Nótese que esto no es una restricción ya que puede ser satisfecha retrasando hasta ajustar los pulsos del TRC. Entonces, haciendo una media de la probabilidad condicionada sobre el retraso obtenemos la probabilidad media de error:

$$P(e) = \int_{-\infty}^{\infty} P(e\,|\,\hat{t})p(\hat{t})d\hat{t} \tag{2.40}$$

Desafortunadamente, esta ecuación no es muy práctica dado que $P(e|\hat{\tau})$ sólo es conocida para transmisiones descodificadas. Aún así, esta expresión conduce a otra muy interesante de P(e) que involucra a la varianza de la fluctuación de la temporización, escribiendo la probabilidad de error condicionada como una serie de Taylor truncada; el resultado es:

$$P(e) \approx P(e|\tau_0) + \frac{1}{2}P^{(2)}(e|\tau_0)\sigma_\tau^2 \tag{2.41}$$

Esta relación indica que P(e) se degrada en función de la varianza del retardo de muestreo.

Una característica interesante es que en presencia de desviaciones del instante de muestreo se muestra un error irreducible a medida que E/N_0 se incrementa. La explicación es que los errores de temporización generan interferencia intersímbolo, la cual, a su vez, produce errores de decisión incluso en ausencia de ruido.

2.3.2.- SISTEMAS PAM PASO DE BANDA.

Vimos en el punto 2.2.5.1 que en un sistema paso de banda lo que hacemos es modular linealmente una secuencia PAM paso de baja sobre una portadora sinusoidal., y vimos cómo se haría el proceso de demodulación (Fig. 2.10).

En un sistema ideal, decíamos que $f_c=f_{cL}$ y por lo tanto, el espectro de la señal que entraba en el siguiente bloque estaba centrado en el origen de las frecuencias. Esto no es así, en general, ya que es muy difícil conseguir este nivel de precisión, sobre todo para frecuencias muy altas; en la realidad existirá un pequeño desajuste entre esas dos frecuencias; nos referiremos a la diferencia:

$$\nu \equiv f_c - f_{cL} \tag{2.42}$$

como offset de frecuencia de portadora. Este offset modulará la señal, esta vez a muy baja frecuencia, no apareciendo entonces el espectro perfectamente centrado en cero. El estudio que hicimos en la sección 2.2.7 varía entonces un poco, ya que ahora en la señal de salida del demodulador $r(t) \equiv r_R(t) + jr_I(t)$, que se podía expresar mediante la ecuación (2.35), la componente debida a la señal que transmitimos es [3]:

$$s_R(t) \equiv e^{j(2\pi\nu t+\theta)} s_{CE}(t-\tau) \tag{2.43}$$

En estas ecuaciones θ es un desfase igual a $-(2\pi f_c\tau + \phi_L)$ y $w(t) = w_R(t) + jw_I(t)$ es un ruido paso de baja. En esta ocasión, $s_R(t)$ está dada, para las modulaciones que nos interesan, por

$$s_R(t) = e^{j(2\pi\nu t+\theta)} \sum_i c_i g(t - iT_m - \tau) \tag{2.44}$$

Al igual que era necesario recuperar los instantes de temporización para una recepción adecuada, también lo será la identificación de la desviación de frecuencia; esto lo estudiaremos con más detalle.

Por último, hay otro parámetro que hay que conocer para realizar la recepción: la fase de la onda que llega, esto es, tenemos que estimar el parámetro $\theta = -(2\pi f_c\tau + \phi_L)$, si queremos extraer la información que nos llega en fase.

2.3.3.- SINCRONIZACIÓN EN RECEPTORES PAM COHERENTES.

Ha quedado patente el hecho de que la señal en banda base (2.43) contiene parámetros desconocidos (ν, θ, τ) añadidos a los símbolos. Como veníamos diciendo, el conocimiento de estos parámetros es de vital importancia para una correcta detección de datos. El tema de la temporización ya ha sido discutido en la sección 3.2. El problema con ν y θ viene de la presencia de la distorsión multiplicativa $e^{j(2\pi\nu t+\theta)}$. Veamos un ejemplo para ilustrar esto; consideremos una modulación PAM e imaginemos qué ocurriría si la señal LP r(t) pasara por el filtro adaptado y después por el detector sin ninguna compensación de la distorsión. Por simplicidad, asumiremos que los pulsos conformados son tipo Nyquist y que ν es muy pequeña comparada con el ancho de banda de la señal, así que la salida del filtro adaptado se puede aproximar con

$$y(t) = e^{j(2\pi\nu t+\theta)} \sum_i c_i p(t - iT_m - \tau) + n(t) \qquad (2.45)$$

donde n(t) es la componente de ruido. Al muestrear en el instante $kT_m+\tau$ obtendríamos la siguiente entrada para el detector:

$$y(k) = c_k e^{j(2\pi\nu(kT_m+\tau)+\theta)} + n(k) \qquad (2.46)$$

Claramente, las componentes de señal se verían rotadas de sus posiciones correctas, deshabilitando el proceso de detección. Supongamos que en la señal y(k) tuviéramos un offset de frecuencia nulo, pero que existiera el desfase fijo θ, y que no hubiera ninguna otra degradación; entonces la constelación recibida sería una versión rotada de la transmitida (figura 2.16). Si gira demasiado, la rotación puede degradar la inmunidad al ruido del receptor llevando los puntos de señal recibida cerca de las fronteras de las regiones de decisión, o traspasándolas, lo cual produciría un efecto peor aún. Supongamos ahora que tanto el offset de frecuencia ν como el desfase fijo θ son no nulos; de la ecuación (2.45) se desprende que las componentes de señal se ven afectadas por una rotación continua con respecto a sus posiciones correctas, tal y como se muestra en la figura 2.17, deshabilitando el proceso de detección, la constelación producirá un error cada vez que el símbolo recibido pase el borde de una zona de decisión en el mapa de la constelación [4].

La discusión anterior nos señala la necesidad de compensar la distorsión $e^{j(2\pi\nu t+\theta)}$ y estimar el instante de muestreo τ. Por ejemplo, un posible método es ilustrado en la figura 2.18.

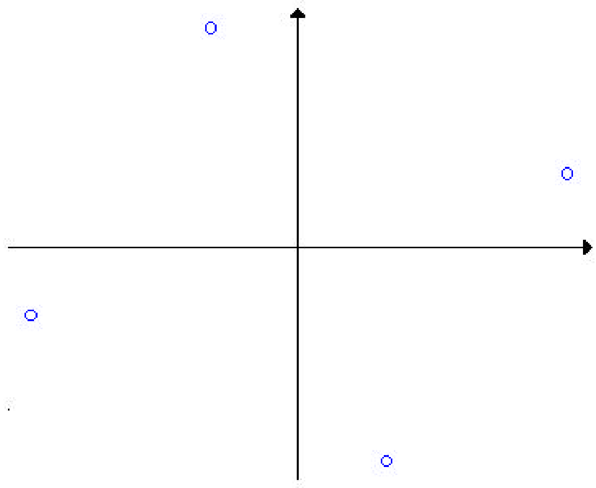

Figura 2.16.- Señal recibida con un desfase fijo q

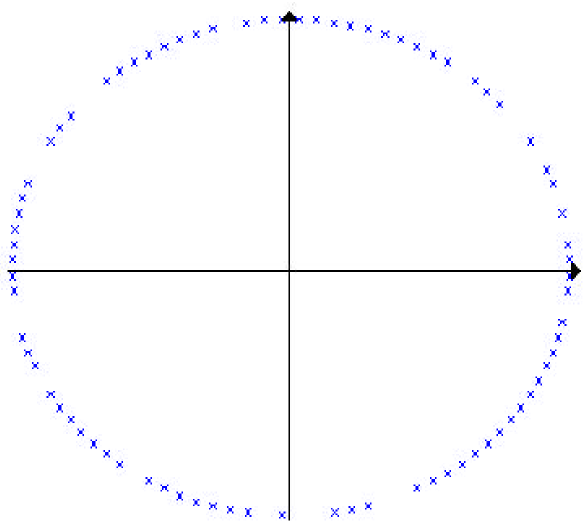

Figura 2.17.- Señal recibida en presencia de offset de frecuencia n **no nulo.**

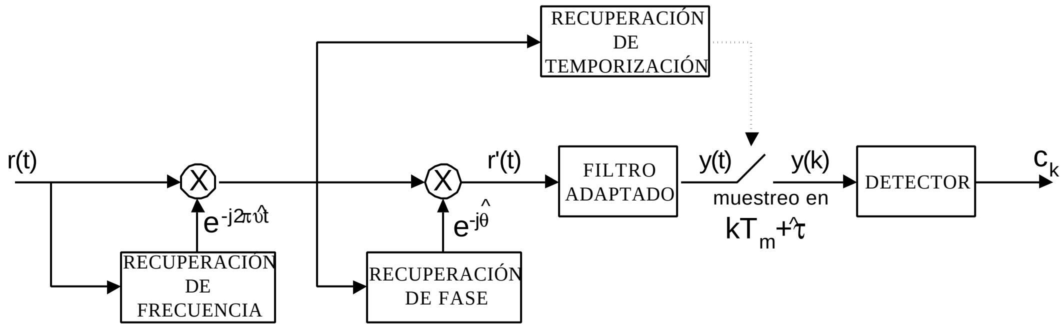

Figura 2.18.- Diagrama de bloques de un receptor coherente.

Hay que recalcar que la anterior configuración sólo tiene propósitos ilustrativos. Por ejemplo, la temporización puede derivar de r(t) (antes de la corrección de frecuencia) o de la salida del filtro adaptado (tras la corrección de fase).

La supresión perfecta de las distorsión requeriría que la estimación del offset de frecuencia y de la fase θ; en la práctica, ν y su valor estimado no coinciden exactamente, y la tarea de eliminar la distorsión residual [3]:

$$e^{j[2\pi(\upsilon-\hat{\upsilon})t+\theta]} \tag{2.47}$$

es encomendada al circuito recuperador de fase. Esto es factible si el error de frecuencia es suficientemente pequeño como para que el ángulo de la expresión (2.47) sea aproximadamente constante durante el tiempo de medida T_0 del PRC. En dichas condiciones, de hecho, el PRC realiza una medida periódica de ese ángulo (con periodo T_0) y lo compensa mediante rotación de:

$$r(t)e^{-j2\pi\hat{v}t} \tag{2.48}$$

Es obvio, observando a partir de lo que acabamos de exponer, que existirá una degradación en la probabilidad de error que resulta de la estimación inexacta de la fase. Se propone la siguiente aproximación analítica:

El primer paso para modelar el error de fase:

$$\phi \equiv \theta - \hat{\theta} \tag{2.49}$$

es una variable aleatoria con alguna función de densidad de probabilidad $p(\phi)$. Una característica gaussiana para esta función es razonable en la mayoría de los casos si los errores de fase no son demasiado grandes (como ocurre en sistemas bien diseñados). Entonces, si ϕ_m es la media y σ^2_ϕ la varianza de ϕ, tenemos que:

$$p(\phi) = \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-(\phi-\phi m)^2/2\sigma_\phi^2} \qquad (2.50)$$

Nótese que ϕ_m y σ^2_ϕ dependen de las condiciones de operación del sincronizador y pueden obtenerse por otros métodos analíticos o experimentales.

El segundo paso es hallar $P(e|\phi)$, la probabilidad de error de símbolo condicionada a un valor fijo de ϕ. Finalmente, la probabilidad media de error es evaluada por integración numérica como :

$$P(e) = \int_{-\infty}^{\infty} P(e\,|\,f)p(f)df \qquad (2.51)$$

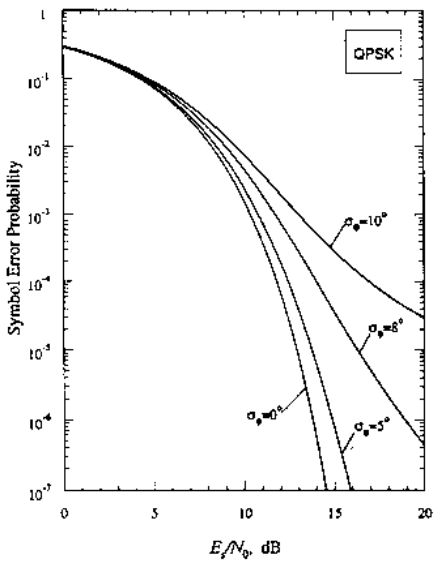

Figura 2.19.- Probabilidad de error de símbolo frente a SNR para distintos errores de fase en un sistema QPSK..

2.4.- RESUMEN.

Hemos visto en este capítulo las distintas partes que componen un sistema de comunicaciones paso de banda; nos hemos centrado en el análisis teórico de las modulaciones PSK para M = 4 y M = 8, modulaciones que emplearemos en el desarrollo de nuestro proyecto, y que presentan gran simplicidad en cuanto al manejo de sus ecuaciones matemáticas.

De entre los problemas que pueden surgir en la comunicación, el tema que a nosotros nos preocupa es el de la sincronización del sistema, y más específicamente el de la sincronización de la frecuencia de la señal portadora. Analizamos lo que ocurre cuando transmisor y receptor no tienen la misma frecuencia de portadora, y cómo esta situación da lugar a una degradación de la probabilidad de error y, por tanto, de las prestaciones del receptor.

Todos estos conocimientos previos son necesarios para entender los siguientes capítulos, en los que iremos viendo la solución que damos en este proyecto al problema de la adquisición de portadora cada vez más específicamente.