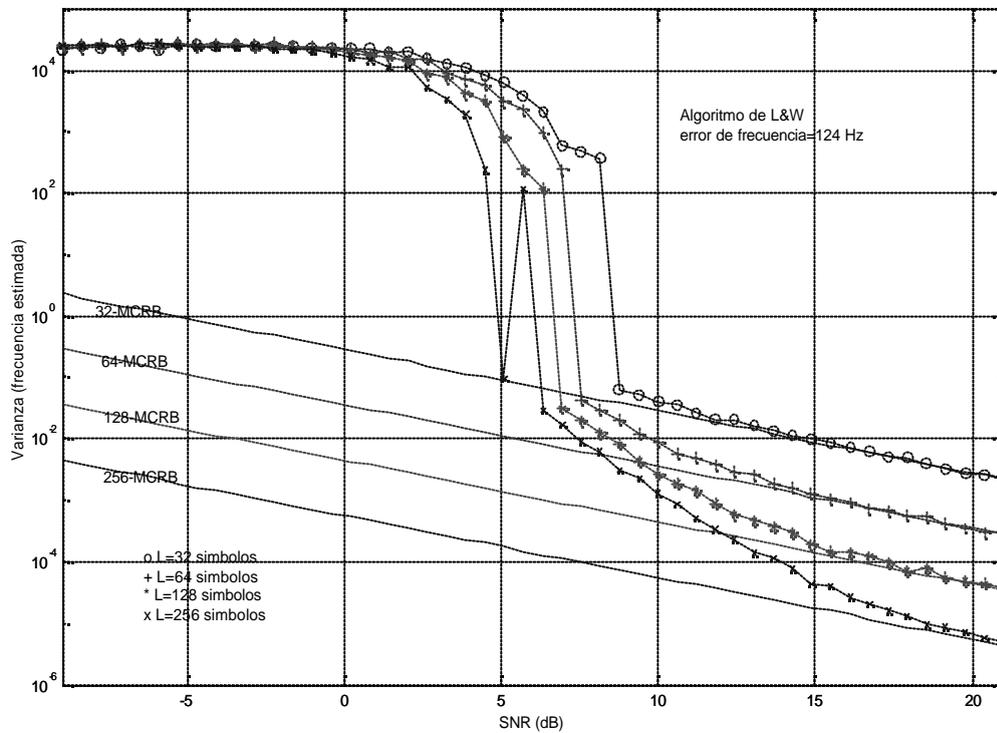


Figura 3.13. Precisión del algoritmo de Lovell y Williamson con respecto a la cota de Cramer-Rao modificada.

Al igual que en la gráfica anterior, la varianza de las estimaciones realizadas por este algoritmo va alcanzando la cota de Cramer-Rao modificada a relaciones señal-ruido más altas a medida que aumenta la longitud del preámbulo, por lo que existe mayor probabilidad para que ocurran errores importantes en la estimación a relaciones señal-ruido moderadamente altas en las que no debería ocurrir. Esta es una de las razones principales por la que se llevó a cabo la búsqueda de algoritmos más eficientes como los que se han visto anteriormente.

3.3. RANGO DE ESTIMACIÓN

En algunos de estos algoritmos existe una clara dependencia del parámetro de diseño M y el rango de estimación. A relaciones señal-ruido altas, el rango de estimación se acerca a cierto valor calculado. Más allá de estos límites, la estimación del error de frecuencia invierte su signo y ocasiona, por lo tanto, que las estimaciones sean incorrectas.

Para hacer una comparación del rango de estimación, se va a variar la frecuencia del oscilador hasta un límite. Este límite se corresponde a un error de frecuencia máximo del 20 % de $1/T_s$ que en principio se tomó para el algoritmo de Mengali y Morelli y que por extensión, en este proyecto, se tomará para todos los demás algoritmos.

Este error de frecuencia máximo aceptable va a ser de 50 Hz. Esto se debe a que el sistema de comunicaciones PSK tiene un régimen de símbolo de 250 símbolos/s (se ha utilizado una frecuencia de muestreo de 8 kHz y 32 muestras por símbolo).

No todos los algoritmos van a funcionar bien en el mismo rango de frecuencia para un mismo valor del parámetro de diseño M , unos son más restrictivos que otros, por lo que habrá que llegar a un compromiso en determinados casos.

Algoritmo de Kay

El algoritmo de Kay es un algoritmo basado en el criterio de estimación de mínimos cuadrados y no utiliza ningún tipo de parámetro de diseño. Este algoritmo se pensó para ser útil a cualquier SNR (no necesariamente alta).

La gráfica que se va a presentar a continuación ilustra la desviación de la frecuencia estimada con respecto a la teórica para distintas relaciones señal-ruido cuando se transmite un preámbulo de 128 símbolos.

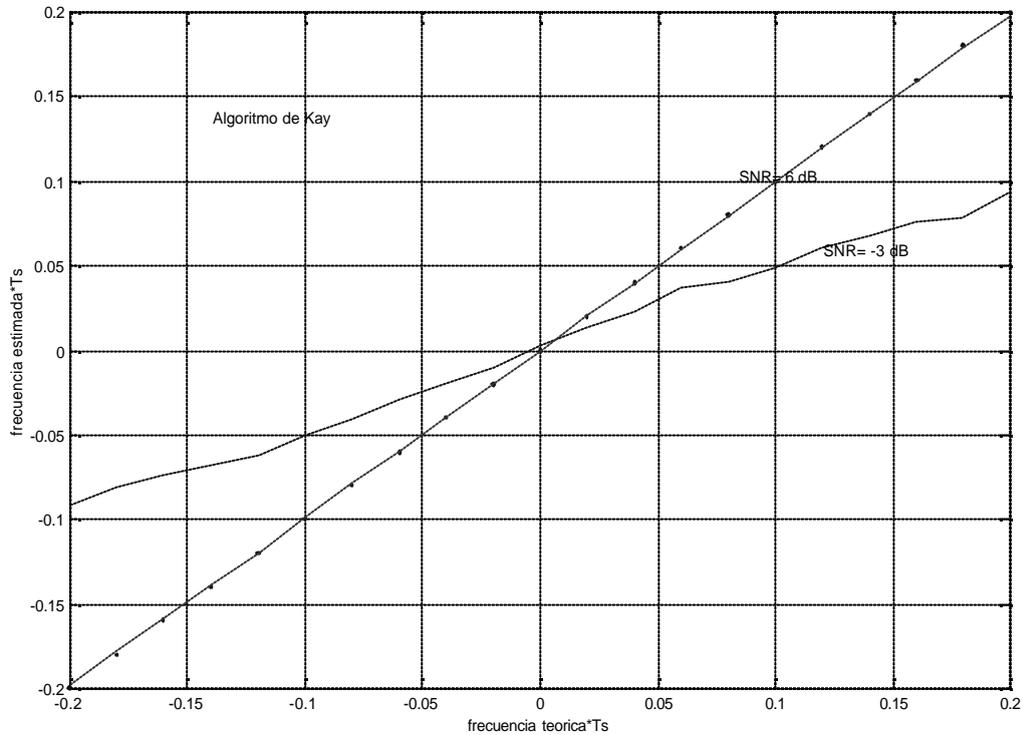


Figura 3.14. Rango de estimación del algoritmo de Kay

Las estimaciones tienen un valor igual al teórico en un rango que va aumentando a medida que aumenta la relación señal-ruido. Con una relación señal-ruido infinita el rango llega a ser $0.5/T_s$ (en este caso 125 Hz). Pero como se ha establecido un límite en el error de frecuencia, el rango que se va a estudiar es el de $0.2/T_s$.

En el caso de SNR= -3 dB, el algoritmo de Kay es capaz de hacer una estimación aceptable en el entorno de $f_d = 0$ Hz, por el contrario, cuando SNR= 6 dB hace buenas estimaciones en un rango bastante mayor (hasta 50 Hz).

Con una relación señal-ruido finita, el problema es más complejo debido a la operación de módulo 2π . Dependiendo del ruido, el término $2pf_d T_s + \mathbf{h}_k - \mathbf{h}_{k-1}$ puede ser confinado en $\pm \mathbf{p}$. En promedio, el término anterior es menor que $2pf_d T_s$.

La gráfica siguiente representa lo mismo que la anterior siendo la longitud del preámbulo distinta ($n_{simb}=256$).

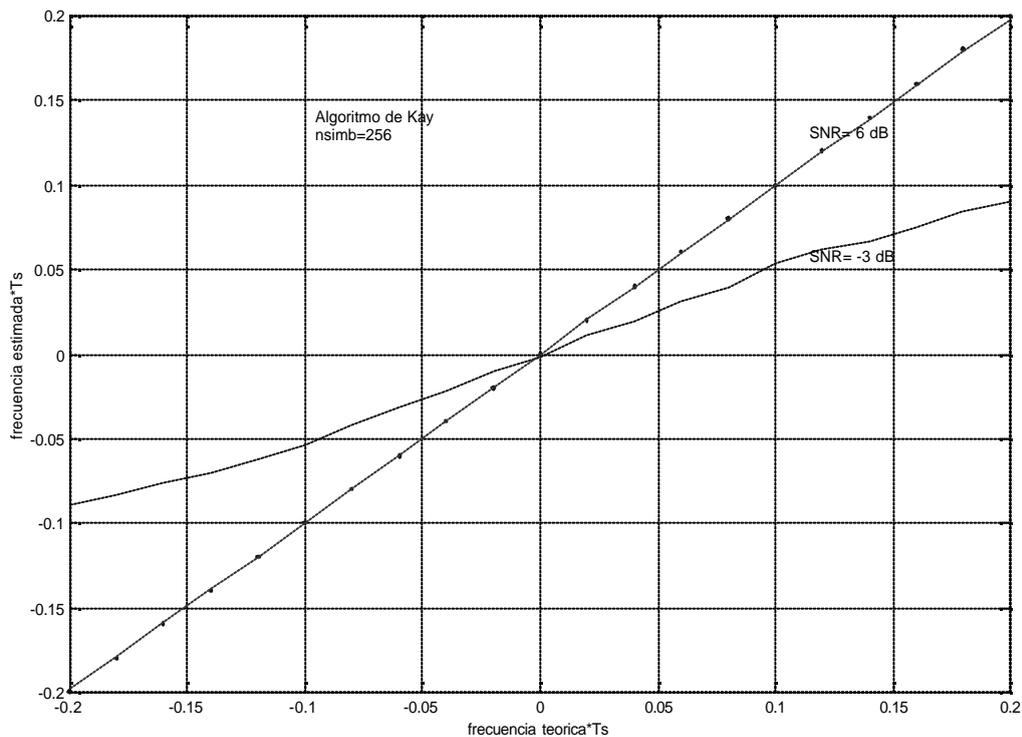


Figura 3.15. Rango de estimación del algoritmo de Kay con $L=256$ símbolos.

A diferencia con la anterior, presenta cierta mejoría notablemente presente cuando $SNR= -3$ dB.

Algoritmo de Lovell y Williamson

Este algoritmo también está basado en el criterio de estimación de mínimos cuadrados, al igual que el anterior.

La gráfica que se va a presentar a continuación ilustra la desviación de la frecuencia estimada con respecto a la teórica para distintas relaciones señal-ruido cuando se transmite un preámbulo de 128 símbolos.

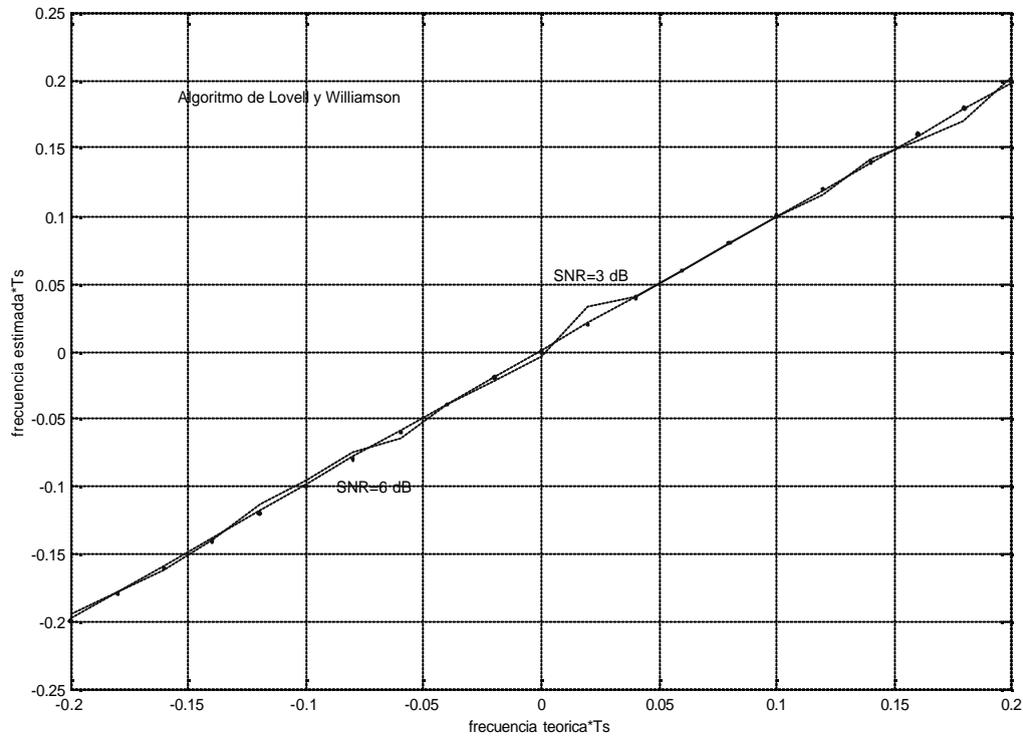


Figura 3.16. Rango de estimación del algoritmo de Lovell y Williamson.

El rango de estimación de este algoritmo, como se ve en la figura, abarca el 20% de $1/T_s$, aunque es capaz de estimar hasta un error del orden del 50 % de $1/T_s$, que sería equivalente a tener un rango hasta aproximadamente $\pm\pi$.

Más adelante, se verá que aunque su rango de estimación sea muy elevado solo es capaz de asegurar una correcta estimación del error de frecuencia cuando la relación señal-ruido es alta

Algoritmo de Luise y Reggiannini

Este método al igual que los siguientes que se van a ver están basados en la autocorrelación.

Es muy importante el papel que juega el rango de estimación y el parámetro de diseño M . A relaciones señal-ruido altas, el rango de estimación es claramente $1/MT_s$. Más allá de estos límites, $f_d T_s$ invierte su signo y ocasiona que las estimaciones que se hagan sean incorrectas. También se puede ver que la varianza de la estimación depende considerablemente de M y se consigue un mínimo para $L_0/2$, como se ha podido observar en la figura 3.3 y 3.4.

Desafortunadamente, elegir $M = L_0/2$ significa establecer un rango de estimación demasiado pequeño para las aplicaciones prácticas como ocurre en este caso ($M=16$ y $f_{max} = 15.625Hz$).

Por tanto, la precisión y el rango de estimación son características contradictorias y se debe encontrar un compromiso basado en los requisitos de diseño actuales.

En las siguientes gráficas el preámbulo que se ha considerado es de 128 símbolos.

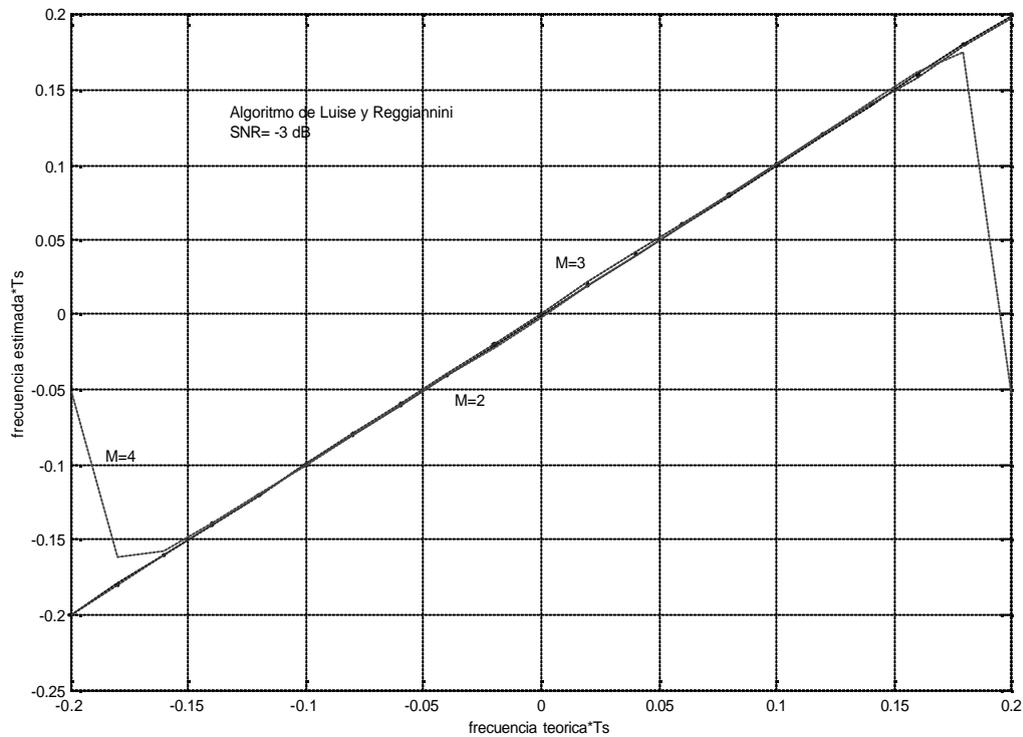


Figura 3.17. Rango de estimación del algoritmo de L&R para SNR=-3 dB.

Para que este algoritmo pueda estimar hasta un error de 50 Hz (20 % de $1/T_s$) el parámetro de diseño M debe estar limitado aproximadamente a un valor de 5. Sin embargo, por $M=4$ el algoritmo es incapaz de estimar un error de 50 Hz, ya que el rango que tiene llega hasta 0.16 (equivalente a un error de 40 Hz). Esto se debe principalmente al ruido del canal, más adelante veremos como se comporta para una relación señal-ruido más elevada.

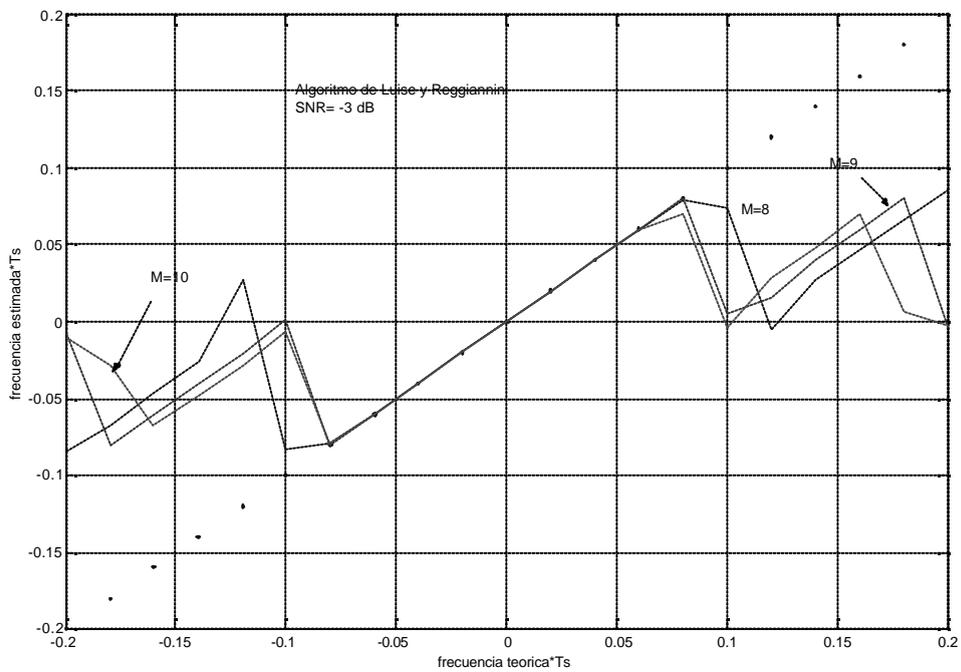
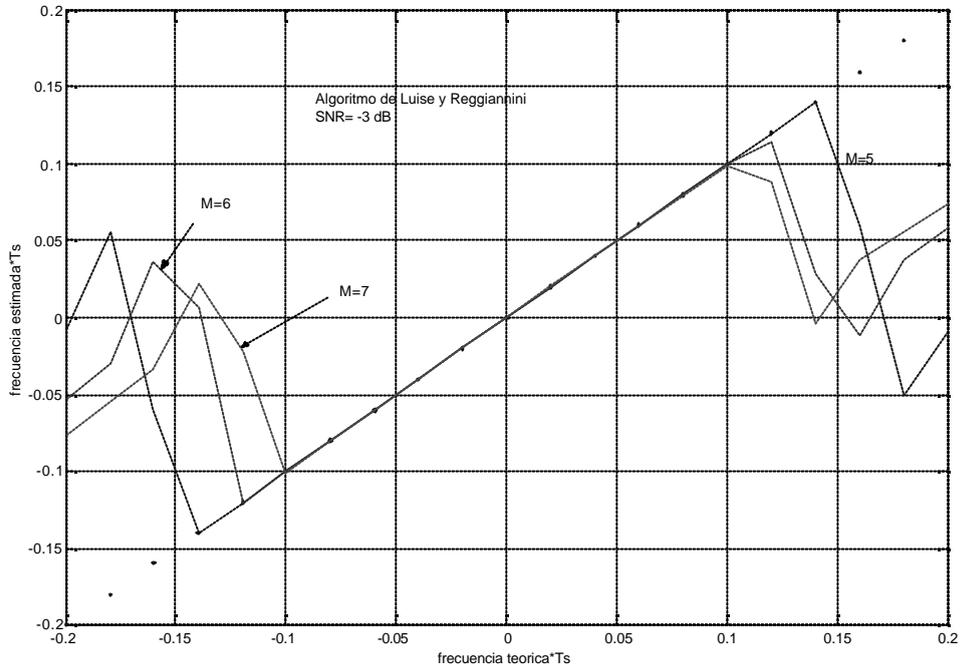


Figura 3.18. Rango de estimación del algoritmo de L&R para SNR= -3 dB.

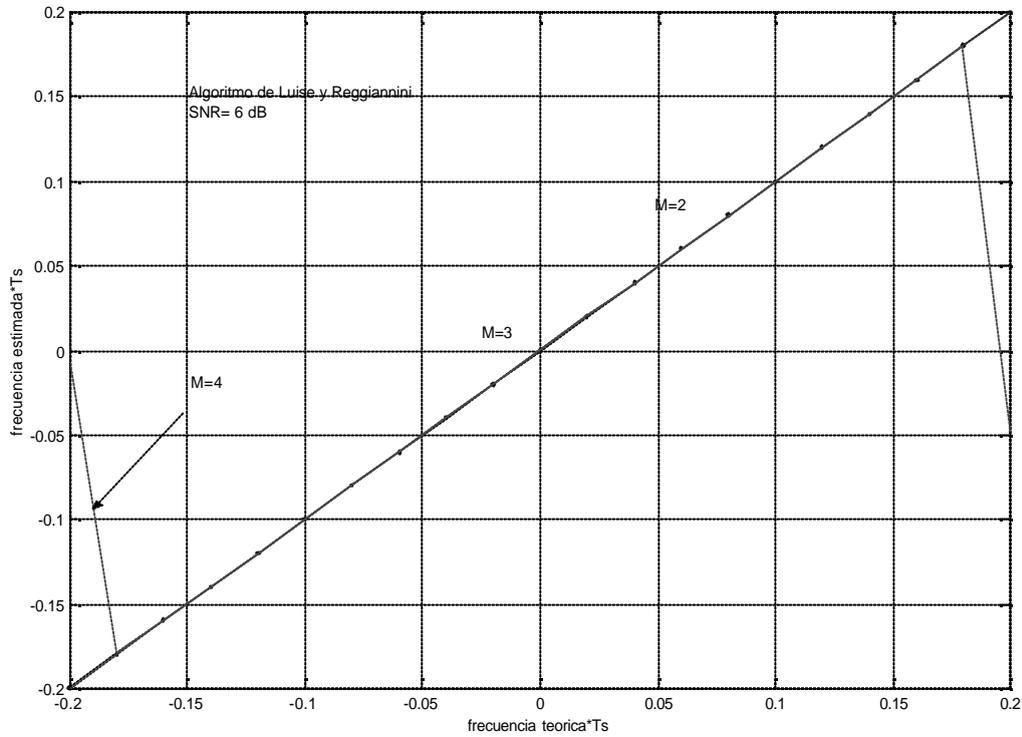


Figura 3.19. Rango de estimación del algoritmo de L&R para SNR= 6 dB.

Con una relación señal-ruido de 6 dB se puede ver que representa cierta mejoría que con respecto a -3 dB, aunque con un valor del parámetro de diseño igual a 4 el algoritmo ya no es capaz de estimar el máximo error de frecuencia objetivo en este sistema de comunicación PSK.

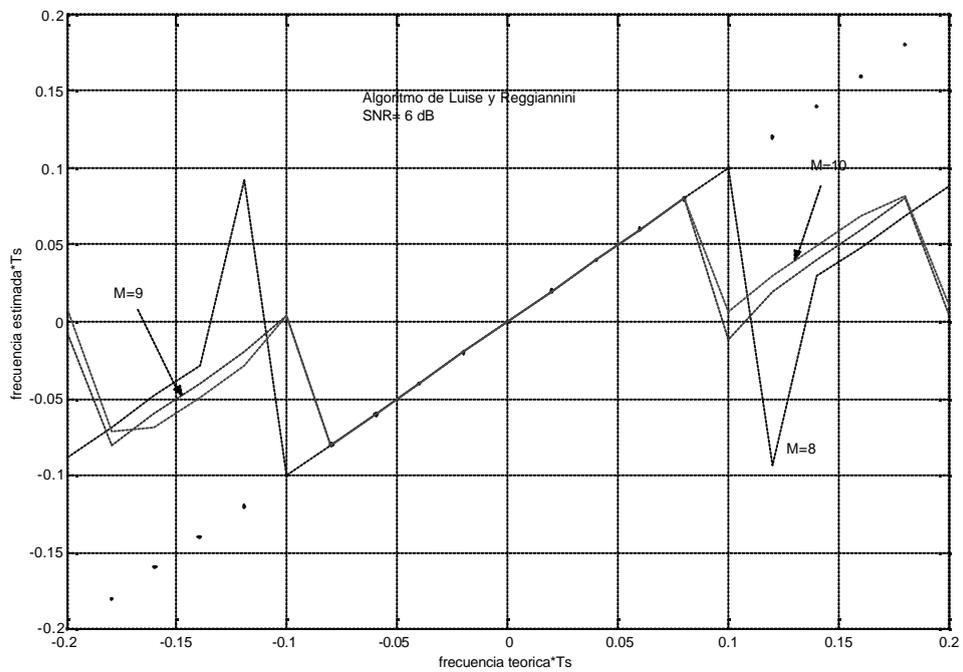
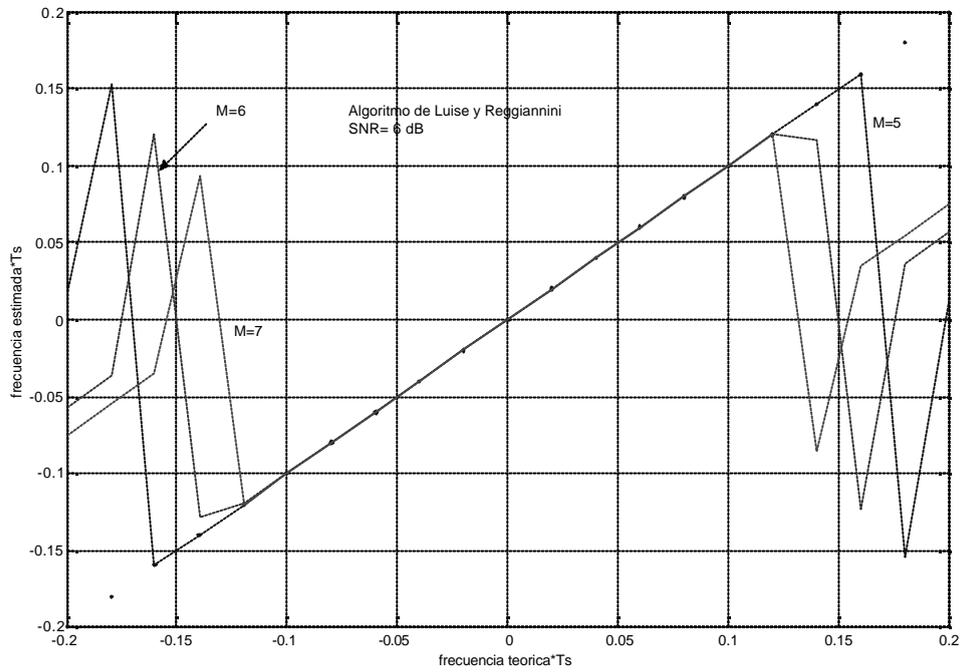


Figura 3.20. Rango de estimación del algoritmo de L&R para SNR= 6 dB.

Algoritmo de Fitz

Como ocurre con el algoritmo L&R, el rango de estimación y el parámetro de diseño son de interés. Se ha visto anteriormente que una condición para hacer $\arg[R(m)]$ una estimación con un valor muy parecido al teórico es que el valor del término $2pf_d mT_s$ se encuentre dentro del intervalo $\pm\pi$. Y esto debe ser verdad para cualquier valor del índice m entre 1 y M (parámetro de diseño), por lo tanto se obtiene que f_d debe encontrarse en el interior del intervalo $\pm 1/2MT_s$. En conclusión, el rango de estimación del algoritmo de Fitz es la mitad que el que tiene el algoritmo L&R.

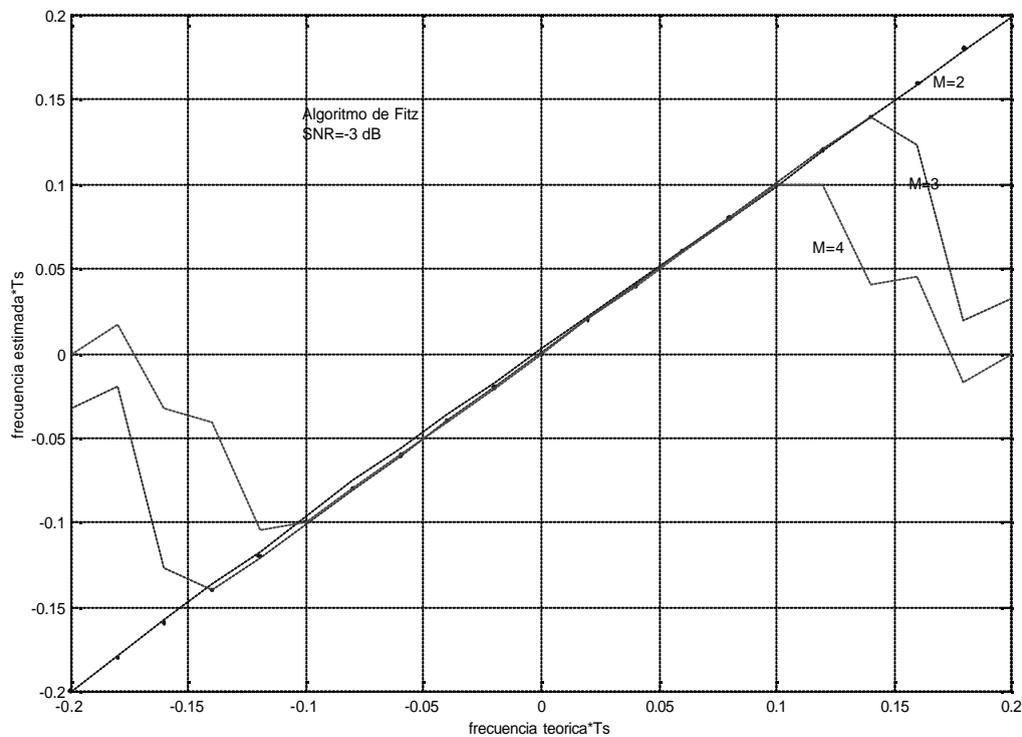


Figura 3.21. Rango de estimación del algoritmo de Fitz para SNR= -3 dB.

Con $M=2$ el rango abarca el error máximo permitido, sin embargo, para valores mayores del parámetro de diseño el rango va disminuyendo. En el caso anterior (algoritmo L&R), el rango empezaba a disminuir a partir de $M=3$.

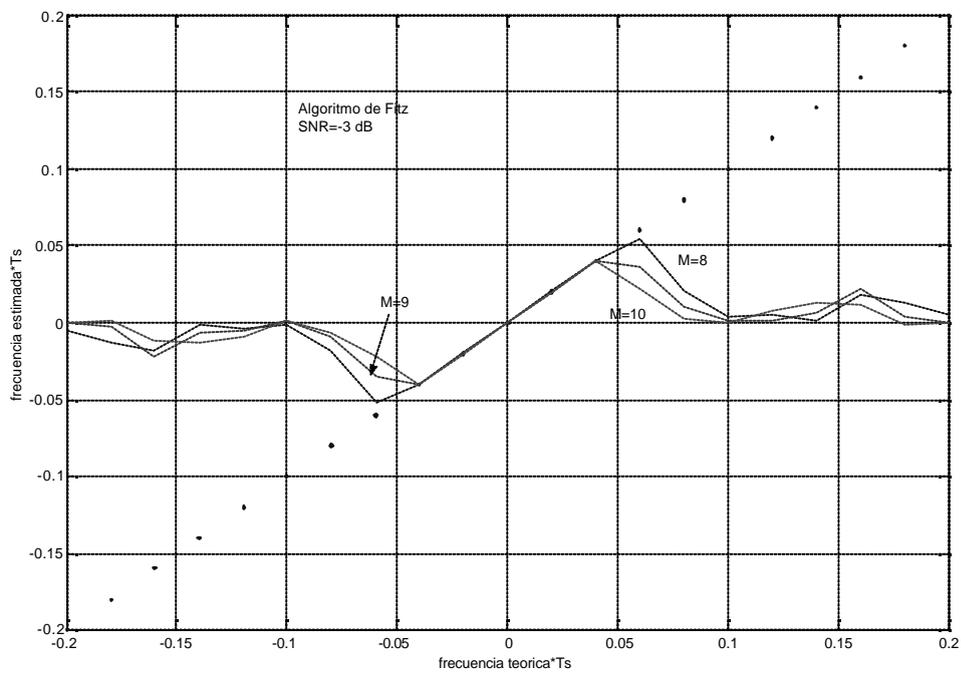
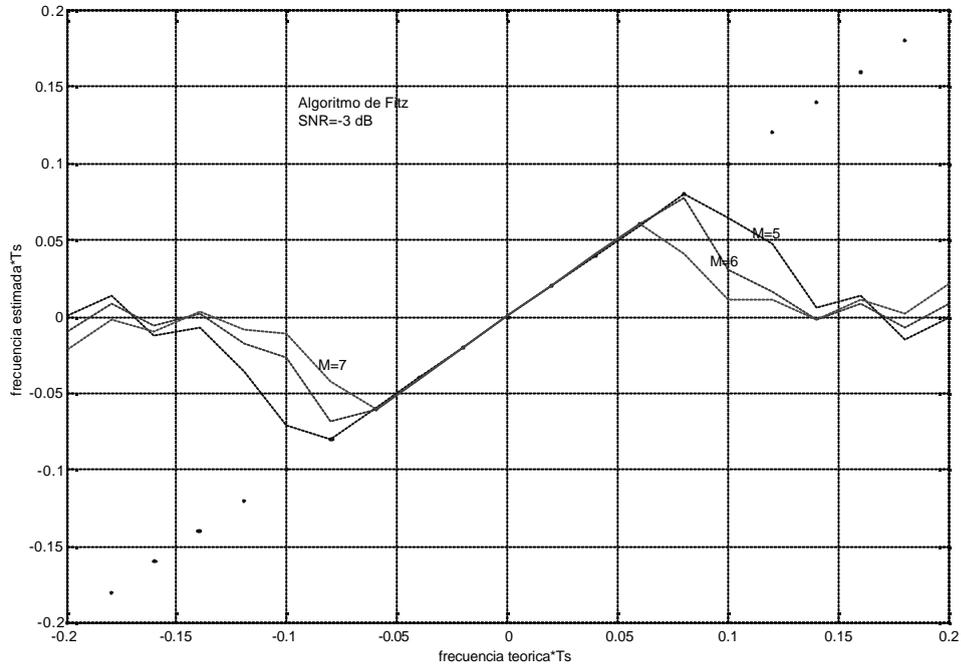


Figura 3.22. Rango de estimación del algoritmo de Fitz para SNR= -3 dB

Veamos como se comporta el rango de estimación del algoritmo de Fitz para una relación señal-ruido más elevada ($SNR= 6\text{ dB}$).

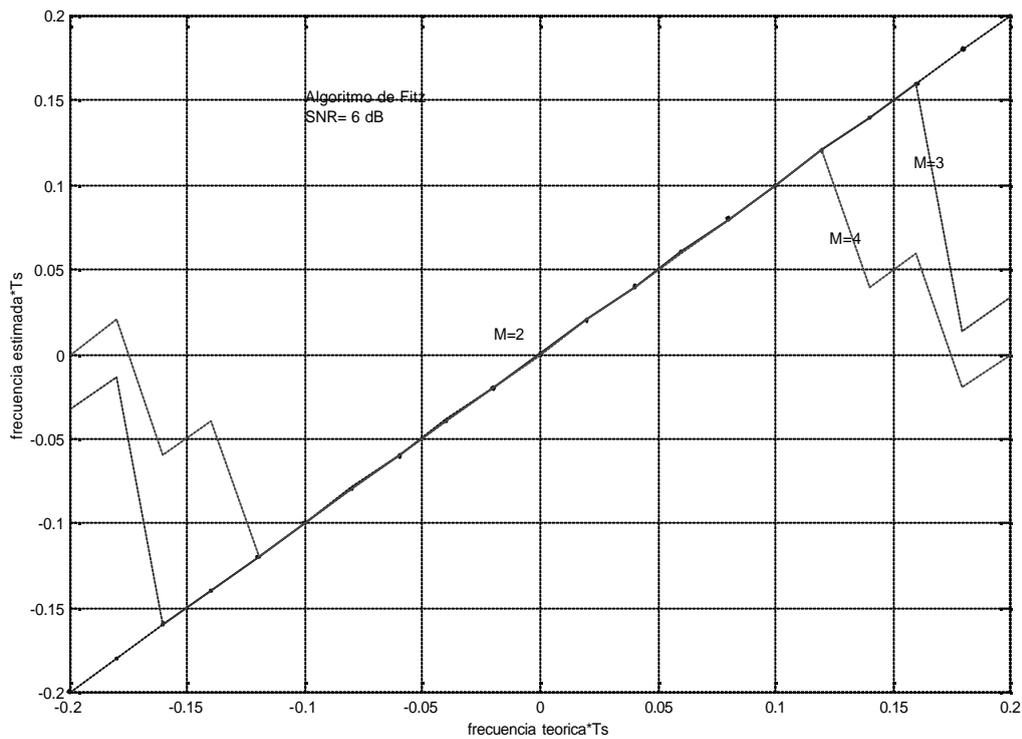


Figura 3.23. Rango de estimación del algoritmo de Fitz para $SNR= 6\text{ dB}$.

Con respecto al caso anterior ($SNR= -3\text{ dB}$), las estimaciones siguen más cerca de la referencia y empiezan a desviarse un poco más tarde. De esto se desprende que el rango de estimación mejora un poco cuando la relación señal-ruido aumenta.

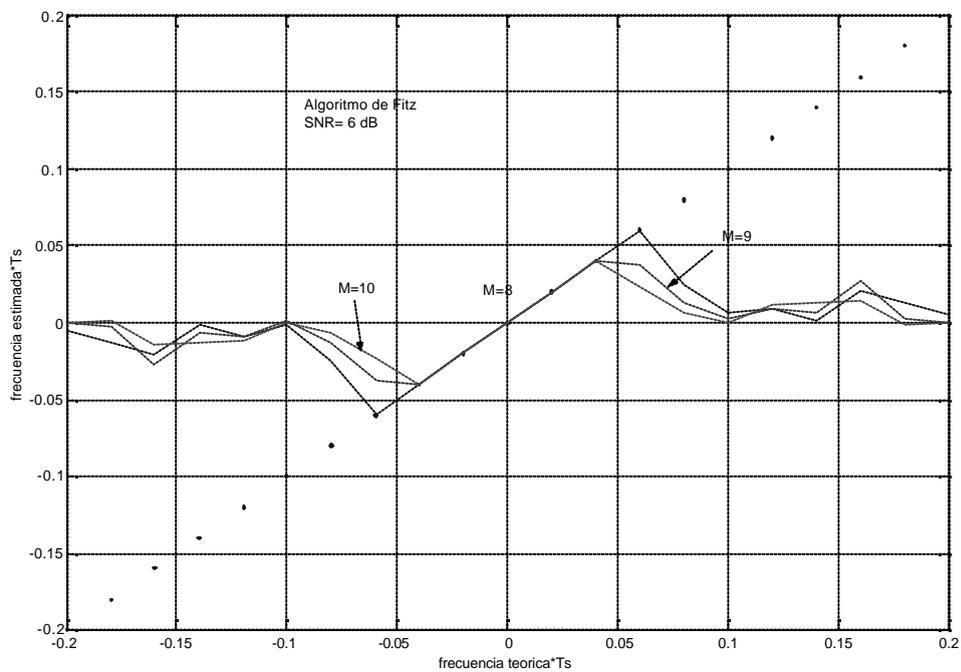
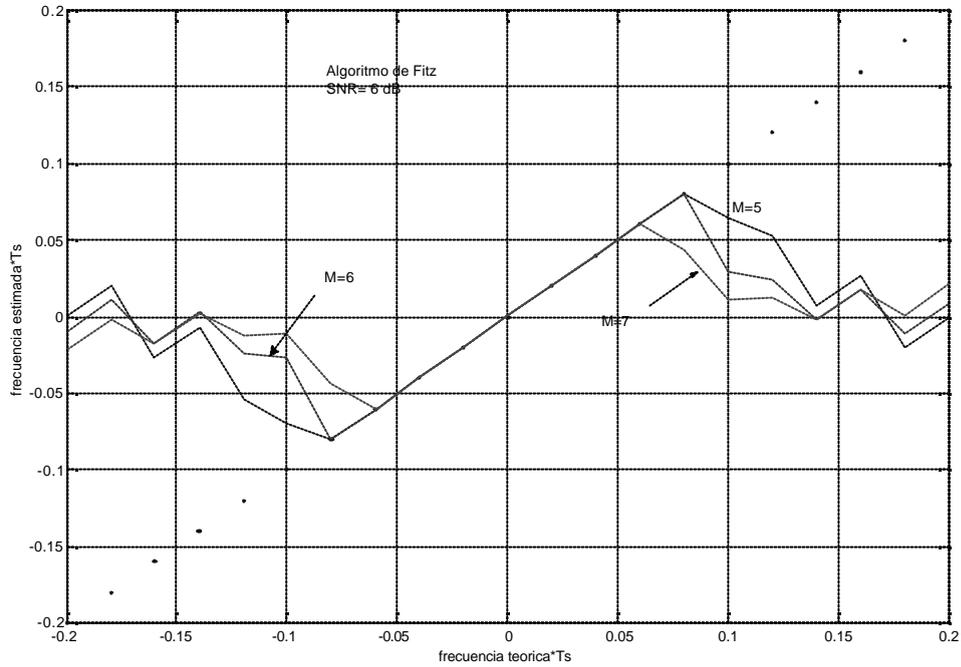


Figura 3.24. Rango de estimación del algoritmo de Fitz para SNR= 6 dB.

Algoritmo de Mengali y Morelli

Dada una precisión de estimación, el rango de adquisición es más grande que en los algoritmos de Fitz y L&R.

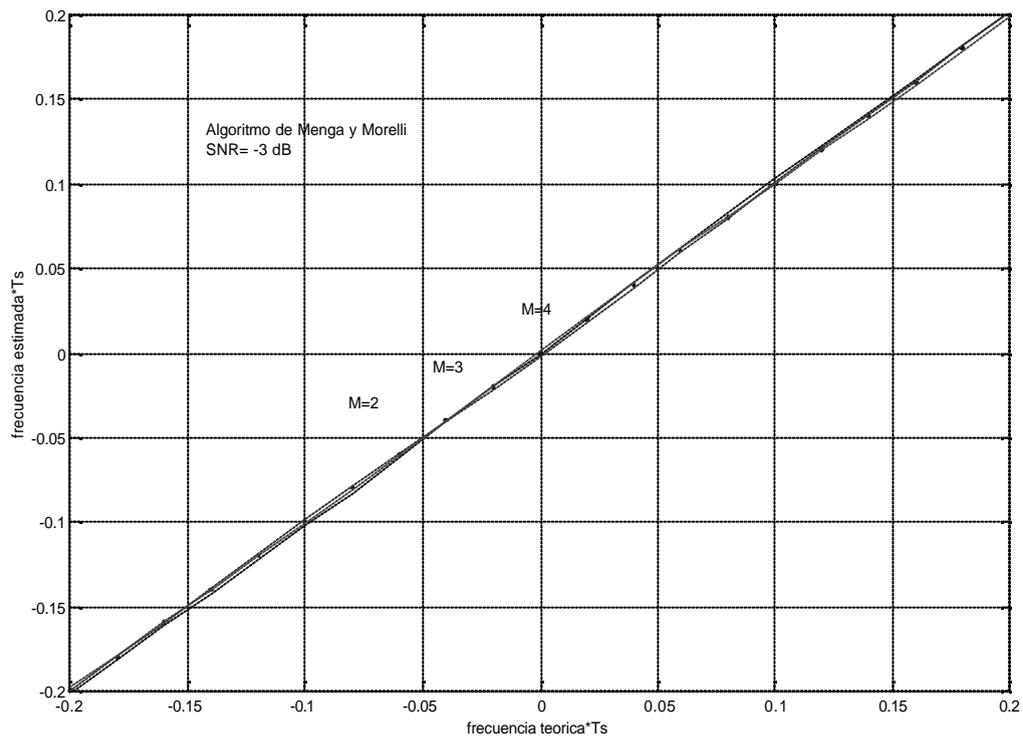


Figura 3.25. Rango de estimación del algoritmo M&M con SNR= -3 dB.

El rango de estimación es bastante grande e independiente de M . Como se puede observar, el algoritmo de Mengali y Morelli para una relación señal-ruido de -3 dB, es capaz de estimar holgadamente un error del 20 % de $1/T_s$, ya que como se ha dicho anteriormente tiene un rango de aproximadamente del 45 %.

En la figura 3.27 y 3.28, se muestra el rango que alcanza este algoritmo cuando la relación señal-ruido es de 6 dB para valores del parámetro M comprendidos entre 2 y 10.

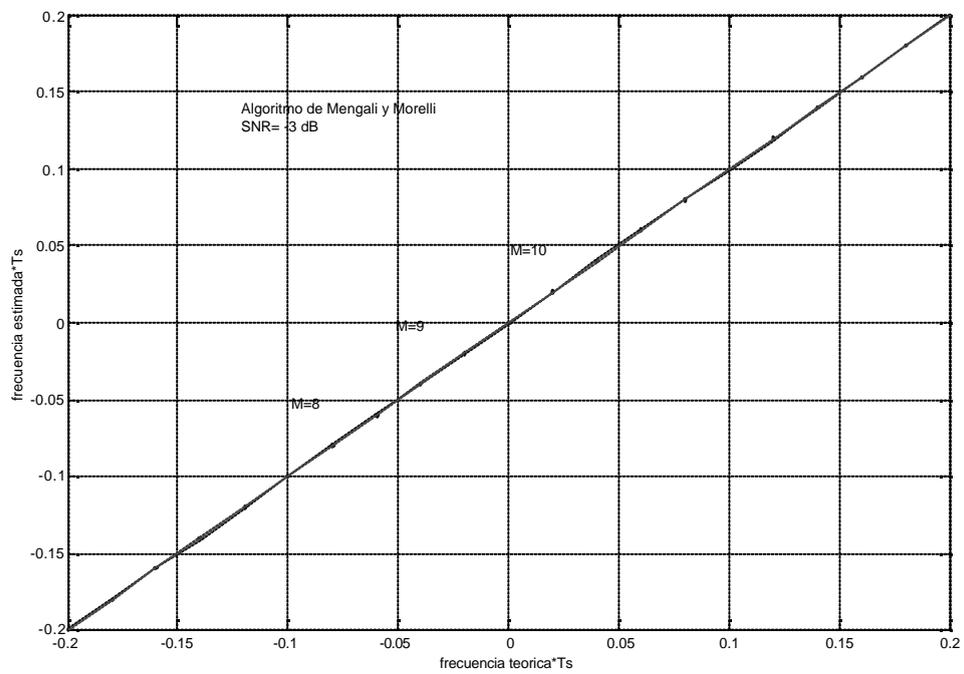
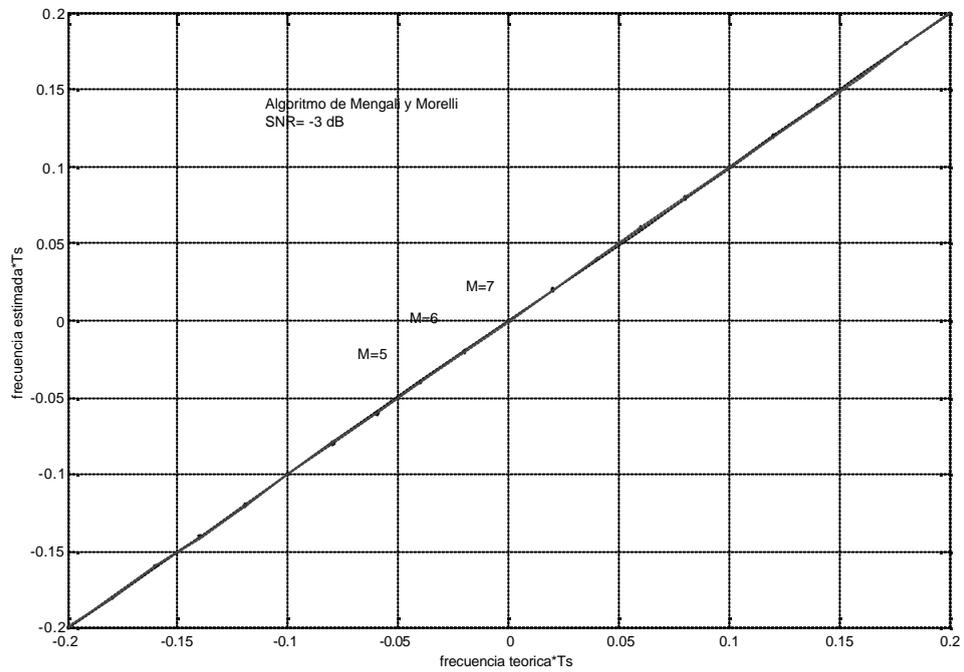


Figura 3.26. Rango de estimación del algoritmo M&M con SNR= -3 dB.

Si la relación señal-ruido es de 6 dB, el resultado que se obtiene se presenta a continuación.

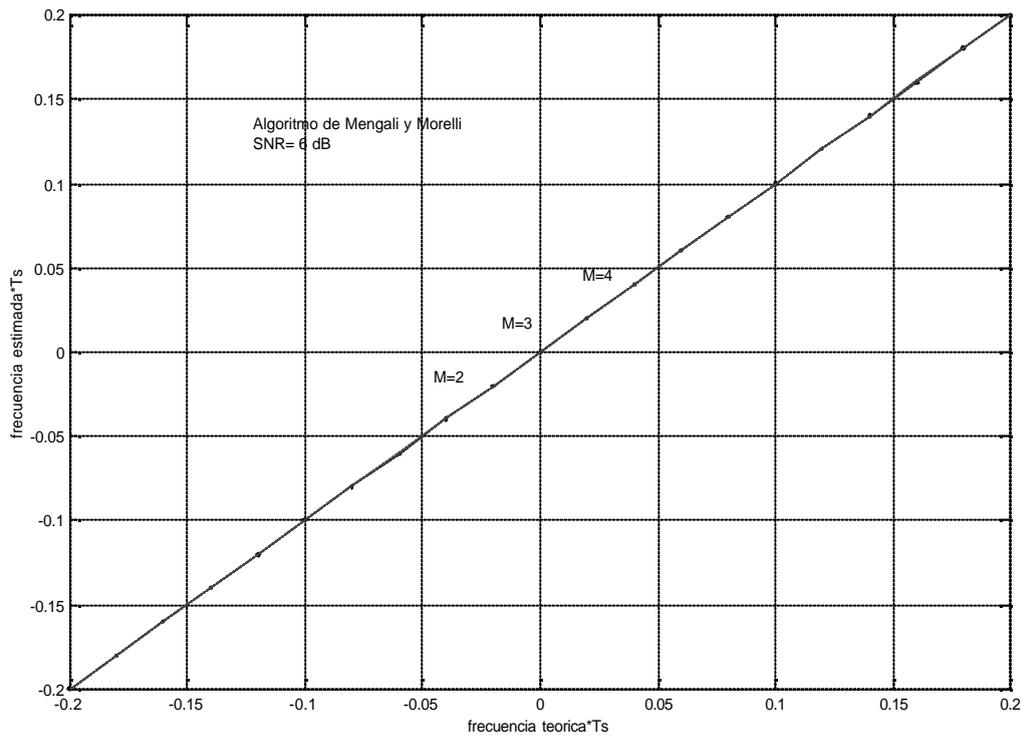


Figura 3.27. Rango de estimación del algoritmo de M&M para SNR= 6 dB.

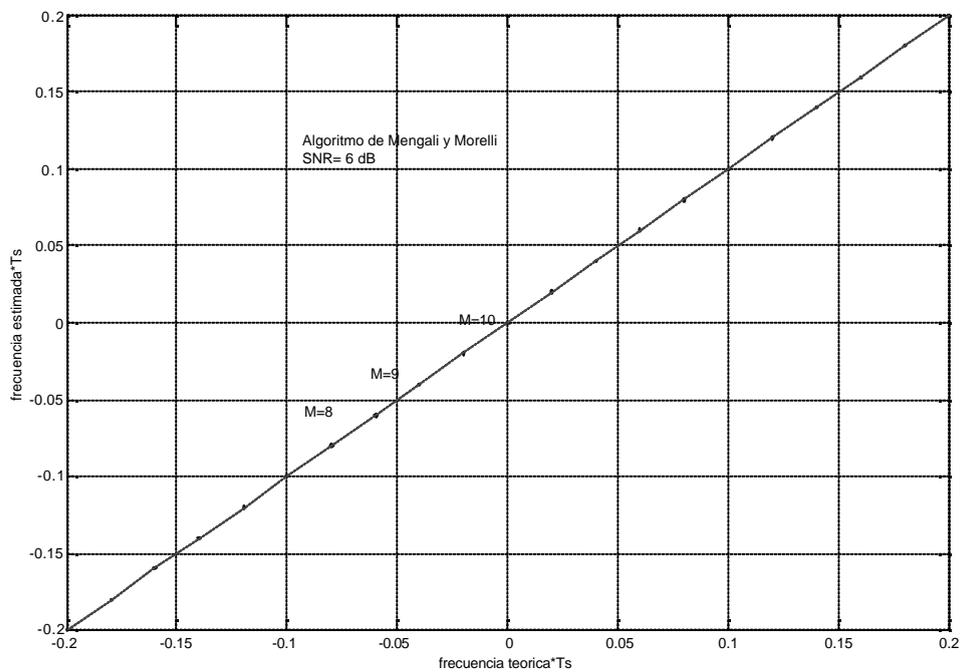
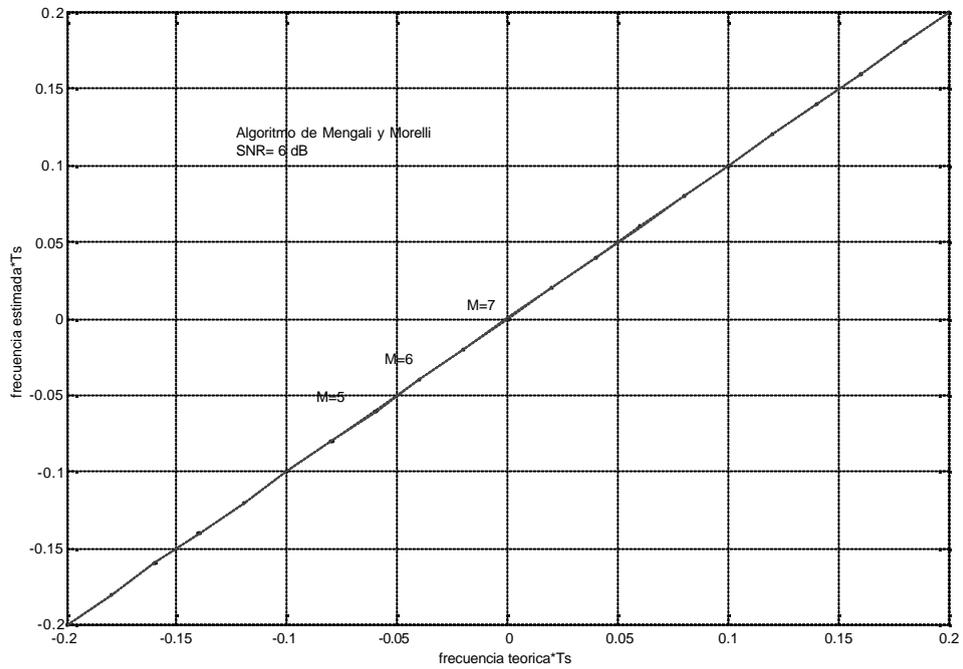


Figura 3.28. Rango de estimación del algoritmo M&M con SNR= 6 dB.

3.4. UMBRAL

El umbral, como se ha dicho anteriormente, representa la relación señal-ruido crítica por debajo de la cual existen errores importantes en la estimación.

Algoritmo de Kay

El umbral es el mismo para diferentes longitudes de preámbulo, por lo que se deduce que no puede ser reducido aunque el intervalo de observación crezca. Se puede observar en la figura 3.1 que el umbral se encuentra a 6 dB de relación señal-ruido (respecto a la cota de Cramer-Rao modificada).

Algoritmo de Luise y Reggiannini

Es difícil encontrar la posición exacta del umbral porque la curva que se representa en la figura 3.3 presenta pendientes que varían muy suavemente. Para poder hallar la posición hace falta realizar medidas exhaustivas. Se sabe que este algoritmo tiene su umbral con respecto a la cota de Cramer-Rao en torno a los 0 dB de relación señal-ruido siempre que se utilicen longitudes de preámbulo suficientemente largas (normalmente en torno a los 100 símbolos). Por lo tanto, este algoritmo es capaz de operar a relaciones señal-ruido bajas siempre que se utilicen intervalos de observación suficientemente grandes.

Algoritmo de Fitz

Al igual que en el algoritmo L&R es difícil extraer la posición exacta del umbral como se puede ver en la figura 3.5. Realizando medidas más específicas se puede comprobar que para longitudes de preámbulo suficientemente grandes el umbral se encuentra en torno a los 0 dB y también que a medida que el intervalo de observación aumenta, el umbral va decreciendo.

Algoritmo de Mengali y Morelli

En la figura 3.7 no se ve muy claro cual es la posición del umbral, sin embargo, parece que se encuentra en torno a los 0 dB como en los algoritmos anteriores.

Algoritmo de Lovell y Williamson

Con un preámbulo de aproximadamente 100 símbolos, el umbral tiene lugar a los 12 dB o más en este algoritmo. Este resultado se puede observar en la figura 3.9.

3.5. CARGA COMPUTACIONAL

Una cuestión importante que influye en la elección de un algoritmo u otro de estimación es la carga computacional. Esta característica se expresa en términos de número de operaciones, tanto multiplicaciones reales como sumas, y accesos a ROM.

Dependiendo del estimador que se utilice, es útil pensar en qué coordenadas se debe representar la señal $z(k)$, resultante de eliminar los datos de modulación, sí en cartesianas o en polares. Algunos estimadores utilizan $\arg[z(k)]$ y necesitan una ROM para aplicar $z(k)$ a $\arg[z(k)]$.

Estimador de Kay

En este estimador se utiliza la expresión $\arg[z(k)]$. Como se ve en

$$\arg[z(k)z^*(k-1)] = \{\arg[z(k)] - \arg[z(k-1)]\}_p$$

Para la obtención de $\arg[z(k)]$ se requiere L_0 accesos a ROM.

El cálculo del conjunto $\arg[z(k)z^*(k-1)]$, $1 \leq k \leq L_0$ requiere $L_0 - 1$ sumas, mientras que el término de la parte derecha en

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k^{KAY} \arg[z(k)z^*(k-1)]$$

implica $L_0 - 1$ multiplicaciones y $L_0 - 2$ sumas.

El número de accesos a ROM puede ser reducido a uno en el caso de modulaciones PSK, considerando el intercambio de operaciones de ángulo y sumas a altas relaciones señal-ruido.

Brevemente se va a demostrar que los estimadores siguientes son equivalentes.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{d1} &= \frac{1}{2pT_s} \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \angle x(k)x^*(k-1) \\ \hat{f}_{d2} &= \frac{1}{2pT_s} \angle \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k x(k)x^*(k-1) \end{aligned}$$

A altas relaciones señal-ruido y teniendo en cuenta que:

$$x_k = Ae^{j(2pf_d kT_s + \mathbf{q})} + n_k$$

el modelo aproximado que se utiliza es:

$$x_k = Ae^{j(2pf_d kT_s + \mathbf{q} + u_k)}$$

De aquí se desprende que:

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \angle x_k - \angle x_{k-1} \\ \Delta_k &= 2pf_d T_s + u_k - u_{k-1} \end{aligned}$$

siendo $m_k = u_k - u_{k-1}$, así que

$$x_{k-1}^* x_k = e^{j2pf_d T_s} e^{jm_k}$$

El primer estimador se puede expresar como:

$$\hat{f}_{d1} = \frac{1}{2pT_s} \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k (2pf_d T_s + \mathbf{m}_k) = f_d + \frac{1}{2pT_s} \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \mathbf{m}_k$$

Y el segundo estimador como:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{d2} &= \frac{1}{2pT_s} \angle \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \left(e^{j2pf_d T_s} e^{j\mathbf{m}_k} \right) \\ &= \frac{1}{2pT_s} \left(\angle e^{j2pf_d T_s} + \angle \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k e^{j\mathbf{m}_k} \right) \\ &= f_d + \frac{1}{2pT_s} \angle \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k e^{j\mathbf{m}_k} \end{aligned}$$

Bajo la suposición de $|\mathbf{m}_k| \ll 1$,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{d2} &= f_d + \frac{1}{2pT_s} \angle \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k (1 + j\mathbf{m}_k) \\ &= f_d + \frac{1}{2pT_s} \angle \left(1 + j \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \mathbf{m}_k \right) \\ &= f_d + \frac{1}{2pT_s} \arctan \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \mathbf{m}_k \\ &= f_d + \frac{1}{2pT_s} \sum_{k=1}^{L_0-1} w_k \mathbf{m}_k \\ &= \hat{f}_{d1} \end{aligned}$$

Como resultado, aumentaría la carga computacional debido a la realización de multiplicaciones complejas, sin embargo, sólo sería necesario un único acceso a ROM.

El número de operaciones totales se puede ver en la Tabla 3.1.

Estimador de L&R

Luise y Reggiannini propusieron un método para calcular \hat{f}_d que reduce notablemente la carga computacional. La complejidad resultante se indica en la Tabla 3.1.

Análogamente, la carga del conjunto $[R(m)]$, $m=1, \dots, M$ puede llevarse a cabo en el dominio de la frecuencia siguiendo los siguientes pasos:

- i. Crear una secuencia de $L_0 + M$ -puntos añadiendo N ceros a la secuencia $[z(k)]$.
- ii. Calcular la transformada discreta de Fourier (*DFT*) de $L_0 + M$ -puntos.

$$Z(n) = \sum_{k=0}^{L_0+M-1} z(k) e^{-j2\pi kn/(L_0+M)}, \quad 0 \leq n \leq L_0 + M - 1$$

- iii. Calcular la transformada discreta de Fourier inversa (*iDFT*) de $(L_0 + M)$ puntos de $|Z(n)|^2$.

$$y(m) = \frac{1}{L_0 + M} \sum_{n=0}^{L_0+M-1} |Z(n)|^2 e^{j2\pi nm/(L_0+M)}$$

- iv. Finalmente, calcular $R(m)$ como

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} y(m) \quad 1 \leq m \leq M$$

La carga resultante también se indica en la Tabla 3.1 en *L&R (FFT)*.

Estimador de Fitz

Teniendo en cuenta la definición:

$$R(m) = \frac{1}{L_0 - m} \sum_{k=m}^{L_0-1} z(k) z^*(k - m),$$

podemos escribir el estimador de Fitz de la forma

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \sum_{m=1}^N w_m^{\text{FITZ}} \mathbf{q}(m)$$

con

$$\mathbf{q}(m) = \arg \left[\sum_{k=m}^{L_0-1} z(k) z^*(k-m) \right].$$

Entonces, la realización del conjunto $[? (m)]$ en el dominio del tiempo requiere $2M(2L_0 - M - 1)$ multiplicaciones, $2M(2L_0 - M - 2)$ sumas y N accesos a ROM. En el dominio de la frecuencia se necesita $2(L_0 + M)[1 + 2 \log_2(L_0 + M)]$ multiplicaciones, $2(L_0 + M)[1 + 6 \log_2(L_0 + M)]$ sumas y N accesos a ROM.

En ambos casos, el cálculo de \hat{f}_d implica N multiplicaciones y $N-1$ sumas.

Estimador de M&M

De las ecuaciones mostradas en la sección anterior (estimador de Fitz) se obtiene que

$$\arg[R(m)R^*(m-1)] = [\mathbf{q}(m) - \mathbf{q}(m-1)]_{-p}^p$$

Una vez que se calcula la secuencia $[? (m)]$, el término de la parte derecha de la ecuación que se presenta a continuación requiere M multiplicaciones y $2(M-1)$ sumas.

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \sum_{m=1}^M w_m^{M\&M} \arg[R(m)R^*(m-1)]$$

Estimador de Lovell y Williamson

En este estimador también se utiliza la expresión $\arg[z(k)]$, por lo que se realizan accesos a la ROM.

La fórmula de este estimador es la siguiente:

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2pT_s} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{L_0-1} w(k)^{L\&W} e^{j\{\arg(z(k)) - \arg(z(k-1))\}} \right\}$$

El término $\arg(z(k))-\arg(z(k-1))$ requiere L_0-1 sumas y L_0 accesos a ROM. El cálculo del producto de la ventana por el término exponencial requiere $2(L_0-1)$ multiplicaciones reales y $2(L_0-2)$ sumas, y por último para calcular el ángulo del total se necesita un acceso mas a la ROM.

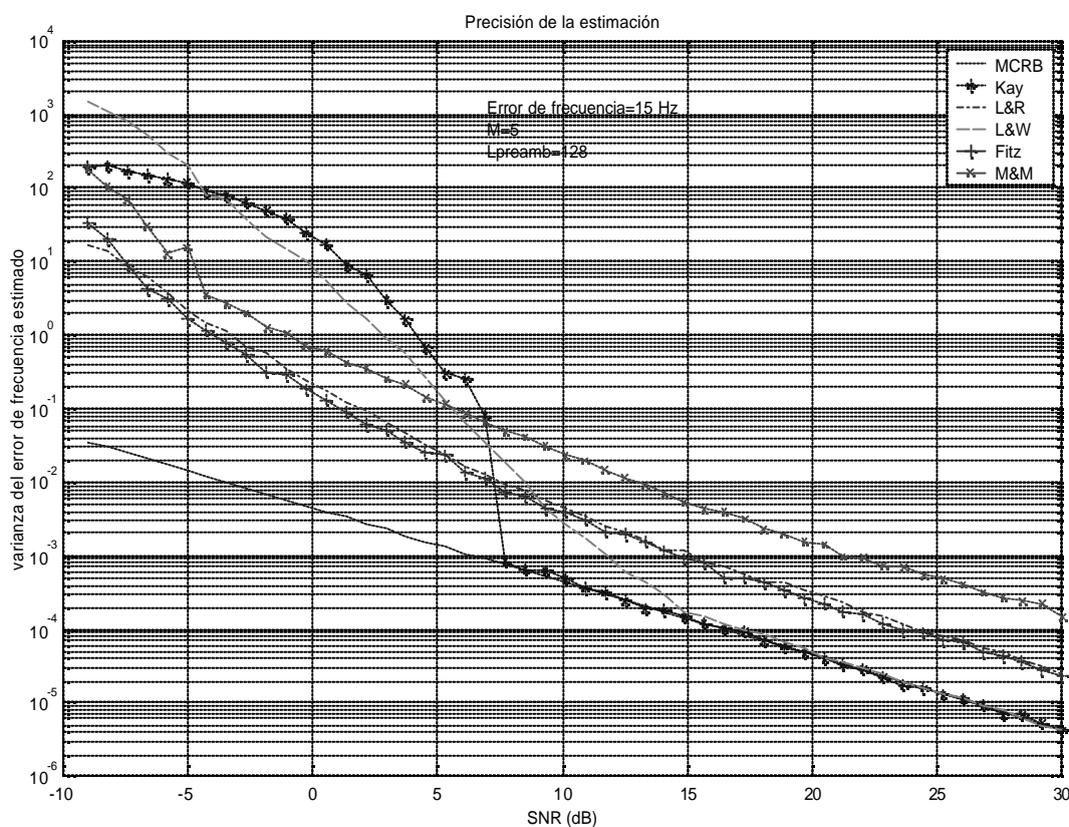
Algoritmo	Multiplicaciones reales y sumas	Accesos a ROM
Kay	$3 L_0 -4$	L_0
Kay (aprox.)	$5 L_0 -6$	1
L&R	$4 L_0 (M+1)-2$	1
L&R (FFT)	$3 L_0 +7M-2+10(L_0 +M) \log_2 (L_0 +M)$	1
Fitz	$4M(2 L_0 -M-1)$	M
Fitz (FFT)	$3 L_0 +5M-1+10(L_0 +M) \log_2 (L_0 +M)$	M
M&M	$M(8 L_0 -4M-3)-2$	M
M&M (FFT)	$3 L_0 +6M-2+10(L_0 +M) \log_2 (L_0 +M)$	M
L&W	$5 L_0 -7$	$L_0 +1$

Tabla 3.1. Carga computacional.

3.6. NOTAS FINALES

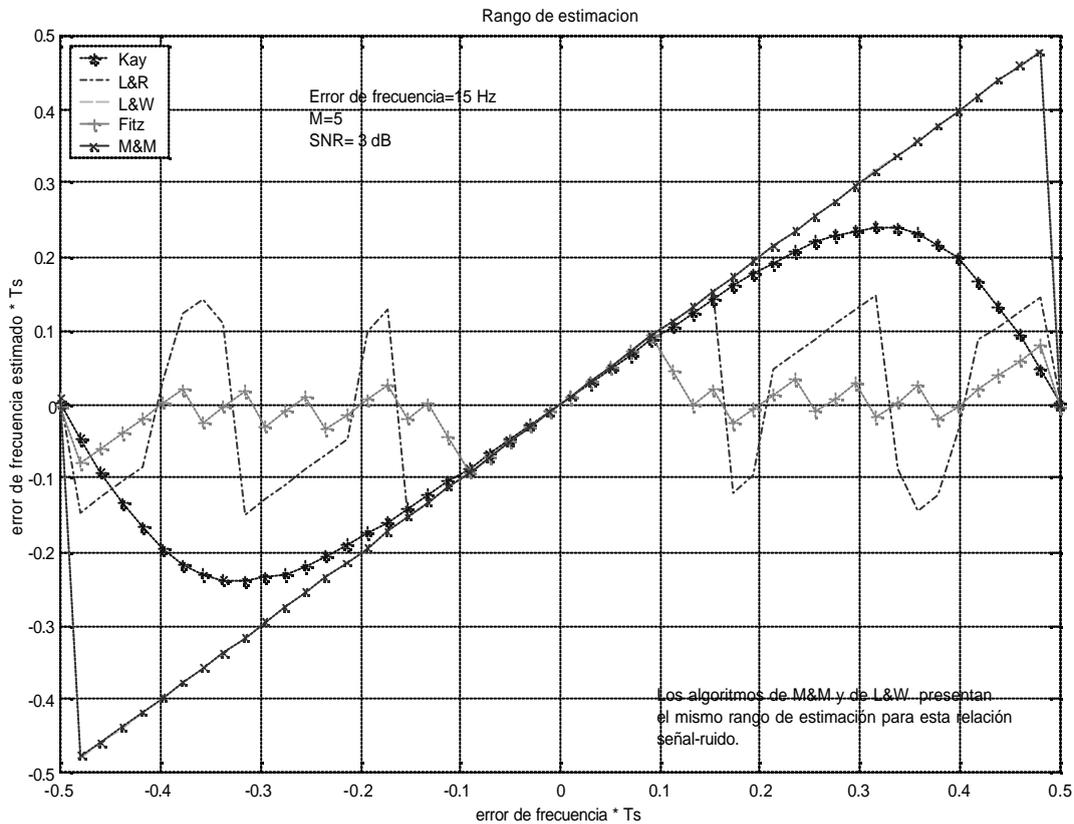
En este capítulo se han analizado las medidas de las prestaciones de los algoritmos de estimación, considerando cuatro criterios: precisión de la estimación, rango de estimación, umbral y complejidad de la implementación.

Cada algoritmo presenta ventajas e inconvenientes respecto a estos criterios y su elección radica en los requisitos que imponga cada aplicación particular.



En cuanto a precisión en la estimación, en condiciones de relaciones señal-ruido altas, para una misma longitud de preámbulo todos los estimadores poseen la misma precisión. Ahora bien, para relaciones señal-ruido intermedias o bajas, la situación se torna bastante diferente. Para tener un umbral aceptable, la longitud del preámbulo debe ser bastante elevada, siendo el algoritmo M&M el que necesita menos muestras para poder alcanzar la cota de Cramer-Rao modificada. En este aspecto los estimadores de Kay y de

L&W son los que presentan mayor probabilidad de errores en la estimación ya que poseen un umbral bastante alto.



Cuando se limita el rango de estimación (del orden de 10% de la tasa de símbolo) , se pueden utilizar el algoritmo de Fitz o de L&R. Rangos más elevados requeriría la utilización de algoritmos como el de M&M, L&W y Kay, aunque los dos últimos no son aplicables a bajas relaciones señal-ruido. El algoritmo de M&M aprovecha una precisión cercana a la cota de Cramer-Rao modificada cuando opera bastante por encima del umbral. El valor del umbral depende fuertemente de la longitud del preámbulo y disminuye a medida que L_0 (número de símbolos del preámbulo) va aumentando.

Dependiendo de las condiciones en las que están destinados a operar los algoritmos, entra en juego el factor de la complejidad. La complejidad del estimador de M&M depende de donde se realicen las operaciones que conlleva la función $R(m)$ si en el tiempo o en la frecuencia. La complejidad del algoritmo de L&R esta muy cercana a la que posee el

estimador de M&M. De todos estos algoritmos estudiados, el más simple es el de Kay seguido por el de L&W.

Como se ha dicho anteriormente, si se opera a relaciones señal-ruido altas conviene utilizar uno de menor complejidad porque la precisión obtenida es igual para todos, sin embargo, para relaciones señal-ruido relativamente bajas conviene sacrificar la complejidad a favor de la precisión. A SNR altas el método de Kay es bastante eficiente y para SNR bajas parece preferible utilizar el método de M&M.