

## CAPÍTULO 3 FILTRADO DIGITAL DE IMÁGENES

### 3.1. Introducción.

Una imagen digital es una representación numérica matricial de una imagen física. La imagen se divide en pequeñas regiones de idéntico tamaño llamadas píxeles (picture element). De esta forma, queda segmentada en multitud de recuadros, a los cuales podemos acceder mediante notación matricial, designando a cada uno de ellos con el número de fila y columna en que se encuentran.

En este Proyecto Fin de Carrera trabajamos con imágenes digitales en escala de grises, por lo que es necesario el uso de una única matriz para su representación. Se toma una escala que va desde el blanco al negro y se divide en un cierto número de niveles de gris (en el formato lum se toman en concreto 4096). A continuación se asigna un valor entre **0-Valor máximo** y, finalmente, se da a cada píxel un valor comprendido en el rango seleccionado, según el nivel de intensidad de la imagen en ese punto.

La posibilidad de obtener representaciones numéricas de las imágenes físicas nos permite cualquier tipo de procesamiento digital de las mismas. Mediante la manipulación matemática de imágenes en formato digital, realizada mediante un ordenador, podemos conseguir producir en la imagen las modificaciones que en cada caso resulten más adecuadas a nuestra aplicación. El constante desarrollo de la informática (aumento de la velocidad y prestaciones de los ordenadores) ha contribuido notablemente al crecimiento, en calidad y extensión, del tratamiento digital de imágenes.

### 3.2. Procesado digital de imágenes.

En este apartado consideraremos los principales problemas que resuelve el procesamiento digital de imágenes, exponiendo más extensamente aquellos que, por entrar dentro de los objetivos de este proyecto fin de carrera, resultan de mayor interés.

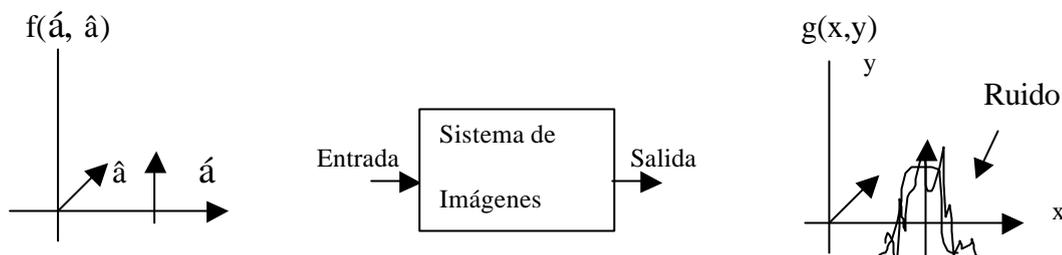
#### **3.2.1. Restauración de imágenes.**

La restauración tiene como objetivo la eliminación de degradaciones de una imagen que han sido previamente conocidas **(14)**. Se trata de invertir el proceso que provocó el deterioro de la imagen, cuyas causas son, principalmente, distorsiones geométricas, no linealidades y otras limitaciones del sensor y su entorno.

La figura 3.1 muestra una situación típica en restauración de imágenes. La imagen de un punto origen es degradada debido al ruido por un sistema de imágenes. Si el sistema de imágenes es lineal, la imagen de un objeto puede ser representada como:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y; \mathbf{a}, \mathbf{b}) f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b} + h(x, y) \quad (3.1)$$

donde  $\zeta(x,y)$  es la función de ruido aditivo,  $f(\hat{a},\hat{a})$  es el objeto,  $g(x,y)$  es la imagen, y  $h(x,y; \hat{a},\hat{a})$  es llamada la función de difusión del punto (PSF).



**Figura 3.1. Degradación debida a un sistema de imágenes. Dado el ruido y la imagen borrosa el problema de restauración consiste en estimar la imagen de entrada  $f(x,y)$ .**

Un problema típico de restauración de imágenes es encontrar una estimación de  $f(\hat{a},\hat{a})$  dada la PSF, la imagen degradada, y las propiedades estadísticas del proceso de ruido.

Un resultado fundamental en teoría de filtros, usado frecuentemente en restauración de imágenes, es el llamado filtro de Wiener. Este filtro proporciona la mejor estimación cuadrático-media del objeto obtenida a través de las observaciones. Dicho filtro puede ser implementado en el dominio de la frecuencia y en el dominio espacial y existen variados métodos desarrollados para su aplicación.

### 3.2.2. Análisis de imágenes.

El análisis de imágenes hace referencia a la realización de medidas cuantitativas de una imagen para producir una descripción de ésta. Las técnicas de análisis requieren la extracción de ciertas características que ayudan en la identificación de los objetos de interés.

Las técnicas de segmentación se usan para aislar el objeto deseado del resto de la imagen. En este proyecto se han aplicado a la detección de microcalcificaciones presentes en mamografías. El proceso seguido para la segmentación de éstas se explica detalladamente en los capítulos 4 y 5, y consiste en aplicar un algoritmo de crecimiento de regiones partiendo de determinados puntos singulares denominados semillas. Dichos puntos singulares se caracterizan por su elevado error de predicción, calculado mediante un algoritmo de predicción lineal 2D.

Se comentó en el capítulo 2 que existían ciertas características de las microcalcificaciones relevantes para el diagnóstico de un posible cáncer de mama. Por este motivo resulta de gran utilidad la extracción de parámetros morfológicos que posibiliten la clasificación de estos depósitos de calcio como benignos o malignos. Con este fin, una vez segmentadas las microcalcificaciones, se calcula el tamaño y otros parámetros que cuantifican su forma como los momentos, la compacidad y los descriptores de Fourier.

### 3.2.3. Realce de imágenes.

El objetivo del realce de imágenes es acentuar ciertas características de la imagen para un optimizar un posterior análisis o representación en pantalla. No se trata de mejorar la fidelidad respecto a una imagen original, como se persigue en la restauración, sino realizar un procesado tal que el resultado sea más adecuado para una aplicación específica. La aplicación del realce de imágenes en este proyecto persigue destacar los contornos de las microcalcificaciones para facilitar una mejor detección. Como se puede observar por los resultados, las imágenes filtradas difieren de las mamografías originales pero presentan un aspecto más adecuado para la segmentación de las microcalcificaciones, ya que se han enfatizado sus bordes.

Los métodos de realce de imágenes se pueden dividir en dos amplias categorías: métodos en el dominio espacial y métodos en el dominio de la frecuencia. Los métodos en el dominio espacial operan directamente sobre la imagen en sí, mientras que los métodos en el dominio de la frecuencia trabajan con la transformada de Fourier de la imagen. Nos centraremos en el estudio del primer grupo, por ser de este tipo los filtros empleados en este proyecto. Elegimos filtros espaciales por la mayor facilidad de implementación y velocidad de operación, si bien nos interesamos en el comportamiento que presentan en el dominio frecuencial. De hecho, lo que nos proponemos realizar al realzar los contornos de las microcalcificaciones es un filtrado paso de alta.

Dentro del procesado de una imagen podemos distinguir dos tipos de operaciones según los píxeles que se tengan en cuenta a la hora de calcular el valor de salida de la imagen resultante. En este sentido podemos distinguir entre operaciones puntuales y operaciones de filtrado. En los apartados siguientes describiremos esta clasificación.

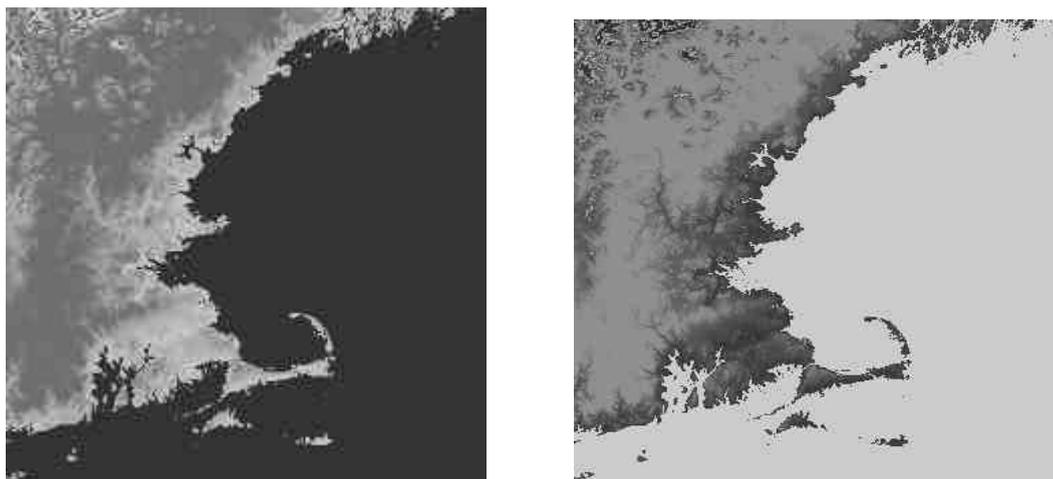
#### 3.2.3.1 Operaciones puntuales.

Las operaciones puntuales son llamadas así porque se trabaja únicamente con el valor de un píxel cada vez. Permiten modificar la manera en la que los datos de una imagen rellenan el rango disponible de niveles de gris. Las principales aplicaciones se dirigen a modificar el rango dinámico, salvando así las posibles limitaciones del digitalizador, o a mejorar el proceso de visualización de una imagen. A continuación se exponen las principales transformaciones puntuales que se pueden aplicar a una imagen.

##### 3.2.3.1.1. Negativización de una imagen.

Esta técnica consiste en invertir el orden de los niveles de gris de una imagen de manera que la intensidad de la imagen de salida aumenta a medida que disminuye la intensidad de la imagen de entrada. Los negativos de las imágenes digitales son muy útiles en numerosas aplicaciones, tales como la visualización de imágenes médicas, fotografía, etc.

En la figura 3.2. se puede observar una imagen y su negativo.



**Figura 3.2. Negativización.**

### 3.2.3.1.2. Ampliación del contraste.

El contraste resulta ser un parámetro fundamental en el diagnóstico médico, ya que éste está basado en la discriminación de diferencias existentes entre los tejidos corporales de la zona de interés. En el caso que nos ocupa, las mamografías se caracterizan por su bajo contraste en relación con otros tipos de imágenes médicas. Este problema es especialmente acusado cuando la mama presenta abundante tejido fibroglandular, de densidad parecida a la del calcio que forma las microcalcificaciones, resultando entonces más difícil la detección de éstas. Este es el motivo por el que, además de realizar un filtrado de realce de contornos, se aplica una ampliación del contraste a las mamografías en estudio. Se utiliza una operación modificación de contraste que, además de ampliar el rango dinámico de la imagen, consigue que los valores de salida queden dentro del intervalo **0-3500**, que es el propio de las imágenes en formato lum.

La ampliación del contraste es una transformación específica que modifica la escala de grises. Una de estas funciones que se aplica muy frecuentemente es la denominada **expansión lineal del contraste**. Toma como función de transformación una recta, cuyos valores extremos se obtienen a partir de los valores máximo y mínimo de la imagen que se desea ampliar. Lo que se consigue es tener una mayor expansión en los valores intermedios de la escala de grises que se utiliza.

La función de transformación  $g=T(f)$  que se emplea en este proyecto, aplicándose tras el filtrado, presenta la siguiente expresión:

$$g = RANGO\_MAX * \frac{p - MIN}{MAX - MIN} \quad (3.2)$$

siendo:

RANGO= rango de valores de los píxeles de la imagen.

$p$ =valor del píxel.

MAX: máximo valor real en la imagen.

MIN: mínimo valor real en la imagen.

### 3.2.3.2. Operaciones locales o de filtrado.

Las técnicas locales o de filtrado se caracterizan por calcular el píxel de salida no sólo a partir del valor de dicho píxel en la imagen de entrada, como vimos que ocurría con las operaciones puntuales, sino que también tienen en cuenta los píxeles vecinos de aquel que se quiere filtrar.

El filtrado es una de las técnicas básicas en procesamiento de imágenes y usualmente consiste en realizar modificaciones de las componentes de frecuencia de una señal. Como ya comentamos anteriormente, nos centraremos en el estudio de los filtros espaciales por la mayor simplicidad y velocidad.

El filtrado espacial es una forma de filtrado FIR. El filtro consiste en una máscara de pesos dispuesta sobre un patrón rectangular. El proceso de filtrado supone simplemente ir desplazando dicha máscara por toda la imagen y realizando operaciones de multiplicación sobre los píxeles que cubre ésta.

Así una matriz, o vector de coeficientes, se puede aplicar para operar como un filtro, incluso aunque una matriz no sea un filtro en sentido físico. Se ha convertido en algo habitual denominar a estas operaciones con matrices filtros digitales. Existen otros métodos, que también se consideran englobados dentro del filtrado digital, que no son lineales, como el suavizado por mediana por ejemplo. No son equivalentes a convolucionar con una matriz y por tanto no tienen una función de transferencia asociada.

El procedimiento que llevan a cabo estos filtros es el siguiente: la máscara con los pesos del filtro se coloca sobre el píxel a filtrar, se suman los productos entre los coeficientes de la máscara y la intensidad de los píxeles que hay bajo ella. Si denotamos los niveles de gris de los píxeles como  $z_1, z_2, \dots$  la respuesta a un filtro lineal es  $R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots$ . El nivel de gris del píxel localizado en el centro de la máscara se sustituye por  $R$ . La máscara se mueve después hacia el siguiente píxel en la imagen y se repite este proceso hasta que se cubren todos los píxeles. Lo habitual es que los nuevos valores se almacenen en una nueva imagen para no utilizar valores de píxeles que hayan sido modificados en una aplicación anterior.

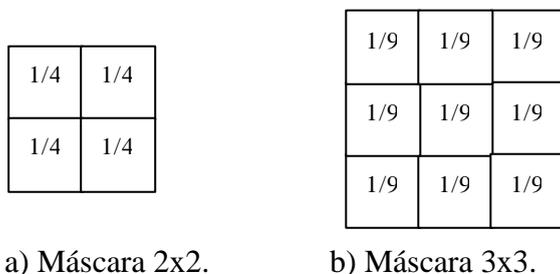
Esta manera de filtrar, operando directamente sobre los píxeles, presenta problemas a la hora de calcular el valor de salida de los píxeles que integran el borde de la imagen. Supongamos que una matriz de  $16 \times 16$  va a ser filtrada con una máscara de  $3 \times 3$ ; en este caso el operador no puede estar centrado en un punto del borde de la imagen sin perder contacto. Para solucionar este inconveniente hay dos procedimientos a seguir:

El primero consiste en recortar la imagen en sus bordes para adecuarla a la máscara del filtro. En el caso de que estuviéramos utilizando una máscara de tamaño 3x3 la eliminación de estos bordes supondría únicamente desprestigiar una hilera de un píxel en cada extremo, considerándose entonces la pérdida de información desprestigiable. Este es el método que utilizamos en este proyecto. Esto es justificable teniendo en cuenta que las imágenes mamográficas con las que trabajamos tienen un tamaño de más de un millón de píxeles, de manera que la supresión de estos bordes es poco significativa.

Otras técnicas realizan una ampliación de la imagen hasta que alcance el tamaño necesario para que la máscara no pierda contacto al colocarse sobre los píxeles más extremos de la imagen. En estos casos se pueden adoptar distintas soluciones: una primera rellena esas filas y esas columnas que faltan con píxeles de valor cero. La alternativa es dar a los píxeles de esa región valores distintos de cero, repitiendo, por ejemplo, los valores de los bordes de la imagen. Las técnicas de ampliar la imagen de entrada para adecuarla al tamaño de la máscara se utilizan cuando, a pesar de ser estrecha la región en estudio, resulte interesante o significativo llegar hasta los píxeles extremos.

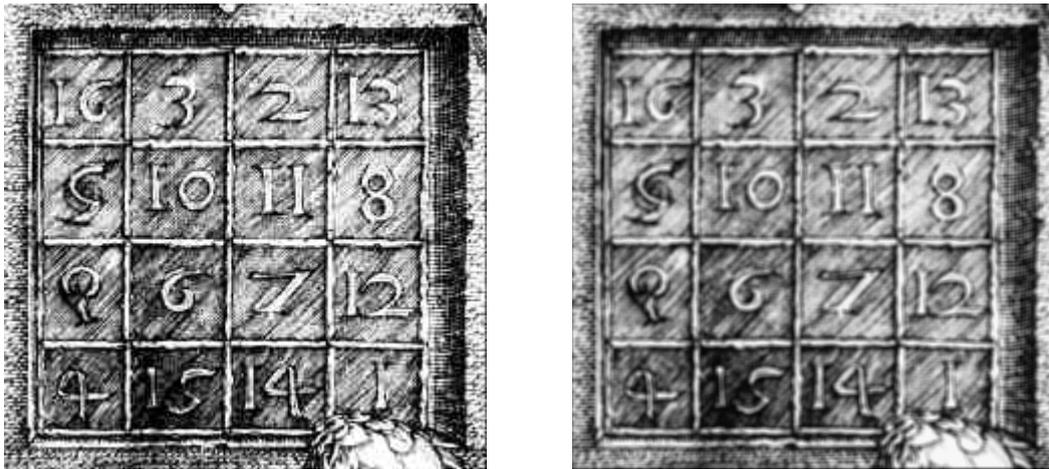
### 3.2.3.2.1. Filtrado paso de baja: suavizado.

El efecto de un filtrado LP es hacer más difusos los bordes y reducir el ruido introducido en la imagen. La respuesta impulsiva de un filtro LP se caracteriza por tener todos los coeficientes positivos. Su forma más sencilla de implementación es un promediado uniforme entre los píxeles que rodean a aquel que se va a filtrar. Esto supone en principio una máscara toda de unos; en la práctica, para evitar que se exceda el rango máximo de gris, se escala por el número de coeficientes del filtro. En la figura 3.3 se presentan dos filtros LP con máscaras de tamaño 2x2 y 3x3, respectivamente.



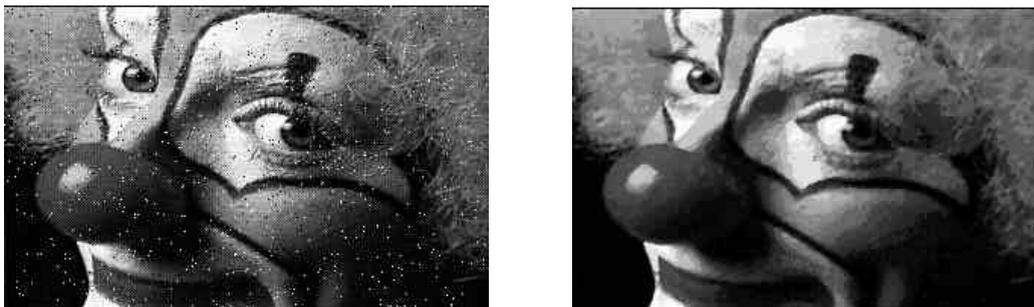
**Figura 3.3. Filtros LP**

La operación de filtrado LP produce un efecto de suavizado, que es proporcional al tamaño del filtro. Cuanto mayor es el área del filtro menor es la frecuencia de corte del correspondiente filtro en el dominio de Fourier. En la figura 3.4 se muestra el efecto del filtrado paso de baja por promediado con una máscara 4x4; se puede observar que se han suavizado los contornos.



**Figura 3.4. Filtrado LP por promediado.**

El resultado no altera los cambios suaves pero sí los abruptos. Si el objetivo del filtrado es reducir ruido pero manteniendo en la medida de lo posible los bordes y detalles finos, entonces una alternativa al promediado es el filtro de mediana, en el que cada píxel se sustituye por la mediana de los vecinos, incluido el propio píxel. La principal función del filtro de mediana es forzar a los puntos con intensidades diferentes parecerse más a sus vecinos, eliminando los picos aislados que aparecen bajo el área de la máscara. Esto resulta obviamente más costoso computacionalmente pero, a la vez, es un método eficaz para preservar los bordes en la imagen. El filtro de mediana da muy buenos resultados con un tipo particular de ruido, denominado de sal y pimienta. Este consiste en puntos blancos aislados en zonas oscuras y viceversa en las zonas claras. En la figura 3.5 presentamos una imagen en la que se ha introducido ruido de sal y pimienta y el resultado obtenido tras aplicar a la misma un filtro de mediana.



**Figura 3.5. Imagen con ruido de sal y pimienta. Filtrado por mediana.**

### **3.3. Filtrado paso de alta: realce de los detalles.**

El objetivo de los filtros HP es realzar los detalles o descubrir elementos que han sido perdidos o emborronados, bien por error o bien por un mal método en la adquisición de la imagen. Otra forma de interpretar el filtrado paso de alta es como una modificación que aumenta el contraste local de una imagen. Elimina el cambio gradual en la imagen (componentes de baja frecuencia) y acentúa los detalles finos y el ruido (componentes de alta frecuencia).

Dentro de las operaciones de realce de imágenes el filtrado paso de alta es el más adecuado para optimizar la detección de microcalcificaciones en mamografías. Con este tipo de filtros se consigue enfatizar los bordes, para así facilitar el correcto funcionamiento del algoritmo de crecimiento de regiones.

Los filtros HP se pueden implementar directamente o aprovechando las características de un filtro LP. En este último caso se adopta la relación (15):

$$g(n_1, n_2) = af(n_1, n_2) - bf_L(n_1, n_2) \quad (3.3)$$

donde  $f(n_1, n_2)$  es la imagen original,  $f_L(n_1, n_2)$  es la imagen filtrada paso-bajo,  $a$  y  $b$  son escalares positivos que cumplen  $a > b$  y  $g(n_1, n_2)$  es la imagen procesada. Rescribiendo  $f(n_1, n_2)$  como una suma de la imagen filtrada paso-bajo,  $f_L(n_1, n_2)$ , y la filtrada paso-alto,  $f_H(n_1, n_2)$ , podemos expresar 3.3 como sigue:

$$g(n_1, n_2) = (a-b)f_L(n_1, n_2) + af_H(n_1, n_2) \quad (3.4)$$

Este segundo método es el que se usa para implementar dos de los filtros utilizados en este proyecto. Se trata del filtro Gaussiano y el filtro de Difusión, que explicaremos más adelante.

La respuesta impulsiva de un filtro HP tiene los coeficientes cercanos al centro positivos y negativos los de la periferia. En la figura 3.6 se presentan algunos ejemplos de filtros clásicos HP. La característica principal de estos filtros es que la suma de las amplitudes de cada respuesta impulsiva es la unidad, de forma que la respuesta frecuencial  $H(w_1, w_2)$  toma el valor unitario en  $w_1 = w_2 = 0$ , por lo que no se modifica la componente de continua. Esta característica preserva la intensidad media de la imagen de salida respecto a la original.

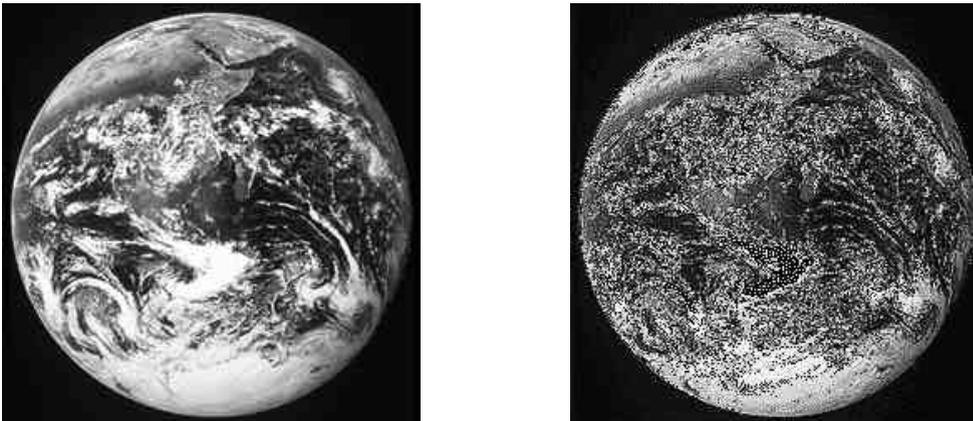
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

1	-2	1
-2	5	-2
1	-2	1

-1/7	-2/7	-1/7
-2/7	19/7	-2/7
-1/7	-2/7	-1/7

**Figura 3.6. Filtros HP clásicos.**

La figura 3.7 representa un ejemplo de filtrado paso de alta. La máscara del filtro aplicado es la primera de las que aparecen en la figura 3.6.



**Figura 3.7. Filtrado HP.**

Hay que tener en cuenta que puede que no se garantice que la intensidad de la imagen permanece entre los rangos máximo y mínimo de la imagen original debido al filtrado, de forma que puede que se haga necesario un reescalado de la imagen resultante. Para preservar los nuevos valores de los píxeles dentro del intervalo permitido se lleva a cabo una operación de modificación del rango dinámico tras el filtrado.

### 3.3.1. Filtro de Gauss.

El filtro HP de Gauss se obtiene a partir de la implementación del correspondiente filtro LP. Después se resta a la imagen original la imagen filtrada LP.

El filtro LP de Gauss presenta las características típicas de esta clase de filtros, que comentamos anteriormente. La única peculiaridad es que, en lugar de una máscara con todos los coeficientes iguales, como era propio del promediado, a éstos se le dan valores que siguen una distribución gaussiana bidimensional. La expresión que se aplica a los coeficientes sigue una función que no es más que una extensión a dos dimensiones de la distribución de Gauss. Así, tenemos la ecuación siguiente:

$$G = \frac{1}{s_x s_y 2\pi} e^{-\frac{(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2}{2s_x s_y}} \quad (3.5)$$

En la implementación se tiene en cuenta el desplazamiento que debe realizarse para que el centro de la campana de Gauss se sitúe justamente en el píxel central de la máscara del filtro.

En cuanto al ancho de banda espacial que deberá tener el filtro (que es proporcional a  $\sigma$ ) deberá ser lo suficientemente ancho como para abarcar el tamaño de las microcalcificaciones, pero lo suficientemente estrecho como para que éstas tengan considerable peso específico dentro de la región de soporte del filtro. Se observa que un

valor de  $\alpha$  que ofrece un comportamiento adecuado es 2,75 y éste será el que adoptemos.

Respecto a la región de soporte del filtro con el que trabajaremos, ésta será de tamaño  $7 \times 7$ .

### 3.3.2. Filtro Highboost.

A diferencia de otros filtros paso de alta, que se obtienen restando a un filtro paso de baja la imagen original, el filtro Highboost no elimina completamente las componentes de baja frecuencia. Así podemos obtener una imagen de salida más parecida a la original. Esto se consigue introduciendo un parámetro  $A$ , llamado de amplificación, que mide la relación de continua que estamos dejando pasar a la imagen filtrada. Esto se refleja en las siguientes ecuaciones:

$$g(n_1, n_2) = Af(n_1, n_2) - f_L(n_1, n_2) \quad (3.6)$$

$$g(n_1, n_2) = (A-1)f(n_1, n_2) + f_H(n_1, n_2) \quad (3.7)$$

Para  $A=1$  tendríamos un filtro paso de alta normal. El rango típico de valores de este parámetro está comprendido entre 1 y 1,5. De esta forma se modifica el valor de continua de la imagen, puesto que la suma de los coeficientes del filtro deberá ser necesariamente mayor que uno.

Los coeficientes de la respuesta impulsiva del filtro se muestran en la figura 3.8, siendo:

$$w = 9A - 1 \quad (3.8)$$

-1/9	-1/9	-1/9
-1/9	-w/9	-1/9
-1/9	-1/9	-1/9

**Figura 3.8. Filtro Highboost.**

### 3.3.3. Filtro de difusión.

El filtro de difusión es el último de los que se aplican a las mamografías en este proyecto para conseguir el realce de las microcalcificaciones.

Como se comentará en el capítulo de resultados, el filtro de difusión no ofrece el mejor comportamiento en cuanto al número de aciertos en la detección de clusters de microcalcificaciones, pero presenta la ventaja de que preserva la localización de los bordes de éstas. Esta característica hace que pueda ser preferible a otros tipos de filtros HP para algunas aplicaciones concretas, como podría ser un análisis y extracción de parámetros de forma de las microcalcificaciones. En estos casos será conveniente preservar el contorno de las microcalcificaciones para conseguir una correcta clasificación.

Al igual que el filtro gaussiano el filtro de difusión original es LP, por lo que obtenemos la imagen filtrada HP restando la imagen filtrada LP a la que tenemos de partida. El objetivo que se consigue con este tipo de filtrado es mantener los bordes abruptos, eliminando el ruido y las pequeñas estructuras. Como lo que nos proponemos aquí es precisamente resaltar los bordes de las microcalcificaciones, que constituyen elementos de pequeño tamaño, aplicamos el filtro equivalente HP para lograr el efecto deseado.

La idea del diseño del filtro de difusión tiene como base la analogía entre el fenómeno de difusión, que se da en la transferencia de calor dentro de la materia, y el procesado de una imagen. Para expresar la difusión de calor se emplea la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k\nabla T) + Q \quad (3.9)$$

El operador  $\nabla$  representa al gradiente y el símbolo  $\text{div}$  es el operador divergencia.  $T$  es la temperatura del medio, el parámetro  $k$  es la difusividad térmica o coeficiente de difusión y  $Q$  representa la energía calorífica generada por posibles fuentes internas de calor. La formulación básica se obtiene cuando el medio se supone homogéneo, sin fuentes y con una difusividad térmica constante.

Para trasladar el concepto de difusión al procesado de señales se deriva una nueva función de difusividad, y se relaciona ésta con un gradiente local. Por ser un filtrado LP la dependencia será inversa: difusión decreciente para gradiente creciente. Así, la ecuación obtenida queda:

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{D}\nabla I(x, y, t)) \quad (3.10)$$

donde  $I(x,y,t)$  es el valor de la señal en el instante  $t$  y en la posición  $(x,y)$  y  $\mathbf{D}$  es la matriz de difusividad. El parámetro  $\mathbf{D}$  determina el tipo de difusión:

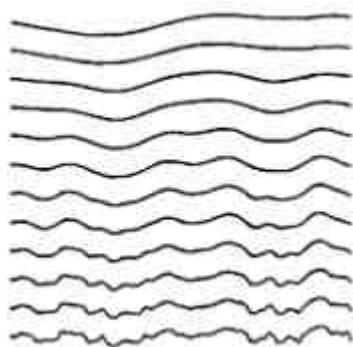
- Si  $D$  es un valor constante  $k$  la difusión es isotrópica.
- Si  $D$  es una función no lineal  $g(\cdot)$ , entonces la difusión se denomina isotrópica no lineal o anisotrópica. Este último tipo de difusión es el que resulta útil para el filtrado de señales pero comenzamos tomando la difusión isotrópica como punto de partida.

### 3.3.3.1. Difusión isotrópica.

La idea de la difusión isotrópica parte de la consideración de la familia de imágenes  $I(x,y,t)$  obtenidas a partir de la convolución de la imagen original  $I_0(x,y)$  con un filtro gaussiano  $g(x,y;t)$  de varianza  $t$ ,

$$I(x, y, t) = I_0(x, y) * g(x, y; t) \quad (3.11)$$

siendo  $t$  un parámetro denominado escala-espacio. A mayor  $t$  imágenes más borrosas. La figura 3.9 representa una familia de señales 1D obtenidas filtrando sucesivamente con filtros gaussianos de varianza creciente.



**Figura 3.9. Familia de señales 1D obtenidas de la convolución con filtros gaussianos de varianza creciente.**

Koenderik (15) encontró que esta familia de imágenes dependientes del parámetro  $t$ , podía ser vista como la solución de la ecuación de difusión del calor,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = k \operatorname{div}(\nabla I) = k \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

donde la difusividad  $k$  es una constante y la condición inicial a imponer es  $I(x,y,0)=I_0(x,y)$ . El efecto de la difusión isotrópica es una transferencia de píxeles con valores altos a píxeles con valores bajos, es decir, un suavizado o filtrado paso de baja.

Koenderik estableció las propiedades más importantes que se le deben imponer al filtro que se emplee para suavizar la imagen:

1. Causalidad. Se requiere que cualquier característica existente en un determinado nivel de resolución tenga una “causa” en algún nivel de resolución más fina. En

otras palabras, con esta propiedad se consigue que no se cree ningún detalle espurio a ningún nivel de resolución, además de los ya existentes en la imagen original.

2. Homogeneidad e isotropía. Se exige que el filtrado sea suave para que los cambios se sucedan de forma continua conforme se realiza un desplazamiento ascendente en la pila de imágenes.

Aplicando estas condiciones Koenderik obtiene la ecuación de la difusión isótropa, indicada en 3.8. Es importante destacar que la segunda de las restricciones se impone por simplicidad, y es modificada por Perona y Malik (16) para desarrollar la difusión anisótropa.

Respecto a la condición de causalidad, ésta no fuerza a usar necesariamente un filtro gaussiano para el suavizado de la imagen a los distintos niveles de resolución, si bien se escoge éste por simplicidad. La elección de un filtro gaussiano no es correcta cuando la imagen no es infinita (lo que se da en los casos reales). Para solucionar este problema se desarrollan métodos para modificar la imagen original de forma que desaparezcan sus fronteras.

El principal inconveniente de la difusión isótropa es que en cada nivel de resolución varía la posición de los bordes de la imagen respecto a la localización en la imagen original. Esta desventaja de los filtros gaussianos y de la difusión isótropa no se encuentra en el método de difusión anisótropa, que es el aplicado en la implementación del filtro de difusión desarrollado en este proyecto.

### 3.3.3.2. Difusión anisótropa.

Partiendo de la limitación de la difusión isótropa, comentada anteriormente, Perona y Malik (17) dedujeron las condiciones que debía cumplir cualquier método de generación de imágenes multirresolución:

1. Causalidad. No se deben generar nuevos detalles espurios a ningún nivel de resolución.
2. Localización inmediata. En cada nivel de resolución las fronteras deben ser abruptas.
3. Suavizado por partes. En todas las escalas el suavizado del interior de las regiones debe ocurrir antes que el suavizado entre regiones.

La forma de modificar la difusión isótropa para que cumpla las restricciones anteriores es sustituir el coeficiente de difusividad  $k$ , hasta ahora tomado como una constante, por una función  $c(x,y,t)$ .

La ecuación de la difusión anisótropa viene dada por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales (15):

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(c(x, y, t)\nabla I) = c(x, y, t)\Delta I + \nabla c \nabla I \quad (3.13)$$

donde  $\Delta$  representa al operador laplaciano. Nótese que si  $c(x,y,t)$  es una constante, la anterior ecuación se reduce a la de la difusión isotrópica.

Para cada valor de la escala  $t$  nos interesa enfatizar el suavizado en el interior de las regiones frente al de los bordes. Según este criterio determinaremos la forma que tendrá la función  $c(x,y,t)$ , coeficiente de difusividad. El problema con el que nos encontramos es que no se conoce a priori la localización exacta de los bordes, teniéndose que hacer una estimación. Dicha estimación,  $\mathbf{E}(x,y,t)$ , debe cumplir con los siguientes criterios:

1.  $\mathbf{E}(x,y,t)=0$  en el interior de cada región.
2.  $\mathbf{E}(x,y,t)=\mathbf{K}\mathbf{e}(x,y,t)$  en cada punto, donde  $\mathbf{e}$  es un vector unitario normal al borde en el punto  $(x,y)$  y  $\mathbf{K}$  es el contraste local del borde (diferencia entre las intensidades de la imagen en las cercanías del punto).

Una vez realizada la estimación de  $\mathbf{E}(x,y,t)$ , el coeficiente de difusividad  $c(x,y,t)$  se escoge como una función de la magnitud de  $\mathbf{E}$ , es decir,

$$c=g(|\mathbf{E}|) \tag{3.14}$$

Para tener definido el coeficiente de difusividad  $c(x,y,t)$  habrá que determinar cómo se calcula  $\mathbf{E}(x,y,t)$  y qué función no lineal  $g(\cdot)$  se aplica:

- Vector de bordes  $\mathbf{E}(x,y,t)$ . Resulta de gran importancia conseguir una adecuada estimación de la localización de los bordes para que el proceso de difusión tenga buenos resultados. Perona y Malik (15) demuestran que una excelente elección de  $\mathbf{E}(x,y,t)$  es tomar el gradiente de la función  $I$  (intensidad de la imagen),

$$\mathbf{E}(x,y,t)=\nabla I(x,y,t) \tag{3.15}$$

- Función  $g(\cdot)$ . Para conseguir los resultados adecuados y cumplir con las condiciones señaladas al principio de este apartado  $g(\cdot)$  debe ser una función no negativa, monótonamente decreciente y tal que  $g(0)=1$ . De esta forma el proceso de difusión tiene lugar en el interior de las regiones y se dificulta en sus fronteras, donde la magnitud de  $\mathbf{E}$  es grande.

Perona y Malik (15) prueban con distintos tipos de funciones  $g(\cdot)$ , obteniendo resultados similares, y al final reducen las clases de funciones  $g(\cdot)$  a dos. Partiendo de

$$c(x,y,t)=g(|\nabla I(x,y,t)|), \tag{3.16}$$

definen los dos tipos de coeficientes siguientes, según el objetivo de la aplicación particular:

1. Cuando se quieren enfatizar los bordes de gran contraste frente a los de bajo contraste,

$$g(|\nabla I|) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla I|}{c}\right)^2\right) \quad (3.17)$$

2. Cuando se quieren enfatizar las regiones grandes frente a las pequeñas,

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{\chi}\right)} \quad (3.18)$$

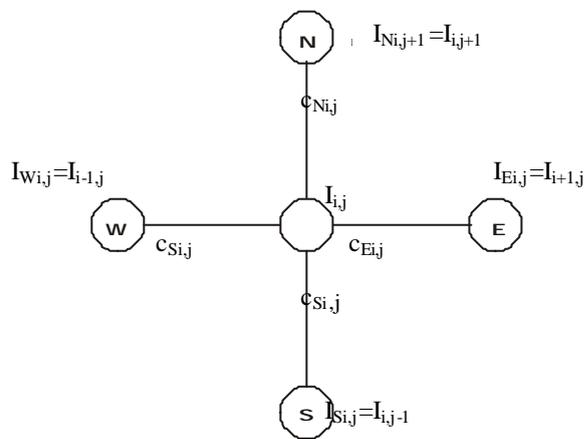
donde  $c$  representa un valor umbral.

La segunda de las funciones  $g(\cdot)$  es la que se utiliza en el filtro de difusión aplicado.

### 3.3.3.3. Implementación del filtro digital.

Pasamos a desarrollar la aplicación de la difusión anisótropa a la implementación del filtro digital.

La discretización de la ecuación de la difusión anisótropa (3.13) se realiza tomando una estructura en celosía con valores de intensidad,  $I$ , asociados a los vértices y coeficientes de difusividad,  $c$ , correspondientes a los arcos. Este esquema se muestra en la figura 3.10.



**Figura 3.10. Estructura de un esquema computacional discreto para la simulación de la ecuación de la difusión.**

Para aplicar la discretización al operador laplaciano, a partir de los cuatro píxeles vecinos más cercanos, se toma la expresión:

$$I'_{i,j} = I'_{i,j} + \mathbf{I} [c_N \cdot \nabla_N I + c_S \cdot \nabla_S I + c_E \cdot \nabla_E I + c_W \cdot \nabla_W I]_{i,j} \quad (3.19)$$

donde  $0 \leq \mathbf{I} \leq 1/4$  para que el método sea estable, N, S, E, W son los mnemónicos para las cuatro direcciones de movimiento, el superíndice y los subíndices del corchete se aplican a todos los términos que engloban y el operador  $\nabla$  (que no debe confundirse con el operador gradiente habitual) indica la diferencia con el vecino más cercano y se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \nabla_N I_{i,j} &\equiv I_{i-1,j} - I_{i,j} \\
 \nabla_S I_{i,j} &\equiv I_{i+1,j} - I_{i,j} \\
 \nabla_E I_{i,j} &\equiv I_{i,j+1} - I_{i,j} \\
 \nabla_W I_{i,j} &\equiv I_{i,j-1} - I_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Los coeficientes de difusividad son actualizados en cada iteración como una función del gradiente de intensidad:

$$\begin{aligned}
 c_{Ni,j}^t &= g \left( \left\| (\nabla I)_{i+(1/2),j}^t \right\| \right) \\
 c_{Si,j}^t &= g \left( \left\| (\nabla I)_{i-(1/2),j}^t \right\| \right) \\
 c_{Ei,j}^t &= g \left( \left\| (\nabla I)_{i,j+(1/2)}^t \right\| \right) \\
 c_{Wi,j}^t &= g \left( \left\| (\nabla I)_{i,j-(1/2)}^t \right\| \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

El valor del gradiente de un píxel se puede calcular tomando distintas estructuras de agrupación de vecinos del píxel en estudio, logrando en cada caso diferentes soluciones de compromiso entre exactitud y localidad. La elección más simple consiste en aproximar la norma del gradiente en cada arco por el valor absoluto de su proyección a lo largo de la dirección del propio arco. Así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 c_{Ni,j}^t &= g \left( \left| \nabla_N I_{i,j}^t \right| \right) \\
 c_{Si,j}^t &= g \left( \left| \nabla_S I_{i,j}^t \right| \right) \\
 c_{Ei,j}^t &= g \left( \left| \nabla_E I_{i,j}^t \right| \right) \\
 c_{Wi,j}^t &= g \left( \left| \nabla_W I_{i,j}^t \right| \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Este esquema de discretización conserva la propiedad de la ecuación continua (3.15) de que la suma total de intensidades se preserva tras el filtrado. Además el flujo de intensidad a través de cada arco de la celosía depende únicamente de los valores de intensidad de los nodos que lo definen.

Es posible demostrar que, cualquiera que sea la elección de la aproximación del gradiente, el esquema discretizado satisface el principio de causalidad, supuesto que la función  $g$  se mantiene acotada entre 0 y 1. Esta condición exige que no aparezcan nuevos máximos ni mínimos como consecuencia del filtrado.

Se puede demostrar la anterior propiedad partiendo de la ecuación 3.19, exigiendo  $\ddot{\epsilon} \in [0,1/4]$ , y  $c \in [0,1]$ , y definiendo  $(I)_{i,j}^t = \max\{(I, I_N, I_S, I_E, I_W)_{i,j}^t\}$ , y  $(I_m)_{i,j}^t = \min\{(I, I_N, I_S, I_E, I_W)_{i,j}^t\}$ , el máximo y el mínimo de los píxeles vecinos de  $I_{i,j}$  en la iteración  $t$ . Se trata de probar que se cumple:

$$(I_m)_{i,j}^t \leq I_{i,j}^{t+1} \leq (I_M)_{i,j}^{t+1} \quad (3.23)$$

lo cual equivale a decir que no pueden existir nuevos máximos y mínimos locales en los sucesivos niveles del parámetro escala-espacio,  $t$ .

Así tenemos:

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{t+1} &= I_{i,j}^t + \mathbf{I}[c_N \cdot \nabla_N I + c_S \cdot \nabla_S I + c_E \cdot \nabla_E I + c_W \cdot \nabla_W I]_{i,j}^t = \\ &= I_{i,j}^t \left(1 - \mathbf{I}(c_N + c_S + c_E + c_W)_{i,j}^t\right) + \mathbf{I}(c_N \cdot I_N + c_S \cdot I_S + c_E \cdot I_E + c_W \cdot I_W)_{i,j}^t \leq \\ &\leq I_{Mij}^t \left(1 - \mathbf{I}(c_N + c_S + c_E + c_W)_{i,j}^t\right) + \mathbf{I}I_{Mij}^t (c_N + c_S + c_E + c_W)_{i,j}^t = I_{Mij}^t \end{aligned} \quad (3.24)$$

y, de la misma manera:

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{t+1} &\geq I_{mij}^t \left(1 - \mathbf{I}(c_N + c_S + c_E + c_W)_{i,j}^t\right) \\ &+ \mathbf{I}I_{mij}^t (c_N + c_S + c_E + c_W)_{i,j}^t = I_{mij}^t \end{aligned} \quad (3.25)$$

