

PRIMERA PARTE

PRIMERA PARTE

1 INTRODUCCIÓN.....	1-1
1.1 NECESIDAD DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME (NDFT) ..	1-2
1.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA (DFT)	1-2
1.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA SUBBANDA (SB-DFT)	1-5
1.4 CÁLCULO DE LAS MUESTRAS NO UNIFORMEMENTE ESPACIADAS EN FRECUENCIA ...	1-7
1.5 RESUMEN	1-8
 2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME.....	 2-1
2.1 CONCEPTOS BÁSICOS	2-1
2.1.1 Definición	2-1
2.1.1.1 Ejemplo	2-2
2.1.2 Análisis espectral usando la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme	2-3
2.1.3 Cálculo de la inversa de la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme..	2-6
2.1.3.1 Método Directo.	2-7
2.1.3.2 La interpolación de Lagrange.....	2-7
2.1.3.2.1 Ejemplo.....	2-7
2.1.3.3 La interpolación de Newton.....	2-8
2.1.3.3.1 Ejemplo.....	2-10
2.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME.....	2-11
2.2.1 Propiedades básicas.....	2-11
2.2.2 La convolución lineal usando la NDFT	2-17
2.2.2.1 Ejemplo.....	2-20
2.3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME.....	2-23
2.3.1 Método directo.....	2-24
2.3.2 Método de Horner.....	2-24
2.3.3 El algoritmo de Goertzel. Interpretación: filtro digital.....	2-25
2.3.4 El algoritmo de Goertzel. Interpretación: series trigonométricas.....	2-28
2.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME SUBBANDA (SB-NDFT).	2-30
2.4.1 Análisis de banda completa	2-31
2.4.2 Análisis de banda parcial	2-34
2.4.3 Preprocesado generalizado	2-36
2.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME BIDIMENSIONAL	2-37
2.5.1 Definición	2-37
2.5.2 Casos especiales de la NDFT 2-D	2-39
2.5.2.1 Rejilla rectangular no uniformemente espaciada.....	2-39
2.5.2.2 Muestreo no uniforme en líneas paralelas	2-41
2.6 RESUMEN	2-43

1 INTRODUCCIÓN

El crecimiento en el campo del procesamiento digital de la señal comenzó con la simulación de sistemas continuos en el tiempo en los años 50 del siglo pasado, si bien, el origen de esta materia se sitúa hace 400 años cuando diversos métodos fueron desarrollados para resolver numéricamente problemas tales como la interpolación y la integración. Durante los últimos 40 años, se han sucedido extraordinarios avances en la parte teórica de este tema así como también en la aplicación práctica del procesamiento digital de la señal.

En muchas aplicaciones, la representación en el dominio frecuencial de una señal discreta en el tiempo o de un sistema es algo de interés. Para conseguir esto, la Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo (DTFT) es usada frecuentemente. Para el caso de una señal discreta en el tiempo de longitud finita, la representación en el dominio de la frecuencia más comúnmente usada es la Transformada de Fourier Discreta (DFT) que da lugar a una secuencia finita en el dominio de la frecuencia. La DFT se compone, simplemente, de muestras de la DTFT de la secuencia en puntos igualmente espaciados, o dicho de otra forma, muestras de la transformada Z en puntos igualmente espaciados del círculo unidad. La DFT proporciona información sobre el contenido espectral de la señal tratada en puntos igualmente espaciados dentro del dominio frecuencial discreto pudiéndose usar, por tanto, para el análisis espectral de señales. Varias técnicas sobradamente conocidas, como los algoritmos para implementar la Transformada de Fourier Rápida (FFT), han supuesto un extraordinario avance para el cálculo eficiente de la DFT. Una importante herramienta en el procesamiento digital de la señal es la convolución lineal de dos secuencias finitas, que, frecuentemente, puede ser implementada muy eficientemente usando la DFT.

Una generalización de la Transformada de Fourier Discreta, objeto del presente proyecto, es la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme (NDFT), que puede ser usada para obtener información en el dominio de la frecuencia de una secuencia de longitud finita en puntos arbitrariamente elegidos.

En el presente proyecto, desarrollaremos los principios básicos en los que se asienta la NDFT incluyendo su definición, propiedades y aspectos computacionales. También, extenderemos el concepto al caso de dos dimensiones y presentaremos algunos métodos para el diseño de filtros digitales bidimensionales usando la mencionada transformada así como también veremos de qué forma se puede aplicar la NDFT a la decodificación de señales DTMF (Dual-Tone Multi-Frequency).

1.1 NECESIDAD DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME (NDFT)

La representación de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia es una herramienta importante para el estudio del procesamiento de la señal, comunicaciones y otros campos relacionados. En muchas aplicaciones, las señales y sistemas discretos en el tiempo están caracterizados por secuencias de longitud finita. Como se dijo anteriormente, la representación en frecuencia más usada de dichas secuencias es aquella que se obtiene mediante el cálculo de su Transformada de Fourier Discreta, la cual, corresponde a muestras igualmente espaciadas de la Transformada de Fourier Discreta en el tiempo (DTFT), o equivalentemente, muestras de la Transformada Z evaluadas en el círculo unidad del plano Z en puntos igualmente espaciados. Sin embargo, en la mayoría de las señales, la energía se distribuye de manera no uniforme en el dominio frecuencial. Es por ello que un esquema de muestreo no uniforme, adecuado a las características particulares del espectro de cada señal, puede ser más útil y conveniente en la mayoría de las aplicaciones. Este hecho ha sido el principal motivo para el desarrollo del concepto de la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme o Nonuniform Discrete Fourier Transform (de forma abreviada, NDFT). De esta forma, la NDFT de una secuencia de longitud finita se obtiene a partir de muestras de su transformada Z evaluadas en puntos arbitrariamente elegidos dentro del plano Z. Se puede advertir que este concepto que estamos presentado no es más que una generalización de la Transformada de Fourier Discreta convencional.

Vamos a presentar la NDFT mediante su definición, el estudio de sus propiedades principales así como también mostraremos su potencial en el procesamiento de la señal considerando algunos de los campos donde dicha transformada se puede aplicar como es el diseño de filtros digitales y la decodificación de señales DTMF entre otros. No obstante, comenzaremos por una rápida revisión de la definición de la tradicional Transformada de Fourier Discreta comentando alguna de sus propiedades, carga computacional, etc.

1.2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA (DFT)

Consideremos una secuencia $x[n]$ de longitud finita, $0 \leq n \leq N-1$. Su transformada Z vendrá dada por:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n},$$

donde $X(z)$ es una función de variable compleja z . Puesto que $x[n]$ es una secuencia de longitud finita N y causal, la región de convergencia de $X(z)$ es todo el plano Z excepto el origen. Los N puntos de la Transformada de Fourier Discreta $X[k]$ de la secuencia $x[n]$ considerada se definen como muestras frecuenciales $X(z_k)$, que se obtienen mediante el muestreo de $X(z)$ en N puntos igualmente espaciados z_k del círculo unidad, $z = e^{j\omega}$, dados por

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

así,

$$X[k] = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Se observa que $X[k]$ es también una secuencia de longitud N . La figura siguiente muestra la localización de las muestras DFT en la plano Z para el caso $N=16$.

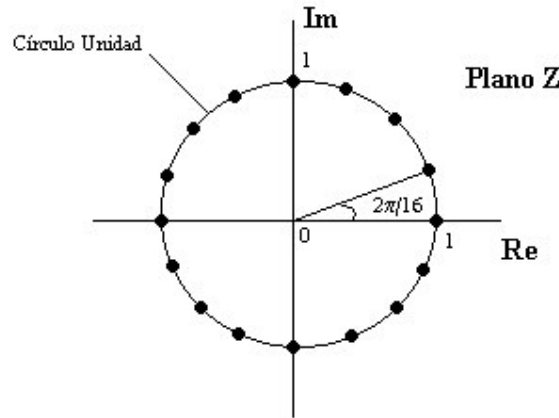


Figura 1. Localización de las muestras en el plano Z para el caso de una DFT de 16 puntos.

Haciendo un cambio de notación del tipo,

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}},$$

la expresión para el cálculo de la DFT puede ser reescrito de la siguiente manera

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

La DFT inversa (IDFT) viene dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

De forma matricial, la DFT puede ser expresada mediante $\mathbf{X}=\mathbf{D}\mathbf{x}$ donde

$$\mathbf{X} = [X(z_0) \ X(z_1) \ \dots \ X(z_{N-1})]^T,$$

$$\mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N-1]]^T,$$

y,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

A la matriz $\mathbf{D}$, de tamaño $N \times N$, se le llama matriz DFT.

La DFT tiene algunas propiedades interesantes que pueden ser usadas en muchas situaciones prácticas. Una aplicación especialmente útil de la DFT es el cálculo de la convolución circular y convolución lineal de dos secuencias de longitudes finitas e iguales. Por ejemplo, si $x[n]$ y $h[n]$ son dos secuencias de longitud N y, $X[k]$ y $H[k]$ sus transformadas DFT respectivamente, entonces la secuencia de N puntos IDFT $y_c[n]$ proveniente del producto $Y_c[k] = X[k]H[k]$ viene dada por la convolución circular de $x[n]$ y $h[n]$

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[\langle n-m \rangle_N] = x[n] \otimes_N h[n], \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

donde $\langle p \rangle_N$ denota p módulo N .

La convolución lineal $y_L[n]$ de $x[n]$ y $h[n]$ dada por

$$y_L[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[n-m] = x[n] \otimes h[n], \quad 0 \leq n \leq 2N-1$$

puede ser también calculada mediante el uso de la DFT. Para ello, a las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ se les hace un ‘zero-padding’ de $N-1$ ceros obteniéndose dos secuencias de longitud $2N-1$ dadas por

$$x_a[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1, \end{cases}$$

$$h_a[n] = \begin{cases} h[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & N \leq n \leq 2N-1. \end{cases}$$

Sean $X_a[k]$ y $H_a[k]$ las DFT, de longitud $2N-1$, de $x_a[n]$ y $h_a[n]$ respectivamente. Sea $Y_L[k]$ una secuencia obtenida mediante el producto $Y_L[k] = X_a[k]H_a[k]$. Se comprueba entonces que la IDFT, de longitud $2N-1$, de $Y_L[k]$ es precisamente la secuencia $y_L[n]$.

La DFT es ampliamente usada en el procesamiento digital de la señal puesto que puede ser calculada de manera muy eficiente mediante los algoritmos FFT (Fast Fourier Transform) , Cooley y Tukey (1965). El número de operaciones aritméticas necesarias para el cálculo de la DFT de forma directa, es decir, a partir de su fórmula de definición, es $O(N^2)$. Gracias a los algoritmos FFT, este número se reduce a $O(N \log_2 N)$ si N es potencia de 2 ó $O(N \sum_i m_i)$ donde los enteros m_i son factores primos de N .

1.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA SUBBANDA (SB-DFT)

Las muestras dominantes de la DFT en una o más partes del rango frecuencial se pueden calcular de manera muy eficiente mediante el método de la DFT Subbanda (Mitra, 1990). La idea básica que se esconde detrás de este método es la de descomponer la secuencia a tratar $x[n]$ en una suma de dos subsecuencias con componentes en frecuencia situadas en bandas contiguas usando una descomposición subbanda estructural. Así, para calcular la DFT se usarán únicamente las subsecuencias que contengan la mayor energía. Sin embargo, este método da lugar a valores aproximados de los que se obtendrían mediante la aplicación de la DFT de manera exacta y está restringido al caso en que las secuencias a tratar tengan una longitud N que sea potencia de 2.

En el primer paso, la secuencia $x[n]$ se descompone en 2 subsecuencias, $g_L[n]$ y $g_H[n]$, de longitud $N/2$ cada una de ellas, que vienen dadas por

$$g_L[n] = \frac{1}{2} \{x[2n] + x[2n+1]\},$$

$$g_H[n] = \frac{1}{2} \{x[2n] - x[2n+1]\},$$

con $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Estas subsecuencias, compuestas por muestras pares e impares, son simplemente las componentes de baja frecuencia y de alta frecuencia de $x[n]$ respectivamente, submuestreadas por un factor 2. La secuencia original $x[n]$ se puede reconstruir a partir de $g_L[n]$ y $g_H[n]$ mediante

$$\begin{aligned} x[2n] &= g_L[n] + g_H[n], \\ x[2n+1] &= g_L[n] - g_H[n], \end{aligned}$$

con $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Si $G_L(z)$ y $G_H(z)$ son las transformadas en Z de $g_L[n]$ y $g_H[n]$ respectivamente, podemos deducir lo siguiente

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]z^{-2n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1]z^{-(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \{g_L[n] + g_H[n]\}z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \{g_L[n] - g_H[n]\}z^{-2n} \\ &= (1+z^{-1}) \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g_L[n]z^{-2n} + (1-z^{-1}) \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g_H[n]z^{-2n} \\ &= (1+z^{-1})G_L(z^2) + (1-z^{-1})G_H(z^2). \end{aligned}$$

La DFT de N puntos, $X[k]$, de $x[n]$ se puede, por tanto, calcular mediante la evaluación de la expresión obtenida en el círculo unidad resultando

$$X[k] = (1 + W_N^k) G_L\left[\left\langle k \right\rangle_{\frac{N}{2}}\right] + (1 - W_N^k) G_H\left[\left\langle k \right\rangle_{\frac{N}{2}}\right], \quad 0 \leq k \leq N-1,$$

donde $G_L(k)$ y $G_H(k)$ son las DFTs de $N/2$ puntos de las subsecuencias $g_L[n]$ y $g_H[n]$ respectivamente. Esta expresión obtenida se llama DFT Subbanda. En la figura 2, mostramos un esquema de este método. Se debe advertir que las dos DFTs de $N/2$ puntos necesarias para este método se pueden implementar mediante el uso de cualquiera de los algoritmos FFT. El algoritmo DFT Subbanda se puede aplicar para el cálculo de las DFTs, $G_L(k)$ y $G_H(k)$, de las subsecuencias siempre que $N/2$ sea par, dando lugar a un algoritmo de 2 etapas. Generalizando, este proceso podría ser repetido hasta que todas las DFTs a calcular tuvieran longitud 2. Así, si $N = 2^M$, el número total de multiplicaciones complejas requeridas para la implementación del algoritmo DFT Subbanda de M etapas es $\frac{N}{2} \log_2 N$, que es el mismo que para cualquier tipo de

algoritmo Cooley-Tukey. Sin embargo, el número total de sumas es mucho mayor para este algoritmo DFT Subbanda.

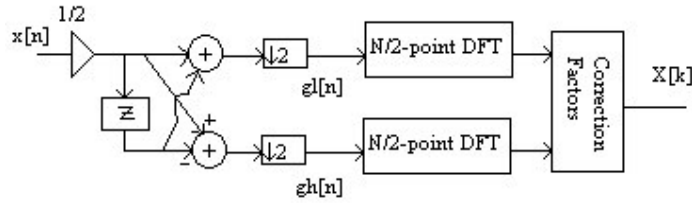


Figura 2. Esquema para la aplicación del algoritmo SB-DFT.

Un algoritmo computacionalmente más eficiente se puede conseguir si la propiedad de separación espectral de la descomposición subbanda se toma en cuenta. Así, si ciertas subbandas hacen una contribución prácticamente nula a la energía de la señal $x[n]$, entonces el cálculo de la DFT se puede simplificar eliminando los cálculos correspondientes a dichas subbandas. Por ejemplo, si la señal $x[n]$ tiene la mayoría de su contenido energético en las bajas frecuencias, su DFT puede calcularse, de forma aproximada, sin tener en cuenta la contribución que supone la subbanda recogida en $G_H(k)$, obteniendo de esta forma

$$X[k] \cong \begin{cases} (1 + W_N^k) G_L[\lfloor k > \frac{N}{2} \rfloor], & 0 \leq k < \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1, \end{cases}$$

asumiendo que $x[n]$ es una secuencia real. Esta aproximación que hemos realizado es satisfactoria en la práctica puesto que para $k \ll N$ en la banda de baja frecuencia, ocurre que $|1 - W_N^k| \ll |1 + W_N^k|$, y debido al proceso de prefiltrado, $|G_H[k]| \ll |G_L[k]|$.

El número total de operaciones requeridas usando esta aproximación es la mitad del número requerido para el algoritmo SB-DFT original representado en la figura 2. En el caso general de una descomposición en M etapas como se comentó anteriormente, si L de las M bandas se eliminan de los cálculos, el ahorro computacional será del orden de

$$\frac{L}{M}.$$

1.4 CÁLCULO DE LAS MUESTRAS NO UNIFORMEMENTE ESPACIADAS EN FRECUENCIA

Para calcular la magnitud espectral de una secuencia dada con una resolución desigual, Oppenheim y Johnson propusieron una transformación de la secuencia original

$x[n]$ a una nueva secuencia $y[n]$, con el fin de que la magnitud de la DFT de la nueva secuencia, $y[n]$, sea igual a la magnitud de las muestras de la transformada Z de $x[n]$ en puntos desigualmente espaciados en el círculo unidad. En la figura 3, se muestra el esquema básico que implica este algoritmo. Un filtro ‘allpass’ se usa para conseguir una distorsión del eje de frecuencias. Así, la nueva secuencia $y[n]$ es de longitud infinita y tiene que ser enventanada mediante una ventana de longitud finita antes de que el algoritmo FFT pueda ser ejecutado. Puesto que el enventanado provoca una distorsión del espectro antes que las muestras se puedan calcular, este método proporciona únicamente resultados aproximados.



Figura 3. Cálculo de la magnitud espectral con resolución no uniforme usando el algoritmo FFT.

1.5 RESUMEN

En la presente introducción hemos repasado diferentes representaciones en el dominio de la frecuencia de una secuencia de longitud finita. Todas esas representaciones consisten, básicamente, en la elección de un número finito de muestras de la transformada Z de la secuencia en puntos concretos del plano Z . La primera representación considerada ha sido la popular Transformada de Fourier Discreta o DFT que se compone de muestras de la transformada Z en puntos igualmente espaciados del círculo unidad, estando la primera de las muestras situada en $z = 1$. Una aplicación interesante de la DFT es el cálculo de la convolución circular de dos secuencias de longitud finita mediante el cómputo de la inversa de la DFT del producto de sus DFTs. Por otro lado, haciendo un apropiado ‘zero-padding’ de las secuencias originales, la DFT también puede ser usada para calcular la convolución lineal de dos secuencias de longitud finita.

Para aquellas aplicaciones que necesiten solamente valores aproximados de la DFT en puntos igualmente espaciados sobre una porción específica del círculo unidad, hemos visto que el algoritmo SB-DFT es bastante eficiente. El último algoritmo comentado en esta introducción implica el cálculo de muestras de la transformada Z en puntos desigualmente espaciados del círculo unidad. Este método proporciona valores aproximados de las magnitudes de las muestras deseadas.

Para obtener un muestreo más general de la transformada Z de una secuencia de longitud finita, es necesario introducir el concepto de la Transformada de Fourier

Discreta No Uniforme o NDFT. La NDFT representa muestras de la transformada z en distintos puntos localizados en cualquier lugar del plano Z . En el próximo punto, vamos a pasar ya al estudio de la NDFT. Definiremos la NDFT y la inversa de la NDFT, comentaremos algunos métodos para su cálculo y describiremos las propiedades principales de la NDFT.

2 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1 DEFINICIÓN

Se define la transformada de Fourier discreta no uniforme (NDFT) de una secuencia $x[n]$ de longitud N como

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ son distintos puntos localizados arbitrariamente en el plano Z . Podemos expresar matricialmente esta fórmula mediante,

$$X = D x$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} X(z_0) \\ X(z_1) \\ \vdots \\ X(z_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix},$$

y

$$D = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} & \cdots & z_0^{-(N-1)} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & \cdots & z_1^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{N-1}^{-1} & z_{N-1}^{-2} & \cdots & z_{N-1}^{-(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Se puede advertir que la matriz D de la NDFT queda totalmente determinada mediante la elección de N puntos z_k . A las matrices de este tipo se les conoce como ‘matrices de Vandermonde’. Se puede demostrar que el determinante de una matriz de este tipo se puede expresar de forma factorizada de la siguiente manera

$$\det(D) = \prod_{i \neq j, i > j} (z_i^{-1} - z_j^{-1}).$$

Por tanto, la matriz D es no singular siempre que los N puntos de muestreo, $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$, sean distintos. Así, la inversa de la NDFT existe y es única y viene dada por

$$x = D^{-1} X.$$

Como caso especial, consideremos que la situación de los puntos $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ están localizados en puntos sobre el círculo unidad del plano Z igualmente espaciados tal y como se muestra en la figura 1 de este documento. Esta situación corresponde al caso ya estudiado de la transformada de Fourier discreta (DFT). La matriz D se reduciría y tomaría la forma expuesta en la página 1-4 de la INTRODUCCIÓN.

2.1.1.1 Ejemplo.

Considérese la convolución lineal de dos secuencias de longitud 2,

$$\begin{aligned}\{a[n]\} &= \{a_0 \ a_1\}, \\ \{b[n]\} &= \{b_0 \ b_1\},\end{aligned}$$

la secuencia resultante de dicha convolución será de longitud $2*2-1 = 3$,

$$\{h[n]\} = \{h_0 \ h_1 \ h_2\},$$

donde

$$\begin{aligned}h_0 &= a_0 b_0 \\ h_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ h_2 &= a_1 b_1\end{aligned}$$

Se observa que un cálculo directo de la convolución requiere 4 multiplicaciones.

Esta sencilla convolución lineal puede ser también calculada en el dominio Z como producto de los dos polinomios siguientes

$$\begin{aligned}A(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} \\ B(z) &= b_0 + b_1 z^{-1}\end{aligned}$$

dando lugar al polinomio $H(z)$ siguiente

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} = A(z)B(z) = (a_0 + a_1 z^{-1})(b_0 + b_1 z^{-1}).$$

Un método computacionalmente eficiente para determinar los coeficientes de $H(z)$ es a través de la NDFT, tal y como se muestra a continuación. Evaluamos el

polinomio en z , $H(z)$, en tres puntos distintos del plano z desigualmente espaciados, por ejemplo, $z_0 = \infty$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, resultando

$$\begin{aligned} H(z_0) &= H(\infty) = A(\infty)B(\infty) = a_0b_0 \\ H(z_1) &= H(1) = A(1)B(1) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \\ H(z_2) &= H(-1) = A(-1)B(-1) = (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) \end{aligned}$$

En este caso el cálculo de las muestras NDFT requiere de sólo 3 multiplicaciones en vez de 4. La matriz D generada en este ejemplo sería de tamaño 3×3 y sería así

$$D = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

y la inversa sería

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

De tal manera que las muestras NDFT están relacionadas con la secuencia $\{h[n]\}$ a través de

$$\begin{bmatrix} H(\infty) \\ H(1) \\ H(-1) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} h_0 &= H(\infty) = a_0b_0 \\ h_1 &= \frac{1}{2}H(1) - \frac{1}{2}H(-1) = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = a_0b_1 + a_1b_0 \\ h_2 &= -H(\infty) + \frac{1}{2}H(1) + \frac{1}{2}H(-1) = -a_0b_0 + \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = a_1b_1 \end{aligned}$$

2.1.2 ANÁLISIS ESPECTRAL USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

La DFT ha sido ampliamente usada para el análisis del contenido en frecuencia de la señales. Normalmente el procedimiento consiste en muestrear una señal continua

en el tiempo, aplicar una ventana de longitud finita para obtener una secuencia de longitud N , y, después, calcular la DFT de R puntos de dicha secuencia finita, donde $R \geq N$, obteniendo de esta forma R muestras del espectro de la secuencia enventanada.

Frecuentemente se obtienen resultados engañosos usando este método descrito en el caso de que la DFT sea calculada con un número insuficiente de puntos. Por ejemplo, si la señal contiene dos sinusoides muy próximas entre sí, la DFT calculada puede que no capte los picos de cada una de ellas y muestre un solo pico mezcla de las sinusoides dos originales, incluso cuando la ventana no haya distorsionado los dos picos.

Para el caso de transformadas de longitud fija, con algún conocimiento previo del contenido en frecuencia de la señal, podemos mejorar la resolución usando la NDFT para el cálculo de las muestras espectrales. Se debe advertir que nos estamos refiriendo a la resolución relacionada con el muestreo del espectro ya enventanado, que es diferente de la resolución relacionada con el proceso de enventanar en sí mismo (que dependerá de la anchura del lóbulo principal de la ventana usada).

A continuación vamos a ver un ejemplo para ilustrar de esta idea. En la figura 4.1 podemos ver la transformada de Fourier discreta en el tiempo de una secuencia enventanada. Observamos que la secuencia presenta dos tonos muy próximos. En la figura 4.2 hemos representado el espectro obtenido mediante el cálculo de la DFT de 64 puntos de dicha secuencia enventanada. Mediante la observación de esta gráfica se podría concluir erróneamente que la secuencia que estudiamos presenta un solo tono y no dos como sabemos que en realidad tiene. En la figura 4.3 se puede observar el espectro obtenido mediante el uso de la NDFT de 64 puntos. Hemos muestreado más densamente en aquella parte conflictiva de la secuencia, esto es, en las bajas frecuencias. Concretamente, la densidad de las muestras ha sido doblada en las bajas frecuencias y han sido reducida a la mitad en la parte de alta frecuencia donde el espectro de la secuencia no tiene ningún interés, usando un total de 64 puntos pero con unos resultados bastante mejores que los obtenidos mediante el uso de la DFT.

Nota.- Las gráficas de las figuras 4.2 y 4.3 son gráficas discretas (secuencia de puntos y no líneas como aparece) puesto que se han obtenido calculando la DFT y la NDFT de la secuencia enventanada cuyo espectro original se muestra en la figura 4.1. No obstante, las hemos representado de forma continua para que se pueda observar de forma más clara el fenómeno descrito arriba.

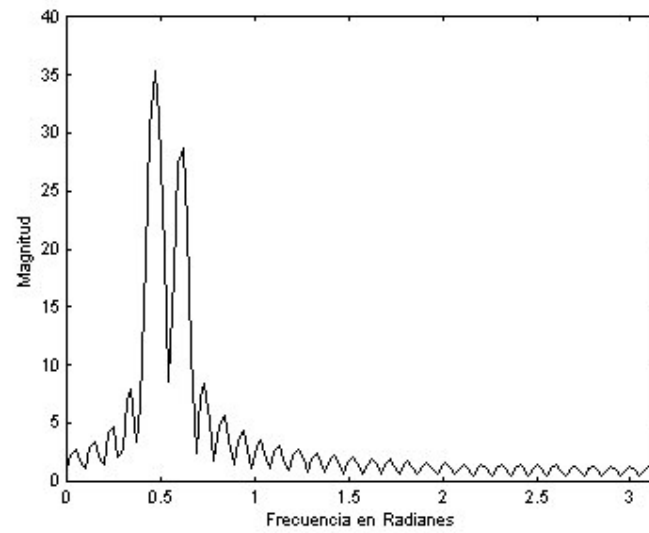


Figura 4.1. Espectro original de la secuencia compuesto por dos tonos muy próximos.

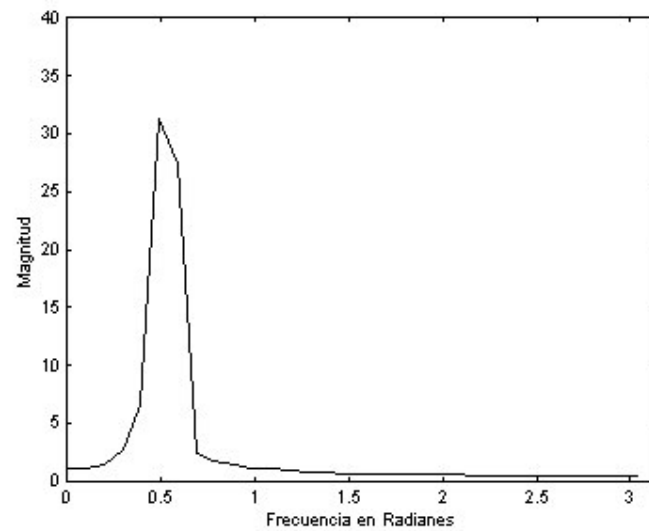


Figura 4.2. Espectro estimado mediante el cálculo de la DFT de 64 puntos.

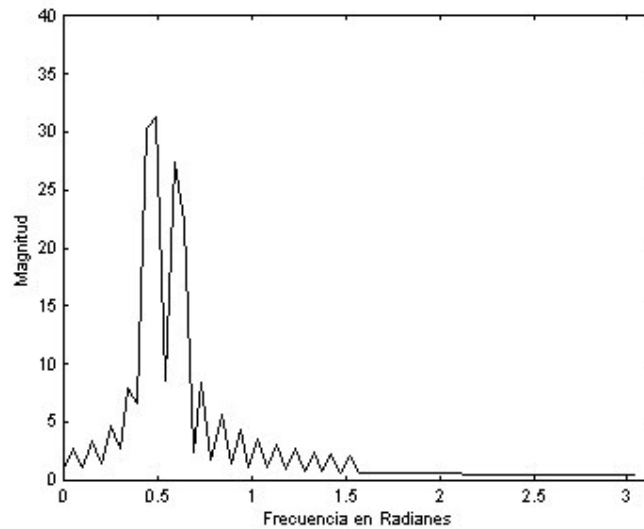


Figura 4.3. Espectro estimado mediante el cálculo de la NDFT de 64 puntos. Muestreo más denso en la banda de bajas frecuencias.

2.1.3 CÁLCULO DE LA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

El problema de calcular la inversa de la NDFT, esto es, de determinar x de un vector X con muestras NDFT dado, es equivalente a resolver el sistema de Vandermonde ya comentado en la definición de la NDFT realizada en puntos anteriores. Este problema puede ser entendido también como un problema de interpolación polinómica que aparece en muchas áreas de la ingeniería y del análisis numérico. La base para la existencia de solución viene dada por el teorema de interpolación polinómica. Citamos, a continuación, dicho teorema: ‘Dados N puntos distintos (ya sean reales o complejos), $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ y N valores (ya sean reales o complejos), $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$, existe un único polinomio,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{N-1} z^{N-1},$$

para el cual

$$P(z_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Aunque la solución a este problema es única, existen varios métodos de resolución. Esto lleva a distintos métodos de calcular la inversa de la NDFT.

2.1.3.1 Método Directo.

Dados el vector que contiene las muestras NDFT, X , y la matriz NDFT, D , la inversa de la NDFT se obtiene directamente resolviendo el sistema lineal $X = Dx$ mediante el uso de eliminación gaussiana. Esto implica $O(N^3)$ operaciones.

Este mismo problema puede ser resuelto de manera más eficiente usando interpolación polinómica. Así, se determina directamente la transformada Z , $X(z)$, a partir de los coeficientes NDFT,

$$\hat{X}[k] = X(z_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

usando métodos de interpolación polinómica. La inversa, $x[n]$, de la NDFT se puede identificar como los coeficientes de esta interpolación polinómica. Este enfoque se usa para dos métodos de interpolación existentes, la interpolación de Lagrange y la de Newton.

2.1.3.2 La interpolación de Lagrange.

En la interpolación de Lagrange, $X(z)$ se expresa como un polinomio de Lagrange de orden $N-1$,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{L_k(z)}{L_k(z_k)} \hat{X}[k],$$

donde $L_0(z), L_1(z), \dots, L_{N-1}(z)$ son polinomios fundamentales definidos como sigue

$$L_k(z) = \prod_{i \neq k} (1 - z_i z^{-1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

2.1.3.2.1 Ejemplo.

Consideramos la implementación de la convolución del ejemplo 2.1.1.1. usando ahora el método de interpolación de Lagrange. En este caso, $H(z)$ se expresa como

$$H(z) = \frac{L_0(z)}{L_0(z_0)} H(z_0) + \frac{L_1(z)}{L_1(z_1)} H(z_1) + \frac{L_2(z)}{L_2(z_2)} H(z_2),$$

donde

$$L_0(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})$$

$$L_1(z) = (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})$$

$$L_2(z) = (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1})$$

Con $z_0 = \infty$, $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$, obtenemos

$$L_0(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

$$L_1(z) = -z_0 z^{-1}(1 + z^{-1})$$

$$L_2(z) = -z_0 z^{-1}(1 - z^{-1})$$

y

$$L_0(z_0) = L_0(\infty) = 1$$

$$L_1(z_1) = L_1(1) = -2z_0$$

$$L_2(z_2) = L_2(-1) = 2z_0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z^{-2})H(z_0) + \frac{z_0 z^{-1}(1 + z^{-1})}{2z_0}H(z_1) - \frac{z_0 z^{-1}(1 - z^{-1})}{2z_0}H(z_2) \\ &= (1 - z^{-2})H(\infty) + \frac{1}{2}z^{-1}(1 + z^{-1})H(1) - \frac{1}{2}z^{-1}(1 - z^{-1})H(-1) \\ &= (1 - z^{-2})a_0b_0 + \frac{1}{2}z^{-1}(1 + z^{-1})(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - \frac{1}{2}z^{-1}(1 - z^{-1})(a_0 - a_1)(b_0 - b_1) \\ &= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)z^{-1} + a_2b_2z^{-2} \end{aligned}$$

2.1.3.3 La interpolación de Newton.

En este caso, $X(z)$ es expresada de la forma

$$X(z) = c_0 + c_1(1 - z_0 z^{-1}) + c_2(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1}) + \dots + c_{N-1} \prod_{k=0}^{N-2} (1 - z_k z^{-1}),$$

donde al coeficiente c_j se le denomina diferencia dividida del orden j -ésimo de $\hat{X}[0], \hat{X}[1], \dots, \hat{X}[j]$ con respecto a $z_0, z_1, \dots, z_j$. Las diferencias divididas se calculan recursivamente tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \hat{X}[0] \\
c_1 &= \frac{\hat{X}[1] - c_0}{1 - z_0 z_1^{-1}} \\
c_2 &= \frac{\hat{X}[2] - c_0 - c_1(1 - z_0 z_2^{-1})}{(1 - z_0 z_2^{-1})(1 - z_1 z_2^{-1})} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se debe advertir que cada c_j es una combinación lineal de los $\hat{X}[k]$, y además, c_j depende solamente de $\hat{X}[0], \hat{X}[1], \dots, \hat{X}[j]$ y de $z_0, z_1, \dots, z_j$. En la representación de Lagrange, si nosotros incluimos un punto adicional y aumentamos el orden del polinomio de interpolación, entonces todos los polinomios fundamentales cambian y, consecuentemente, tienen que volver a ser calculados. En la representación de Newton, este hecho puede ser soslayado añadiendo simplemente un término más. De esta forma, existe una *propiedad de permanencia* que es característica de las series de Fourier y de otras expansiones ortogonales y biortogonales.

Puesto que los coeficientes c_j se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones triangular inferior,

$$Lc = X$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (1 - z_0 z_1^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (1 - z_0 z_2^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (1 - z_0 z_{N-1}^{-1}) & \cdots & \prod_{k=0}^{N-2} (1 - z_k z_{N-1}^{-1}) & \end{bmatrix},$$

y

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \hat{X}[0] \\ \hat{X}[1] \\ \hat{X}[2] \\ \vdots \\ \hat{X}[N-1] \end{bmatrix},$$

el número de operaciones requeridas es $O(N^2)$. La secuencia $x[n]$ puede ser ahora fácilmente calculada a partir de los c_j . En consecuencia, la interpolación de Newton proporciona un método más eficiente para calcular la inversa de la NDFT.

2.1.3.3.1 Ejemplo.

En este ejemplo vamos a resolver el problema de la convolución del ejemplo 2.1.1.1. usando el método de la interpolación de Newton. En este caso, $H(z)$ se escribirá de la forma,

$$H(z) = c_0 + c_1(1 - z_0 z^{-1}) + c_2(1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1})$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= H(z_0) \\ c_1 &= \frac{H(z_1) - c_0}{1 - z_0 z_1^{-1}} \\ c_2 &= \frac{H(z_2) - c_0 - c_1(1 - z_0 z_2^{-1})}{(1 - z_0 z_2^{-1})(1 - z_1 z_2^{-1})} \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_0 = \infty$, $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$, obtenemos tres muestras de $H(z)$,

$$\begin{aligned} H(z_0) &= a_0 b_0 \\ H(z_1) &= (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \\ H(z_2) &= (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) \end{aligned}$$

Usando estas muestras, procedemos al cálculo de los coeficientes

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= \frac{(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) - a_0 b_0}{1 - z_0 z_1^{-1}} = \frac{a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0}{1 - z_0} \\ c_2 &= \frac{(a_0 - a_1)(b_0 - b_1) - a_0 b_0 - \frac{(a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0)(1 + z_0)}{1 - z_0}}{2(1 + z_0)} \\ &= \frac{(a_1 b_1 - a_0 b_1 - a_1 b_0) + (a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0)}{2(1 + z_0)} = \frac{a_1 b_1}{1 + z_0} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 b_0 + \left(\frac{a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0}{1 - z_0} \right) (1 - z_0 z^{-1}) + \frac{a_1 b_1}{1 + z_0} (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1}) \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{-1} - a_1 b_1 z^{-1} (1 - z^{-1}) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{-1} + a_1 b_1 z^{-2} \end{aligned}$$

2.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

En este apartado vamos a estudiar algunas propiedades relevantes de la NDFT. Muchas de estas propiedades son análogas a las propiedades de la transformada Z y a las de la transformada de Fourier. Sin embargo, a diferencia de la DFT, no existe periodicidad implícita en caso general de la NDFT para secuencias de longitud finita. Como resultado de este hecho, algunas propiedades de la DFT, como por ejemplo, el desplazamiento circular o la dualidad, no se cumplen para el caso de la NDFT.

2.2.1 PROPIEDADES BÁSICAS

Sean $X(z_k)$ e $Y(z_k)$ las NDFTs de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ respectivamente. Por conveniencia notacional, denotamos un par NDFT como

$$x[n] \xleftrightarrow{NDFT} X(z_k)$$

Las propiedades básicas están resumidas en la siguiente tabla:

Propiedad 1	Linealidad $\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{NDFT} \alpha X(z_k) + \beta Y(z_k)$
Propiedad 2	Desplazamiento en el dominio del tiempo $x[m - n_0] \xleftrightarrow{NDFT} z_k^{-n_0} X(z_k)$ $(m = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N - 1)$
Propiedad 3	Escalado y desplazamiento en el dominio Z $z_s^n x[n] \xleftrightarrow{NDFT} X\left(\frac{z_k}{z_s}\right)$
Propiedad 4	Inversión temporal $x[-m] \xleftrightarrow{NDFT} X\left(\frac{1}{z_k}\right)$ Si $x[n]$ es real, $x[-m] \xleftrightarrow{NDFT} X^*(z_k)$ $m = -N + 1, -N + 2, \dots, 1, 0$

Propiedad 5	Conjugación $x^*[n] \xleftrightarrow{NDFT} X^*(z_k^*)$
Propiedad 6	Parte real de la secuencia $\text{Re}\{x[n]\} \xleftrightarrow{NDFT} \frac{1}{2} \{X(z_k) + X^*(z_k^*)\}$
Propiedad 7	Parte imaginaria de la secuencia $j \text{Im}\{x[n]\} \xleftrightarrow{NDFT} \frac{1}{2} \{X(z_k) - X^*(z_k^*)\}$
Propiedad 8	Propiedades de simetría Si $x[n]$ es real, $X(z_k) = X^*(z_k^*)$ $\text{Re}\{X(z_k)\} = \text{Re}\{X^*(z_k^*)\}$ $\text{Im}\{X(z_k)\} = -\text{Im}\{X^*(z_k^*)\}$ $ X(z_k) = X^*(z_k^*) $ $\arg\{X(z_k)\} = -\arg\{X^*(z_k^*)\}$

Seguidamente, se demuestran cada una de las propiedades recogidas en la tabla de arriba:

✓ Propiedad 1. Linealidad.

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{NDFT} \alpha X(z_k) + \beta Y(z_k)$$

Si $x[n]$ tiene longitud N_1 e $y[n]$ tiene longitud N_2 , entonces la secuencia $w[n]$, combinación lineal de las anteriores,

$$w[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$$

tendrá una longitud máxima $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Así, las correspondientes NDFTs deben ser calculadas con $N \geq N_3$. Por ejemplo, si $N_1 < N_2$, $X(z_k)$ es la NDFT de N_2 puntos de la secuencia $x[n]$ en la que se ha realizado un ‘zero-padding’ con $N_2 - N_1$ ceros. Por supuesto, NDFTs de mayor longitud se pueden calcular haciendo ‘zero-padding’ en ambas secuencias.

✓ Propiedad 2. Desplazamiento en el dominio del tiempo.

Supongamos una secuencia $x[n]$ que es cero fuera del rango $0 \leq n \leq N-1$. Entonces,

$$y[m] \xleftrightarrow{NDFT} z_k^{-n_0} X(z_k)$$

donde n_0 es un número entero, y

$$y[m] = x[m - n_0], \quad m = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N - 1.$$

La NDFT de $y[m]$ viene dada por

$$Y(z_k) = \sum_{m=n_0}^{n_0+N-1} x[m - n_0] z_k^{-m}.$$

Sustituyendo $n = m - n_0$ en la ecuación de arriba, obtenemos

$$Y(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{-n-n_0} = z_k^{-n_0} X(z_k)$$

Por tanto, un desplazamiento en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de la NDFT de $x[n]$ por un factor complejo $z_k^{-n_0}$.

✓ Propiedad 3. Escalado y desplazamiento en el dominio Z.

$$z_s^n x[n] \xleftrightarrow{NDFT} X\left(\frac{z_k}{z_s}\right)$$

Considérese la secuencia,

$$y[n] = z_s^n x[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

La NDFT de $y[n]$ está dada por

$$Y(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} z_s^n x[n] z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{z_k}{z_s}\right)^{-n} = X\left(\frac{z_k}{z_s}\right)$$

Para interpretar el significado de este escalado, sea

$$z_s = \alpha e^{j\phi}$$

y

$$z_k = r_k e^{jw_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde α y r_k son no negativos. Entonces, podemos expresar la NDFT, $Y(z_k)$, como

$$Y(z_k) = X(z_k')$$

donde

$$z_k' = \frac{z_k}{z_s} = \frac{r_k}{\alpha} e^{j(w_k - \phi)}$$

Por tanto, como resultado de multiplicar la secuencia original por una secuencia exponencial z_s^n , la localización de las muestras de la NDFT en el plano Z sufren un escalado en el radio y un desplazamiento angular. Como caso especial, consideremos $\alpha = 1$. En este caso, sólo existirá un desplazamiento angular de las muestras originales,

y es equivalente a la traslación o al desplazamiento en frecuencia asociado con la modulación en el dominio del tiempo por una secuencia exponencial compleja $e^{j\phi n}$.

✓ Propiedad 4. Inversión temporal.

$$y[m] \xleftrightarrow{NDFT} X\left(\frac{1}{z_k}\right)$$

donde

$$y[m] = x[-m], \quad m = -N+1, -N+2, \dots, 1, 0,$$

y $x[n]$ es cero fuera del rango $0 \leq n \leq N-1$. La NDFT de $y[m]$ viene dada por

$$Y(z_k) = \sum_{m=-N+1}^0 x[-m] z_k^{-m}.$$

Sustituyendo $n = -m$ en la fórmula de arriba, obtenemos

$$Y(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^n = X\left(\frac{1}{z_k}\right).$$

De esta forma, la inversión en el tiempo de una secuencia produce la inversión de las localizaciones de las muestras en el plano Z .

Un caso especial se produce cuando $x[n]$ es real y $z_k = e^{j\omega_k}$, entonces se cumple que

$$X\left(\frac{1}{z_k}\right) = X(z_k^*).$$

Puesto que $x[n]$ es real, aplicamos la primera propiedad de simetría recogida en la tabla y obtenemos que

$$X\left(\frac{1}{z_k}\right) = X(z_k^*) = X^*(z_k).$$

Y, por tanto, el par NDFT se puede escribir

$$y[m] \xleftrightarrow{NDFT} X^*(z_k).$$

Así, en este caso, la inversión temporal de la secuencia simplemente produce una conjugación de la NDFT original.

✓ Propiedad 5. Conjugación.

$$x^*[n] \xleftrightarrow{NDFT} X^*(z_k^*)$$

Sea

$$y[n] = x^*[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

La NDFT de $y[n]$ viene dada por

$$Y(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] z_k^{-n} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (z_k^*)^{-n} \right\}^* = X^*(z_k^*).$$

Por tanto, la conjugación de la secuencia original conduce a la conjugación de su NDFT, la cual ha sido evaluada en las muestras conjugadas respecto de las muestras de la NDFT original.

✓ Propiedad 6. Parte real de la secuencia.

$$\text{Re}\{x[n]\} \xleftrightarrow{NDFT} \frac{1}{2} \{X(z_k) + X^*(z_k^*)\}$$

La parte real de una secuencia $x[n]$ se puede expresar de la siguiente forma

$$p[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[n]\}.$$

La NDFT de $p[n]$ se puede obtener mediante la aplicación de la propiedad de conjugación que acabamos de demostrar, así, obtenemos que

$$P(z_k) = \frac{1}{2} \{X(z_k) + X^*(z_k^*)\},$$

como queríamos demostrar.

✓ Propiedad 7. Parte imaginaria de la secuencia.

$$j \text{Im}\{x[n]\} \xleftrightarrow{NDFT} \frac{1}{2} \{X(z_k) - X^*(z_k^*)\}$$

La parte imaginaria de una secuencia $x[n]$ se puede expresar mediante

$$q[n] = \frac{1}{2j} \{x[n] - x^*[n]\}.$$

La NDFT de $q[n]$ se puede obtener mediante la aplicación de la propiedad de conjugación que demostramos anteriormente, así, obtenemos que

$$jQ(z_k) = \frac{1}{2} \{X(z_k) - X^*(z_k^*)\},$$

como queríamos demostrar.

✓ Propiedad 8. Propiedades de simetría.

Todas las propiedades que se demuestran a continuación suponen que $x[n]$ es real.

- $X(z_k) = X^*(z_k^*)$

Puesto que $x[n]$ es real,

$$x[n] = x^*[n].$$

Aplicando el resultado de la propiedad de conjugación, se demuestra inmediatamente.

- $\operatorname{Re}\{X(z_k)\} = \operatorname{Re}\{X^*(z_k^*)\}$

Expresemos $X(z_k)$ como un número complejo,

$$X(z_k) = g[k] + jh[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde

$$g[k] = \operatorname{Re}\{X(z_k)\}, \quad h[k] = \operatorname{Im}\{X(z_k)\}.$$

Conjugando a ambos lados en la primera de las propiedades de simetría, obtenemos

$$X^*(z_k) = X(z_k^*).$$

Otra forma de expresar $X(z_k)$ es

$$X^*(z_k) = g[k] - jh[k].$$

Así, comparando las distintas ecuaciones obtenidas, se deduce fácilmente que

$$g[k] = \operatorname{Re}\{X(z_k)\} = \operatorname{Re}\{X^*(z_k^*)\},$$

como queríamos demostrar.

- $\operatorname{Im}\{X(z_k)\} = -\operatorname{Im}\{X^*(z_k^*)\}$

Inmediatamente, mediante comparación de las ecuaciones del punto anterior, se vuelve a deducir trivialmente que

$$h[k] = \operatorname{Im}\{X(z_k)\} = -\operatorname{Im}\{X^*(z_k^*)\},$$

como queríamos demostrar.

$$\bullet \quad |X(z_k)| = |X(z_k^*)|$$

Es directo a partir de la ecuación

$$X^*(z_k) = X(z_k^*).$$

$$\bullet \quad \arg\{X(z_k)\} = -\arg\{X(z_k^*)\}$$

Es también directo a partir de la misma ecuación

$$X^*(z_k) = X(z_k^*).$$

2.2.2 LA CONVOLUCIÓN LINEAL USANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

En este punto veremos que la convolución lineal de dos secuencias se puede calcular mediante el uso de la NDFT. Llamemos $y_L[n]$ a la secuencia resultado de hacer la convolución lineal de dos secuencias de N puntos, $x[n]$ y $h[n]$. Usando notación vectorial, esta convolución se puede expresar mediante

$$y_L = x \otimes h$$

donde

$$x = [x[0] \ x[1] \ \dots \ x[N-1]]^T,$$

$$h = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[N-1]]^T,$$

y

$$y_L = [y[0] \ y[1] \ \dots \ y[2N-2]]^T.$$

Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{H}$ las NDFTs de N puntos de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{h}$ respectivamente, por tanto,

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{x}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{h},$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz NDFT de tamaño $N \times N$ con muestras en los puntos $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$, tal y como se vio cuando se definió la NDFT.

Si multiplicamos las NDFTs $\mathbf{X}$ y $\mathbf{H}$, componente a componente, y obtenemos la inversa NDFT del producto, llegaremos a una secuencia $y_c[n]$ de N puntos de la forma

$$y_c = [y_c[0] \ y_c[1] \ \dots \ y_c[N-1]]^T,$$

dada por

$$y_c = D^{-1} [X \cdot H].$$

Aquí, el punto entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{H}$ denota el producto, componente a componente, de los dos vectores. Se debe advertir que, en el caso especial de la DFT, y_c corresponde a la convolución circular de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$, donde

$$y_c[n] = x[n] \otimes_N h[n], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Con el fin de encontrar la relación entre y_c e y_L , calculamos la transformada Z en la primera de las expresiones de este apartado obteniendo,

$$X(z)H(z) = Y_L(z).$$

Evaluando esta ecuación en los puntos de muestreo $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$, y expresando el resultado en forma matricial, tenemos

$$X \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} & \dots & z_0^{-(N-1)} & \dots & z_0^{-(2N-2)} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & \dots & z_1^{-(N-1)} & \dots & z_1^{-(2N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{N-1}^{-1} & z_{N-1}^{-2} & \dots & z_{N-1}^{-(N-1)} & \dots & z_{N-1}^{-(2N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[2N-2] \end{bmatrix},$$

o de otra forma,

$$X \cdot H = [D \ C] y_L.$$

Es decir, lo que hemos hecho en este último paso ha sido dividir la matriz de tamaño $N \times (2N-1)$ en dos matrices, D y C de dimensiones $N \times N$ y $N \times (N-1)$ respectivamente. C es de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} z_0^{-N} & z_0^{-(N+1)} & \dots & z_0^{-(2N-2)} \\ z_1^{-N} & z_1^{-(N+1)} & \dots & z_1^{-(2N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N-1}^{-N} & z_{N-1}^{-(N+1)} & \dots & z_{N-1}^{-(2N-2)} \end{bmatrix}.$$

Operando obtenemos que:

$$y_c = D^{-1} [X \cdot H] = D^{-1} [D \ C] y_L = [I \ D^{-1}C] y_L$$

Es interesante ver que para el caso especial de la DFT, D es la matriz DFT de tamaño $N \times N$ mientras que C se compone de las $N-1$ primeras columnas de D debido a la periodicidad inherente. Así, para este caso,

$$D^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, obtenemos la relación

$$y_c = \begin{bmatrix} y[0] + y[N] \\ y[1] + y[N+1] \\ \vdots \\ y[N-2] + y[2N-2] \\ y[N-1] \end{bmatrix},$$

que es simplemente una versión con ‘aliasing’ de la convolución lineal y_L tal y como se esperaba. Sin embargo, para el caso general de la NDFT, la relación entre y_c e y es más compleja puesto que la matriz $D^{-1}C$ no tienen una estructura tan simple como para el caso de la DFT.

Aumentemos ahora la longitud de las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ añadiéndoles $N - 1$ ceros al final de las mismas. Obtendremos dos secuencias nuevas de longitud $M = 2N - 1$ que denotaremos con los nombres x_a y h_a . Ahora, calculamos las NDFTs de M puntos de las dos nuevas secuencias, obteniendo

$$X_a = D_a x_a, \quad H_a = D_a h_a,$$

donde D_a es una matriz NDFT de tamaño $M \times M$ con muestras en los puntos $z_0, z_1, \dots, z_{M-1}$. Si ahora multiplicamos, al igual que antes, las NDFTs X_a y H_a , componente a componente, y tomamos la inversa de la NDFT del resultado, obtenemos una nueva secuencia que viene dada por

$$y_{ca} = D_a^{-1} [X_a \cdot H_a].$$

Para ver cómo está relacionada esta secuencia con y , evaluamos la transformada Z a ambos lados de $y_L = x \otimes h$ en los puntos $z_0, z_1, \dots, z_{M-1}$, obteniendo

$$X_a \cdot H_a = D_a y$$

y, por tanto,

$$y_L = D_a^{-1} [X_a \cdot H_a].$$

Comparando las ecuaciones de y_{ca} y de y_L obtenidas, se observa claramente que ambas son iguales. Por lo tanto, la convolución lineal de dos secuencias se puede calcular haciéndoles un ‘zero-padding’ adecuado, multiplicando sus NDFTs y tomando la inversa de la NDFT del resultado. Esto es similar al proceso de calcular la convolución lineal usando la DFT. El resultado que hemos obtenido se mantiene también en el caso en el que las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ tengan diferentes longitudes, N_1 y N_2 , respectivamente. En este caso, la única diferencia es que el ‘zero-padding’ al que deben ser sometidas antes de calcular sus NDFTs debe ser tal que la longitud final de las secuencias sea $M = N_1 + N_2 - 1$.

2.2.2.1 Ejemplo.

Consideremos dos secuencias de longitud 3,

$$\begin{aligned} \{x[n]\} &= \{1 \ 2 \ 4\} \\ \{h[n]\} &= \{3 \ -2 \ 1\} \end{aligned}$$

La convolución lineal de estas dos secuencias es

$$\{y_L[n]\} = \{3 \ 4 \ 9 \ -6 \ 4\}.$$

Seguidamente, vamos a calcular las NDFTs de 3 puntos de $x[n]$ y $h[n]$ evaluadas en los puntos, $z_0 = \infty$, $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$. La matriz NDFT, D , de tamaño 3 x 3, viene dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su inversa es

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Las NDFTs son, en consecuencia,

$$X = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ H[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

y, por tanto,

$$X \cdot H = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

A continuación, hallamos y_c según se explicó en páginas anteriores

$$y_c = \begin{bmatrix} y_c[0] \\ y_c[1] \\ y_c[2] \end{bmatrix} = D^{-1} [X \cdot H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$X \cdot H = [D \ C] y_L = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} & z_0^{-3} & z_0^{-4} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & z_1^{-3} & z_1^{-4} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} & z_2^{-3} & z_2^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_L[0] \\ y_L[1] \\ y_L[2] \\ y_L[3] \\ y_L[4] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix},$$

que es idéntico al vector y_c obtenido anteriormente usando el método de la NDFT.

Con el fin de determinar la convolución lineal de $x[n]$ y $h[n]$ usando la NDFT, aumentamos la longitud de las secuencias con $N - 1 = 2$ ceros, dando lugar a dos nuevas secuencias de la forma

$$\begin{aligned} \{x_a[n]\} &= \{1 \ 2 \ 4 \ 0 \ 0\} \\ \{h_a[n]\} &= \{3 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0\} \end{aligned}$$

Seguidamente, calculamos la NDFT de 5 puntos de las dos secuencias nuevas en los puntos, $z_0 = \infty$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1/2$ y $z_4 = -1/2$. La matriz NDFT de tamaño 5×5 viene dada por

$$D_a = \begin{bmatrix} 1 & z_0^{-1} & z_0^{-2} & z_0^{-3} & z_0^{-4} \\ 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2} & z_1^{-3} & z_1^{-4} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2} & z_2^{-3} & z_2^{-4} \\ 1 & z_3^{-1} & z_3^{-2} & z_3^{-3} & z_3^{-4} \\ 1 & z_4^{-1} & z_4^{-2} & z_4^{-3} & z_4^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix},$$

siendo la inversa

$$D_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2/3 & -1/12 & 1/12 \\ -5/4 & 2/3 & 2/3 & -1/24 & -1/24 \\ 0 & -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \\ 1/4 & -1/6 & -1/6 & 1/24 & 1/24 \end{bmatrix}.$$

Las NDFTs de las secuencias alargadas, $\{x_a[n]\}$ y $\{h_a[n]\}$, serán

$$X_a = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \\ X[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 21 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$H_a = \begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ H[2] \\ H[3] \\ H[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix},$$

y, así,

$$X_a \cdot H_a = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 18 \\ 63 \\ 143 \end{bmatrix}.$$

El último paso para obtener la convolución lineal mediante el uso de la NDFT es

$$y_L = D_a^{-1}[X_a \cdot H_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2/3 & -1/12 & 1/12 \\ -5/4 & 2/3 & 2/3 & -1/24 & -1/24 \\ 0 & -1/6 & 1/6 & 1/12 & -1/12 \\ 1/4 & -1/6 & -1/6 & 1/24 & 1/24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ 18 \\ 63 \\ 143 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

tal y como se esperaba.

2.3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME

Nos centramos en este punto en el problema de calcular la NDFT. Los factores que deben ser considerados son:

- ✓ La cantidad de operaciones necesarias en términos de multiplicaciones y sumas.
- ✓ El número de coeficientes usados para el cálculo.

Para establecer una referencia y poder comparar estos factores citados, empezaremos examinando el método directo. Después veremos el método de Horner, que requiere la misma cantidad de cálculos que el método directo pero un menor número de coeficientes. Finalmente, usaremos el *algoritmo de Goertzel* para calcular la NDFT. Interpretaremos este algoritmo en dos sentidos: cálculo de la salida de un filtro digital y evaluación de series trigonométricas finitas. El algoritmo de Goertzel consigue una reducción en la cantidad de cálculos así como también en el número de coeficientes usados. El ahorro computacional se consigue cuando la NDFT es evaluada en puntos sobre el círculo unidad del plano Z .

Debido al muestreo generalizado inherente en la NDFT, no existe periodicidad o simetría en los números complejos z_k^{-n} . Consecuentemente, algoritmos tan eficientes como los FFT no pueden ser ‘extrapolados’ al caso general. Más adelante veremos la NDFT Subbanda, que conduce a un cálculo aproximado de la NDFT más rápido, aplicable cuando la señal tiene su energía concentrada en algunas bandas concretas de su espectro.

2.3.1 MÉTODO DIRECTO

La NDFT se puede calcular evaluando directamente la expresión

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{-n}.$$

En general, $x[n]$ es una secuencia compleja de longitud N , y los puntos de muestreo $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ son también números complejos. Para calcular cada muestra de la NDFT, necesitamos N multiplicaciones complejas y $N - 1$ sumas complejas, es decir, $4N$ multiplicaciones reales y $4N - 2$ sumas reales. Por tanto, la cantidad de operaciones necesarias para evaluar N muestras de la NDFT es, aproximadamente, proporcional a N^2 . Se debe advertir que esta cantidad es la misma que la que se necesita para el cálculo directo de la DFT. Además, en este método, necesitamos calcular o guardar N coeficientes complejos, $\{z_k^{-n}, n = 0, 1, \dots, N - 1\}$ para evaluar cada muestra NDFT, $X(z_k)$.

2.3.2 MÉTODO DE HORNER

Rescribamos la expresión para el cálculo de la NDFT de la forma

$$X(z_k) = z_k^{-(N-1)} A_k,$$

donde

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{N-1-n} \\ &= x[0] z_k^{N-1} + x[1] z_k^{N-2} + x[2] z_k^{N-3} + \dots + x[N-2] z_k + x[N-1]. \end{aligned}$$

Para evitar usar los N coeficientes, z_k^n , podemos expresar la ecuación última como una multiplicación anidada (también conocida como método de Horner):

$$A_k = \{ \dots (x[0] z_k + x[1]) z_k + \dots \} z_k + x[N-1].$$

Comenzamos por evaluar esta expresión por el paréntesis más interno y vamos avanzando hasta obtener el valor de A_k . $X(z_k)$ se calcula con la primera de las expresiones citadas en este método. Este método requiere un total de $4N$ multiplicaciones reales y $4N - 2$ sumas reales, que es lo mismo que para el método directo. No obstante, en el método de Horner, *sólo necesitamos dos coeficientes*, z_k y $z_k^{-(N-1)}$, para evaluar una muestra de la NDFT, $X(z_k)$.

Observando las expresiones deducidas para este método, se puede advertir que es conveniente empezar a evaluar la multiplicación anidada con la primera muestra $x[0]$, mejor que con la última $x[N-1]$. Así, queda eliminada la necesidad de almacenar la señal de entrada.

2.3.3 EL ALGORITMO DE GOERTZEL. INTERPRETACIÓN: FILTRO DIGITAL

Consideremos una muestra de la NDFT, en $z = z_k$, dada por

$$X(z_k) = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] z_k^{-r}.$$

Multiplicando a ambos lados por z_k^N , tenemos que

$$z_k^N X(z_k) = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] z_k^{N-r}.$$

Definamos ahora la secuencia

$$y_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] z_k^{n-r} u[n-r],$$

donde $u[n]$ denota la secuencia escalón unidad. Esta expresión es equivalente a la convolución discreta

$$y_k[n] = x[n] \otimes z_k^n u[n].$$

Puesto que $x[n]$ es cero fuera del rango $0 \leq n \leq N-1$, podemos escribir

$$X(z_k) = z_k^{-N} y_k[n] \Big|_{n=N}.$$

Por tanto, la muestra de la NDFT, $X(z_k)$, se obtiene multiplicando el factor z_k^{-N} con la N-ésima muestra de la salida de un sistema cuya respuesta impulsiva es $z_k^n u[n]$. Se trata de un sistema recursivo de primer orden con una función de transferencia de la forma:

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - z_k z^{-1}}.$$

Para calcular $X(z_k)$ usando este algoritmo, se necesitan $4N + 4$ multiplicaciones reales y $4N + 2$ sumas reales. Son casi las mismas operaciones que en el método directo. No obstante, *sólo dos coeficientes*, z_k y z_k^{-N} , se necesitan.

A continuación, consideraremos un caso especial en el cual el número de multiplicaciones se puede reducir por un factor de dos. Multiplicamos el numerador y el denominador de $H_k(z)$ por un factor del tipo $(1 - z_k^* z^{-1})$, donde z_k^* es el complejo conjugado de z_k , obteniendo

$$H_k(z) = \frac{1 - z_k^* z^{-1}}{1 - 2 \operatorname{Re}\{z_k\} z^{-1} + |z_k|^2 z^{-2}}.$$

Los z_k elegidos vamos a suponer que son del tipo $|z_k|^2 = 1$. Por tanto, la NDFT está siendo evaluada en puntos $z_k = e^{jw_k}$ sobre el círculo unidad del plano Z. En este caso, podemos simplificar la ecuación de $H_k(z)$, consiguiendo la siguiente función de transferencia

$$H_k(z) = \frac{1 - e^{-jw_k} z^{-1}}{1 - 2 \cos w_k z^{-1} + z^{-2}},$$

representada en la figura 5. Así, podemos interpretar el algoritmo de Goertzel como el cálculo de la salida de un filtro digital recursivo de segundo orden.

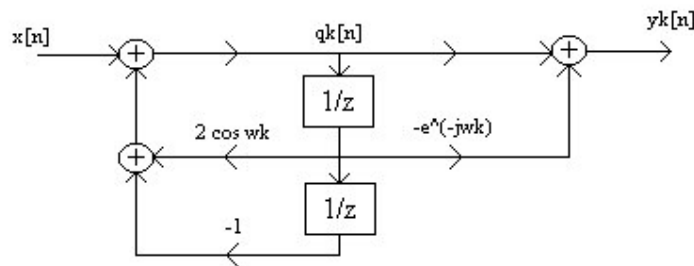


Figura 5. Algoritmo de Goertzel visto como un filtro digital recursivo de segundo orden.

Puesto que queremos calcular solamente $y_k[N]$, la multiplicación por e^{-jw_k} de la sección ‘feedforward’ de la figura 5 (a la derecha de los bloques de retraso) no necesita ser realizada hasta la iteración N-ésima. Las señales intermedias, $q_k[n]$ y $q_k[n-1]$, se calculan recursivamente mediante la ecuación de diferencias

$$q_k[n] = a_k q_k[n-1] - q_k[n-2] + x[n], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

donde el coeficiente a_k viene dado por

$$a_k = 2 \cos w_k,$$

y las condiciones iniciales son

$$q_k[-2] = q_k[-1] = 0.$$

Finalmente, evaluamos $y_k[N]$ como sigue:

$$y_k[N] = q_k[N] - e^{-jw_k} q_k[N-1].$$

El total de operaciones necesarias para obtener $X(z_k)$ es $2N + 8$ multiplicaciones reales y $4N + 6$ sumas reales. En consecuencia, el número de multiplicaciones es casi la *mitad* que para el método directo. Además, necesitamos *sólo dos coeficientes*, e^{-jw_k} y $e^{-jw_k N}$.

Se puede advertir que, el algoritmo de Goertzel descrito aquí se reduce al usado para calcular la DFT cuando $w_k = 2\pi k/N$. La cantidad de operaciones para obtener la DFT es casi igual que para la obtención de la NDFT. Sólo una multiplicación compleja más es necesaria en el caso de la NDFT.

En algunas aplicaciones, estamos interesados en encontrar únicamente el cuadrado de la magnitud de la NDFT, es decir, $|X(z_k)|^2$. En este caso, el algoritmo de Goertzel se puede modificar (dando lugar al *algoritmo de Goertzel modificado*) tal y como se indica a continuación. Puesto que $z_k = e^{jw_k}$, podemos escribir

$$X(z_k) = z_k^{-N} y_k[N] \Rightarrow |X(z_k)|^2 = |y_k[N]|^2,$$

y sustituyendo $y_k[N]$ por la expresión obtenida anteriormente, nos queda que

$$|y_k[N]|^2 = q_k^2[N] + q_k^2[N-1] + a_k q_k[N] q_k[N-1].$$

Este esquema modificado usa solamente un coeficiente real a_k . Si tenemos una señal de entrada real, entonces la aritmética compleja se evita, y, necesitamos solamente $N + 4$ multiplicaciones reales y $2N + 2$ sumas reales. Se puede comprobar que este número de operaciones es igual que el número de las mismas necesarias para hallar el cuadrado de la magnitud de la DFT. Este esquema será el que usaremos más adelante para detectar los tonos DTMF (Dual-Tone Multi-Frequency).

2.3.4 EL ALGORITMO DE GOERTZEL. INTERPRETACIÓN: SERIES TRIGONOMÉTRICAS

El algoritmo de Goertzel era, originalmente, un método para la evaluación de series trigonométricas finitas. Hemos obtenido esta interpretación de manera independiente mientras intentábamos calcular la NDFT en puntos del círculo unidad del plano Z .

Podemos expresar la NDFT de una secuencia $x[n]$ para $z_k = e^{jw_k}$ como

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jw_k n} = e^{-j(N-1)w_k} A_k ,$$

donde

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j(N-1-n)w_k} .$$

Podemos descomponer A_k en parte real y parte imaginaria

$$A_k = C_k + jS_k ,$$

donde

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(N-1-n)w_k ,$$

y

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sen(N-1-n)w_k .$$

El cálculo directo de C_k y S_k a partir de las expresiones anteriores necesita los valores de los $2N$ coeficientes $\cos nw_k$ y $\sen nw_k$ que, en ellas, intervienen. Para evitar este hecho, se intenta hallar un método de cálculo iterativo que use únicamente los valores de $\cos w_k$ y $\sen w_k$. Con esta finalidad, se definen las sumas parciales

$$C_k^{(i)} = \sum_{n=0}^i x[n] \cos(N-1-n)w_k,$$

$$S_k^{(i)} = \sum_{n=0}^i x[n] \sen(N-1-n)w_k, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

de tal manera que

$$C_k = C_k^{(N-1)}, \quad S_k = S_k^{(N-1)}.$$

En primer lugar, centremos nuestra atención sobre $C_k^{(1)}$, escribimos su valor de forma explícita

$$C_k^{(1)} = x[0] \cos(N-1)w_k + x[1] \cos(N-2)w_k.$$

Usando la relación trigonométrica

$$\cos(m+1)\theta = 2 \cos \theta \cos m\theta - \cos(m-1)\theta,$$

podemos expresar $C_k^{(1)}$ de la siguiente manera

$$C_k^{(1)} = \{2 \cos w_k x[0] + x[1]\} \cos(N-2)w_k - x[0] \cos(N-3)w_k.$$

La siguiente suma parcial se puede expresar entonces como

$$C_k^{(2)} = C_k^{(1)} + x[2] \cos(N-3)w_k = \{2 \cos w_k x[0] + x[1]\} \cos(N-2)w_k + \{x[2] - x[0]\} \cos(N-3)w_k$$

Podemos continuar haciendo esto sustituyendo el coseno del armónico m -ésimo por los de dos armónicos inferiores, formando las sumas parciales sucesivas, obteniéndose de forma general

$$C_k^{(i)} = g_i \cos(N-i)w_k + h_i \cos(N-i-1)w_k, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

donde

$$g_1 = x[0], \quad h_1 = x[1],$$

$$g_i = 2 \cos w_k g_{i-1} + h_{i-1}, \quad h_i = x[i] - g_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Por tanto, podemos obtener C_k hallando recursivamente los g_i y h_i , puesto que

$$C_k = C_k^{(N-1)} = g_{N-1} \cos w_k + h_{N-1}.$$

De igual forma, para hallar S_k , usamos la relación trigonométrica

$$\text{sen}(m+1)\theta = 2 \cos \theta \text{sen} m\theta - \text{sen}(m-1)\theta,$$

para expresar las sumas parciales $S_k^{(i)}$ como

$$S_k^{(i)} = g_i \text{sen}(N-i)w_k + h_i \text{sen}(N-i-1)w_k, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Esto implica que

$$S_k = S_k^{(N-1)} = g_{N-1} \text{sen} w_k.$$

Se puede advertir que para calcular S_k hacemos uso de los valores ya calculados g_i y h_i obtenidos para C_k . Por último, calculamos A_k usando la ecuación $A_k = C_k + jS_k$, y, después $X(z_k)$ a partir de A_k tal y como se comentó al inicio de este apartado.

El número total de operaciones es de $2N+4$ multiplicaciones reales y $4N-2$ sumas reales. Además, necesitamos sólo los coeficientes, $\cos w_k$, $\text{sen} w_k$ y $e^{-j(N-1)w_k}$. Si la señal de entrada fuese real, C_k y S_k también serían reales, reduciéndose el número de operaciones a $N+2$ multiplicaciones reales y $2N-1$ sumas reales.

2.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME SUBBANDA (SB-NDFT)

En este apartado vamos a hablar de la NDFT Subbanda o SB-NDFT. La SB-NDFT se trata de un método para calcular la NDFT que se basa en la descomposición en subbandas de la secuencia de entrada. Este método no es más que una generalización de la DFT Subbanda o SB-DFT (de la que ya hablamos en la introducción del presente documento). La SB-NDFT es un método bastante útil para el desarrollo de algoritmos rápidos que sean capaces de calcular de forma aproximada la NDFT para señales que tienen su energía concentrada en sólo algunas bandas del espectro. Usaremos un algoritmo basado en la SB-NDFT para decodificar tonos DTMF (en esto se profundizará más adelante).

Comenzaremos presentando la idea básica de la SB-NDFT para un análisis de banda completa. Después, mostraremos como conseguir una reducción en el número de operaciones mediante un análisis de banda parcial. Por último, incorporaremos una etapa de preprocesado generalizado en la SB-NDFT.

2.4.1 ANÁLISIS DE BANDA COMPLETA

Consideremos una señal $x[n]$ con un número par de muestras, N . Primero, descomponemos $x[n]$ en dos subsecuencias, $g_L[n]$ y $g_H[n]$, de longitud $N/2$ cada una, dadas por

$$g_L[n] = \frac{1}{2} \{x[2n] + x[2n+1]\},$$

$$g_H[n] = \frac{1}{2} \{x[2n] - x[2n+1]\},$$

con $n = 0, 1, \dots, N/2-1$.

Estas secuencias son simplemente versiones submuestreadas de $x[n]$ paso de baja y paso de alta, respectivamente. Podemos expresar $x[n]$ en términos de $g_L[n]$ y $g_H[n]$ mediante las siguientes expresiones

$$x[2n] = g_L[n] + g_H[n],$$

$$x[2n+1] = g_L[n] - g_H[n],$$

con $n = 0, 1, \dots, N/2-1$.

Entonces, la transformada Z, $X(z)$ de $x[n]$ se puede expresar tal y como vimos para el caso de la DFT Subbanda, esto es, en términos de $G_L(z)$ y $G_H(z)$, que son las transformadas Z de $g_L[n]$ y $g_H[n]$ respectivamente.

$$X(z) = (1 + z^{-1})G_L(z^2) + (1 - z^{-1})G_H(z^2).$$

Evaluando esta ecuación en $z = z_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, obtenemos la NDFT, $X(z_k)$, de $x[n]$,

$$X(z_k) = (1 + z_k^{-1})G_L(z_k^2) + (1 - z_k^{-1})G_H(z_k^2),$$

donde $G_L(z_k^2)$ y $G_H(z_k^2)$ son las NDFTs de las subsecuencias, $g_L[n]$ y $g_H[n]$, evaluadas en los puntos $z = z_k^2$. Por tanto, podemos encontrar la NDFT de la secuencia $x[n]$ en los puntos $z = z_k$ calculando las NDFTs de dos secuencias más cortas, $g_L[n]$ y $g_H[n]$, en los puntos $z = z_k^2$, y combinándolas después tal y como se muestra en la última ecuación obtenida. La figura 6 muestra el cálculo de la SB-NDFT con esta descomposición en dos bandas.

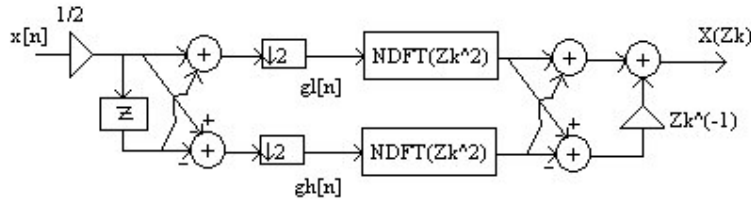


Figura 6. Cálculo de la SB-NDFT con una descomposición en dos bandas.

La ecuación obtenida se puede expresar de forma matricial como

$$X(z_k) = \begin{bmatrix} 1 & z_k^{-1} \end{bmatrix} R_2 \begin{bmatrix} G_L(z_k^2) \\ G_H(z_k^2) \end{bmatrix},$$

donde R_2 es una matriz de Hadamard de tamaño 2×2

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Podemos repetir la descomposición que hemos hecho para cada una de los dos subsecuencias y a su vez volver a descomponer en tanto en cuanto las longitudes de las subsecuencias que se vayan obteniendo sean pares. Por ejemplo, una descomposición en dos etapas sería

$$\begin{aligned} X(z_k) &= (1 + z_k^{-1}) \{ (1 + z_k^{-2}) G_{LL}(z_k^4) + (1 - z_k^{-2}) G_{HL}(z_k^4) \} \\ &+ (1 - z_k^{-1}) \{ (1 + z_k^{-2}) G_{LH}(z_k^4) + (1 - z_k^{-2}) G_{HH}(z_k^4) \} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & z_k^{-1} & z_k^{-2} & z_k^{-3} \end{bmatrix} R_4 \begin{bmatrix} G_{LL}(z_k^4) \\ G_{LH}(z_k^4) \\ G_{HL}(z_k^4) \\ G_{HH}(z_k^4) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde R_4 es una matriz de Hadamard de tamaño 4×4

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = R_2 \otimes R_2,$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker. Si el número de muestras de la señal de entrada es $N = MP$, donde $M = 2^\mu$, podemos realizar una descomposición de $\mu - etapas$. Las operaciones de filtrado y submuestreo se pueden reorganizar en una etapa de preprocesado tal y como se muestra en la figura 7. Aquí, todos los pasos de filtrado y submuestreo han sido combinados tomando bloques de transformación de M muestras. Esta transformación puede ser reconocida como una matriz inversa de Hadamard de tamaño $M \times M$ de la forma

$$R_M^{-1} = \frac{1}{M} R_M,$$

donde

$$R_M = R_{M/2} \otimes R_2.$$

Las NDFTs de las subsecuencias se pueden implementar por cualquier método de los comentados en apartados anteriores. Estas NDFTs alimentan una etapa de recombinación, compuesta por una transformación de Hadamard $M \times M$ y una cadena de multiplicadores y sumadores.

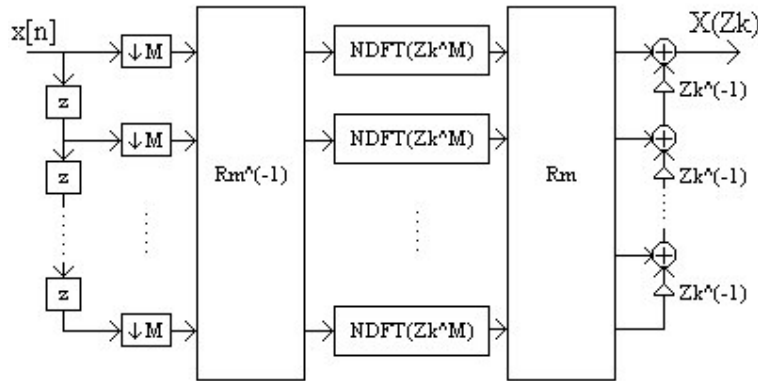


Figura 7. Cálculo de la SB-NDFT mediante descomposición en M bandas.

En el caso de banda completa, la obtención de la SB-NDFT requiere ligeramente más operaciones si la comparamos con la NDFT normal. Por ejemplo, en el caso de la descomposición en dos bandas, la evaluación de una muestra de la NDFT de una secuencia de longitud N en $z = z_k$ requiere encontrar muestras de las NDFTs de dos secuencias de longitud $N/2$ en $z = z_k^2$. Para esta parte del cálculo, necesitamos el mismo número de operaciones que para el cálculo normal de la NDFT. Pero, se necesita una operación más para implementar la etapa de preprocesado (sumas) y la etapa de recombinación (multiplicaciones y sumas). Sin embargo, la separación espectral

conseguida en la SB-NDFT permite obtener un ahorro computacional substancial cuando la señal tiene su energía concentrada en sólo algunas bandas concretas del espectro. Lo vemos en el siguiente punto.

2.4.2 ANÁLISIS DE BANDA PARCIAL

Al igual que en el caso de la SB-DFT, podemos calcular la NDFT de forma aproximada en la principal banda de la señal usando la separación espectral proporcionada por la etapa de preprocesado. Esto se hace eliminando cálculos en aquellas bandas en las que la señal presenta una cantidad de energía prácticamente despreciable. Por ejemplo, si una señal tiene la mayor parte de su energía en las bajas frecuencias, $0 \leq f \leq f_s/4$, podemos obtener una buena aproximación de su NDFT eliminando el término relacionado con las altas frecuencias en la ecuación

$$X(z_k) = (1 + z_k^{-1})G_L(z_k^2) + (1 - z_k^{-1})G_H(z_k^2)$$

quedando

$$\hat{X}(z_k) = (1 + z_k^{-1})G_L(z_k^2)$$

donde $z_k = e^{jw_k}$. Se debe advertir que, mediante esta aproximación, el número de operaciones requeridas se reduce a prácticamente la mitad que en el caso exacto. En una descomposición en M bandas, si L de las M bandas son descartadas, el ahorro computacional es aproximadamente L/M .

La decisión para descartar bandas de baja energía se puede tomar en tiempo real realizando una estimación de la banda principal usando la técnica recogida en *Shentov y Mitra, 1991*. Hay que resaltar que las muestras de la NDFT aproximada sufren de dos tipos de errores: *distorsión lineal*, debido a respuestas en frecuencia no constantes en la banda de interés y, *aliasing*, debido a componentes frecuenciales en la banda descartada. Como ejemplo, examinaremos el error en el caso de dos bandas, cuando la NDFT es aproximada por la expresión citada anteriormente. En un esfuerzo por compensar la distorsión lineal, escribimos la expresión de la siguiente forma

$$\hat{X}(z_k) = \frac{1}{2}(1 + z_k^{-1}) \sum_{n=0}^{N/2-1} \{x[2n] + x[2n+1]\} z_k^{-2n}.$$

Podemos reordenar los términos para expresar esta fórmula como la suma de la NDFT real, $X(z_k)$, y una componente de aliasing, $X_1(z_k)$,

$$\hat{X}(z_k) = X(z_k) + X_1(z_k).$$

Puesto que el diezmado provoca una repetición del espectro a lo largo del eje de frecuencia, $\hat{X}(z_k)$, puede ser también expresado como

$$\hat{X}(z_k) = A_0 X(z_k) + A_1 X(-z_k),$$

donde A_0 y A_1 son coeficientes que dependen de z_k . La componente $X(-z_k)$ aparece a causa del diezmado de orden dos. Aplicando la definición de la NDFT a la ecuación anterior, llegamos a

$$\begin{aligned} \hat{X}(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \{A_0 + (-1)^n A_1\} x[n] z_k^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (A_0 + A_1) x[2n] z_k^{-2n} \\ &\quad + z_k^{-1} \sum_{n=0}^{N/2-1} (A_0 - A_1) x[2n+1] z_k^{-2n} \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la del inicio de este ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= \frac{1}{2}(1 + z_k^{-1}) \\ A_0 - A_1 &= \frac{1}{2}(1 - z_k^{-1}) \end{aligned}$$

En consecuencia, ya podemos obtener A_0 y A_1 . Por otro lado, como $z_k = e^{jw_k}$, tenemos que

$$\hat{X}(e^{jw_k}) = \frac{1}{2}(1 + \cos w_k) X(e^{jw_k}) - \frac{j}{2} \sin w_k X(e^{-jw_k}).$$

Por tanto, el error de aproximación se puede obtener mediante

$$E(z_k) = X(z_k) - \hat{X}(z_k) = \frac{1}{2}(1 - \cos w_k) X(z_k) + \frac{j}{2} \sin w_k X(-z_k).$$

Este procedimiento se puede usar también para encontrar el error de una descomposición de orden mayor y un número diferente de bandas descartadas. Si la señal no tiene energía más allá de $0 \leq f \leq f_s/4$, entonces el segundo término de la

expresión final de $\hat{X}(e^{jw_k})$ se puede eliminar. De esta forma, la NDFT exacta se puede obtener simplemente despejando de esa expresión

$$X(z_k) = \frac{2 \hat{X}(z_k)}{1 + \cos w_k}.$$

De esta manera, podemos compensar, totalmente, la distorsión lineal en la banda de interés.

2.4.3 PREPROCESADO GENERALIZADO

Si el número de muestras de la señal de entrada es $N = MP$, donde $M = 2^\mu$, entonces podemos obtener una SB-NDFT de μ etapas mediante

$$X(z_k) = \begin{bmatrix} 1 & z_k^{-1} & \cdots & z_k^{-(M-1)} \end{bmatrix} R_M \begin{bmatrix} G_0(z_k^M) \\ G_1(z_k^M) \\ \vdots \\ G_{M-1}(z_k^M) \end{bmatrix},$$

donde R_M es una matriz de Hadamard de tamaño $M \times M$, y $G_i(z_k^M)$ es la NDFT de la subsecuencia $g_i[n]$ en el punto $z = z_k^M$. A partir de la figura 7, es claro que las subsecuencias están relacionadas con las componentes multifase de $x[n]$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} g_0[n] \\ g_1[n] \\ \vdots \\ g_{M-1}[n] \end{bmatrix} = R_M^{-1} \begin{bmatrix} x[Mn] \\ x[Mn+1] \\ \vdots \\ x[Mn+M-1] \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, P-1.$$

La SB-NDFT se puede generalizar reemplazando R_M por una matriz C no singular de tamaño $M \times M$. Haciendo esto, obtenemos

$$X(z_k) = \begin{bmatrix} 1 & z_k^{-1} & \cdots & z_k^{-(M-1)} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} V_0(z_k^M) \\ V_1(z_k^M) \\ \vdots \\ V_{M-1}(z_k^M) \end{bmatrix},$$

donde $V_i(z_k^M)$ es la NDFT de la subsecuencia $v_i[n]$ en $z = z_k^M$. Las subsecuencias $v_i[n]$ vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} v_0[n] \\ v_1[n] \\ \vdots \\ v_{M-1}[n] \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x[Mn] \\ x[Mn+1] \\ \vdots \\ x[Mn+M-1] \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, P-1.$$

En general, M no tiene porqué ser potencia de dos. La pobre separación en frecuencia dada por la transformación de Hadamard se puede mejorar usando otras matrices. Se prefieren generalmente transformaciones simples sin multiplicaciones puesto que ofrecen una complejidad computacional más baja.

2.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME BIDIMENSIONAL

2.5.1 DEFINICIÓN

Al igual que en el caso de secuencias unidimensionales, la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme de una secuencia de dos dimensiones corresponde a muestrear su transformada Z bidimensional. La NDFT 2-D de una secuencia $x[n_1, n_2]$ de tamaño $N_1 \times N_2$ se define como

$$\hat{X}(z_{1k}, z_{2k}) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] z_{1k}^{-n_1} z_{2k}^{-n_2}, \quad k = 0, 1, \dots, N_1 N_2 - 1$$

donde (z_{1k}, z_{2k}) representa $N_1 N_2$ puntos distintos en el espacio de 4-D (z_1, z_2) . Estos puntos se pueden elegir arbitrariamente pero de tal forma que la transformada inversa exista.

Veamos un pequeño ejemplo. Consideremos el caso, $N_1 = N_2 = 2$. Podemos expresar la definición anterior de forma matricial

$$\hat{X} = D X,$$

donde

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}(z_{10}, z_{20}) \\ \hat{X}(z_{11}, z_{21}) \\ \hat{X}(z_{12}, z_{22}) \\ \hat{X}(z_{13}, z_{23}) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x[0,0] \\ x[0,1] \\ x[1,0] \\ x[1,1] \end{bmatrix},$$

y

$$D = \begin{bmatrix} 1 & z_{20}^{-1} & z_{10}^{-1} & z_{10}^{-1} z_{20}^{-1} \\ 1 & z_{21}^{-1} & z_{11}^{-1} & z_{11}^{-1} z_{21}^{-1} \\ 1 & z_{22}^{-1} & z_{12}^{-1} & z_{12}^{-1} z_{22}^{-1} \\ 1 & z_{23}^{-1} & z_{13}^{-1} & z_{13}^{-1} z_{23}^{-1} \end{bmatrix}.$$

En general, la matriz D de la NDFT bidimensional es de tamaño $N_1 N_2 \times N_1 N_2$. Está totalmente definida mediante la elección de $N_1 N_2$ puntos de muestreo. Estos puntos de muestreo deben ser elegidos de tal forma que la matriz D sea no singular. En el caso de la NDFT unidimensional, si los puntos z_k son distintos, la NDFT inversa existe y es única. Esto sucede porque la matriz NDFT en el caso unidimensional tiene un determinante que se puede siempre factorizar de la forma en que ya se mostró en páginas anteriores. Sin embargo, esta propiedad no se puede extender al caso bidimensional. Es decir, aún eligiendo puntos de muestreo distintos, no se garantiza que la matriz NDFT en el caso bidimensional sea no singular. Por tanto, la elección de los puntos de muestreo debe hacerse de una manera juiciosa. Se han obtenido algunos resultados que dan condiciones suficientes bajo las cuales el problema de interpolación polinómica bidimensional equivalente tiene una solución única o no única cuando las muestras están localizadas en curvas irreducibles. Sin embargo, ningún tipo de condición necesaria y suficiente ha sido encontrada. Si bien hay que decir que esto no supone ningún problema serio desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. Para cualquier planteamiento práctico que tengamos, podemos realizar una comprobación rápida del determinante de D para conocer que, efectivamente, es no singular para los puntos de muestreo elegidos. En general, la inversa de la NDFT bidimensional se calcula resolviendo un sistema de ecuaciones de tamaño $N_1 N_2$, que requiere $O(N_1^3 N_2^3)$ operaciones.

Se advierte que la definición de la NDFT se puede extender rápidamente a dimensiones mayores.

2.5.2 CASOS ESPECIALES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA NO UNIFORME BIDIMENSIONAL

En general, el determinante de la matriz NDFT bidimensional es no factorizable. No obstante, vamos a considerar algunos casos especiales en los que el determinante puede ser factorizado. En estos casos, la elección de los puntos de muestreo está restringida de alguna manera con el objetivo de que la matriz NDFT bidimensional sea no singular.

2.5.2.1 Rejilla rectangular no uniformemente espaciada.

En este caso, los puntos de muestreo están en los vértices de una rejilla rectangular en el espacio (z_1, z_2) . Para una secuencia de tamaño $N_1 \times N_2$, las coordenadas z_1 de las N_1 líneas paralelas al eje de z_2 pueden ser elegidas arbitrariamente, en tanto en cuanto todas sean distintas. Sean esas coordenadas $z_{10}, z_{11}, \dots, z_{1, N_1-1}$. De igual forma, las coordenadas de las N_2 líneas paralelas al eje de z_1 también pueden ser elegidas de manera arbitraria, siempre que sean distintas. Sean esas coordenadas $z_{20}, z_{21}, \dots, z_{2, N_2-1}$. Una distribución de puntos de este tipo se muestra en la figura 8 para el caso particular de $N_1 = 3, N_2 = 4$. Hay que resaltar que la representación de los ejes z_1 y z_2 en esa figura es simplemente por conveniencia, puesto que las variables z_1 y z_2 forman realmente un espacio de cuatro dimensiones.

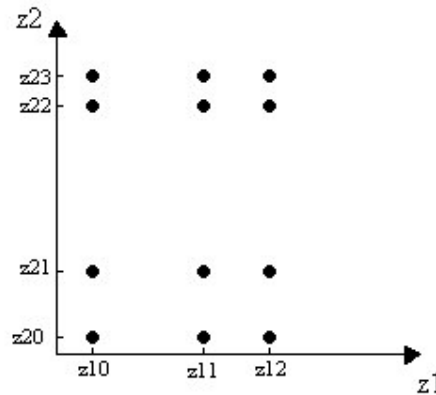


Figura 8. La NDFT 2-D con una rejilla rectangular no uniformemente espaciada para $N_1 = 3, N_2 = 4$.

La expresión matricial que vimos anteriormente se puede expresar en este caso de la forma siguiente

$$\hat{X} = D_1 X D_2',$$

donde

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}(z_{10}, z_{20}) & \hat{X}(z_{10}, z_{21}) & \cdots & \hat{X}(z_{10}, z_{2, N_2-1}) \\ \hat{X}(z_{11}, z_{20}) & \hat{X}(z_{11}, z_{21}) & \cdots & \hat{X}(z_{11}, z_{2, N_2-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{X}(z_{1, N_1-1}, z_{20}) & \hat{X}(z_{1, N_1-1}, z_{21}) & \cdots & \hat{X}(z_{1, N_1-1}, z_{2, N_2-1}) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x[0,0] & x[0,1] & \cdots & x[0, N_2-1] \\ x[1,0] & x[1,1] & \cdots & x[1, N_2-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N_1-1,0] & x[N_1-1,1] & \cdots & x[N_1-1, N_2-1] \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & z_{10}^{-1} & z_{10}^{-2} & \cdots & z_{10}^{-(N_1-1)} \\ 1 & z_{11}^{-1} & z_{11}^{-2} & \cdots & z_{11}^{-(N_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{1, N_1-1}^{-1} & z_{1, N_1-1}^{-2} & \cdots & z_{1, N_1-1}^{-(N_1-1)} \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_{20}^{-1} & z_{20}^{-2} & \cdots & z_{20}^{-(N_2-1)} \\ 1 & z_{21}^{-1} & z_{21}^{-2} & \cdots & z_{21}^{-(N_2-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{2, N_2-1}^{-1} & z_{2, N_2-1}^{-2} & \cdots & z_{2, N_2-1}^{-(N_2-1)} \end{bmatrix}.$$

Aquí, X y $\hat{X}$ son matrices de tamaño $N_1 \times N_2$. D_1 y D_2 son matrices de Vandermonde de tamaños $N_1 \times N_1$ y $N_2 \times N_2$, respectivamente. La matriz NDFT bidimensional se puede expresar de la forma

$$D = D_1 \otimes D_2,$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker. Aplicando una propiedad del producto de Kronecker, el determinante de D se puede escribir como

$$\begin{aligned} \det(D) &= \{\det(D_1)\}^{N_2} \otimes \{\det(D_2)\}^{N_1} \\ &= \prod_{i \neq j, i > j} (z_{1i}^{-1} - z_{1j}^{-1})^{N_2} \prod_{p \neq q, p > q} (z_{2p}^{-1} - z_{2q}^{-1})^{N_1} \end{aligned}$$

Por tanto, D es no singular siempre que D_1 y D_2 sean no singulares, o lo que es lo mismo, si los puntos $z_{10}, z_{11}, \dots, z_{1, N_1-1}$ son distintos y los puntos $z_{20}, z_{21}, \dots, z_{2, N_2-1}$ también son distintos.

Para este tipo de elección de los puntos de muestreo sólo se usan $N_1 + N_2$ grados de libertad de entre los $N_1 N_2$ grados disponibles inicialmente en la NDFT 2-D. En consecuencia, la inversa de la NDFT 2-D, X , se puede calcular resolviendo dos sistemas lineales separados de tamaños N_1 y N_2 respectivamente. Esto implica $O(N_1^3 + N_2^3)$ operaciones en vez de las $O(N_1^3 N_2^3)$ operaciones para el caso genérico.

Un caso específico de esta estructura de muestreo es aquél en el que las muestras están situadas en una rejilla rectangular no uniforme en el plano bidimensional (w_1, w_2) , donde $z_1 = e^{jw_1}$ y $z_2 = e^{jw_2}$.

La DFT 2-D es un caso especial de la NDFT-2D que se produce cuando los puntos de muestreo están situados en una rejilla uniforme del plano (w_1, w_2) , dando lugar a muestras del tipo:

$$\begin{aligned} z_{1k_1} &= e^{j\frac{2\pi}{N_1}k_1}, & k_1 &= 0, 1, \dots, N_1 - 1, \\ z_{2k_2} &= e^{j\frac{2\pi}{N_2}k_2}, & k_2 &= 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

2.5.2.2 Muestreo no uniforme en líneas paralelas.

Este tipo de muestreo se puede entender como una generalización de la estructura de muestreo presentada en el apartado anterior. Para una secuencia de tamaño $N_1 \times N_2$, las muestras se sitúan en N_1 líneas paralelas al eje z_2 , con N_2 puntos en cada línea. Las coordenadas z_1 correspondientes a las N_1 líneas se pueden elegir arbitrariamente, con la única restricción de que sean distintas. Llamemos a estas coordenadas $z_{10}, z_{11}, \dots, z_{1, N_1-1}$. Similarmente, las coordenadas z_2 de los N_2 puntos de cada línea también se pueden elegir de forma arbitraria, en tanto en cuanto sean distintos entre sí. Denotemos estas coordenadas z_2 de los puntos de la línea i -ésima como $z_{20i}, z_{21i}, \dots, z_{2, N_2-1, i}$. La figura 9 muestra un ejemplo de este tipo de muestreo donde $N_1 = 3$, $N_2 = 4$.

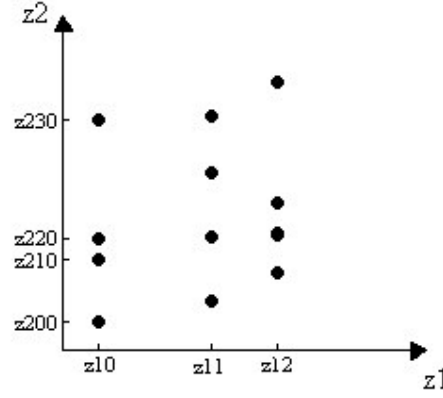


Figura 9. La NDFT 2-D con un muestreo no uniforme en líneas paralelas. En este caso, líneas paralelas al eje z_2 para $N_1 = 3$, $N_2 = 4$.

En este caso, la matriz NDFT bidimensional se puede expresar mediante el producto de Kronecker generalizado

$$D = \{D_2\} \otimes D_1.$$

Aquí, D_1 es una matriz de Vandermonde de tamaño $N_1 \times N_1$ igual a la obtenida para la estructura de muestreo anterior. $\{D_2\}$ denota un conjunto de N_1 matrices de Vandermonde de tamaño $N_2 \times N_2$, D_{2i} , $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Se puede representar como

$$\{D_2\} = \begin{Bmatrix} D_{20} \\ D_{21} \\ \vdots \\ D_{2, N_1-1} \end{Bmatrix},$$

donde

$$D_{2i} = \begin{bmatrix} 1 & z_{20i}^{-1} & z_{20i}^{-2} & \cdots & z_{20i}^{-(N_2-1)} \\ 1 & z_{21i}^{-1} & z_{21i}^{-2} & \cdots & z_{21i}^{-(N_2-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{2, N_2-1, i}^{-1} & z_{2, N_2-1, i}^{-2} & \cdots & z_{2, N_2-1, i}^{-(N_2-1)} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1.$$

La matriz D se puede expresar como

$$D = \begin{bmatrix} D_{20} \otimes d_0 \\ D_{21} \otimes d_1 \\ \vdots \\ D_{2, N_1-1} \otimes d_{N_1-1} \end{bmatrix},$$

donde d_i denota el vector de la fila i -ésima de la matriz D_1 .

El determinante de D se puede expresar como

$$\det(D) = \{\det(D_1)\}^{N_2} \prod_{i=0}^{N_1-1} \det(D_{2i}).$$

Por tanto, D es no singular si las matrices D_1 y D_2 son no singulares. Obviamente, todo este proceso se podría repetir tomando las muestras en N_2 líneas paralelas al eje z_1 con N_1 puntos en cada línea.

Para calcular la inversa de la NDFT 2-D, tenemos que obtener $x[n_1, n_2]$ a partir de

$$\begin{aligned} \hat{X}(z_{1i}, z_{2ji}) &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] z_{1i}^{-n_1} z_{2ji}^{-n_2} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} y[z_{1i}, n_2] z_{2ji}^{-n_2} \end{aligned}$$

con $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ y $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$, donde

$$y[z_{1i}, n_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] z_{1i}^{-n_1}.$$

Para cada z_{1i} , $i = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, la expresión de $\hat{X}(z_{1i}, z_{2ji})$ representa un sistema de Vandermonde de N_2 ecuaciones que puede ser resuelto para encontrar $y[z_{1i}, n_2]$, $n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$. Para cada $n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$, la expresión anterior representa un sistema de Vandermonde de N_1 ecuaciones que puede ser resuelto para hallar $x[n_1, n_2]$, $n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Por tanto, la inversa de la NDFT 2-D se puede calcular resolviendo N_1 sistemas lineales de tamaño N_2 cada uno, y N_2 sistemas lineales de tamaño N_1 cada uno. Todo esto requiere $O(N_1 N_2^3 + N_2 N_1^3)$ operaciones.

2.6 RESUMEN

El concepto de la Transformada de Fourier Discreta No Uniforme, que corresponde al muestreo no uniforme de la transformada Z , ha sido introducido en este capítulo. La principal ventaja de la NDFT es la flexibilidad que proporciona para

colocar muestras en cualquier punto del dominio Z . Vimos un ejemplo que demostraba cómo esta libertad servía para obtener un análisis espectral más eficiente. También se ha visto que el problema de calcular la inversa de la NDFT es análogo al problema de la interpolación polinómica y, por tanto, se puede resolver mediante la aplicación de técnicas de interpolación polinómica. Varios métodos de hallar la NDFT han sido explicados, incluyendo el algoritmo de Goertzel. La NDFT Subbanda se ha presentado como una manera rápida y aproximada de calcular la NDFT cuando la señal tiene su energía concentrada sólo en algunas bandas del espectro. Por último, hemos extendido el concepto de la NDFT al caso bidimensional.

En esta PRIMERA PARTE del documento se han cubierto los conceptos básicos de la NDFT así como también hemos repasado algunos de la DFT en el capítulo de Introducción. En la SEGUNDA PARTE, nos centraremos en aplicaciones específicas de la NDFT. Concretamente, veremos cómo aplicar este concepto al diseño de filtros digitales bidimensionales así como también a la decodificación de señales DTMF (Dual-Tone Multi-Frequency).

BIBLIOGRAFÍA

- S. Bagchi, S.K. Mitra: “The nonuniform discrete Fourier transform and its applications in signal processing”. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS
- J.S. Lim: “Two dimensional signal and image processing”. PRENTICE-HALL
- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer: “Discrete-time signal processing”. PRENTICE-HALL INTERNATIONAL, ENGLEWOOD CLIFFS.
- J.G. Proakis, D.G. Manolakis: “Digital signal processing : principles, algorithms, and applications”. UPPER SADDLE RIVER, NJ PRENTICE-HALL PTR.