ANÁLISIS NO LINEAL

DE CIRCUITOS DE RADIOFRECUENCIA

PARA SISTEMAS DE COMUNICACIONES MÓVILES DE 3ª GENERACIÓN

Departamento de Ingeniería Electrónica
Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla

Tutor del PFC: Carlos Crespo Cadenas
Autor: Miguel Ángel Córdoba Herrera

ÍNDICE

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

I.1. Presentación

En las comunicaciones digitales la linealidad de un amplificador de RF es muy importante, sobre todo para las aplicaciones móviles en las que el consumo de potencia en el terminal móvil es un recurso limitado y por tanto se desearía una alta linealidad .

Así hay un cierto interés en comprobar y medir la distorsión que se produce por efectos no lineales introducidos por el amplificador antes de enviar la señal al canal radio, y por lo general, en el análisis de la respuesta de los sistemas de comunicación y a la predicción del comportamiento de éstos en presencia de interferencia.

La mayoría de los sistemas que se encuentran son, en mayor o menor medida, sistemas no lineales y esto plantea serias dificultades analíticas. Una de las herramientas más útiles en el estudio de los sistemas no lineales es el análisis mediante Series de Volterra.

La aplicación original de las funciones de Volterra al análisis de circuitos no lineales se debe a Wiener en 1942. Más tarde, Wiener extendió la teoría y la aplicó de un modo general a más problemas. A partir de este trabajo de Wiener muchos han tratado el tema de las series de Volterra.

Desde finales de los 50, ha habido un esfuerzo continuo en la aplicación del desarrollo de series de Volterra en la teoría de los sistemas no lineales. Mucho de este trabajo ha sido llevado en universidades.

En 1967, Narayanan aplicó la técnica al análisis de la distorsión de un transistor amplificador usando un modelo en T no lineal de la unión del transistor. Después él y Maurer extendieron el análisis a sistemas reactivos no lineales con entradas gaussianas. Narayanan analizó también la distorsión de transistores amplificadores en cascada, y la distorsión en amplificadores realimentados.

Poon usó el análisis de Volterra en estudios para la distorsión de tercer orden del amplificador del modelo de control de carga del transistor. Kuo and Witkowski desarrollaron un programa de ordenador para computar la distorsión de tercer orden de circuitos amplificadores usando técnicas de Volterra. Meyer usó análisis de Volterra en una caracterización experimental de la modulación cruzada de amplificadores.

Bedrosian y Rice describieron la aplicación de las series de Volterra para sistemas alimentados por ondas de seno y ruido gaussiano y presentaron varios ejemplos importantes.

Las series de Volterra han sido descritas como “series de potencia con memoria” que expresan la salida de un sistema no lineal en “potencias” de la entrada x(t). Un sustancial número de los sistemas encontrados en los problemas de comunicación pueden representarse como series de Volterra.

En la práctica las series de Volterra no nos capacita para hacer algo que no se pudiera hacer de otro modo. Sin embargo, un ataque directo a problemas de sistemas de comunicación a menudo conlleva enfrentarse con un álgebra muy extensa. La proposición de las series de Volterra tiene la virtud que la mayoría de tales problemas pueden ser tratados de un modo ordenado.

Este documento presenta el análisis no lineal de un transistor *ED02AH FET*, un amplificador monolítico de microondas, a partir de las Series de Volterra.

Antes solía usarse *Tubos de Onda Progresiva (TWA)* como amplificadores de microondas pero en la actualidad, en las aplicaciones de comunicaciones inalámbricas modernas, se vienen utilizando *amplificadores de estado sólido*.

En concreto se trata de un *HEMT (High Electron Mobility Transistor)* que son transistores equivalentes a FETs para cuando nos encontramos en las frecuencias de microondas. El transistor HEMT se usa cuando se trabaja en diseño *MMIC (Monolithic Microwave Integrated Circuits)*.

Así en el análisis llevado a cabo se describe a la fuente de corriente no lineal, principal motivo de los efectos no lineales en el transistor y se realizan distintas simulaciones, a partir del programa MATLAB, entre las cuales se encuentran la obtención del *producto de intermodulación de tercer orden para una señal de dos tonos (IMD3)*, o la consecución del *punto de intercepto de tercer orden (IP3)*, el cual da una idea de la linealidad del amplificador.

No sólo se estudia un tipo de transistor HEMT, sino que también se presentan dos HEMTs auxiliares necesarios para ilustrar una sencilla técnica de linealización del transistor primero o principal.

Se pueden encontrar distintas técnicas para incrementar la linealidad de un amplificador. Sin embargo, la mayoría de ellas suelen requerir un hardware complejo, por lo que estos métodos son más apropiados para la estación base que para el móvil.

Para aplicaciones móviles, la alta linealidad a un bajo consumo de potencia es muy importante. Varias técnicas de linealización, adecuadas para este propósito, se han propuesto en la literatura. Por ejemplo, usar un transistor de región triodo auxiliar para compensar la no linealidad del amplificador principal de RF, y un amplificador auxiliar a baja frecuencia para feedforward de los términos de la intermodulación de segundo orden se adoptó para reducir la no linealidad de tercer orden. Sin embargo, todas ellas necesitan de circuitería adicional que inevitablemente incrementa el consumo de potencia dc.

En el presente documento se propone un nuevo método de linealización usando múltiples transistores en fuente común, donde el ancho y la alimentación de puerta de cada puerta se ajustan para compensar las características no lineales del transistor principal.

Y no sólo se propone esta sencilla técnica de linealización , sino que también se demuestra su validez con la implementación de amplificadores prototipos de dos FETs y tres FETs a partir de los HEMTs auxiliares antes mencionados, y la posterior comparación entre los resultados que se obtienen para el amplificador principal y los resultados experimentales que se consiguen con los amplificadores de dos y tres transistores.

Esto sería, en resumen, la introducción al documento que a continuación se detalla en los distintos capítulos y apartados.

El documento se encuentra dividido en cinco capítulos siendo el primero de ellos esta breve introducción.

En el segundo capítulo se trata la herramienta matemática que ha facilitado el análisis no lineal presentado, las Series de Volterra.

En los sistemas de comunicaciones aparecen a menudo molestas e inoportunas distorsiones. Para una amplia clase de sistemas, tales distorsiones pueden determinarse con la ayuda de las series de Volterra.

El estudio realizado en este capítulo sigue la línea de trabajo del artículo publicado por Bussgang [1] y aplica las funciones de Volterra en el desarrollo del análisis de los circuitos no lineales en el dominio de la frecuencia. Se ha centrado el método de análisis en series de potencia cuando se trata de sistemas no lineales sin memoria excitados ligeramente y en la región de pequeña señal.

El capítulo contiene una exposición sobre el análisis de circuitos no lineales a partir de las series de Volterra, subraya técnicas que se emplean, e ilustra algunos de los resultados alcanzados sin cubrir excitaciones fuertes de los circuitos no lineales que se resume en [2].

El capítulo, dividido en 13 apartados, empieza con el análisis de Volterra-Wiener de circuitos no lineales y explica el método de la corriente no lineal para computar la respuesta de circuitos no lineales con no linealidades del tipo series de potencia. En este método, el problema de solucionar una ecuación diferencial no lineal se aproxima solucionando repetidamente las mismas ecuaciones diferenciales pero cada vez con una excitación no lineal diferente. Se explica el cálculo de las funciones de transferencia no lineales de complejas redes no lineales. Con estos métodos es posible caracterizar el comportamiento de un sistema no lineal tan grande como un receptor de comunicación entero. La solución requiere modelos apropiados de los dispositivos no lineales contenidos en el circuito. El apartado 11 es una forma resumida de los principales términos de los resultados principales que ayuda a aplicar el análisis del tipo series de Volterra a sistemas alimentados por ondas sinusoidales o ruido gaussiano. Esta lista pretende ser una guía para las fórmulas completas. Las fórmulas completas son series infinitas en las que la labor de calcular el término de orden n aumenta rápidamente cuando n aumenta. Afortunadamente, en el estudio de sistemas de comunicaciones a menudo es posible despreciar los términos de modulación (i.e., términos en las series de Volterra) de orden más alto que el segundo o tercer orden. Seguidamente se exponen ejemplos para ilustrar el uso de las fórmulas y se acaba con las conclusiones.

En el capítulo 3 se habla de los distintos modelos de HEMTs, donde se describe detalladamente la fuente de corriente no lineal del modelo de pequeña señal y se caracterizan los transistores con los que se ha trabajado.

El capítulo se divide en ocho apartados. Tras una introducción sigue una descripción general teórica del FET para, a continuación centrarse en el transistor que nos concierne. El apartado cuatro trata del modelo de pequeña señal del transistor. Las simplificaciones llevadas a cabo para facilitar la tarea en el estudio están incluidas en el quinto apartado. En el sexto apartado se describe a la fuente de corriente no lineal, principal motivo de los efectos no lineales en el transistor. Seguidamente, en el apartado siete, se caracteriza al HEMT principal y se presentan las simulaciones que se han llevado a cabo en el estudio. Finalmente el último apartado presenta a los HEMTs auxiliares artífices de la linealización en el comportamiento del HEMT principal.

El capítulo cuarto propone la aplicación de una técnica de linealización nueva y sencilla y en él se puede demostrar que es factible compensar las características no lineales de un transistor (principal) usando transistores adicionales mediante una adecuada elección del ancho y de la alimentación de la puerta.

Dividido en 5 apartados, el capítulo empieza con una introducción a la técnica de linealización para continuar en el apartado 2 con la descripción del principio de linealización usando múltiples transistores. Los resultados de la implementación usando dos transistores se describen en el apartado 3. En el apartado 4 se presentan los resultados para un amplificador de tres FETs prototipo, y por último siguen las conclusiones.

El último capítulo que se incluye, reúne las conclusiones a las que se han llegado en el análisis además de enumerar nuevas vías de investigación.

Finalmente, se concluye con un apartado de las referencias que se han tenido presente para el desempeño del estudio que se ha llevado a buen fin.

Capítulo II

SERIES DE VOLTERRA

II. 1. Introducción

Este capítulo se dedica al análisis de la respuesta de los sistemas de comunicación y a la predicción del comportamiento de éstos en presencia de interferencia. En el mundo físico, la mayoría de los sistemas son, en mayor o menor grado, no lineales y esto plantea serias dificultades analíticas.

El estudio realizado en este capítulo aplica las funciones de Volterra en el desarrollo del análisis de los circuitos no lineales en el dominio de la frecuencia [3]. En los sistemas de comunicaciones aparecen a menudo molestas e inoportunas distorsiones. Para una amplia clase de sistemas, tales distorsiones pueden determinarse con la ayuda de las series de Volterra.

Se ha centrado el método de análisis en series de potencia cuando se trata de sistemas no lineales sin memoria excitados ligeramente y en la región de pequeña señal.

El presente capítulo contiene una exposición sobre el análisis de circuitos no lineales a partir de las series de Volterra, subraya técnicas que se emplean, e ilustra algunos de los resultados alcanzados. No cubre excitaciones fuertes de los circuitos no lineales.

La aplicación original de las funciones de Volterra al análisis de circuitos no lineales se debe a Wiener [4]. Fue en 1942 y más tarde, Wiener extendió la teoría y la aplicó de un modo general a numerosos problemas. A partir de este trabajo de Wiener muchos informes han tratado el tema. Desde finales de los 50, ha habido un esfuerzo continuo en la aplicación del desarrollo de series de Volterra en la teoría de los sistemas no lineales. Mucho de este trabajo ha sido llevado en universidades, y en general enfocado en el problema de los sistemas no interactuantes [5]-[10] . En 1967, Narayanan aplicó la técnica al análisis de la distorsión de un transistor amplificador usando un modelo en T no lineal de la unión del transistor [11]. Después él y Maurer extendieron el análisis a sistemas reactivos no lineales con entradas gaussianas [12]. Narayanan analizó también la distorsión de transistores amplificadores en cascada [13], y la distorsión en amplificadores realimentados [14]. Poon usó el análisis de Volterra en estudios para la distorsión de tercer orden del amplificador del modelo de control de carga del transistor [15]. Kuo and Witkowski desarrollaron un programa de ordenador para computar la distorsión de tercer orden de circuitos amplificadores usando técnicas de Volterra [16]. Meyer *et al.* [17] usó análisis de Volterra en una caracterización experimental de la modulación cruzada de amplificadores. Bedrosian y Rice [18] describieron la aplicación de las series de Volterra para sistemas alimentados por ondas de seno y ruido gaussiano y presentaron varios ejemplos importantes que se recogen ambos al final del capítulo.

Las series de Volterra han sido descritas como “series de potencia con memoria” que expresan la salida de un sistema no lineal en “potencias” de la entrada x(t). Un sustancial número de los sistemas encontrados en los problemas de comunicación pueden representarse como series de Volterra. Nosotros escribiremos la serie para el sistema típico como

$$(1.1)\quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \, \ldots \int_{-\infty}^{\infty} du_n \;\; h_n(u_1, \ldots, u_n) \prod_{r=1}^{n} x(t- u_r)$$

donde y(t) es la salida, x(t) es la entrada, y los kernels $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ describen al sistema*. Se notará que el kernel de primer orden $h_1(u_1)$ es simplemente la familiar respuesta impulsiva de una red lineal. Los kernels de orden más alto pueden así verse como respuestas impulsivas de orden más alto que sirven para caracterizar los distintos órdenes de las no linealidades.

El coeficiente 1/n! en (1.1) no se usa por la mayoría de los escritores. Lo insertamos porque simplifica muchas de nuestras ecuaciones. Algunos autores permiten a los kernels ser funciones asimétricas de las u's; sin embargo, la simetría es necesaria para los resultados presentados aquí. Si la respuesta de un sistema se obtiene como una serie de la forma (1.1) conteniendo un kernel asimétrico llamado γ_n , en lugar de h_n , un kernel simétrico puede obtenerse por "simetrización". Este proceso consiste en permutar los subíndices de los u_i en todas las n! formas, y tomando h_n para ser 1/n! veces la suma de la resultante h_n .

La transformada de Fourier n-ésima

$$(1.2)\ H_n(f_1, \ldots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} du_n\ h_n(u_1, \ldots, u_n)\ \exp\left[-j(\omega_1 u_1 + \ldots \omega_n u_n)\right]$$

donde $\omega_i = 2\pi f_i$ juega un papel importante en el análisis. H_0 es idénticamente cero porque nuestras series de Volterra empieza con n=1 (en vez de n = 0, que implicaría un sistema activo, i.e., una salida sin entrada). También, $H_1(f_1)$ se reconocerá como la familiar función de transferencia de una red lineal. Así la transformada del kernel de Volterra de orden n se ve análogo a una función de transferencia de orden n. Nos referiremos con $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ a la "función de transferencia de Volterra de orden n". A partir de que $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ es una función simétrica de $u_1, \ldots, u_n$, se sigue entonces que $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ es una función simétrica de $f_1, \ldots, f_n$. En muchos casos H_n puede obtenerse sin primero computar h_n .

Suponer que los H_n , n= 1,2, …, para un sistema particular son conocidos. Suponer además que la entrada x(t) al sistema (1.1) consiste de 1) una o más ondas sinusoidales, 2)ruido gaussiano, 3) una onda sinusoidal más ruido gaussiano, o 4) un tren de pulsos aleatorios. Entonces se pueden obtener expresiones para un número de artículos de interés respecto a la salida y(t) por sustitución de las H_n en fórmulas derivadas de las series de Volterra para y(t). Los principales términos de algunas de estas fórmulas son listados en el apartado 11. Esta lista pretende ser una guía para las fórmulas completas.

Las fórmulas completas son series infinitas en las que la labor de calcular el término de orden n aumenta rápidamente cuando n aumenta. Afortunadamente, en el estudio de sistemas de comunicaciones es a menudo posible despreciar los términos de modulación (i.e., términos en las series de Volterra) de orden más alto que el segundo o tercer orden.

* *Los argumentos de $h_n(u_1,¼, u_n)$ y su transformada de Fourier $H_n(¦_1,¼, ¦_n)$ en (1.2) se omitirá ocasionalmente para abreviar cuando el significado esté claro.*

El capítulo empieza con el análisis de Volterra-Wiener de circuitos no lineales y explica el método de la corriente no lineal para computar la respuesta de circuitos no lineales con no linealidades del tipo series de potencia. En este método, el problema de solucionar una ecuación diferencial no lineal se aproxima solucionando repetidamente las mismas ecuaciones diferenciales pero cada vez con una excitación no lineal diferente. Se explica el cálculo de las funciones de transferencia no lineales de complejas redes no lineales. Con estos métodos es posible caracterizar el comportamiento de un sistema no lineal grande tal como un receptor de comunicación entero. La solución requiere modelos apropiados de los dispositivos no lineales contenidos en el circuito. El apartado 11 es una forma resumida de los principales términos de los resultados principales que ayuda a aplicar el análisis del tipo series de Volterra a sistemas alimentados por ondas sinusoidales o ruido gaussiano. Finalmente se exponen ejemplos para ilustrar el uso de las fórmulas.

En la práctica las series de Volterra no nos capacita para hacer algo que no se pudiera hacer de otro modo. Sin embargo, un ataque directo a problemas de modulación a menudo conlleva empantanarse con el álgebra. La proposición de las series de Volterra tiene la virtud que la mayoría de tales problemas pueden ser tratados de un modo ordenado calculando primero las H_n y luego sustituyéndolas en las apropiadas fórmulas generales.

II. 2. Salida del Sistema como una Expansión de Volterra

Nuestro aproximamiento analítico se basa en el desarrollo de funciones conocidas como Series de Volterra. Este apartado resume las relaciones matemáticas relevantes que se usan en lo que sigue.

Volterra mostró que cada función G[x] continua en el campo de las funciones continuas puede ser representada por la expansión:

$$(2.1)\quad G[x] = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n[x]$$

en el cual $F_n[x]$ es una función regular homogénea de la forma

$$(2.2)\quad F_n[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n\,(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\, x(\xi_1)\, x(\xi_2) \dots x(\xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

El índice *n* denomina al orden de la función.

La serie (2.1) es una serie de funciones de Volterra. La serie se llama convergente si se le corresponde a cada función x(t) un valor definido de la función.

Norbert Wiener aplicó el desarrollo de las series de Volterra al análisis de sistemas no lineales. El percibió que la salida y(t) de un sistema no lineal es de alguna forma un tipo de función de su entrada x(t), y que las dos pueden ser relatadas por una serie de funciones. Por analogía al desarrollo en series de potencia, él sugirió que los primeros términos de la expansión funcional

$$(2.3)\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1\,(\tau)\; x(t-\tau)\; d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} h_2\,(\tau_1,\tau_2)\; x(t-\tau_1)\; x(t-\tau_2)\; d\tau_1\, d\tau_2 + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_3\,(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$$

$$\cdot\, x(t-\tau_1)\; x(t-\tau_2)\; x(t-\tau_3)\; d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 + \dots$$

puede ser suficiente para representar y(t) siempre y cuando las no linealidades no sean demasiado violentas. Como en cualquier expansión de series, esta representación es útil cuando el número de términos requeridos para una adecuada aproximación a y(t) no sea muy grande. Se adopta así la representación de (2.3) en nuestro análisis como, de hecho, aplicable al caso de pequeña señal no lineal. Cuando el número requerido de términos en la expansión se convierta impracticablemente grande, se habla del caso de gran señal no lineal. En ese caso, se deben buscar diferentes métodos de solución que, en general, serán más complicados.

El kernel de orden n-ésimo de (2.3), $h_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, se puede denominar como la respuesta impulsional no lineal de orden n. Su transformada de Fourier se puede llamar la función de transferencia de orden n.

$$(2.4)\quad H_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int h_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \exp[-j2\pi(f_1\tau_1+f_2\tau_2+\ldots f_n\tau_n)]\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n$$

A la inversa, la respuesta no lineal de orden n sigue de la función de transferencia de orden n por la transformación inversa de Fourier, i.e.,

$$(2.5)\quad h_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int H_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \exp[{}_2\tau_2+\ldots f_n\tau_n)]\, df_1\, df_2 \ldots df_n$$

Considerando la relación entrada-salida (2.3) y escribiéndola de la forma

$$(2.6)\quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$$

en la que

$$(2.7)\quad y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_n)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

es la componente de salida de orden n.

Sustituyendo (2.6) en (2.7) y llevando fuera las integrales múltiples de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, se consigue

$$(2.8)\quad y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int H_n(f_1, \ldots, f_n) \prod_{i=1}^{n} X(f_i) \exp(j2\pi f_i t)\, df_i$$

que expresa convenientemente los términos de orden n de la expansión de la salida como una función del espectro de entrada $X(f)$. A partir de aquí, se usará la convención de que la transformada de Fourier de una función en el tiempo se denota por la misma letra mayúscula como el caso de la letra minúscula denota la función temporal.

Hemos usado el término "orden" con respecto a una componente no lineal de salida $y_n(t)$. Se aclarará más tarde que el orden de tal componente puede pensarse como el número de las frecuencias contribuyentes de entrada cuando la entrada es una suma de tonos individuales. Por ejemplo, una respuesta de segundo orden puede ser o en la frecuencia que es la suma de dos frecuencias distintas, o en el segundo armónico de cualquier frecuencia de entrada. Hay muchos casos en el análisis de sistemas no lineales donde diferente orden de no linealidades pueden ser resultado de respuestas a la misma frecuencia. La frecuencia de una respuesta no es por lo tanto totalmente indicativo del orden de la respuesta.

Realizando la transformada de Fourier a ambos lados de (2.8) se obtiene el espectro de salida de orden n-ésimo

$$(2.9)\ Y_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int H_n(f_1, \ldots, f_n)\, \delta(f - f_1 - \ldots - f_n) \prod_{i=1}^{n} X(f_i) \exp(j2\pi f_i\, t)\, df_i$$

en el que $\delta(\cdot)$ es la función delta. El espectro de la relación entrada-salida se sobreentiende de (2.6) y es entonces

$$(2.10)\ Y(f) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(f)$$

Así por ejemplo, si la entrada es una suma de dos senos de igual amplitud en f_a y $f_b > f_a$, entonces

$$(2.11)\ X(f) = \delta(f+f_a) + \delta(f-f_a) + \delta(f+f_b) + \delta(f-f_b)$$

El espectro de salida de segundo orden $Y_2(f)$ tiene cinco componentes sinusoidales en f_a+f_b, $f_b - f_a$, $2f_a$, $2f_b$ y 0, y así nueve términos. Un término representativo de $Y_2(f)$ a la frecuencia f_a+f_b es de la forma

$$(2.12)\ [H_2(f_b, f-f_a) - H_2(f_a, f-f_b)]\, \delta(f-f_a-f_b)$$

En la discusión que sigue, se asumirá que las funciones de transferencia no lineales son funciones simétricas de sus argumentos, i.e., que el orden de argumentos pueden ser intercambiados en $H_n(f_1, \ldots, f_n)$. Esto no es generalmente cierto a menos que la respuesta impulsiva $h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sea una función simétrica de sus argumentos. Ahora $h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ y por lo tanto $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ puede no ser, de hecho simétrica. Por lo mismo, puede verse de (2.7) que la salida $y_n(t)$ sería idéntica para cualquier permutación de los argumentos. Por esta razón, los kernels que difieren sólo de la permutación de argumentos son equivalentes en la representación del sistema. Se puede por tanto reemplazar cualquier kernel por (1/n!)–ésimo de la suma de todos los n! núcleos resultantes de todas las permutaciones de los argumentos y así forzar la simetría. Correspondientemente, se puede asegurar la simetría de la función de transferencia no lineal: se consideran las n! transformadas que resultan de todas las posibles permutaciones de las variables de frecuencia y tiempo y usamos la (1/n!)–ésima fracción de cada una de ellas para formar lo que se conoce como la transformada multidimensional simetrizada:

$$(2.13)\quad \frac{1}{n!}\sum_{l=1}^{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int H_n(\mathbf{P_l}(\mathrm{t}))\exp(-j2\pi\, \mathbf{P_l}(\mathrm{t})\cdot ¦)\, d\tau_1\dots d\tau_n = \frac{1}{n!}\sum_{l=1}^{n!} H_n(\mathbf{P_l}(¦))$$

donde ¦ es el vector $[f_1, f_2, \dots, f_n]$, y t es el vector $[\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$. $\mathbf{P_l}(\mathrm{t})$ y $\mathbf{P_l}(¦)$ son cada uno de los vectores generados por las n! permutaciones de las n componentes de los vectores t y ¦, respectivamente. El producto $\mathbf{P_l}(\mathrm{t})\cdot ¦$ es el vector punto producto. Para simplificar la notación, se denota a la función simétrica de n argumentos simetrizados por la suma de todas las funciones que se generaron por la permutación de argumentos por un símbolo S delante de cualquiera de los n! términos no simetrizados, así que

$$(2.14)\quad S[H_n(f_1, \dots, f_n)] \equiv \frac{1}{n!}\sum_{l=1}^{\infty} H_n(\mathbf{P_l}(¦))$$

De (2.4) se hace notar que las propiedades usuales de la conjugación espectral todavía permanecen:

$$(2.15)\quad H_n^*(f_1, \dots, f_n) = H_n(-f_1, \dots, -f_n)$$

en el cual el asterisco denota la conjugada compleja de la función.

El modelo de un sistema no lineal que resulta de este análisis se muestra en la Fig. 2.1, que muestra la salida estructurada como la suma de respuestas de orden bajo en paralelo.

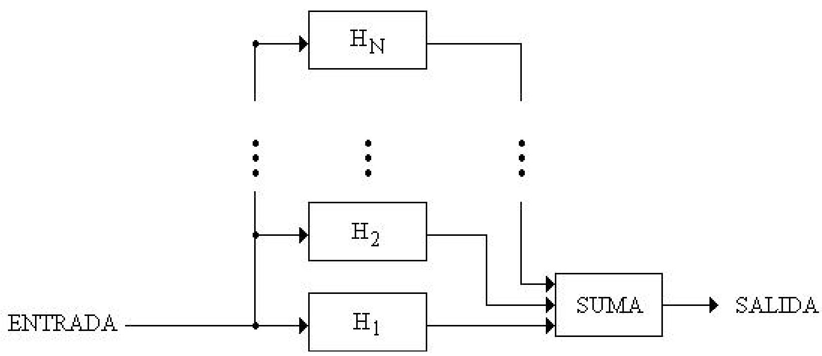


Fig. 2.1. Modelo de Volterra–Wiener de un sistema no lineal

En este punto se hace conveniente generalizar (2.8) introduciendo una función auxiliar multidimensional en el tiempo

$$(2.16)\quad y_n(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(f_1, \ldots, f_n)\, \delta(f - f_1 - \ldots - f_n) \prod^{n} X(f_i) \exp(j2\pi f_i\, t)\, df_i$$

y su n-ésima transformada de Fourier, o densidad multiespectral,

$$(2.17)\quad Y_n(f_1, \ldots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int y_n(t_1, \ldots, t_n) \exp[-j2\pi\,(f_1 t_1 + \ldots + f_n t_n)]\, dt_1 \ldots dt_n$$

así que

$$(2.18)\quad y_n(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int Y_n(f_1, \ldots, f_n) \exp[j2\pi\,(f_1 t_1 + \ldots + f_n t_n)]\, df_1 \ldots df_n$$

Se sigue entonces por comparación de (2.6) y (2.11) que

$$(2.19)\quad Y_n(f_1, \ldots, f_n) = H_n(f_1, \ldots, f_n)\, X(f_1) \ldots X(f_n)$$

y, de hecho (ver (2.7)),

$$(2.20)\quad Y_n(f_1, \ldots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int Y_n(f_1, \ldots, f_n)\, \delta(f - f_1 - \ldots - f_n)\, df_1 \ldots df_n$$

que afirma que $Y_n(f)$ es la integral de la densidad multiespectral $Y_n(f_1, \ldots, f_n)$, sujeta al confinamiento $f = f_1 + \ldots + f_n$. Si el orden de los argumentos en $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ es intercambiable, entonces lo es también el orden de los argumentos en $Y_n(f_1, \ldots, f_n)$.

II. 3. Determinación de las Funciones de Transferencia No Lineales

Un método conveniente de análisis para evaluar las funciones de transferencia no lineales es el llamado método de prueba o de entrada armónica. En este apartado se explica este método de determinación de las funciones de transferencia no lineales y se ilustra mediante el análisis de un sencillo circuito de lazo.

Se supone que la entrada y la salida de un sistema no lineal se pueden caracterizar por una relación R continua para todos los valores de y(t) tal que

(3.1) $y(t)= R[x(t)]$

donde x(t) es la entrada e y(t) la salida. Supóngase que existe una y sólo una solución estable de esta ecuación. Esta solución puede ser representada por su desarrollo de Volterra que es de la forma

$$(3.2)\ y(t)= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int H_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,)\prod_{i=1}^{n} X(\xi_i) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

Así la salida de un sistema no lineal de la forma (3.2) acarrea la determinación de los kernels de Volterra $H_n(f_1, \ldots, f_n)$, los cuales se han llamados funciones de transferencia no lineales.

Sea la entrada al sistema x(t) una suma de exponenciales

(3.3) $x(t)= \exp(j\omega_1 t) + \exp(j\omega_2 t) + \ldots + \exp(j\omega_n t)$

donde $\omega_i = 2\pi f_i$, i = 1,2, … n. La transformada de Fourier de la entrada (3.3) es una suma de funciones delta

(3.4) $X(\xi) = \delta(\xi-f_1) + \delta(\xi-f_2) + \ldots +\delta(\xi-f_n)$

Este tipo de entrada se llama “entrada de prueba” o “entrada armónica” y da el nombre al método. Con esta entrada, la expansión de Volterra de la salida (ver (2.3) y (2.8)) llega a ser

$$(3.5)\ y(t)= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{i=1}^{n} [\delta(\xi_i - f_1) + \ldots + \delta(\xi_i - f_n)] \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

El producto de la suma de funciones delta genera una suma de todos los términos diferentes de la forma

(3.6) $\delta(\xi_1 - f_{k1})\, \delta(\xi_2 - f_{k2}) \ldots \delta(\xi_n - f_{kn})$

con cada índice k_i que va de 1 a n. Si cada f_{ki} ocurre en un producto tal como (3.6) m_i veces, entonces hay

(3.7) $\dfrac{n!}{m_1!m_2! \ldots m_n!} \equiv (n; m_1, \ldots, m_n)$

términos idénticos pero por la permutación de los factores. La ecuación (3.7) indica que se ha denotado el coeficiente mutinomial por $(n; m_1, \ldots, m_n)$. Cuando (3.5) sale fuera y los términos idénticos han sido agrupados, se consigue

(3.8) $$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m} \frac{n!}{m_1!m_2! \ldots m_n!} H_n(f_{k1}, \ldots, f_{kn}) \exp[\, j2\pi\, (f_{k1} + \ldots + f_{kn})\, t\,]$$

donde m bajo la suma indica que la suma incluye todos los distintos conjuntos $\{ m_i \}$ tales que: $m_i < m_{i+1}$ y

(3.9) $$\sum_{i=1}^{n} m_i = n$$

La inecuación $m_i < m_{i+1}$ ordena las frecuencias en $\{f_{mi}\}$ según el índice de tal modo que no se repita los conjuntos de frecuencias que se diferencian de una sola permutación. Se apunta, en particular, de (3.8) que con la entrada (3.4), hay un término de orden n en la expansión de y(t) dado por

(3.10) $n!\ S\,[H_n(f_1, \ldots, f_n)] \exp[\, j2\pi\, (f_1 + \ldots + f_n)\, t\,]$

Esto establece que la función de transferencia no lineal de orden n simétrica representada por $S[H_n(f_1, \ldots, f_n)]$ se puede obtener analíticamente como el coeficiente de $n! \exp[j2\pi(f_1 + \ldots + f_n)t]$ en la salida del sistema, cuando la entrada del sistema es la suma de n exponenciales dadas por (3.3). Subrayamos que éste método analítico a partir de la suma de exponenciales de (3.3) no es real. Tal suma puede servir como una señal de prueba analítica, pero no como una base de medidas reales. En lo que sigue la función de transferencia no lineal simétrica (2.14) siempre es supuesta incluso si no está explícitamente indicada.

La observación de que el coeficiente de $\exp[j2\pi(f_1 + \ldots + f_n)t]$ es $n!\ H_n(f_1, \ldots, f_n)$, cuando la entrada es (3.3), sugiere un método recursivo para determinar todas las funciones de transferencia no lineales de la ecuación definiendo el comportamiento del sistema. El sistema dado por tal ecuación es primero “probado” por una excitación de una sola exponencial. Esto permite la determinación de $H_1(f)$. Luego se aplica una suma de dos exponenciales. Esto proporciona $H_2(f_1, f_2)$ en términos de $H_1(f)$. Este procedimiento continúa añadiendo una exponencial a la entrada en cada paso hasta el paso n, la entrada consiste en una suma de n exponenciales en $(f_1, \ldots, f_n)$. De ello se sigue que la función de transferencia no lineal de orden n se construye de todas las funciones de transferencia no lineales de orden inferior.

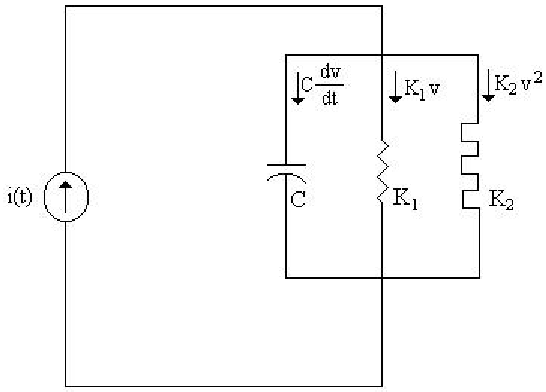


Fig. 2.2. Un sencillo circuito no lineal

A modo de ilustración, se considera una aplicación de este método al sencillo circuito no lineal de la Fig. 2.2 consistente en una capacidad, una resistencia lineal y otra resistencia no lineal en paralelo con la fuente de corriente i(t). La ecuación diferencial no lineal relativa a la excitación de corriente i(t) y la tensión v(t) a través de la capacidad es dada por

(3.11) $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) + K_1 v(t) + K_2 v^2(t)$

en el que $K_1 = 1/R$. Se identifica i(t) con x(t) y v(t) con y(t). Sustituyendo v(t) de (3.8), se pueden evaluar las sucesivas funciones de transferencia no lineales de este circuito usando una sucesión de entradas prueba. Empezando con

(3.12) $i(t) = \exp(j2\pi f t)$

A partir de que (3.11) se debe satisfacer para todo t y para cualquier f, entonces cada componente armónica debe también satisfacer individualmente la ecuación. Igualando los coeficientes de $\exp(j2\pi f t)$ a ambos lados de (3.11), y después de la sustitución de (3.8) para v(t) se obtiene

(3.13) $1 = (j2\pi f C + K_1)\, H_1(f)$

Así para el circuito especificado, el kernel de primer orden es simplemente la solución de (3.11) como si $K_2=0$ y la no linealidad estuviera a circuito abierto

(3.14) $H_1(f) = 1/\, (j2\pi f C + K_1)$

Procediendo similarmente con la suma de dos exponenciales

(3.15) $i(t) = \exp(j2\pi f_1 t) + \exp(j2\pi f_2 t)$

e igualando los coeficientes de 2! exp [j2π (f_1+f_2)t] a ambos lados de (3.11) después de la sustitución de v(t) de (3.8), se consigue

(3.16) $0 = [j2\pi (f_1+f_2)C + K_1]\, H_2(f_1,f_2) + K_2\, H_1(f_1)\, H_1(f_2)$

Solucionando para $H_2(f_1,f_2)$ y, teniendo (3.13) en cuenta, (3.16) proporciona

(3.17) $H_2(f_1,f_2) = -K_2\, H_1(f_1)\, H_1(f_2)\, H_1(f_1+f_2)$

Si se continúa con la suma de tres exponenciales

(3.18) $i(t) = \exp(j2\pi f_1 t) + \exp(j2\pi f_2 t) + \exp(j2\pi f_3 t)$

Igualando los coeficientes de 3! exp [j2π $(f_1+f_2+f_3)$t] a ambos lados de (3.11) se obtiene que

(3.19) $$H_3(f_1, f_2, f_3) = -\frac{1}{3} K_2 [H_1(f_1)\, H_2(f_2, f_3) + H_1(f_2)\, H_2(f_1, f_3) + H_1(f_3)\, H_2(f_1, f_2)] + H_1(f_1+f_2+f_3)$$

Si se sustituye para el kernel de segundo orden de (3.17), se coinsigue

(3.20) $$H_3(f_1, f_2, f_3) = -\frac{1}{3} K_2^2\, H_1(f_1)\, H_1(f_2)\, H_1(f_3)\, [H_1(f_1+f_2) + H_2(f_2+f_3) + H_2(f_3+f_1)] + H_1(f_1+f_2+f_3)$$

Este procedimiento puede continuarse indefinidamente para encontrar a cada paso las funciones de transferencia no lineales más altas en los términos de las funciones de transferencia no lineales más bajos como en (3.19), o en última instancia en términos de la función de transferencia lineal como en (3.20), y en términos de los coeficientes no lineales tales como K_2. Incluso en este caso (ver (3.11)), que la no linealidad tiene sólo un único término de segundo orden $v^2(t)$, la expansión de Volterra tiene un número infinito de términos. Como en (3.17) y (3.19), cada término es de hecho simétrico respecto a la permutación de argumentos en $H_n(f_1, \dots ,f_n)$ como indica (3.10). Observar que si la función de transferencia lineal $H_1(f)$ es la de un circuito normalizado sintonizado para tener un valor absoluto, o ganancia, de la unidad a una frecuencia, entonces

(3.21) $$| H_n(f_1, \dots ,f_n) | < \prod_{i=1}^{n} |H_1(f_i)|$$

así que los valores absolutos de los kernels de Volterra se hacen cada vez más pequeños con su orden y uno podría esperar la convergencia.

Del análisis de (3.11) con un solo término de segundo orden en $v^2(t)$, se puede ya generalizar para cualquier ecuación diferencial no lineal de la forma

$$(3.22)\quad x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \frac{d^r}{dt^r}\, y(t) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n\, y^n(t)$$

en la que los términos no lineales son series de potencia en y(t). Aplicando una sola exponencial a la entrada, se consigue

$$(3.23)\quad H_1(f) = 1/\, L(j2\pi f)$$

donde $L(j2\pi f)$ es el polinomio en f,

$$(3.24)\quad L(j2\pi f) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r\, (j2\pi f)^r$$

La ecuación (3.24) representa el circuito lineal asociado con (3.22), que se llama circuito lineal asociado. El método general de determinación de respuestas no lineales de orden dos o más, para un sólo nodo, implica el circuito lineal asociado y se discute en el siguiente apartado.

II. 4. Determinación de Respuestas No Lineales

En este apartado, se presenta una explicación del método de "la corriente no lineal" para determinar la respuesta de un sistema no lineal con un tipo de series de potencia de no linealidades. Esta aproximación se deriva de examinar las respuestas no lineales, incrementado el orden sucesivamente, del circuito caracterizado por la ecuación diferencial (3.22). Se introduce pues el concepto de corriente no lineal de orden n. Se muestra que las componentes de la respuesta de orden n pueden obtenerse como las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales. La ecuación lineal es una parte de la ecuación no lineal original y tiene una apropiada excitación de corriente llamada corriente no lineal.

Para demostrar esta afirmación, se asume que la excitación en (3.22) es de la forma

(4.1) $x(t) = z\, i(t)$

La variable auxiliar z se introduce para mantenerse al tanto del orden de los diferentes términos; se puede ver de (4.1) que cualquier término en z^n es de orden n en i(t).

Por definición de la expansión de Volterra (ver (3.2)), se sigue entonces que $y_n(t)$, la respuesta de orden n a la entrada x(t), es dada por

(4.2) $$y_n(t) = z^n \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(f_1, \ldots, f_n) \prod_{i=1}^{n} I(f_i)$$

en la que, por la notación convencional, $I(f)$ es la transformada de Fourier de i(t). Defínase v(t) como la salida cuando se aplica la entrada i(t) al circuito caracterizado por (3.22); i.e.,

(4.3) $$x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \frac{d^r}{dt^r}\, y(t) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n\, v^n(t)$$

Se tiene entonces que $v_n(t)$ es igual a la n-ésima integración con el mismo kernel como en (4.2)

(4.4) $$v_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(f_1, \ldots, f_n) \prod_{i=1}^{n} I(f_i) \exp[j2\pi f_i t)]df_i$$

así que

(4.5) $y_n(t) = z^n\, v_n(t)$

y

$$(4.6)\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\ v_n(t)$$

Con estos preliminares, se puede ver que la excitación i(t) y la respuesta v(t) pueden definirse por o dos ecuaciones diferenciales: (4.3), o la ecuación obtenida de sustituir (4.1) y (4.5) en (3.22)

$$(4.7)\ \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[\sum_{r=0}^{\infty} z^n\ \beta_r \frac{d^r}{dt^r}\ v_n(t) \right] + \sum_{n=2}^{\infty} K_n \left[\sum_{s=1}^{\infty} z^s\ v_s(t) \right]^n$$

Así si se puede solucionar (4.7) para las componentes individuales no lineales de la respuesta de v(t), denotado por $v_n(t)$, entonces la solución de (4.3) sigue del desarrollo

$$(4.8)\ v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$$

La introducción de la variable auxiliar z es un artificio de ayuda en la resolución para los sucesivos $v_n(t)$. Para ver esto, se soluciona (4.5) para las respuestas no lineales de los tres órdenes más bajos $v_1(t)$, $v_2(t)$, y $v_3(t)$.

Para solucionar el caso de $v_1(t)$ se deriva a ambos lados de (4.5) con respecto a z y entonces se hace z=0 en la respuesta. Este procedimiento proporciona la ecuación diferencial para $v_1(t)$ que supone simplemente la parte lineal de (4.5), a saber,

$$(4.9)\ i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_r \frac{d^r}{dt^r}\ v_1(t)$$

Así la componente de la respuesta de primer orden $v_1(t)$ satisface la parte lineal de (4.7), como si el elemento no lineal representado por las series de potencia en $v^n(t)$ fuera borrado del circuito y la corriente i(t) aplicada sólo a la parte lineal del circuito.

Para solucionar el caso de la respuesta no lineal de segundo orden $v_2(t)$, se repite el proceso de diferenciar a ambos lados de (4.5) respecto a z, y luego hacer z=0. Cuando se ha hecho esto, se consigue la ecuación diferencial que satisface $v_2(t)$:

$$(4.10)\quad 0 = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \frac{d^r}{dt^r} v_2(t) + K_2 v_1^2(t)$$

Una comparación de esta ecuación con (4.7) sugiere que $v_2(t)$ puede considerarse como la respuesta de la parte lineal del circuito alimentado por la corriente $K_2 v_1^2(t)$ aplicada en los terminales del elemento no lineal. Denótese a esta corriente como corriente no lineal de orden dos:

$$(4.11)\quad i_2(t) = K_2 v_1^2(t)$$

Si se repite el proceso con respecto a z tres veces, se obtiene la ecuación diferencial que satisface $v_3(t)$ que es

$$(4.12)\quad 0 = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \frac{d^r}{dt^r} v_3(t) + 2 K_2 v_1(t) v_2(t) + K_3 v_1^3(t)$$

Aquí otra vez la componente no lineal $v_3(t)$ es la respuesta del circuito lineal cuando lo atraviesa la fuente de corriente

$$(4.13)\quad i_3(t) = 2 K_2 v_1(t) v_2(t) + K_3 v_1^3(t)$$

localizada entre los extremos del elemento no lineal.

Se puede ver que este procedimiento puede continuarse sucesivamente hasta que se alcance la respuesta no lineal de orden deseado.

En general, se define la corriente de orden n a través del elemento no lineal como

$$(4.14)\quad i_n(t) = \sum_{m=2}^{\infty} K_m \left[\frac{d}{dz^n} \left[\sum_{s=1}^{\infty} z^s v_s(t) \right]^m \right]\Bigg|_{z=0}$$

A partir de m>1 , $i_n(t)$ no puede depender de respuestas no lineales de orden más alto que n, y puede depender sólo de las ya computadas n-1 respuestas $v_1(t),\ldots v_{n-1}(t)$. Específicamente trabajando con (4.14)

$$(4.15)\quad i_n(t) = \sum_{m=2}^{n} K_m \sum_{p} \frac{m!}{p_1! \cdots p_m!} v_1^{p1}(t) \ldots v_n^{pm}(t)$$

donde p bajo el signo del sumatorio indica que la suma es para todos los conjuntos de $p_1,\ldots, p_m$ que satisfacen

(4.16) $p_1 + 2\,p_2 + \ldots + mp_m = n$, $n = 2,3, \ldots, n - 1$

donde el exponente p_i puede variar de 0 a n. A partir de que $v_1(t)$ depende de i(t), $v_2(t)$ de $v_1(t)$, y $v_3(t)$ de $v_1(t)$ y $v_2(t)$, etc., todas las corrientes no lineales dependen últimamente de i(t). Específicamente, v_k^{pk} es de orden kp_k en i(t) donde (4.16) da el orden total de la dependencia de $i_n(t)$ con i(t).

El método de corriente no lineal de determinación de la respuesta de un circuito no lineal con un tipo de no linealidad de series de potencia puede ser ahora resumido como sigue:

Paso 1: Solucionar para la respuesta de primer orden $v_1(t)$ que es simplemente la respuesta de la parte lineal del circuito a la excitación i(t) como si la no linealidad fuera borrada del circuito (ver (4.9)).

Paso 2: Cuando la tensión de primer orden a través de la no linealidad $v_1(t)$ se ha encontrado, calcular la corriente no lineal $i_2(t)$. En general, calcular la corriente no lineal $i_n(t)$ (ver (4.15)) como se encontró cada $v_{n-1}(t)$.

Paso 3: Solucionar para $v_n(t)$ la ecuación diferencial lineal

(4.17) $L\,[v_n(t)] + i_n(t) = 0$, $n = 2, 3, \ldots$

en la que L denota simbólicamente la operación del circuito lineal e $i_n(t)$ es la fuente no lineal de corriente calculada en el paso 2 a partir del conocimiento de $v_1(t), \ldots, v_{n-1}(t)$.

El método es claramente recursivo, ya que requiere la determinación de todas las componentes de orden menor antes de encontrar la componente de orden más alta. Finalmente, la respuesta total es la suma de todas las componentes

$$(4.18)\quad v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$$

pero la suma puede frecuentemente ser truncada por ligeras no linealidades, i.e., excitaciones de pequeña señal.

En resumen, en lugar de la ecuación diferencial no lineal para la respuesta total, solucionar repetidamente una ecuación diferencial lineal asociada para las componentes de la respuesta no lineal, usando cada vez la excitación apropiada. Esa excitación apropiada en la fase n del proceso es una función de las soluciones para las componentes de orden más bajo de la respuesta no lineal obtenida en las fases previas. La suma de las componentes es la expansión de series de la respuesta total.

II. 5. Fuentes de Corriente No Lineales para Entradas Armónicas

Los apartados precedentes presentaban un método iterativo para solucionar una ecuación diferencial no lineal para tensiones a través de los terminales de un circuito alimentado por una fuente de corriente y consistiendo en una conexión en paralelo de elementos lineales y no lineales. El tipo de elementos no lineales que se trataron tenían que la corriente dependía de una serie de potencia de la tensión que lo atravesaba. Se mostró que la respuesta no lineal de orden n puede iterativamente determinarse en términos de todas las respuestas no lineales de orden menor. Siguiendo el primer paso, en cada subsiguiente fase de la iteración, la corriente de orden n a través del elemento no lineal actúa como una fuente excitando el circuito lineal. Este método generaliza a otros tipos de no linealidades de series de potencia. En este apartado, se determina las corrientes de orden n generada por varios tipos de no linealidades representativas primero para entradas generales y luego específicamente para entradas armónicas que se presentan en la determinación de las funciones de transferencia no lineales.

Los típicos elementos no lineales cubiertos por este método incluyen los siguientess casos de dependencia en series de potencia:

a) Conductancia no lineal

$$(5.1)\quad i(t)= \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, v^n(t) = k(v)$$

b) Inductancia no lineal

$$(5.2)\quad i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \int_{-\infty}^{\infty} v^n(t)\, dt = \Gamma(v)$$

c) Capacidad no lineal

$$(5.3)\quad i(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\, v^n(t) = \frac{d}{dt}\gamma(v)$$

d) "No linealidad dependiente" (en elementos activos no lineales normalmente)

$$(5.4)\quad i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\, u^m(t)\, v^n(t) = \Gamma(u,v)$$

en el que u y v denotan tensiones en diferentes puntos del circuito y la suma no incluye los términos lineales que, si se presentan, otra vez podrían incluirse en el circuito lineal él mismo.

e) Admitancia no lineal generalizada

$$(5.5)\quad i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) \prod_{i=1}^{n} v(t-\tau_i)\, d\tau_i = H(v)$$

Las primeras tres de estas no linealidades sin memoria, encontradas, por ejemplo, cuando un elemento ligeramente no lineal del circuito se representa por los primeros términos de un desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de trabajo dc. Ligeramente no lineal quiere decir aquí que sólo unos pocos términos de la expansión de series de potencia se hacen necesarios para caracterizar de manera efectiva al circuito. La no linealidad d) se llama una no linealidad dependiente y se encuentra cuando el elemento es activo y depende de una fuente localizada en algún lugar del circuito y no a través de los dos nodos entre los cuales la no linealidad se encuentra. Las corrientes y tensiones implicadas en las ecuaciones de arriba son generalmente cantidades incrementales, i.e.,

$$v_{total}(t) = v_o + v(t) \quad \text{e} \quad i_{total}(t) = i_o + i(t)$$

en donde v_o, i_o representa las condiciones iniciales, o el punto de operación del elemento no lineal.

Se examina primero la no linealidad de los dos últimos apartados que genera la corriente $i_{NL}(t)$ que es una serie de potencias en v(t), la tensión a través de la no linealidad

$$(5.6)\quad i_{NL}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} K_n\, v^n(t)$$

Se empieza la suma con el término cuadrático a partir de que el término lineal pueda incluirse en el circuito lineal. La tensión v(t) tiene el desarrollo en serie

$$(5.7)\quad v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$$

donde $v_n(t)$ es ella misma una función de la corriente de entrada i(t) a través

$$(5.8)\quad v_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, i(t-\tau_1) \ldots i(t-\tau_n) d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

Es posible ordenar la suma de (5.6) así como el grupo de los componentes de $i_{NL}(t)$ conforme a su dependencia de la potencia de la corriente aplicada i(t). Este ordenamiento resultará en una suma

$$(5.9)\quad i_{NL}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} i_n(t)$$

donde $i_n(t)$ es la componente de corriente no lineal de orden n en i(t). Por ejemplo, sustituyendo en (5.6) y agrupando los términos apropiados se tiene:

$$(5.10)\quad \begin{aligned} i_2(t) &= K_2\, v_1^2(t) \\ i_3(t) &= K_3\, v_1^3(t) + 2\,K_2\, v_1(t)\, v_2(t) \\ i_4(t) &= K_4\, v_1^4(t) + 3\,K_3\, v_1^2(t)\, v_2(t) + K_2\,[v_2^2(t) + 2\, v_1(t)\, v_3(t)] \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

Este procedimiento puede ser sistematizado observando la siguiente recursión

$$(5.11)\quad i_n(t) = \sum_{m=2}^{n} K_m\, v_{m,n}$$

donde

$$(5.12)\quad v_{m,n} = \sum_{i=1}^{n-m+1} v_i(t) v_{m-i,\, n-1}$$

y

$$(5.13)\quad v_{m,1} = v_m(t)$$

Unos pocos términos recursivos, $i_{m,n}$, computados a modo de ilustración, verifican los cálculos directos en (5.10). Éstos están tabulados como componentes de i_n hasta orden n=6 en la Tabla 2.1

TABLA 2.1
UNA TABLA DE $V_{m,n}$

Corriente No Lineal i_m		COMPONENTE $V_{M,N}$				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
		K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
i_2	m=2	v_1^2				
i_3	m=3	$2\ v_1 v_2$	v_1^3			
i_4	m=4	$2v_1v_2+v_2^2$	$3\ v_1^2\ v_2$	v_1^4		
i_5	m=5	$2\ v_1v_4$	$3v_1^2v_3+3v_1v_2^2$	$4\ v_1^3\ v_2$	v_1^5	
i_6	m=6	$2v_2v_4+v_3^2$	$6v_1^2v_4 + v_2^3\ +6v_1v_2v_3$	$4v_1^2v_3+6v_1^2v_2^2$	$5\ v_1^4\ v_2$	v_1^6
$v_{m,m} = v_1^m(t)$ $v_{m,m-1} = (m-1)\ v_1^{m-2}(t)\ v_2(t)$						

Un procedimiento similar puede seguirse con respecto a otro tipo de no linealidades en series de potencia. Concretamente, para la admitancia generalizada no lineal especificada por (5.5), se tiene

$$(5.14)\quad i_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int h_m(\tau_1, \ldots, \tau_m)\ v_{m,n}\ d\tau_1 \ldots d\tau_m$$

en el que

$$(5.15)\quad v_{m,n}(t) = \sum_{i=1}^{n-m+1} v_i(t-\tau_m)\ v_{m-i\,,n-1}\,, \qquad n \geq m$$

$$(5.16)\quad v_{m,1}(t) = v_m(t-\tau_1)$$

En los apartados precedentes se demostró que una vez que la corriente no lineal de orden n-1 se determina para cada no linealidad del circuito, la respuesta no lineal de orden n sigue de una suma de exponenciales, la repuesta no lineal de orden n incluye la función de transferencia no lineal $H_n(f_1,\ldots, f_n)$ como la componente espectral en la frecuencia suma $f_1+\ldots+f_n$. Por esta razón, es útil establecer lo que son fuentes de corriente no lineales cuando la excitación es específicamente una suma de K exponenciales distintas como se usó en el método de "prueba" de determinación de funciones de transferencia no lineales;

$$(5.17)\ i(t) = \sum_{k=1}^{K} \exp(j2\pi f_k t)$$

La transformada de Fourier de i(t) es entonces la suma de K funciones delta

$$(5.18)\ I(f) = \sum_{k=1}^{K} \delta(f-f_k)$$

Las fuentes de corriente no lineales debido a i(t) se ordenaron por su orden en el apartado anterior, donde se indicó que estas componentes de corriente no lineal dependen de los productos de la respuestas de tensión de diferente orden. En este apartado se obtiene la expresión para tales productos de las respuestas de tensión cuando el circuito tiene excitaciones exponenciales.

Renombrando la expresión para la respuesta en tensión de orden n

$$(5.19)\ v_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{i=1}^{n} I(\xi_i) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

así que la transformada de Fourier de $v_n(t)$ es

$$(5.20)\ V_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\ldots\!\int H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \delta(f-\xi_1-\ldots-\xi_n) \prod_{i=1}^{n} I(\xi_i) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

En concreto, para el espectro de entrada que es la suma de K funciones delta, sustituyendo de (5.18) en (5.20), se consigue

$$(5.21)\ V_n(f) = \sum_{\mathbf{k}} H_n(f_{k1},\ldots, f_{kn})\, \delta(f-f_{k1}-\ldots-f_{kn})$$

donde la suma de **k** es para todos los K^n posibles conjuntos de los n índices k_i tales que cada k_i puede asumir uno de los K valores.

Para clarificar el procedimiento, primero se examina la transformada de Fourier de un término simple tal como $v_1^2(t)$, el cuadrado de la respuesta de primer orden, cuando la excitación de corriente es exponencial. Como antes, se denota F[·] como la transformada de Fourier en el interés de simplificar la notación

$$(5.22)\ \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t)\exp(-j2\pi f t)\,dt = F[v_1^2(t)]$$

Expresando $v_1(t)$ en el integrando de (5.22) como la transformada de Fourier de $V_1(f)$, se encuentra

$$(5.23)\ F[v_1^2(t)] = \iint_{-\infty}^{\infty} V_1(\xi_1)\, V_1(\xi_2)\, \delta(f-\xi_1-\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Si se asume ahora que la excitación viene dada por (5.18) y que K=2, entonces sustituyendo (5.21) en (5.23), se llega a

$$(5.24)\ F[v_1^2(t)] = H_1^2(f_1)\,\delta(f-2f_1) + 2\,H_1(f_1)\,H_1(f_2)\,\delta(f-f_1-f_2) + H_1^2(f_2)\,\delta(f-2f_2)$$

En este espectro, la componente en f_1+f_2 tiene un coeficiente 2 $H_1(f_1)\,H_1(f_2)$.

Generalmente, en la determinación de espectros de fuentes no lineales de orden n, se excita el sistema con la suma de K=n exponenciales y la componente de corriente no lineal de interés es siempre la componente en $\delta(f-f_1-\ldots-f_n)$, el coeficiente espectral que está dividido por n! se denotará por $F_n[v(t)]$.

Para un término que incluye s diferentes $v_i(t)$, cada uno elevado a alguna potencia m_i, i=1, 2, …, así que $m_1+m_2+\ldots m_s=M$, se tiene

$$(5.25)\ F[v_{k1}^{m1}(t)\ldots v_{ks}^{ms}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int \prod_{i=1}^{m_1k_1} V_{k1}(\xi_i) \prod_{j=m_1k_1+1}^{m_1k_1+m_2k_2} V_{k2}(\xi_i)\ \ldots \prod_{l=n-k_s+1}^{n} V_{ms}(\xi_i)$$

$$\cdot\ \delta\Big(f-\sum_{l=1}^{n}\xi_i\Big)\, d\xi_{i1}\ldots d\xi_2$$

en el que

$$(5.26)\ \sum_{i=1}^{s} m_i k_i = n$$

que proporciona para el (1/n!)-ésimo del coeficiente espectral de la corriente no lineal a la frecuencia $f_1+\ldots+f_n$:

(5.27) $F[v_{k1}^{m1}(t) \ldots v_{ks}^{ms}(t)] = N_0 \cdot$

$$\cdot \sum H_{k1}(f_1, \ldots, f_{k1}) \ldots H_{k1}(f_{m1\,k1-k1+1}, \ldots, f_{m1\,k1}) \ldots \cdot \qquad \} \ m_1 \text{ factores}$$

$$\vdots$$

$$\cdot H_{ks}(f_{n-ms\,ks+1}, \ldots, f_{n-ms\,ks+ks}) H_{ks}(f_{n-ms\,ks+1}, \ldots, f_n) \qquad \} \ m_s \text{ factores}$$

donde

(5.28) $N_0 = (k_1!)^{m1} (k_2!)^{m2} \ldots (k_s!)^{ms} m_1! \ldots m_s! / n!$

y la suma es para todos los distintos términos resultantes de las permutaciones de las f_i que producen diferentes conjuntos de argumentos. Está claro que tales coeficientes son por construcción simétricos con respecto a cada frecuencia. Para abreviar la notación, es conveniente usar la función simetrizante, que se denota simplemente con el símbolo S, delante del primer término en la suma de todas las permutaciones

(5.29) $S[P_{k1}(f_1, \ldots, f_{k1}) P_{k2}(f_{k1+1}, \ldots, f_{k1+k2}) \ldots P_{ks}(f_{n-ms\,ks+1}, \ldots, f_n)$

$$= N_0(f_{k1+1}, \ldots, f_{k2}) \sum_{f_{k1}} P_{k1}(f_1, \ldots, f_{k1}) P_{k2}(f_{k1+1}, \ldots, f_{k1+k2}) \ldots P_{ks}(f_{n-ms\,ks+1}, \ldots, f_n)$$

Como ejemplo de la notación de la función simetrizante, se puede escribir entonces (5.14) en la forma abreviada

(5.30) $F_4[v_1^2(t)\, v_2(t)] = S[H_1(f_1)\, H_1(f_2)\, H_2(f_3, f_4)]$

y en general

(5.31) $F_n[v_{k1}^{m1}(t)\, v_{k2}^{m2}(t) \ldots v_{ks}^{ms}(t)] = S[H_{k1}(f_1, \ldots, f_{k1})\ H_{k1}(f_{1+1}, \ldots, f_{2k1}) \ldots$
$H_{k1}(f_{m1\,k1-k1+1}, \ldots, f_{m1k1})\, H_{k2}(f_{m1\,k1+1}, \ldots, f_{m1\,k1+k2}) \ldots H_{ks}(f_{n-ks+1}, \ldots, f_n)]$

donde $m_1 k_1 + m_2 k_2 + \ldots + m_s k_s = n$.

Está también claro de las definiciones que para cualquier constante A

(5.32) $F_n[Av(t)] = A^n F_n[v(t)]$

Nótese que, en general,

(5.33) $F_n[u(t) + v(t)] \neq F_n[u(t)] + F_n[v(t)]$

Aplicando (5.31) a (5.10) se obtiene,

(5.34) $F_3[i_3(t)] = K_3 H_1(f_1) H_1(f_2) H_1(f_3) + 2 K_2 S[H_1(f_1) H_2(f_2, f_3)]$

En resumen, el método de determinación de fuentes de corriente no lineales de diferente orden para una alimentación del circuito exponencialmente es como sigue: primero, encontrar de las recursiones al comienzo de este apartado la corriente de orden n como una función de componentes de tensión no lineales de diferente orden, y luego, aplicar (5.31) para encontrar el coeficiente de n! $\delta(f-f_1-\ldots-f_n)$ en $F[i_n]$, que se denota por $F_n[i_n]$, cuando el sistema es excitado por n exponenciales como en (5.18). Este coeficiente es generalmente expresable en términos de productos simétricos de funciones de transferencia no lineales de orden más bajo.

II. 6. Análisis de Redes

El sencillo circuito de un solo nodo con una sola no linealidad de la Fig. 2.2 analizada en el apartado 3 contiene todas las características de cualquier red de componentes discretos con muchos nodos y varios elementos no lineales. En este apartado, se combina el método de prueba de determinación de funciones de transferencia no lineales con el método de la corriente no lineal de determinación de respuestas no lineales. La combinación de estos métodos conduce a la solución general de redes no lineales que contienen elementos no lineales del tipo de series de potencia.

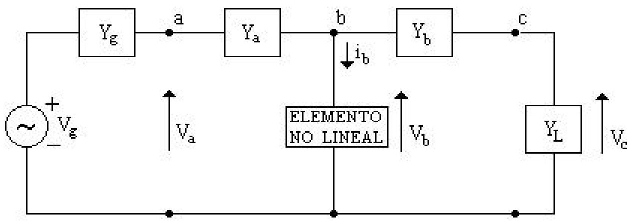


Fig. 2.3. Un sencillo circuito no lineal de tres nodos

El método se explica rápidamente por un ejemplo. Considerar el circuito de 3 nodos de la Fig. 2.3. Sean las tensiones de los nodos $v_a(t)$, $v_b(t)$, $v_c(t)$ y sus transformadas de Fourier $V_a= V_a(f)$, $V_b= V_b(f)$, $V_c= V_c(f)$. Sea la corriente a través de la única no linealidad una serie de potencias en tensión

$$(6.1)\quad i_b(t)= K[v_b(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} K_n\, v_b^n(t)$$

En el interés de simplificar la notación, denotemos F[·] la operación de trasformada de Fourier, así que

$$(6.2)\quad F[K[v_b(t)]] = \int_{-\infty}^{\infty} K[v_b(t)] \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

Sean las admitancias de fuente y de carga $Y_g= Y_g(f)$ y $Y_L= Y_L(f)$, respectivamente. Las ecuaciones de nodos del circuito en el dominio de la frecuencia son entonces

$$(6.3)\quad \begin{aligned} &Y_g (V_a- V_g) + Y_a (V_a- V_b) = 0 \\ &Y_a (V_b- V_a) + F[K[v_b(t)]] + Y_b (V_b- V_c) = 0 \\ &Y_b (V_c- V_b) + Y_L V_c = 0 \end{aligned}$$

donde $Y_a= Y_a(f)$, $Y_b= Y_b(f)$, e $Y_c= Y_c(f)$ son las admitancias de los nodos y $V_g= V_g(f)$ es el espectro de la tensión de alimentación.

Sea $[Y(f)]$ la matriz de admitancias lineal de la red lineal obtenida cuando los elementos no lineales se han eliminado, excepto por sus partes lineales. Entonces de (6.3),

$$(6.4)\ [Y(f)] = \begin{bmatrix} Y_g(f)+Y_a(f) & -Y_a(f) & 0 \\ -Y_a(f) & K_1+Y_a(f)+Y_b(f) & -Y_b(f) \\ 0 & -Y_b(f) & Y_b(f)+Y_L(f) \end{bmatrix}$$

La función de transferencia n-ésima que relaciona $v_a(t)$ a $v_g(t)$, $H_{an}(f_1, \ldots, f_n)$, se define por la expansión

$$(6.5)\ v_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int H_{an}(f_1, \ldots, f_n) \prod_{i=1}^{n} V_g(f_i) \exp(j2\pi f_i t)\, df_i$$

Similares expansiones de $v_b(t)$ y $v_c(t)$ definen $H_{bn}(f_1, \ldots, f_n)$ y $H_{cn}(f_1, \ldots, f_n)$ y, de hecho, tensiones en cualquier punto en el circuito.

El primer paso en el análisis de redes no lineales es solucionar el coeficiente de $\delta(f-f_1)$ en $V_a(f)$, $V_b(f)$, y $V_c(f)$ cuando la fuente de tensión es $V_g(f)= \exp(j2\pi f)$. Estos coeficientes, denotados por $H_{a1}(f)$, $H_{b1}(f)$, $H_{c1}(f)$, son las funciones de transferencia de primer orden definidas esta vez con respecto a $v_g(t)$.

La ecuación matricial para resolver las funciones de transferencia de primer orden está dada por

$$(6.6)\ [Y(f_1)] \begin{bmatrix} H_{a1}(f) \\ H_{b1}(f) \\ H_{c1}(f) \end{bmatrix} = Y_g(f_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en el que la unidad en el vector columna representa la localización de la fuente en el nodo. La solución de la ecuación matricial proporciona

$$(6.7)\ \begin{bmatrix} H_{a1}(f_1) \\ H_{b1}(f_1) \\ H_{c1}(f_1) \end{bmatrix} = [Y(f_1)]^{-1}\, Y_g(f_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El segundo paso del análisis no lineal facilita soluciones para las funciones de transferencia no lineales de segundo orden $H_{a2}(f_1, f_2)$, $H_{b2}(f_1,f_2)$, y $H_{c2}(f_1, f_2)$. Estas funciones de transferencia son los coeficientes de $2\ \delta(f-f_1-f_2)$ cuando el circuito lineal es alimentado por $i_2(t)$, el valor de la corriente de segundo orden a través de la no linealidad, que habría sido causada por una excitación $V_g(f)=\delta(f-f_1)+ \delta(f-f_2)$. Basado en los resultados de los apartados previos, la ecuación para solucionar las funciones de transferencia de segundo orden es entonces:

$$(6.8)\ [Y(f_1)+Y(f_2)] \begin{bmatrix} H_{a2}(f_1, f_2) \\ H_{b2}(f_1, f_2) \\ H_{c2}(f_1, f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_2\, H_{b1}(f_1)\, H_{b1}(f_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

que proporciona

$$(6.9)\quad \begin{bmatrix} H_{a2}(f_1, f_2) \\ H_{b2}(f_1, f_2) \\ H_{c2}(f_1, f_2) \end{bmatrix} = [Y(f_1+f_2)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -K_2 + H_{b1}(f_1) + H_{b1}(f_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para las funciones de transferencia no lineales de tercer orden, tenemos

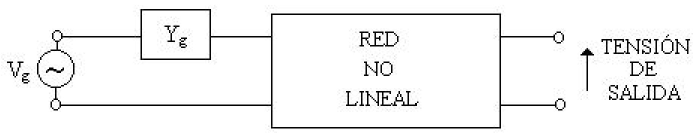
$$(6.10)\quad \begin{bmatrix} H_{a3}(f_1, f_2, f_3) \\ H_{b3}(f_1, f_2, f_3) \\ H_{c3}(f_1, f_2, f_3) \end{bmatrix} = [Y(f_1+f_2+f_3)]^{-1}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -K_3\, H_{b1}(f_1)\, H_{b1}(f_2) H_{b1}(f_3) - 2K_2\, S[H_{b1}(f_1)\, H_{b2}(f_2, f_3)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

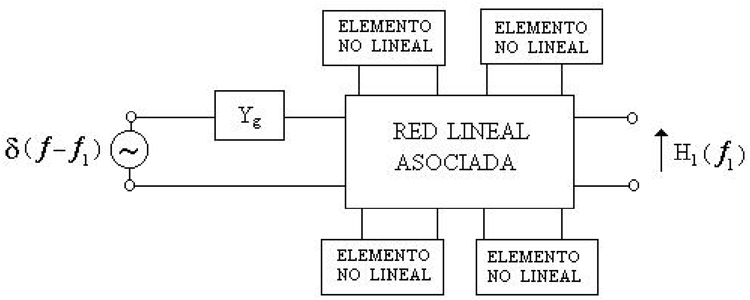
y así sigue.

Si el circuito contiene más de un elemento no lineal del tipo de series de potencia, todas las corrientes no lineales del orden apropiado aparecen en las matrices derivadas de las ecuaciones de nodos original tal como (6.2).

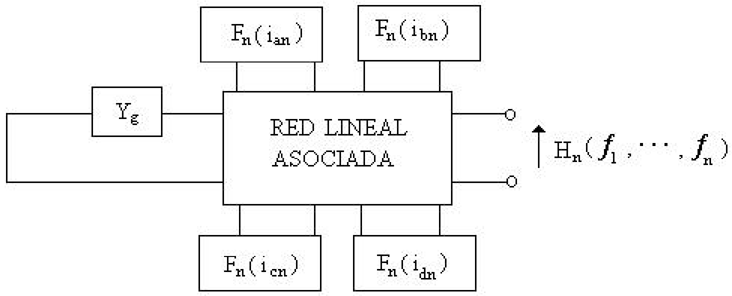
El procedimiento general se ilustra en la Fig. 2.4.



(a) Red no lineal



(b) Solución de la red lineal



(c) Solución de la red lineal con las fuentes de corriente no lineales

Fig. 2.4. Procedimiento para solucionar análisis de redes no lineales

Paso1: Identificar los elementos no lineales dentro de la red. Estos elementos son conceptualmente reordenados para ser colocados fuera de la parte lineal de la red. Se trata entonces la red no lineal dada como una red lineal (con todos los componentes lineales de la red original) con elementos no lineales ligados a ella en varios puertos. Esta red lineal se llamará la red lineal asociada. La red lineal asociada no contiene sólo todos los elementos lineales sino también todos los componentes lineales de los elementos no lineales del circuito. Los puertos en los cuales los elementos no lineales se adjuntan se llamarán puertos no lineales.

Paso 2: Como paso dos del análisis, se abre el circuito por todos los puertos no lineales. Sea $[H_1(f)]$ el vector función de transferencia de primer orden de la red lineal

$$(6.11) \qquad [H_1(f)] = \begin{bmatrix} H_{a1}(f) \\ H_{b1}(f) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Entonces del conjunto de ecuaciones nodales para todos los nodos independientes fuera de la red lineal; i.e., los puertos de entrada y salida y todos los puertos no lineales, se obtiene

$$(6.12) \; [H_1(f)] = [Y(f)]^{-1}\, Y_g(f) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Para un mejor análisis se asume que la fuente de tensión de entrada está cortocircuitada y que las fuentes de corriente han sido conectadas a todos los puertos lineales. Cada fuente de corriente es la corriente de primer orden a través del elemento no lineal en ese puerto.

Paso 4: Solucionar para el vector de funciones de transferencia de segundo orden

$$(6.13)\ [H_2(f_1+f_2)] = [Y(f_1+f_2)]^{-1} \begin{bmatrix} -F_2(i_{a2}) \\ -F_2(i_{b2}) \\ -F_2(i_{c2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

en el que i_{an}, i_{bn}, i_{cn}, …, n=1,2, …, son corrientes de orden n a través del elemento no lineal en los nodos a, b, c, … y $F_n[i_{an}]$ es el coeficiente de n! $\delta(f-f_1\ldots-f_n)$ en i_{an} si había sido la fuente de tensión

$$V_g(f)=\sum_{i=1}^{n} \delta(f-f_i)$$

Paso 5: Continuar determinando las funciones de transferencia no lineales hasta llegar al orden n deseado de

$$(6.14)\ [H_n(f_1+\ldots+f_n)] = [Y(f_1+\ldots+f_n)]^{-1} \begin{bmatrix} -F_n(i_{an}) \\ -F_n(i_{bn}) \\ -F_n(i_{cn}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Como se discutió en el apartado 4, las funciones de transferencia de orden menor que n están implicadas en las expresiones para las corrientes no lineales i_{an}, i_{bn}, i_{cn}, …. El vector $[H_n(f)]$ tiene tantos elementos como puertos independientes la red lineal asociada.

A causa de la importancia de las componentes espectrales $F_n(i_n)$ a la frecuencia $f_1+\ldots+f_n$, el método de computarlas se discutió en el apartado 3.

II. 7. Cascada de Etapas No Lineales

El análisis de una red no lineal descrito en el apartado previo requiere la inversión de la matriz de admitancias $[Y(f)]$. Si el número de nodos de la red es N, y N es grande, el número de operaciones para invertir la matriz admitancia es aproximadamente proporcional a N^3. En una red en escalera es posible frecuentemente segmentar la red de tal modo que las etapas puedan ser separadamente analizadas. Cada segmento contiene menos nodos que N y su matriz de admitancia puede ser invertida más fácilmente que la de la red completa. La cuestión que se discute a continuación es por tanto cómo de la combinación de funciones de transferencia de las etapas individuales se obtiene la función de transferencia de estas etapas en cascada.

Los resultados presentados aquí modifican los resultados convencionales en cascada para las funciones de transferencia no lineales [11], en el que el interacoplamiento entre las etapas en cascada se tiene en cuenta. La segmentación de circuitos en las etapas está hecha en puntos donde la interacción no lineal puede ignorarse.

Incluso con sólo esta suposición de acoplamiento, las medidas del circuito han mostrado que la modificación interenganche presentada aquí mejora significativamente la precisión en circuitos no lineales en cascada. La aproximación tomada se explica en referencia a la cascada de dos redes de cuatro terminales α y β mostradas en la Fig. 2.5.

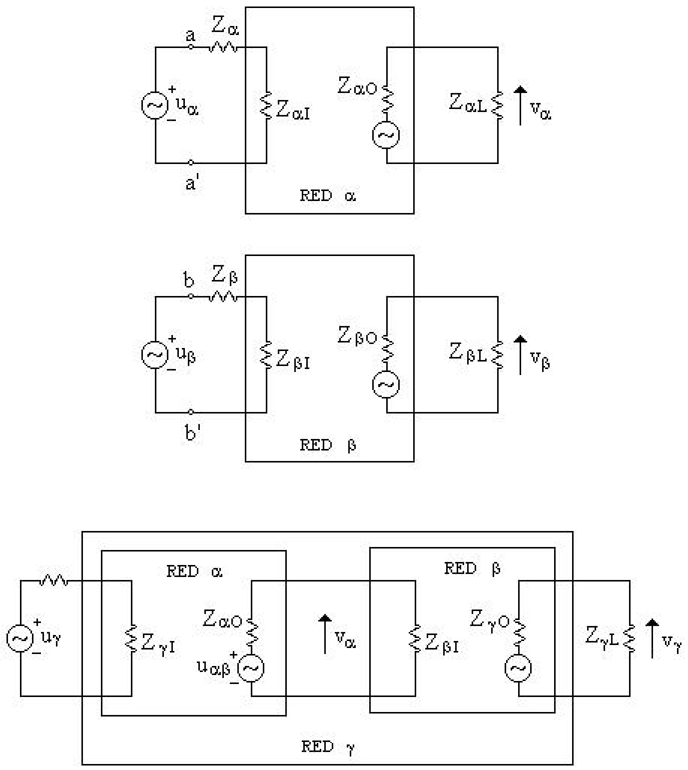


Fig. 2.5. Ilustrando la cascada a –b

Considerar el circuito α de la Fig. 2.5. El generador de la tensión Thèvenim $u_\alpha(t)$ en el puerto aa' alimenta su propia impedancia Z_a en serie con la impedancia de entrada del circuito α, $Z_{\alpha I}$. Esto genera una tensión de salida $v_\alpha(t)$ en el puerto bb' a través de la carga $Z_{\alpha L}$. Sea la impedancia de salida de la red α, vista desde los puertos de salida bb', $Z_{\alpha O}$. Las impedancias Z_α, $Z_{\alpha I}$ y $Z_{\alpha L}$ se asumen todas lineales. El circuito α es por sí mismo no lineal. Los elementos activos no lineales están permitidos, siempre que todos los incrementos de tensiones y corrientes en la red sean funciones de la tensión de entrada $u_\alpha(t)$ invariantes en el tiempo.

Se define la función de transferencia no lineal de orden n adimensional de la red α, $A_n(f_1, \ldots, f_n)$, por el desarrollo de series de Volterra del espectro de la tensión de salida $v_\alpha(t)$:

$$(7.1)\ V_\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int A_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \delta(f - \xi_1 \ldots - \xi_n) \prod_{i=1}^{n} U_\alpha(\xi_i)\, d\xi_i$$

en el que $U_\alpha(f)$ es la transformada de Fourier de $u_\alpha(t)$.

Similarmente, la función de transferencia no lineal de orden n adimensional de la red β, $B_n(f_1, \ldots, f_n)$, en la Fig. 2.5 se define por la expansión

$$(7.2)\ V_\beta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int B_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \delta(f - \xi_1 \ldots - \xi_n) \prod_{i=1}^{n} U_\beta(\xi_i)\, d\xi_i$$

en el que $u_\beta(t)$ y $v_\beta(t)$ son, respectivamente, los incrementos de las tensiones de entrada y salida de la red β. La impedancia de fuente Z_β, la impedancia de entrada de la red β, $Z_{\beta I}$, y la impedancia de carga $Z_{\beta L}$ de nuevo se asumen lineales totalmente.

Finalmente, considerar la red γ con tensión de entrada $u_\gamma(t)$, tensión de salida $v_\gamma(t)$, y la función de transferencia de orden n, $C_n(f_1, \ldots, f_n)$, definida por

$$(7.3)\ V_\gamma(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int C_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \delta(f - \xi_1 \ldots - \xi_n) \prod_{i=1}^{n} U_\gamma(\xi_i)\, d\xi_i$$

Aquí la impedancia de fuente Z_γ, la impedancia de entrada $Z_{\gamma I}$, y la impedancia de carga $Z_{\gamma L}$ son otra vez asumidas lineales.

Suponer que la red γ es, de hecho, una cascada de redes α y β con $Z_\gamma = Z_\alpha$ y $Z_{\alpha L} = Z_{\beta I}$ así que la cascada de α y β no interactúa de vuelta en α. Ahora tenemos que $Z_\beta = Z_{\alpha O}$ así que la fuente equivalente Thèvenim alimentadora de la etapa β se relaciona con la salida de la etapa α por una transformación de impedancia

$$(7.4)\ U_{\alpha\beta}(f) = \frac{Z_{\alpha O}(f)+Z_{\beta I}(f)}{Z_{\beta I}(f)}\ V_{\alpha}(f)$$

Se define la transformación de tensión adimensional por T(f)

$$(7.5)\ T(f) = \frac{Z_{\alpha O}(f)+Z_{\beta I}(f)}{Z_{\beta I}(f)}$$

Es ahora posible expresar la salida de γ también por referencias sólo a la red β

$$(7.6)\ V_{\gamma}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int B_n(\xi_1, \ldots,\xi_n)\, \delta(f-\xi_1\ldots-\xi_n) \prod_{i=1}^{n} U_{\alpha\beta}(\xi_i)$$

Sustituyendo (7.4) en (7.6)

$$(7.7)\ V_{\gamma}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int B_n(\xi_1, \ldots,\xi_n)\, \delta(f-\xi_1\ldots-\xi_n) \prod_{i=1}^{n} T(\xi_i)\, V_{\alpha}(\xi_i)\, d\xi_i$$

así que sustituyendo (7.1) en (7.7) se obtiene el espectro de salida de las etapas en cascada α y β.

Obsérvese que (7.3) y (7.7) deben ser iguales. Por lo tanto, la función de transferencia no lineal $C_n(f_1, \ldots,f_n)$ usada o en (7.3) o en (7.7) es dada por el coeficiente de n! $\delta(f-f_1\ldots-f_n)$ en la salida $V_{\gamma}(f)$ cuando se excita el sistema por una suma de n exponenciales

$$(7.8)\ U_{\alpha}(\xi)= \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi-f_k)$$

Cuando (7.3) y (7.8) se sustituyen en (7.7), la integrales indicadas se manipulan, y la componente en $f_1+f_2+\ldots+f_n$ es localizada, se encuentran las siguientes relaciones de cascada:

$$(7.9)\ C_1(f_1) = A_1(f_1)\, T(f_1)\, B_1(f_1)$$

$$(7.10)\ C_2(f_1, f_2) = A_1(f_1)\, A_1(f_2)\, T(f_1)\, T(f_2)\, B_2(f_1, f_2)+ A_2(f_1,f_2)\, T(f_1+f_2)\, B_1(f_1+ f_2)$$

y

$$(7.11)\ C_3(f_1, f_2, f_3) = \left[\prod_{i=1}^{3} A_i(f_i)T(f_i)\right] B_3(f_1, f_2, f_3)\ S[A_1(f_1)\ A_2(f_2,f_3)\ T(f_1)\ T(f_2+f_3)$$

$$\cdot\ B_2(f_1, f_2, f_3)] + A_1(f_1, f_2, f_3)\ T(f_1+f_2+f_3)\ B_1(f_1+ f_2+ f_3)$$

La interpretación de estas relaciones se siguen, por ejemplo, de (7.10); la componente en f_1+f_2 en la salida de γ se origina debido a la transmisión lineal a través de α y los efectos de segundo orden en β, o a través de los efectos de segundo orden de α pero transmisión lineal a través de β.

Argumentos similares pueden hacerse interpretando la composición de los términos en $C_3(f_1, f_2, f_3)$. En general, tenemos

$$(7.12)\ C_n(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{k} S\left[A_{k1}(f_1, \ldots, f_{k1}) \ldots A_{kM}(f_{n-kM+1}, \ldots, f_n)\right.$$

$$\left.\cdot\ T\left(\sum_{i=1}^{k_1} f_i\right) \ldots T\left(\sum_{j=n-k_M+1}^{n} f_j\right) B_M\left(\sum_{i=1}^{k_1} f_i, \ldots, \sum_{j=n-k_M+1}^{n} f_j\right)\right]$$

donde **k** bajo la suma indica que la suma es para todos los diferentes posibles conjuntos de $k_1, \ldots, k_M$ tales que

$$(7.13)\ \sum_{i=1}^{M} k_i = n$$

Se puede ver que la cascada de funciones de transferencia no lineales se convierte cada vez más complicada computacionalmente para altos órdenes de no linealidad. En el caso de circuitos que son suavemente excitados en ambas etapas, la conexión de interacoplamiento lineal es en ambas suficiente y necesaria para la mayoría de los cálculos en cascada.

Un reciente trabajo [19] ha mostrado que el método de la cascada de redes de 2 puertos usando matrices lineales puede extenderse a redes no lineales a través del uso de una familia de matrices multidimensional. El método proporciona una solución exacta para cada orden de no linealidad sucesivo.

II. 8. Respuestas No Lineales para una Suma de Señales de Banda Estrecha

El propósito de un receptor de comunicaciones típico es amplificar las señales en un ancho de banda dado y separarlas de entradas interferentes o ruido aleatorio. El espectro de frecuencia tanto de la señal deseada de entrada como la de las entradas no deseadas son típicamente de banda estrecha en comparación con sus frecuencias centrales. El receptor por él mismo contiene circuitos selectivos en frecuencia que limitan el número de las bandas zonales que pueden aparecer a la salida. Consecuentemente, en muchos casos la respuesta de un receptor de comunicaciones puede ser convenientemente caracterizado considerando sólo ciertas bandas de frecuencias de entrada y salida. En esta sección se aplica la aproximación de la función de transferencia no lineal en la consecución de la respuesta no lineal de sistemas cuyas entradas son una suma de señales zonales de banda estrecha.

En el análisis de señales de banda estrecha en los sistemas lineales, es conveniente usar representación compleja de señales prestando los datos de la envolvente compleja paso-baja y la frecuencia central o portadora y la fase arbitrariamente seleccionadas dentro de la banda. Sea la entrada al sistema x(t) la suma de K señales de banda estrecha

(8.1) $$x(t) = \sum_{k=1}^{K} x_k(t)$$

En particular, una de esas señales puede ser la señal deseada, y las otras pueden ser la interferencia.

La naturaleza de banda estrecha de las señales implica las componentes coseno y seno paso-baja $c_k(t)$ y $s_k(t)$, modulando una portadora a la frecuencia central de la banda que denotamos por ν_k; así

(8.2) $$x_k(t)= c_k(t) \cos 2\pi\nu_k t - s_k(t) \sin 2\pi\nu_k t$$

Es conveniente definir $z_k(t)$, una pequeña variante envolvente compleja de $x_k(t)$, tal que

(8.3) $$z_k(t)= c_k(t)+ j \sin s_k(t)$$

Con estas definiciones, la representación compleja estándar de $x_k(t)$ sigue:

(8.4) $$x_k(t) = \mathrm{Re}\,\{z_k(t) \exp (j2\pi\nu_k t)\}$$

A partir de que la parte real de la variable compleja es también igual a la mitad de la suma de la variable y su compleja conjugada, tenemos también

(8.5) $$x_k(t)= ½\ [z_k(t) \exp (j2\pi\nu_k t)+ z_k^*(t) \exp (-j2\pi\nu_k t)]$$

Correspondientemente, el espectro de $x_k(t)$ es

(8.6) $$X_k(f) = ½\ [Z_k(f-\nu_k) + Z_k^*(-f-\nu_k)]$$

donde $z_k(t)$ y $Z_k(f)$ son una pareja de transformadas

$$(8.7)\ Z_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z_k(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

y

$$(8.8)\ z_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(f) \exp(j2\pi f t)\, df$$

Supóngase que no hay componente de entrada dc $Z_o(f)=0$, y denotemos $z_k^*(t)$, $Z_k^*(-f)$, y $-\nu_k$ por $z_{-k}(t)$, $Z_{-k}(f)$, y ν_{-k} , respectivamente.

En esta notación, el espectro de entrada se convierte en

$$(8.9)\ X_k(f) = ½ \sum_{-K}^{K} Z_k(f-\nu_k)$$

y la entrada por sí misma se puede escribir como

$$(8.10)\ x(t) = ½ \sum_{-K}^{K} z_k(t) \exp(j2\pi\nu_k t)$$

Reescribiendo la salida de sistema no lineal y(t) expandiéndola en series de Volterra

$$(8.11)\ y(t) = \sum_{i=-K}^{K} y_n(t)$$

en el que $y_n(t)$, la componente de salida de orden n, o la n-ésima salida, es dada por

$$(8.12)\ y_n(t) = \int \ldots \int_{-\infty}^{\infty} H_n(f_1, \ldots, f_n) \prod_{i=1}^{n} X(f_i) \exp(j2\pi f_i t)\, df_i$$

donde $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ es la función de transferencia no lineal de orden n. Con esta notación el producto de los n espectros de entrada que aparecen en (8.12) se convierten en

$$(8.13)\quad \prod_{i=1}^{n} X(f_i) = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=-K}^{K} Z_k(f_i - \nu_k)$$

Cuando en la parte derecha de la igualdad se multiplica, se obtiene la suma de todas los $(2\,K)^{n}$ términos distintos de la forma

$$(8.14)\quad Z_{k1}(f_1 - \nu_{k1})\, Z_{k2}(f_2 - \nu_{k2}) \ldots Z_{kn}(f_n - \nu_{kn})$$

con cada índice k_i que va de –K a K así que

$$(8.15)\quad y_n(t) = \sum_{k_1=-K}^{K} \ldots \sum_{k_n=-K}^{K} 2^{-n} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{i=1}^{n} Z_{kn}(\xi_i - \nu_{ki}) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

Cualquiera de las integrales en (8.15) que tienen el mismo conjunto de índices $\{k_i\}$ tienen el mismo valor porque $H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se asume simétrica con respecto al intercambio de argumentos. Sea m_i el número de veces distintas que ocurre cada k_i en el conjunto de los $\{k_i\}$, m_i=0,1, …, n, así que

$$(8.16)\quad \sum_{i=-K}^{K} m_i = n$$

Hay entonces $n!\,(m_{-K}! \ldots m_K!)$ integrales idénticas por cada distinto conjunto de $\{k_i\}$. Reuniendo esas integrales

$$(8.17)\quad y_n(t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{n!\, 2^{-n}}{m_{-K}! \ldots m_K!} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \prod_{i=1}^{n} Z_{kn}(\xi_i - \nu_{ki}) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

donde **k** bajo el signo de la suma denota que la suma es ahora sólo para todos los distintos conjuntos de $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

Si se denota por $y_{n\nu}$ la suma de las dos componentes conjugadas en (8.17)

$$(8.18)\quad y_{n\nu}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{n!\, 2^{-n}}{m_{-K}! \ldots m_K!} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int H_n(\xi_1 + \nu_{k1}, \ldots, \xi_m + \nu_{kn}) \cdot \prod_{i=1}^{n} Z_i(\xi_i) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i \right] \exp\left(j2\pi \sum_{1}^{n} \nu_{ki}\, t\right) \right\}$$

así que

$$(8.19)\quad y_n(t) = \sum_k y_{n\nu}(t)$$

La interpretación de la integral en (8.18) es la siguiente. En el estado de reposo, un sistema no lineal, que tenga una suma de componentes de banda estrecha como entrada, genera en la salida nuevas señales de banda estrecha centradas en todas las frecuencias portadoras de intermodulación. La forma de onda definida como $y_{n\nu}(t)$ representa esa forma de onda en la zona frecuencial

$$\nu = \sum_1^n \nu_{ki}$$

que se debe a la intermodulación de las componentes de entrada centradas en $\nu_{k1}, \ldots \nu_{kn}$. Denotemos una envolvente compleja de esta forma de onda por $q_{n\nu}(t)$ así que

$$(8.20)\quad y_{n\nu}(t) = \mathrm{Re}\left\{ q_{n\nu}(t) \exp\left(j2\pi \sum_1^n \nu_{ki}\, t\right)\right\}$$

luego de (8.18) esta envolvente compleja es dada por

$$(8.21)\quad q_{n\nu}(t) = q_n(t; \nu_{k1}, \ldots \nu_{kn}) = \frac{n!\, 2^{-n+1}}{m_{-K}! \ldots m_K!} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int H_n(\xi_1 + \nu_{k1}, \ldots, \xi_m + \nu_{kn})$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} Z_i(\xi_i) \exp(j2\pi\xi_i t)\, d\xi_i$$

Llámese $y_{n\nu}(t)$ a la componente de intermodulación debida a las zonas de entrada centradas en $\nu_{k1}, \ldots \nu_{kn}$. El orden de la salida no corresponde con el número de las zonas de entrada intermodulantes que generan estas componentes y también pueden llamarse el orden de intermodulación. Algunas de las zonas pueden intermodular con ellas mismas, como en el caso de armónicos, y n puede ser más que K.

El orden de permutación de las componentes de frecuencia $\nu_{k1}, \ldots \nu_{kn}$ de ν no importa a partir de que no afecta la forma de onda de intermodulación $y_{n\nu}(t)$. Cualesquiera dos conjuntos ν son indistinguibles si difieren solamente por el orden de componentes dentro del conjunto. El coeficiente combinatorio delante de las integrales en (8.18) y (8.21) tiene en cuenta el número de tales conjuntos indistinguibles entre todos los $(2K)^n$ conjuntos de ν. Cualesquiera dos conjuntos ν son distinguibles si difieren en al menos una componente. El número de conjuntos distinguibles para cada n zonas de intermodulación que pueden cogerse de 2K componentes de entrada es

(8.22) $$\binom{2K + n - 1}{n}$$

Sea $y_\nu(t)$ la componente de y(t)en la zona frecuencial centrada en la frecuencia suma ν

(8.23) $$\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_{ki} = \sum_{k=-K}^{K} m_k \nu_k$$

y sea $q_\nu(t)$ su envolvente compleja

(8.24) $y_\nu(t) = \mathrm{Re}\{ q_\nu(t) \exp(j2\pi\nu t) \}$

Los productos de intermodulación de infinitamente muchos órdenes y con muchos conjuntos diferentes de componentes zonales pueden contribuir cerca de una frecuencia portadora particular. Así $y_\nu(t)$ es la suma de todos los $y_{n\nu}(t)$ y $q_\nu(t)$ es la suma sobre n y ν de todos los $q_{n\nu}(t)$ que satisface (8.23) que caen en la misma zona de frecuencias ν

(8.25) $$q_\nu(t) = \sum_{\nu, n=1}^{\infty} q_{n\nu}(t)$$

En la práctica sólo las primeros componentes de esta suma son de interés.

Por ejemplo, si se considera un sistema no lineal con la entrada consistente en dos componentes de banda estrecha ν_1 y ν_2 y se examina la composición de la salida en la zona centrada en $\nu=2\nu_1+\nu_2$. Se tiene entonces

(8.26) $y_\nu(t) = y_{3a}(t) + y_{5b}(t) + y_{5c}(t) + \ldots$

en el que $\nu=2\nu_1+\nu_2$, $a=(\nu_1, \nu_1, \nu_2)$, $b=(-\nu_1, \nu_1, \nu_1, \nu_1, \nu_2)$ y $c=(-\nu_2, \nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2)$. Observar que $y_{5b}(t)$ y $y_{5c}(t)$ representan dos contribuciones diferentes de orden cinco que cae dentro de la misma región de frecuencia. Este ejemplo indica la importancia de transportar el vector entero ν en el índice de la componente $y_{n\nu}(t)$ de la salida antes que sólo n y ν.

Es instructivo considerar un ejemplo explícito consistente en una entrada de dos tonos en $\nu_1=f_1$ y $\nu_2=f_2$

(8.27) $x(t) = ½ (A_1 \exp(j2\pi f_1 t) + A_1^* \exp(-j2\pi f_1 t) + A_2 \exp(j2\pi f_2 t) + A_2^* \exp(-j2\pi f_2 t))$

así que los espectros de las envolventes complejas de las dos componentes zonales de entrada son

(8.28) $Z_1(f) = A_1\delta(f)$ y $Z_2(f) = A_2\delta(f)$

Las entradas de dos tonos son comúnmente usadas para testear sistemas no lineales. Se ha escrito (8.27) en una forma que presta datos de todas las cuatro componentes complejas de entrada que interactúan. Denotaremos por $B(f_{k1}, \ldots, f_{kn})$ la amplitud compleja de la componente de intermodulación de orden n debido a las entradas exponenciales $f_{k1}, \ldots, f_{kn}$. Esta amplitud puede ser obtenida de (8.21)

$$(8.29)\ B(f_{k1}, \ldots, f_{kn}) = \frac{n!\, A_{k1} A_{k2} \ldots A_{kn}}{2^{n-1}\, m_{-2}!\, m_{-1}!\, m_1!\, m_2!} H_n(f_{k1}, \ldots, f_{kn}), \qquad k_1, \ldots, k_n = \pm 1, \pm 2$$

Las componentes de salida de primer y segundo orden son listadas explícitamente en la Tabla 2.2 y las componentes de tercer orden en la Tabla 2.3.

Como la suma incluye todos los conjuntos posibles, cada conjunto$\{f_{k1}, f_{k2}, \ldots, f_{kn}\}$debe tener su conjugada $\{f_{-k1}, f_{-k2}, \ldots, f_{-kn}\}$, con una amplitud compleja conjugada, presente en el listado, excepto en el caso de

$$\sum_{1}^{n} f_i = 0$$

Esto es consecuente con el hecho de que $y_n(t)$ es real. El nombre de cada tipo de respuesta no lineal , etiquetada a causa de su efecto en los estudios de interferencia, se indica en la última columna de las tablas. Los términos n=1 constituyen la respuesta lineal. Cuatro de los n=2 términos son segundos armónicos y los restantes seis términos son términos de intermodulación de segundo orden. Hay veintiún términos de tercer orden de los cuales aquéllos en f_1 y en f_2 se pueden interpretar o como insensibilización o como compresión, aquéllos en $3f_1$ y $3f_2$ como armónicos de tercer orden, y los otros como productos de intermodulación convencionales. Si escribimos fuera la respuesta en f_1, de un modo más explícito hasta llegar al orden n=3, obtenemos:

$$(8.30)\ q_{nf1}(t) = A_1\, H_1(f_1) + \frac{3}{2}\, A_1\, |A_2|^2\, H_3(-f_2, f_1, f_2) + \frac{3}{4}\, A_1\, |A_1|^2\, H_3(-f_1, f_1, f_1) + \ldots$$

El primer término es la respuesta lineal. El segundo término se llama insensibilidad en f_1 causado por la señal en f_2 , y el tercer término se llama la compresión del término lineal en f_1 y representa un efecto que aparece cuando la amplitud A_1 se incrementa.

TABLA 2.2
RESPUESTAS NO LINEALES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Combinación número	Combinación				Frecuencia de la respuesta	Amplitud de la respuesta	Tipo de respuesta
	m_1	m_2	m_3	m_4			
n=1							
1	1	0	0	0	f_1	$A_1\ H_1(f_1)$	Lineal
2	0	1	0	0	f_2	$A_2\ H_1(f_2)$	Lineal
3	0	0	1	0	$-f_1$	$A_1^*\ H_1(-f_1)$	Lineal
4	0	0	0	1	$-f_2$	$A_2^*\ H_1(-f_2)$	Lineal
n=2							
1	1	1	0	0	f_1+f_2	$A_1\ A_2\ H_2(f_1, f_2)$	Intermodulación De Segundo Orden
2	0	1	1	0	f_2-f_1	$A_2\ A_1^*\ H_2(f_2, -f_1)$	Intermodulación De Segundo Orden
3	0	0	1	1	$-f_1-f_2$	$A_1^* A_2^*\ H_2(-f_1, -f_2)$	Intermodulación De Segundo Orden
4	1	0	0	1	f_1-f_2	$A_1\ A_2^*\ H_2(f_1, -f_2)$	Intermodulación De Segundo Orden
5	1	0	1	0	$f_1-f_1=0$	$\|A_1\|^2\ H_2(f_1, -f_1)$	Intermodulación De Segundo Orden
6	0	1	0	1	$f_2-f_2=0$	$\|A_2\|^2\ H_2(f_2, -f_2)$	Intermodulación De Segundo Orden
7	2	0	0	0	$2f_1$	$\frac{1}{2}\ A_1^2\ H_2(f_1, f_1)$	Segundo Armónico
8	0	2	0	0	$2f_2$	$\frac{1}{2}\ A_2^2\ H_2(f_2, f_2)$	Segundo Armónico
9	0	0	2	0	$-2f_1$	$\frac{1}{2}\ A_1^{*2}\ H_2(-f_1, -f_1)$	Segundo Armónico
10	0	0	0	2	$-2f_2$	$\frac{1}{2}\ A_2^{*2}\ H_2(-f_2, -f_2)$	Segundo Armónico

TABLA 2.3
RESPUESTAS DE TERCER ORDEN

Combinación número	Combinación				Frecuencia de la respuesta	Amplitud de la respuesta	Tipo de respuesta
	m_1	m_2	m_3	m_4			
1	1	1	1	0	$f_1+f_2-f_1 = f_2$	$(3/2)\ \lvert A_1\rvert^2 A_2\ H_3(f_1,f_2,-f_1)$	Insensibilidad Tercer Orden
2	0	1	1	1	$f_2-f_1-f_2 = -f_1$	$(3/2)\ A_1^{*}\lvert A_2\rvert^2\ H_3(f_2,-f_1,-f_2)$	
3	1	0	1	1	$f_1-f_1-f_2 = -f_2$	$(3/2)\ \lvert A_1\rvert^2\ A_2^{*} H_3(f_1,-f_1,-f_2)$	
4	1	1	0	1	$f_1+f_2-f_2 = f_1$	$(3/2)\ A_1\ \lvert A_2\rvert^2\ H_3(f_1,f_2,-f_2)$	
5	2	1	0	0	$2f_1+f_2$	$¾\ A_1^2\ A_2\ H_3(f_1,f_1,f_2)$	Intermodulación Tercer Orden
6	0	2	1	0	$2f_2-f_1$	$¾\ A_1^{*}A_2^2\ H_3(f_2,f_2,-f_1)$	
7	0	0	2	1	$-2f_1-f_2$	$¾\ A_1^{*2}A_2^{*}\ H_3(-f_1, -f_1,-f_2)$	
8	1	0	0	2	f_1-2f_2	$¾\ A_1A_2^{*2}\ H_3(f_1, -f_2,-f_2)$	
9	2	0	1	0	$2f_1-f_1 = f_1$	$¾\ A_1\ \lvert A_1\rvert^2\ H_3(f_1, f_1,-f_1)$	Compresión Tercer Orden
10	0	2	0	1	$2f_2-f_2 = f_2$	$¾\ A_2\ \lvert A_2\rvert^2\ H_3(f_2, f_2,-f_2)$	
11	1	0	2	0	$f_1-2f_1 = -f_1$	$¾\ \lvert A_1\rvert^2\ A_1^{*}\ H_3(f_1,-f_1,-f_1)$	
12	0	1	0	2	$f_2-2f_2 = -f_2$	$¾\ \lvert A_2\rvert^2\ A_2^{*}\ H_3(f_1,f_2,-f_2)$	
13	2	0	0	1	$2f_1-f_2$	$¾\ A_1^2\ A_2^{*}\ H_3(f_1,f_1,-f_2)$	Intermodulación Tercer Orden
14	1	2	2	0	f_1+2f_2	$¾\ A_1\ A_2^2\ H_3(f_1,f_2,f_2)$	
15	0	1	1	0	f_2-2f_1	$¾\ A_2\ A_1^{*2}\ H_3(f_2,-f_1,-f_1)$	
16	0	0	0	2	$-f_1-2f_2$	$¾\ A_1^{*}\ A_2^{*2}\ H_3(-f_1,-f_2,-f_2)$	
17	3	0	0	0	$3f_1$	$¼\ A_1^3\ H_3(f_1,f_1,f_1)$	Tercer Armónico
18	0	3	0	0	$3f_2$	$¼\ A_2^3\ H_3(f_2,f_2,f_2)$	
19	0	0	3	0	$-3f_1$	$¼\ A_1^{*3}\ H_3(-f_1,-f_1,-f_1)$	
20	0	0	0	3	$-3f_2$	$¼\ A_2^{*3}\ H_3(-f_2,-f_2,-f_2)$	

II. 9. Medidas de Múltiples Tonos

En este apartado se cuenta la presentación analítica de las secciones anteriores para las medidas en circuitos de muestreo y etapas receptoras. Nos concentramos aquí en el método común de testeo de circuitos no lineales de dos tonos así que se puede obtener medidas para una posterior comparación con las predicciones analíticas calculadas que se basan en modelos de circuitos no lineales obtenidos usando parámetros no lineales medidos.

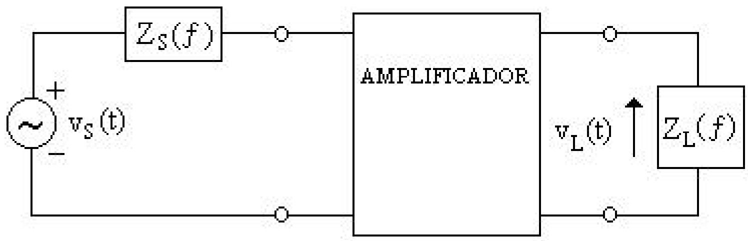


Fig. 2.6. Diagrama de bloques del amplificador

Primero, se examina la relaciones de potencia como se definen en el diagrama de bloques del amplificador de la Fig. 2.6 con impedancia de fuente $Z_s = Z_s(f)$ y la impedancia de carga $Z_L = Z_L(f)$. Sea la fuente de tensión Thèvenim $v_s(t)$ una suma de K ondas sinusoidales con amplitudes complejas A_i a la frecuencia f_i . La potencia de entrada disponible en f_i se denotará por $p_A(f_i)$. Esta potencia es la máxima potencia que puede entregarse por la fuente con una impedancia interna Z_s a una carga a través de sus terminales. El máximo ocurre cuando la fuente está cargada con una impedancia externa Z_s^*, y

$$(9.1)\quad p_A(f_i) = \frac{1}{8}\;\frac{|A_i|^2}{\text{Re}\{Z_s(f_i)\}} \qquad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

La tensión de salida $v_L(t)$ es la suma de las componentes sinusoidales debido a las diferentes intermodulaciones. Sea la amplitud compleja de la componente de $v_L(t)$ debido a las intermodulaciones del conjunto de frecuencias de entrada $\{f_{k1}\}$ $B(f_{k1},\ldots, f_{kn})$. La potencia de salida entregada a la impedancia de carga a la frecuencia f_i sólo por la componente $B(f_i)$ es dada por

$$(9.2)\quad p_1(f_i) = \frac{1}{2}\;\text{Re}\{Z_L(f_i)\}\;\frac{|B_1(f_i)|^2}{|Z_L(f_i)|^2}$$

Se define la ganancia de transducción del amplificador g_T, a la frecuencia f por

$$(9.3)\quad g_T(f) = p_1(f_i) \,/\, p_A(f)$$

Pero de (8.29)

(9.4) $|B_1(f_i)|^2 = |A_i|^2 \; |H_1(f_i)|^2$

así que sustituyendo de (9.1) y (9.2) en (9.3), se obtiene

$$(9.5)\quad g_T(f) = \frac{4 \,\mathrm{Re}\,\{ Z_s(f) \}\, \mathrm{Re}\,\{ Z_L(f) \}}{|B_1(f_i)|^2} \; |H_1(f)|^2$$

donde $H_n(f_1,\ldots, f_n)$ se define para el circuito con impedancia de carga Z_L e impedancia de fuente Z_s .

Para predecir apropiadamente la ganancia de un amplificador a partir del análisis de las funciones de transferencia no lineales, las impedancias de fuente y carga en las frecuencias apropiadas deben ser tenidas en cuenta.

Generalmente, se define la ganancia de transferencia $g_T(f_{k1},\ldots, f_{kn})$, para la intermodulación de los tonos de entrada a $f_{k1},\ldots, f_{kn}$ por

(9.6) $g_T(f_{k1},\ldots, f_{kn}) = p_n(f_{k1},\ldots, f_{kn}) / p_A(f_{k1}) \ldots p_N(f_{kn})]$

en el que $p_n(f_{k1},\ldots, f_{kn})$ es la potencia de salida en la componente a la frecuencia $f_{k1}+\ldots+f_{kn}$ debido a $A_{k1},\ldots, A_{kn}$:

$$(9.7)\quad p_n(f_{k1},\ldots, f_{kn}) = \tfrac{1}{2}\; \mathrm{Re}\left\{ Z_L \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ki}\right)\right\} |B_1(f_{k1},\ldots, f_{kn})|^2 \Big/ \left| Z_L \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ki}\right)\right|^2$$

Así, para una entrada de dos tonos

$$(9.8)\quad g_T(f_{k1},\ldots, f_{kn}) = \frac{2^{n+1}\,(n!)^2}{(m_{-2}!\; m_{-1}!\; m_1!\; m_2!)^2} \;|H_n(f_{k1},\ldots, f_{kn})|^2 \;\cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{Re}\left\{ Z_L \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ki}\right)\right\} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\,\{ Z_S(f_{ki})\} \Big/ \left| Z_S \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ki}\right)\right|^2$$

Denotamos por una letra mayúscula la potencia en decibelios relativa a 1mW. Por ejemplo en lugar de $p_A(f)$ y $p_L(f)$, tenemos

(9.9) $P_A(f) = 10 \log_{10}[p_A(f) / 1\mathrm{mW}]$ y $P_L(f) = 10 \log_{10}[p_L(f) / 1\mathrm{mW}]$

Similarmente, en esta notación

(9.10) $P_1(f) = 10 \log_{10}[p_1(f) / 1\mathrm{mW}]$

Normalmente las impedancias de fuente y de carga están estandarizadas a 50Ω. Cuando cada tono se asume que tiene igual potencia disponible $p_A(f)=P_A$, y $Z_s(f)=Z_L(f)= 50\Omega$, entonces las últimas relaciones proporcionan

(9.11) $P_1(f) = P_A + 20 \log_{10} |H_1(f)| + 6$ dBm

(9.12) $P_2(f_{k1}, f_{k2}) = 2 P_A + 20 \log_{10} |H_2(f_{k1}, f_{k2})| + 2.04$ dBm

(9.13) $P_3(f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}) = 3 P_A + 20 \log_{10} |H_3(f_{k1}, f_{k2}, f_{k3})| - 4.44$ dBm

Cualesquiera de estas tres componentes de potencia, si aparecieran individualmente en la salida, se dibujaría frente a la potencia disponible P_A, como líneas rectas en una escala de decibelios. Así la componente lineal de salida tendría una pendiente unidad, y cada salida de orden n tendría una pendiente n. En los circuitos actuales, se mide a través de la carga la potencia $p_L(f)$ en una frecuencia particular f. Esta potencia depende de todas las componentes que proporcionan productos de intermodulación a esa frecuencia. Por ejemplo, la componente a la frecuencia f es

(9.14) $q_1(t\,; f) + q_3(t; f, f_1, -f_1) + q_3(t; f, f_2, -f_2) + \ldots 0$ (5)

Sin embargo, cuando las señales son pequeñas, hay una pequeña distorsión no lineal y las componentes de orden alto no son importantes. Para señales pequeñas, la componente de más bajo orden contiene casi toda la potencia

(9.15) $P_L(f_i) \cong P_1(f_i)$, $i = 1, 2$

(9.16) $P_L(f_{k1}+f_{k2}) \cong P_2(f_{k1}, f_{k2})$, $k_1, k_2 = \pm 1, \pm 2$

(9.17) $P_L(f_{k1}+f_{k2}+f_{k3}) \cong P_3(f_{k1}, f_{k2}, f_{k3})$, $k_1, k_2, k_3 = \pm 1, \pm 2$

En estudios de interferencia, es costumbre dibujar $P_L(f_2 - f_1)$, $P_L(2f_2 - f_1)$, etc., frente a P_A y examinar donde la tangente de esas curvas en la región de pequeña señal intercepta a la tangente a $P_L(f_1)$ en su región de pequeña señal. La potencia de salida en la cual la tangente a $P_L(f_{k1}+ \ldots +f_{kn})$ intercepta a la tangente de $P_L(f_1)$, ambas dibujadas en la región de pequeña señal, se llama el n-ésimo intercepto I_n . Debería subrayarse que los interceptos que se encuentran por extrapolación desde la región de pequeña señal, pueden en realidad mentir en la región de gran señal. Así un intercepto predicho puede no concordar con el intercepto medido.

Está claro de (9.11), (9.13), (9.15) y (9.17) que con esta definición se puede predecir puntos de intercepto

(9.18) $I_2 = 20 \log_{10} [\, |H_1(f_1)|^3 / |H_2(f_1, -f_2)| \,] + 10$ dBm

y

(9.19) $I_3 = 20 \log_{10} [\, |H_1(f_1)|^3 / |H_2(f_2, f_2, -f_1)| \,] + 22.4$ dBm

Un examen de estas expresiones revela que el intercepto n-ésimo mide en efecto la magnitud de $H_n(f_1,\ldots, f_n)$ relativo a $|H_1(f_1)|^n$. La noción de interceptos es más aplicable a sistemas de banda ancha en los cuales

(9.20) $|H_1(f_1)| = |H_1(f_2)| = |H_1(f)|$

y

(9.21) $|H_n(f_{k1}, \ldots, f_{kn})| = \text{constante}, \qquad \text{para todo}\{k_i\}$

Dos comentarios para concluir con el apartado. Primero, cuanto mayor es el valor del punto de intercepto de orden n, menos importante (en relación con la respuesta lineal) es la respuesta de orden n para ese circuito en particular. Segundo, si el sistema no es de banda ancha en el sentido de (9.20) y (9.21), entonces puede haber varios puntos de intercepto de orden n, y la noción de un punto de intercepto se convierte en algo indefinido.

II. 10. Compresión, Insensibilidad, Modulación Cruzada

El análisis de las zonas de entrada intermodulantes y el desarrollo en serie de Taylor de una transferencia no lineal proporciona las herramientas analíticas para la evaluación y clarificación de tales efectos no lineales en los receptores de comunicación como la compresión, la insensibilidad, y la modulación cruzada. Estos resultados analíticos se han acercado a las medidas experimentales en la región de pequeña señal indicando los usos prácticos potenciales de la teoría.

Sean $z_1 = z_1(t)$ y $z_2 = z_2(t)$, centrados en ν_1 y ν_2, respectivamente. Se recuerda de (8.25) que la envolvente compleja de la señal de salida en la región de frecuencia ν_1, anterior a la detección, es dada por la suma de todas las envolventes complejas de múltiples intermodulaciones de las zonas de entrada en ν_1, y ν_2 . Los primeros términos más significativos de esta suma son

$$(10.1)\ q(t;\nu_1) = q_1(t;\nu_1) + \frac{3}{4}\, q_3(t;\nu_1,\nu_1,-\nu_1) + \frac{3}{2}\, q_3(t;\nu_1,\nu_2,-\nu_2) + \ldots$$

Los términos de orden más alto pueden ignorarse para señales pequeñas a partir de que sus amplitudes se decrementan con el orden de la intermodulación. Cada uno de los términos de las componentes en (10.1) depende en un modo conocido de la función de transferencia no lineal apropiada, $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Listando sólo los primeros términos más importantes de la expansión en series de Taylor de cada función de transferencia no lineal alrededor de sus frecuencias centrales, tenemos

$$(10.2)\ q_1(t;\nu_1) = H_1(\nu_1)\, z_1(t) + \ldots$$

$$(10.3)\ q_3(t;\nu_1,\nu_1,-\nu_1) = H_3(\nu_1,\nu_1,-\nu_1)\, |z_1(t)|^2 z_1(t) + \ldots$$

$$(10.4)\ q_3(t;\nu_1,\nu_2,-\nu_2) = H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)\, z_1(t)\, |z_2(t)|^2 + \frac{\partial H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{2\pi j \partial f_1} |z'_1(t)|\, |z_2(t)|^2 +$$

$$+ \left[\frac{\partial H_3(n)}{2\pi j \partial f_2}\, z_1 z'_2\, z_3^* + \frac{\partial H_3(n)}{2\pi j \partial f_3}\, z_1 z_2\, z'^*_2 \right] + \ldots$$

en el que $n = (\nu_1, \nu_2, -\nu_2)$, y $\partial H_3(n)/\partial f_i$ denota $\partial H_3(¦)/\partial f_i$ evaluada en $¦ = (f_1, f_2, f_3) = (\nu_1, \nu_2, -\nu_2)$.

La *Compresión* es el efecto no lineal observado en el receptor cuando la amplitud de la señal deseada de entrada $z_1(t)$ se incrementa. La salida del receptor en lugar de incrementarse de una manera lineal como se indicaría por (10.2), falla para seguir en proporción a la entrada, gradualmente limitando en amplitud. El término que tiene en cuenta el comienzo de este efecto es el término $q_3(t;\nu_1,\nu_1,-\nu_1)$ en (10.1) que está también en ν_1. La partida de la linealidad puede examinarse considerando la relación

$$(10.5)\qquad \left| \frac{q(t;\nu_1)}{q_1(t;\nu_1)} \right| = \left| 1 + \frac{3}{4}\,|z_1|^2 \,\frac{H_3(\nu_1,\nu_1,-\nu_1)}{H_1(\nu_1)} \right| \approx 1 + 1 + \frac{3}{4}\,|z_1|^2 \;\cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu_1,\nu_1,-\nu_1)}{H_1(\nu_1)} \right\}.$$

El término $\mathrm{Re}\{H_3(n)/H_1(\nu_1)\}$ es normalmente negativo. Es menos bien conocido, sin embargo, que cuando la frecuencia de entrada barre a toda la banda, la fase del término de compresión puede cambiar y, de hecho, uno puede observar en algunas frecuencias más que la ganancia lineal, i.e., una pequeña expansión antes que compresión.

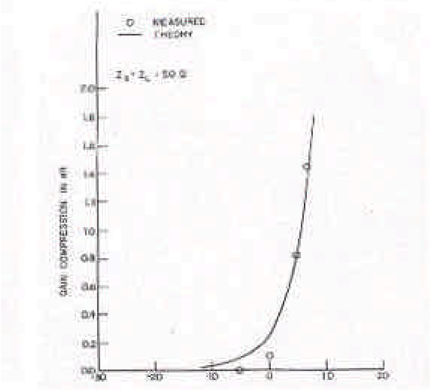


Fig. 2.7. Curva de ganancia de compresión para un amplificador 2N2950: ¦ = 51.4 MHz

La Fig. 2.7 muestra la curva de ganancia de compresión de un transistor amplificador de una sola etapa 2N2950 no sintonizado para una señal a 51.4 MHz. Se puede ver que la predicción teórica de (10.5) concuerda con las medidas. Resultados similares se obtuvieron para señales pequeñas en otros puntos en la banda. Debería notarse que cuando la componente $H_3(\nu_1, \nu_1, -\nu_1)$ está casi exactamente fuera de fase con la componente $H_1(\nu_1)$, el rango lineal del receptor aparecerá artificialmente extendido incluso aunque una medida de distorsión de intermodulación por dos tonos pueda mostrar al receptor ser todavía no lineal en la misma región de potencia de entrada. Esto sugiere que una medida de compresión no es un indicador serio de linealidad.

La *Insensibilización* es el efecto no lineal observado en un receptor cuando la amplitud de entrada de una señal indeseada en ν_2 se incrementa. Lo que se observa es un decremento en la salida del receptor de la señal deseada en la frecuencia ν_1. El término de la envolvente de salida en ν_1 que tiene en cuenta este efecto es dado por (10.3). Aquí de nuevo, como en (10.2), el análisis predice que la partida de la linealidad aproximadamente seguirá, ignorando el ya discutido término de compresión,

$$(10.6) \qquad \left| \frac{q(t;\,\nu_1)}{q_1(t;\,\nu_1)} \right| \approx 1 + \frac{3}{2}\,|z_2|^2\ \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{H_1(\nu_1)} \right\}$$

Se hizo un experimento usando un amplificador de dos etapas sintonizado. La señal deseada era un tono no modulado de –55 dBm a 19.75 MHz, y la señal interferente era también no modulada pero fue variada en potencia y en frecuencia. Los resultados se muestran en la Fig. 2.8. Debería notarse que el modelo de tercer orden predice en qué niveles de señal la insensibilidad empieza pero es un modelo conservativo como para conocer cuánta insensibilidad tiene lugar porque a altos niveles de interferencia de entrada los efectos no lineales se vuelven suficientemente fuertes para los términos de orden alto como para tenerlos en cuenta.

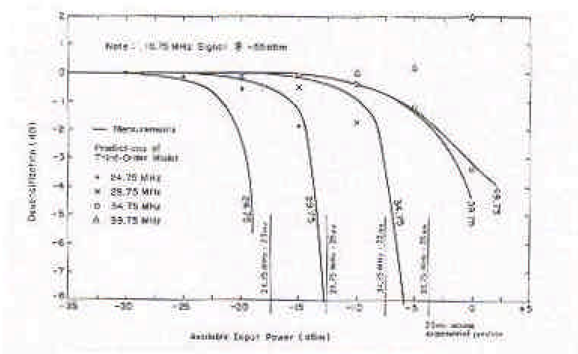


Fig. 2.8. Insensibilidad medida y predicha. Amplificador de dos etapas

La *Modulación Cruzada* es uno de los efectos no lineales más serios en un receptor. Ocurre cuando la modulación de una indeseada señal interferente en la frecuencia portadora ν_2 se transfiere a la señal deseada a la frecuencia portadora ν_1 para generar un molesto crosstalk. La modulación cruzada aparece sólo desde el término en $z_2(t)$. Su mecanismo es diferente para señales AM y FM. Tenga la interferencia AM una envolvente compleja

$$(10.7)\quad z_2(t) = B\,(1 + m_2 \cos 2\pi\mu_2 t)$$

donde B es la amplitud compleja de portadora interferente, m_2 el índice de modulación, y μ_2 la frecuencia de modulación. Conservando sólo el principal término en z_1 de (10.2) y el principal término en $z_2(t)$ de (10.4), se encuentra que la envolvente compleja de la señal de salida en ν_1 puede aproximarse para pequeñas B

$$(10.8)\quad q(t;\,\nu_1) \cong H_1(\nu_1)\, z_1(t)\left[1 + \frac{3}{2}\, m_2\ |B|^2\ \frac{H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{H_1(\nu_1)}\ \cos 2\pi\mu_2 t \right]$$

Si $z_1(t)$ es una constante, cuando la señal deseada no está modulada el análisis modela la relación de amplitudes de modulación cruzada-a-portadora como

$$(10.9)\quad \frac{\text{modulación cruzada}}{\text{amplitud de portadora}} \cong \frac{3}{2}\, m_2\, |B|^2 \left| \frac{H_3(\nu_1, \nu_2, -\nu_2)}{H_1(\nu_1)} \right|$$

Un conjunto típico de medidas de un amplificador en emisor común sintonizado se llevó a cabo con ν_1=19.75 MHz, ν_2=25 MHz, m_2=0.3. La magnitud de la función de transferencia no lineal de tercer orden $|H_3(\nu_1, \nu_2, -\nu_2)|$, deducida en (10.9) de la razón de amplitudes de modulación cruzada-a-portadora medida, se comparó para valores calculados de esta función a partir del modelo del circuito. Los resultados mostrados en la Fig. 2.9 muestra la concordancia general a través de la banda, indicando que a niveles bajos la teoría de pequeña señal es válida, y el circuito modela con acierto.

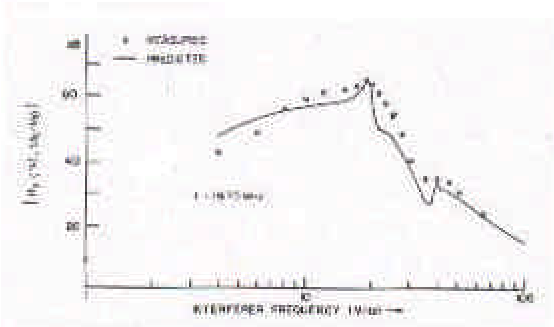


Fig. 2.9. Función de transferencia de tercer orden calculada y Valores inferidos de la modulación cruzada medida

Si la señal deseada no es de un solo tono sino es una señal AM

$$(10.10)\quad z_1(t) = B\,(1+ m_1 \cos 2\pi\mu_1 t)$$

entonces la salida del detector AM modelado por $|q(t; \nu_1)|$ contiene ondas sinusoidales en μ_1, μ_2, $\mu_1+\mu_2$, y $|\mu_1-\mu_2|$. Puede verse de (10.8) que para índices pequeños de modulación m_1 y m_2, las amplitudes de las dos componentes en $\mu_1+\mu_2$ y $|\mu_1-\mu_2|$ son más pequeñas que las otras en μ_1 y μ_2 , y pueden ignorarse. La salida de un detector de AM $|q(t; \nu_1)|$ es por lo tanto aproximadamente proporcional a

$$(10.11)\quad |\, 1 + m_1 \cos 2\pi\mu_1 t + \alpha\, s(t)\, |$$

donde $s(t)$, $|s(t)|^2$ =1, es la forma de onda de la modulación cruzada y α es compleja. Para $|\alpha|$<1, esta salida es aproximadamente la componente de modulación en fase con la portadora, que es

$$(10.12)\quad m_1 \cos 2\pi\mu_1 t + \mathrm{Re}\,\{\alpha\, s(t)\}$$

De (10.8) y (10.12) la post-detección de la relación de amplitudes de modulación cruzada-a-señal deseada es entonces aproximadamente

$$(10.13)\quad 3\,\frac{m_2}{m_1}\,|B|^2\ \ \mathrm{Re}\left\{\frac{H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{H_1(\nu_1)}\right\}$$

Para interferencia FM, tenemos la envolvente compleja

$$(10.14)\ z_2(t) = B \exp\left(j\ \frac{\Delta f_2}{\lambda_2}\ \sin 2\pi\lambda_2\, t\right)$$

donde Δf_2 es la máxima desviación de frecuencia y λ_2 la frecuencia de modulación. A partir de que $|z_2|^2 = |B|^2$ no está ahora modulada, los primeros términos modulados en la expansión en series de Taylor son los términos entre corchetes de (10.4). La envolvente compleja de la señal de salida puede aproximarse ahora para B pequeña por

$$(10.15)\ q(t;\nu_1) \cong H_1(\nu_1)\, z_1(t) \left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{\Delta f_2\ |B|^2}{H_1(\nu_1)} \left(\frac{\partial H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{\partial f_2} - \frac{\partial H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)}{\partial f_3} \right) \cdot \cos 2\pi\lambda_2\, t \right]$$

Si la envolvente compleja deseada es FM

$$(10.16)\ z_1(t) = B \exp\left(j\ \frac{\Delta f_1}{\lambda_1}\ \sin 2\pi\lambda_1\, t\right)$$

se puede encontrar la salida de una detección FM operando en una portadora con una envolvente compleja

$$(10.17)\ z_1(t)\,[1 + \alpha\, s(t)\,]$$

Para $|\alpha| << 1$, la salida de un detector FM es aproximadamente

$$(10.18)\ \frac{d}{dt}\ \arg\{\, z_1(t)\,\} + \frac{d}{dt}\,\mathrm{Im}\,\{\alpha\, s(t)\,\}$$

Aplicando (10.2) y (10.8) de forma apropiada, puede construirse la Tabla 2.4 para resumir cuánta modulación cruzada o “transferencia de modulación” de una señal de interferencia $z_2(t)$ AM o FM causará a la señal AM o FM deseada $z_1(t)$ para las aproximaciones de pequeña señal.

TABLA 2.4
ANÁLISIS DE MODULACIÓN CRUZADA

SEÑAL DESEADA $z_1(t)$	SEÑAL NO DESEADA $z_2(t)$	ENTRADA DETECTOR $q(t\,;\,\nu)$	SALIDA POST-DETECCIÓN Razón señal-a-amplitud de Modulación cruzada
AM	AM	$1+m_1 \cos 2\pi\mu_1 t+3m_2 \|B\|^2 [H_3(\underline{\nu})/H_1(\nu_1)] \cos 2\pi\mu_2 t$	$3\,(m_2/m_1)\|B\|^2$ $\mathrm{Re}\{H_3(\nu_1,\nu_2,-\nu_2)/H_1(\nu_1)\}$
AM	FM	$z_1(t)\{1+(3/2)(\|B\|^2/H_1)\,\Delta f_2 \cos 2\pi\lambda_2 t\,[(\partial H_3/\partial f_3)-(\partial H_3/\partial f_2)]\}$	$(3/2)[\,\Delta f_2\|B\|^2/m_1]$ $\cdot\mathrm{Re}\{[(\partial H_3(\underline{\nu})/\partial f_2)-(\partial H_3(\underline{\nu})/\partial f_3)]/H_1(\nu_1)\}$
FM	AM	$z_1(t)\{1+3m_2\|B\|^2 [H_3(\underline{\nu})/H_1(\nu_1)] \cos 2\pi\mu_2 t\}$	$[3m_2\mu_2/\Delta f_1]\|B\|^2$ $\cdot\mathrm{Im}\{[H_3(\underline{\nu})/H_1(\nu_1)]\}$
FM	FM	$z_1(t)\{1+[3\Delta f_2\|B\|^2/2H_1(\nu_1)](\|B\|^2/H_1)$ $\cdot[(\partial H_3/\partial f_2)-(\partial H_3/\partial f_3)]\cos 2\pi\lambda_2 t\}$	$(3/2)\Delta f_2\|B\|^2$ $\cdot\mathrm{Im}\{[(\partial H_3(\underline{\nu})/\partial f_2)-(\partial H_3(\underline{\nu})/\partial f_3)]/H_1(\nu_1)\}$

El análisis permite modelar no sólo la relación modulación cruzada-señal sino incluso la distorsión actual de las formas de onda de salida debido a la modulación cruzada. Suponer

(10.19) $z_1(t) = 1 + m_1\, s_1(t)$

y

(10.20) $z_2(t) = B\,[\,1 + m_2\, s_2(t)\,]$

Se tiene

(10.21) $$q(\nu;\,t) \cong [1 + m_1\, s_1(t)]\left\{ 1 + \frac{3}{2}|B|^2\,[1 + m_2\, s_2(t)]^2\ \frac{H_3(\nu)}{H_1(\nu_1)} \right\}$$

Supóngase que $s_1(t)$ es una onda cuadrada intermitente entre +1 y –1 y $s_2(t)$ es una onda sinusoidal de amplitud unidad. La forma de onda de la modulación cruzada de la salida será todavía una onda cuadrada pero con un rizo en la envolvente debido a la modulación cruzada $s_2(t)$. Los niveles de amplitud de pico del rizo en la salida del detector AM son dibujadas en la Fig. 2.10

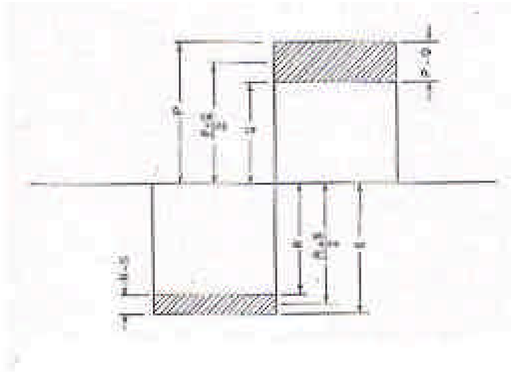


Fig. 2.10. Niveles de amplitud de la forma de onda de salida del detector

donde

$$(10.22)\ P = (1 + m_1)\left[1 + \frac{3}{2}|B|^2 (1 + m_2)^2 \ \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu)}{H_1(\nu_1)} \right\}\right]$$

$$(10.23)\ Q = (1 + m_1)\left[1 + \frac{3}{2}|B|^2 (1 - m_2)^2 \ \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu)}{H_1(\nu_1)} \right\}\right]$$

$$(10.24)\ R = (1 - m_1)\left[1 + \frac{3}{2}|B|^2 (1 + m_2)^2 \ \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu)}{H_1(\nu_1)} \right\}\right]$$

$$(10.25)\ Q = (1 - m_1)\left[1 + \frac{3}{2}|B|^2 (1 - m_2)^2 \ \mathrm{Re}\left\{ \frac{H_3(\nu)}{H_1(\nu_1)} \right\}\right]$$

Puede verse que la razón de amplitudes $r_1 = (P-Q)/(R-S) = (1+m_1)/(1-m_1)$ es independiente del parámetro interferente. Esta razón es una medida de la asimetría de la transferencia de modulación de amplitud no lineal (i.e., modulación cruzada).

Similarmente, la razón

$$(10.26)\quad r_2 = 2\,\frac{P - Q}{P + Q} = \frac{6\ |B|^2\ m_2\ \mathrm{Re}\{\, H_3(\nu) / H_1(\nu_1)\, \}}{1 + \frac{3}{2}\ |B|^2\ (1 + m_2^{\,2})\ \mathrm{Re}\{\, H_3(\nu) / H_1(\nu_1)\, \}}$$

depende de los parámetros conocidos $|B|^2$ y m_2, y de la parte real de la relación de función de transferencia no lineal. La razón r_2 puede interpretarse como el índice de modulación de los altos de la forma de onda cuadrada debido a la modulación cruzada. Para el amplificador IF, un experimento con m_1=1/3 , devolvió r_1=2 y r_2=0.18 donde el valor calculado para el amplificador fue r_1=2.6 y r_2=0.192.

II. 11. Principales Términos en las Fórmulas

Recordemos que la serie para un sistema típico se puede escribir como

$$(11.1)\quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} du_n \;\; h_n(u_1, \ldots, u_n) \prod_{r=1}^{n} x(t- u_r)$$

donde y(t) es la salida del sistema, x(t) la entrada y $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ describe al sistema.

Recordemos también que la transformada de Fourier n-ésima de $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ es

$$(11.2)\; H_n(f_1, \ldots, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} du_n \;\; h_n(u_1, \ldots, u_n) \cdot \exp\left[- j(\omega_1 u_1 + \ldots \omega_n u_n)\right]$$

y a $H_n(f_1, \ldots, f_n)$ se le conoce por "función de transferencia de Volterra de orden n".

Pues bien, en esta sección se lista los principales términos de las fórmulas que dan información acerca de la salida y(t) para un número de entradas x(t) cuando las funciones de transferencia de Volterra H_n son conocidas. La mayoría de los principales términos listados no van más allá de $H_3(f_1, f_2, f_3)$. Notar que H_n es simétrica.

Aunque la lista no incluye las fórmulas completas, ésta se pretende como una guía ya que los principales términos son a menudo suficientes. De hecho, no debe esperarse demasiada ayuda práctica de las fórmulas completas. Normalmente sólo dos o tres términos más allá de esos listados en esta sección pueden usarse en los ordenadores de hoy en día a causa del rápido aumento de la complejidad.

A. Entradas Sinusoidales

Cuando x(t)=P cos pt, se tiene la serie completa

$$(11.3)\; y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{P}{2}\right)^n \frac{\exp\left[j(2k - n)\, pt\right]}{k!\,(n - k)!} \;\; H_{k,n-k}(f_p)$$

donde $p=2\pi f_p$ y $H_{k,n-k}(f_p)$ denota $H_n(f_1,\ldots, f_n)$ con las primeras k de las f_i iguales a f_p y las restantes n-k iguales a $-f_p$. Así para el caso de la no linealidad sin memoria se tiene que $H_n(f_1,\ldots, f_n)$ se reduce a una constante a_n , y las series (11.3) pueden o converger o divergir dependiendo de P y de la a_n. Los términos principales en (11.3) dan

(11.4) $y(t) = \left[\frac{P^2}{4} H_2(f_p, -f_p) + \dots \right]$

$+ e^{jpt} \left[\frac{P}{2} H_1(f_p) + \frac{P^3}{16} H_3(f_p, f_p, -f_p) + \dots \right]$

$+ e^{j2pt} \left[\frac{P^2}{8} H_2(f_p, f_p) + \dots \right]$

$+ e^{j3pt} \left[\frac{P^3}{48} H_3(f_p, f_p, f_p) + \dots \right]$

$+ e^{-jpt} \left[\frac{P}{2} H_1(-f_p) + \frac{P^3}{16} H_3(-f_p, -f_p, f_p) + \dots \right]$

$+ e^{-j2pt} \left[\frac{P^2}{8} H_2(-f_p, -f_p) + \dots \right]$

$+ e^{-j3pt} \left[\frac{P^3}{48} H_3(-f_p, -f_p, -f_p) + \dots \right] + \dots$

Reemplazando pt por (pt+φ) en los exponentes en (11.3) y en (11.4) da y(t) cuando x(t)= Pcos (pt+φ).

Cuando x=P cos pt + Q cos qt donde p y q son enteros, los términos principales en dc y algunas de las componentes de más bajo orden para la componente exp [j(Np+Mq)t] de y(t) son

(11.5) $\left[\frac{P^2}{4} H_2(f_p, -f_p) + \frac{Q^2}{4} H_2(f_q, -f_q) \right]$

$e^{jpt} \left[\frac{P}{2} H_1(f_p) + \frac{P^3}{16} H_3(f_p, f_p, -f_p) + \frac{PQ^2}{8} H_3(f_p, f_q, -f_q) \right]$

$e^{j2pt} \frac{P^2}{8} H_2(f_p, f_p)$ $\qquad$ $e^{j(p+q)t} \frac{PQ}{4} H_2(f_p, f_q)$

$e^{j(2p+q)t} \frac{P^2Q}{16} H_3(f_p, f_p, f_q)$

Cambiando los signos de q y f_q en la componente exp [j(p+q)t] da la componente exp [j(p-q)t], y así seguiría. Cuando p y q no son enteros, algunas de las componentes se coalicionan. Por ejemplo, si q=2p y x(t)=P cos pt + Q cos 2pt, los 2p-q y –2p+q términos combinan con los términos de dc en (11.5) para dar los principales términos de la nueva componente dc

(11.6)

$$\left[\frac{P^2}{4} H_2(f_p, -f_p) + \frac{Q^2}{4} H_2(2f_p, -2f_p) + \frac{P^2Q}{16} H_3(f_p, f_p, -2f_p) + \frac{P^2Q}{16} H_3(-f_p, -f_p, 2f_p) \right]$$

Similarmente, los principales términos en la nueva componente exp(jpt) son dados por la suma de la componente exp(jpt) en (11.5) con $f_q=2f_p$ más

$$(11.7)\ e^{jpt}\,\frac{PQ}{4}\,H_2(-f_p, 2f_p)$$

que es la contribución del término (-p+q) cuando q=2p. Este término se obtiene del término (p+q) en (11.5) por cambiar los signos de p y f_p y luego colocar q=2p y f_q=2f_p.

Cuando x(t)=P cos pt + Q cos qt + R cos rt, se haría igual para la componente exp[j(Np+Mq+Lr)t] de y(t) y así, por ejemplo, el término principal en la componente exp[j(p+q+r)t] de y(t) es

$$(11.8)\ e^{j(p+q+r)t}\,\frac{PQR}{8}\,H_3(f_p, f_q, f_r)$$

Cambiando los signos de r y f_r, da el término principal en la componente exp[j(p+q-r)t], y así seguiría.

Cuando x(t) es igual a la suma de un número infinito de componentes sinusoidales en el sentido que posee la transformada de Fourier X(f), i.e.,

$$(11.9)\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,X(f)\,df\,, \qquad \omega = 2\pi f$$

entonces sustituyendo en (11.1) muestra que y(t) y su transformada de Fourier Y(f) son dados por

$$(11.10)\ y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} df_1\ H_n(f_1, \ldots, f_n)\, e^{j(\omega 1 + \ldots \omega n)t} \prod_{r=1}^{n} X(f_r)$$

$$Y(f) = \frac{1}{1!}\,H_1(f)\,X(f) + \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{\infty} df_1\,H_2(f_1, f-f_1)\,X(f_1)\,X(f-f_1) +$$

$$+\ \frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2\,H_3(f_1, f_2, f-f_1-f_2)\,X(f_1)\,X(f_2)\,X(f-f_1-f_2) + \ldots$$

B. Entrada de Ruido Gaussiano

En lo siguiente, la entrada x(t) es un proceso Gaussiano estacionario de media cero con el espectro de potencia $W_x(f)$. La salida y(t) es un proceso estacionario, y las medias $<[y(t)]^l>$ y los acumuladores asociados κ_i no cambian con t.

Los principales términos en la serie completa para <y(t)> son

$$(11.11)\ \langle y(t)\rangle = \frac{1}{1!\,2}\int_{-\infty}^{\infty} df_1 W_x(f_1) H_2(f_1,-f_1) + \frac{1}{2!\,2^2}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 W_x(f_1) W_x(f_2) H_4(f_1,-f_1,f_2,-f_2) + \ldots$$

Los principales términos en la serie completa para $\langle y^2(t)\rangle$ son

$$(11.12)\ \langle y^2(t)\rangle = \langle y(t)\rangle^2 + \int_{-\infty}^{\infty} df_1 W_x(f_1)\, H_1(f_1)\, H_1(-f_1) + \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 W_x(f_1)\, W_x(f_2)\, \cdot$$
$$\cdot \left[H_1(f_1)\, H_3(-f_1, f_2, -f_2) + ½\, H_2(f_1, f_2)\, H_2(-f_1, -f_2) \right]$$

En la serie completa para el segundo acumulador $\kappa_2 = \langle y^2(t)\rangle - \langle y(t)\rangle^2$ aparecería la triple integral comprimiendo el término de tercer orden que no se muestra en (11.12). La serie completa para $\langle y^2(t)\rangle$ sería un caso especial de la serie completa para $\langle y(t+\tau) z(t)\rangle$. Aquí z(t) se define por una serie de Volterra obtenida de la serie (11.1) para y(t) reemplazando $h_n(u_1,\ldots, u_n)$ por un kernel diferente $h'_n(u_1,\ldots, u_n)$. Ambos y(t) y z(t) tienen la misma entrada Gaussiana x(t). La $H'_n(f_1,\ldots, f_n)$ que aparecería es la transformada de Fourier de $h'_n(u_1,\ldots, u_n)$.

El primer acumulador para la densidad de probabilidad de y(t) es $\kappa_1 = \langle y(t)\rangle$, el segundo es $\kappa_2 = \langle y^2(t)\rangle - \langle y(t)\rangle^2$, y los principales términos para los acumuladores κ_3 y κ_4 son

$$(11.13)\ \kappa_3 = 3\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2\, W_x(f_1)\, W_x(f_2)\, H_1(f_1)\, H_1(f_2)\, H_2(-f_1, -f_2) + \ldots$$

$$\kappa_4 = 4\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2 \int_{-\infty}^{\infty} df_3\, W_x(f_1)\, W_x(f_2)\, W_x(f_3)\, H_1(f_1)\, H_1(f_2)\, \cdot$$
$$[\, H_1(f_3)\, H_3(-f_1, -f_2, -f_3) + 3\, H_2(-f_1, f_3)\, H_2(-f_2, -f_3)] + \ldots$$

Se puede obtener información acerca de la densidad de probabilidad de y(t) a partir del uso de los primeros cuatro acumuladores.

Los principales términos en las series de Mircea-Sinnreich [20] para el espectro de potencia $W_y(f)$ de y(t) se muestra en

$$(11.14)\ W_y(f) = \langle y(t)\rangle^2\,\delta(f) + W_x(f)\left| H_1(f) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} df_1\, W_x(f_1)\, H_3(f, f_1, -f_1) + \dots\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} df_1\, W_x(f_1)\, W_x(f-f_1)\ \ | H_2(f_1, f-f_1) + \dots |^2$$

$$+\frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2\, W_x(f_1)\, W_x(f_2)\, W_x(f-f_1-f_2)\, | H_3(f_1, f_2, f-f_1-f_2)+\dots|^2 + \dots$$

donde <y(t)> es la componente dc de y(t) dado por (11.11) y $\delta(f)$ es la función impulso unitario. La parte derecha de (11.14) muestra todos los términos de segundo orden (aquéllos que, cuando se escribieron, contienen el producto de exactamente dos W_x) pero sólo algunos de los términos de tercer orden. Todos los términos de tercer orden, y algunos términos de los de cuarto y quinto orden, se mostrarían si la doble integral conteniendo H_5 y la única integral conteniendo H_4 se añadieran dentro de signos de valor absoluto en las líneas segunda y tercera, respectivamente, de (11.14).

Cuando el número de términos en la serie de Volterra (11.1) es finito, la serie (11.14) termina y da una expresión exacta para $W_y(f)$. Cuando (11.14) no termina, su aplicación para FM sugiere que puede ser una serie asintótica [21], [22], [23].

C. Entrada Onda Sinusoidal más Ruido

En lo siguiente, x(t) = P cos pt + $I_N(t)$, donde $I_N(t)$ es un proceso Gaussiano estacionario de media cero con espectro de potencia $W_I(f)$.

La media de x(t) en el tiempo t es <x(t)>=P cos pt. Similarmente, la media de y(t) consiste en una suma de armónicos sinusoidales de cos pt. Los principales términos de la expresión completa para <y(t)> en el tiempo t se muestran en

$$(11.15)\ \langle y(t)\rangle = \left[\frac{P^2}{4} H_2(f_p, -f_p) + \frac{1}{2}\int df_1\, W_I(f_1)\, H_2(f_1, -f_1) + \dots\right]$$

$$+ e^{jpt}\left[\frac{P}{2} H_1(f_p) + \frac{P^3}{16} H_3(f_p, f_p, -f_p) + \frac{P}{4}\int df_1\, W_I(f_1)\, H_3(f_1, -f_1, f_p) + \dots\right]$$

$$+ e^{j2pt}\left[\frac{P^2}{8} H_2(f_p, f_p) + \frac{P^2}{16}\int df_1\, W_I(f_1)\, H_4(f_1, -f_1, f_p, f_p) + \dots\right]$$

$$+ e^{j3pt}\left[\frac{P^3}{48} H_3(f_p, f_p, f_p) + \dots\right] + \dots$$

$$+ \{\text{términos con } -p,\ -f_p \text{ para p en } e^{jkpt}[\dots],\ k=1,2,\ \dots\}$$

donde f_p=p/2π. Cuando I_N es idénticamente cero, $W_I(f)$ es cero, y (11.15) se reduce a (11.4) para y(t) cuando x=P cos pt. Cuando P es cero, (11.15) se reduce a (11.11) para y(t) cuando x(t) es Gaussiano.

Los principales términos de la expresión completa para el espectro de potencia de y(t) se muestran en

(11.16) $W_I(f)$ = { picos debido a dc y ondas sinusoidales en <y(t)>}

$$+ W_I(f) \left| G_1(f) + \frac{P^2}{4} H_3(f_p, -f_p, f) + \frac{1}{2} \int df_1\, W_I(f_1)\, H_3(f_1, -f_1, f) + \ldots \right|^2$$
$$+ W_I(f-f_p) \left| \frac{P}{2} H_2(f_p, f-f_p) + \ldots \right|^2$$
$$+ W_I(f-2f_p) \left| \frac{P^2}{8} H_3(f_p, f_p, f-2f_p) + \ldots \right|^2 + \ldots$$
$$+ \{\text{términos con } -f_p \text{ para } f_p \text{ en } W_I(f-kf_p)\, |\ldots|^2,\ k=1,2,\ldots\}$$
$$+ \frac{1}{2!} \int df_1\, W_I(f_1)\, W_I(f-f_1)\, |H_2(f_1, f-f_1) + \ldots|^2$$
$$+ \frac{1}{2!} \int df_1\, W_I(f_1)\, W_I(f-f_1-f_p) \left| \frac{P}{2} H_3(f_1, f_p, f-f_1-f_p) + \ldots \right|^2$$
$$+ \frac{1}{2!} \int df_1\, W_I(f_1)\, W_I(f-f_1+f_p) \left| \frac{P}{2} H_3(f_1, -f_p, f-f_1+f_p) + \ldots \right|^2$$
$$+ \frac{1}{3!} \int df_1 \int df_2\, W_I(f_1)\, W_I(f_2)\, W_I(f-f_1-f_2)\, |H_3(f_1, f_2, f-f_1-f_2) + \ldots|^2 + \ldots$$

Los picos en $W_y(f)$ debido a la dc y las ondas de seno en <y(t)> se pueden computar de (11.15) para <y(t)>. El pico debido a la componente $A_k(f_p , P)$ exp (jpkt), k=… -1, 0, …, es $\delta(f-kf_p)\, |A_k(f_p, P)|^2$. Cuando P es cero, (11.16) se reduce a (11.14) para $W_y(f)$ cuando x(t) es Gaussiano. Cuando $I_N(t)$ es idénticamente cero, $W_y(f)$ consiste sólo de los picos debido a las componentes sinusoidales de y(t).

D. Entrada Tren de Pulsos Aleatorios

Finalmente se tiene que la entrada es el tren de pulsos

$$(11.17)\quad x(t)= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n\, \delta(t-nT)$$

Cuando los a_n son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas cuya densidad de probabilidad es par n torno a a_n=0, y la serie de Volterra para y(t) se queda en el término cuadrático, puede mostrarse que la media de y(t) consiste en la parte periódica (de período T)

$$(11.18)\ \langle y(t)\rangle = \frac{\langle a^2\rangle}{2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi mt/T} \int_{-\infty}^{\infty} df_1\, H_2(f_1, \frac{m}{T} - f_1)$$

y que el espectro de potencia de y(t) es

$$(11.19)\ W_y(f) = \{\text{picos debido a } \langle y(t)\rangle\} + \frac{\langle a^2\rangle}{T}\, |H_1(f)|^2$$

$$+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} df_1\, H_2(f_1, f-f_1) \right|^2$$

$$+ \frac{\langle a^2\rangle^2}{2T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} df_1\, H_2(f_1, f-f_1)\, H_2^*(f_1-\frac{m}{T}, f-f_1+\frac{m}{T})$$

Aquí $\langle a^m\rangle$ es el momento m-ésimo de a_n, y $H_2(f_1, f_2)$ se asume para ser tal que las integrales y la suma converge. El asterisco denota la compleja conjugada. Las ecuaciones (11.18) y (11.19) pueden probarse usando los dos primeros términos en (11.10) para y(t) y los resultados

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega nT} = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f- nT^{-1}), \quad \omega = 2\pi f$$

$$W_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^T dt\, T^{-1} \langle y(t + \tau)\, y^*(t)\rangle\, e^{-j\omega\tau}$$

Si la forma del pulso es F(t) en lugar de δ(t), la entrada es

$$(11.20)\ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, F(t-nT)$$

en lugar de (11.17), y los correspondientes $\langle y(t)\rangle$ y $W_y(f)$ pueden obtenerse de reemplazar $H_1(f_1)$, $H_2(f_1, f_2)$ en (11.18) por $S(f_1)H_1(f_1)$, $S(f_1)S(f_2)H_2(f_1, f_2)$ donde

$$(11.21)\ S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, F(t)\, dt$$

II. 12. Ejemplos ilustrativos

La diversidad de la lista de fórmulas en el apartado anterior da propiedades de la salida de dispositivos no lineales para una variedad de entradas. Se hace deseable ilustrar su uso por aplicación de ellas a problemas prácticos de interés. En este apartado se dan estos ejemplos para obtener propiedades de salida de interés para específicas señales de entrada.

A. Filtrado FM cuasiestático

La ecuación del sistema y las funciones de transferencia de Volterra son para este caso

(12.1) $y(t)= x(t) + \varepsilon\, [x'(t)]^2\ x''(t)$

$$H_1(f_1)=1,\ \ H_3(f_1, f_2, f_3)= 2\varepsilon\omega_1\omega_2\omega_3\ (\omega_1+ \omega_2 +\omega_3)$$

donde $\omega=2\pi f$ y donde todos los restantes H_n son cero. Cuando x(t) es Gaussiano, (11.11) muestra que <y(t)> es cero. De (11.14) los términos principales en el espectro de potencia para y(t) son

$$(12.2)\ W_y(f) = W_x(f)\left| 1 - \varepsilon(2\pi f)^2 \int_{-\infty}^{\infty} df_1\ W_x(f_1)\ (2\pi f_1)^2 \right|^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2\ W_x(f_1)\ W_x(f_2)\ W_x(f-f_1-f_2)\ |2\varepsilon f_1 f_2\ (f-f_1-f_2)\ f\ (2\pi)^4\ |^2$$

Esta es también la expresión exacta para $W_y(f)$ porque un examen de la expresión completa para $W_y(f)$ mostraría que todos los restantes términos son cero para este caso. Cuando usamos la relación $W_{x'}(f)=(2\pi f)^2\ W_x(f)=\omega^2\ W_x(f)$ entre el espectro de potencia de x(t) y su derivada temporal x´(t), (12.2) sigue que

$$(12.3)\ W_y(f) = W_x(f)\left| 1 - \varepsilon\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} df_1\ W_{x'}(f_1) \right|^2$$

$$+ \frac{4\varepsilon^2\omega^2}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \int_{-\infty}^{\infty} df_2\ W_{x'}(f_1)\ W_{x'}(f_2)\ W_{x'}(f-f_1-f_2)$$

Cuando x(t) en (12.1) es igual a P cos pt + $I_n(t)$, donde I_n es Gaussiano, (11.15) y (11.16) muestra que la parte periódica de y(t) es la media

$$(12.4)\ \langle y(t)\rangle = P\left\{1 - \tfrac{1}{4}P^2\varepsilon p^4 - \varepsilon p^2 \int_{-\infty}^{\infty} df_1\, W_{I'}(f_1)\right\}\cos pt + \tfrac{1}{4}P^3\varepsilon p^4 \cos 3pt$$

y que y(t) tiene el espectro de potencia

$$\begin{aligned}(12.5)\ W_y(f) =& \{4 \text{ picos debido a las componentes } \exp(\pm jpt) \text{ y } \exp(\pm 3jpt) \text{ de } \langle y(t)\rangle\}\\ &+ W_I(f)\left|1 - \tfrac{1}{2}P^2\varepsilon p^2\omega^2 - \varepsilon\omega^2 \int df_1\, W_{I'}(f_1)\right|^2\\ &+ \frac{1}{16}P^4\varepsilon^2 p^4\omega^2\,[W_{I'}(f-2f_p) + W_{I'}(f+2f_p)]\\ &+ \frac{1}{2}P^2\varepsilon^2 p^2\omega^2 \int df_1\, W_{I'}(f_1)\,[W_{I'}(f-f_1-f_p) + W_{I'}(f-f_1+f_p)]\\ &+ \frac{4\varepsilon^2\omega^2}{3!}\int df_1 \int df_2\, W_{I'}(f_1)\,W_{I'}(f_2)\,W_{I'}(f-f_1-f_2)\end{aligned}$$

donde $2\pi f_p = p$. Cuando P es cero, (12.5) se reduce a la expresión (12.3) para $W_y(f)$ cuando x(t) consiste de ruido Gaussiano sólo.

B. Resistencia no lineal e inductancia en serie

Suponer que la tensión x(t)= P cos pt + Q cos qt se aplica para una combinación en serie de una unidad de inductancia y la resistencia no lineal ($\alpha+\varepsilon y$). ¿Cuál es el término en la componente (p-q) de la corriente y(t) cuando ε es pequeño? Cambiando los signos de p y q en (11.5) para el término (p+q) para obtener los términos $\pm$(p-q) y sustituyendo para $H_2(f_1, f_2)$ muestra que (asumiendo α y ε real) el término principal deseado es

$$(12.6)\ 2\,\mathrm{Re}\left[e^{j(p-q)t}\frac{PQ}{4}\ \frac{(-2\varepsilon)\,[\alpha + j(p-q)]^{-1}}{(\alpha + jp)\,(\alpha - jq)}\right]$$

Cuando la tensión x(t) aplicada a la combinación en serie es Gaussiana, los términos principales en el espectro de potencia de la corriente y(t) son, de (11.14),

$$(12.7)\ W_y(f) = \langle y(t)\rangle^2\,\delta(f) + W_x(f)\left|H_1(f) + \tfrac{1}{2}\int df_1\, W_x(f_1)\,H_3(f, f_1, -f_1)\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int df_1\, W_x(f_1)\,W_x(f-f_1)\,|H_2(f_1, f-f_1)|^2 + 0(\varepsilon^4)$$

donde, de (11.11)

(12.8) $H_1(f) = (\alpha + j\omega)^{-1}, \quad \omega = 2\pi f$

$$|H_2(f_1, f-f_1)|^2 = \frac{4\varepsilon^2 (\alpha^2+\omega^2)^{-1}}{(\alpha^2+\omega_1^2)\,[\alpha^2+(\omega-\omega_1)^2]}$$

$$\langle y(t)\rangle = -\varepsilon\alpha^{-1} \int df_1\, W_x(f_1) / (\alpha^2+\omega_1^2)$$

y $H_3(f, f_1, -f_1)$ es $0(\varepsilon^2)$. Cuando ε es pequeño y x(t) es Gaussiano, la densidad de probabilidad p(y) de y(t) es casi, pero no bastante, normal. La partida de p(y) de la normalidad puede estimarse de los valores de los acumuladores κ_1, κ_2, κ_3, κ_4. Sin embargo, cuando los H_n son usados, las integrales (11.13) para κ_3, κ_4 son bastante complicadas.

II. 13. Conclusiones

En el área de la interferencia y la predicción, ha habido una gran necesidad por modelos matemáticos generales que tuvieran en cuenta las respuestas no lineales en los sistemas de comunicación. El trabajo presentado en este documento tenía como objetivo dar tales modelos. Los métodos de descripción de sistemas no lineales desarrollados en este estudio han sido elaborados para ser aplicados a no linealidades ligeras donde el bajo orden de los kernels de Volterra pueden adecuadamente modelar el comportamiento del circuito. La teoría y resultados presentados deberían servir para proporcionar un mejor entendimiento de las características de interferencia y sus medidas y poder así aplicarse a otros sistemas no lineales.

Capítulo III

MODELOS DE HEMTS

III.1. Introducción

Antes se solía usar *Tubos de Onda Progresiva (TWA)* como amplificadores de microondas pero en la actualidad, en las aplicaciones de comunicaciones inalámbricas modernas, se vienen utilizando *amplificadores de estado sólido*.

Se va a trabajar entonces con un transistor *ED02AH FET* como amplificador y en él se va centrar el estudio de este capítulo.

El capítulo se divide en ocho apartados. El primero de estos apartados es la presente introducción. Después sigue una descripción general teórica del FET para, a continuación centrarse en el transistor que nos atañe. El apartado cuatro trata del modelo de pequeña señal del transistor. Las simplificaciones llevadas a cabo para facilitar la tarea en el estudio están incluidas en el quinto apartado. En el sexto apartado se describe a la fuente de corriente no lineal, principal motivo de los efectos no lineales en el transistor. Seguidamente, en el apartado siete, se caracteriza al HEMT principal y se presentan las simulaciones que se han llevado a cabo en el estudio. Finalmente el último apartado presenta a los HEMTs auxiliares artífices de la linealización en el comportamiento del HEMT principal.

III. 2. Teoría del FET

El FET (Field Effect Transistor) es un transistor de efecto campo por lo que su funcionamiento no se basa en la inyección de portadores minoritarios (BJT) sino en el control de la corriente de portadores mayoritarios en un semiconductor mediante un campo eléctrico.

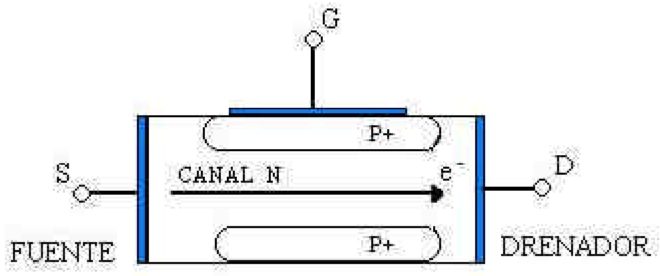


Fig. 3.1. FET

El FET de canal N representado está constituido por una barra semiconductora de tipo N con dos isletas laterales de dopado p+ entre los terminales S (entrada de portadores mayoritarios) y D (salida de portadores mayoritarios).

La corriente principal fluye entre los terminales S y D, por lo que hay un solo tipo de portador en el semiconductor que es el mayoritario, electrones en este caso. La unión entre puerta G y canal N se polariza de forma inversa por lo que aparece una región de transición de anchura W que se sitúa en la zona del canal (por estar G dopado intenso) estrechándolo más cuanto mayor sea la tensión inversa en G (en la zona de transición no hay portadores, por lo que no puede haber conducción).

Si se polariza el FET con $V_{GS} = 0$ y $V_{DS} > 0$, fluye una corriente convencional I_D entre D y S (corriente de electrones entre S y D) que produce una caída de tensión $V_{DS} > 0$ en el canal N, por lo que el extremo del canal próximo a D está a mayor potencial que el extremo próximo a S y la puerta se verá polarizada inversamente tanto más cuanto más próxima a la zona D.

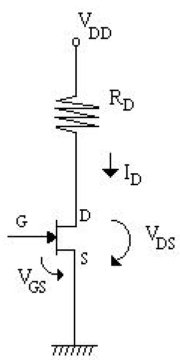


Fig. 3.2. FET polarizado

NOTA: La flecha del FET indica el sentido de la corriente cuando la puerta se polariza en directa.

Esto hace que la región de transición W tenga mayor anchura en el terminal D que en el S y se va produciendo un estrangulamiento de la anchura libre del canal. Por tanto, cuanto mayor es V_{DS} , más estrecho es el canal y menor crecimiento relativo tendrá la corriente I_D con V_{DS} . Hay un límite no nulo en el estrechamiento del canal que limita la corriente I_D máxima (para $V_{GS} = 0$, en este caso), se habla entonces de corriente de saturación y de que el FET está en saturación. Antes de que esto ocurra, el comportamiento era lineal (resistivo) y se habla de FET en la región lineal (óhmica). Cuando $V_{GS} < 0$ y $V_{DS} > 0$ el comportamiento se repite, pero ahora con niveles menores de V_{DS} se tendrá la saturación, porque V_G ha decrecido respecto al canal.

Por último, indicar que la corriente I_G de puerta es prácticamente nula (despreciable) porque se corresponde a la corriente inversa de una unión P-N, por lo que el dispositivo estudiado responde exclusivamente al campo eléctrico o tensión de puerta.

Por lo dicho antes, cuando V_{DS} es pequeño el transistor se comporta linealmente (como una resistencia) ya que apenas hay contracción del canal (no uniforme).

Cuando V_{DS} crece, aumenta la contracción y se alcanza la corriente máxima.

Cuando $V_{GS} < 0$, se alcanza antes la contracción y saturación.

Si la tensión V_{DS} sube mucho, se puede alcanzar la tensión de avalancha.

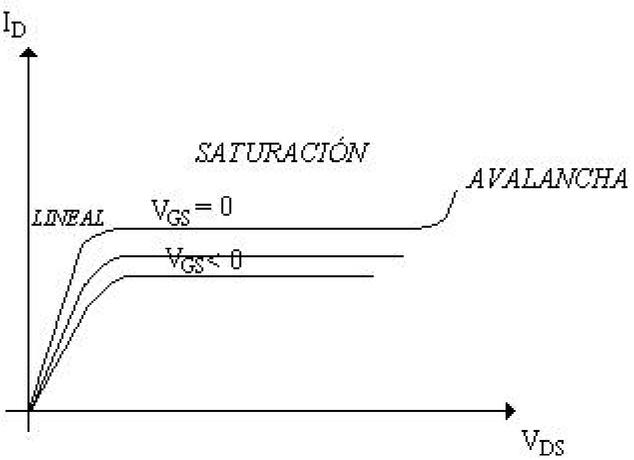
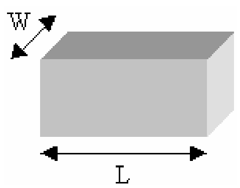


Fig. 3.3. Característica de salida (Corriente de drenador)

Las expresiones analíticas de la corriente I_D son:

ZONA LINEAL (I_D depende del factor de forma $\frac{W}{L}$)



$$I_D = \frac{1}{R_{DS}} \cdot \frac{W}{L} \cdot V_{DS}$$

ZONA SATURACIÓN (I_D depende sólo de V_{GS})

$$I_D = I_{DSS} \cdot \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2$$

en donde V_P es la corriente de estrangulamiento e I_{DSS} es la corriente de saturación .

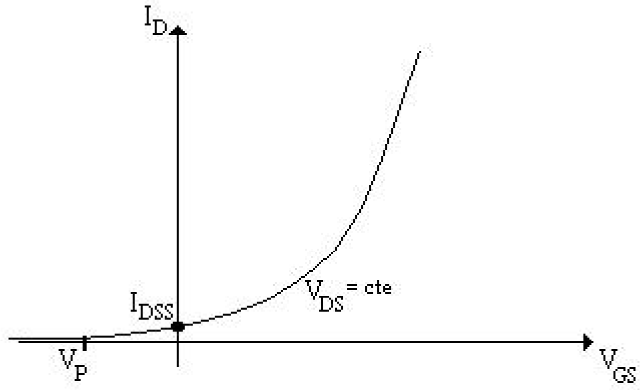


Fig. 3.4. Característica de transferencia

El FET puede trabajar en conmutación o en circuitos lineales como amplificadores. En este último caso interesa que se trabaje en la zona de saturación, ya que I_D depende sólo de V_{GS} (y no de V_{DS}). Sin embargo, también se puede utilizar en la zona lineal a modo de resistencia controlada por tensión (de puerta).

Las ventajas de este dispositivo son, entre otras, estar controlados por tensión con una impedancia de entrada muy alta (10^7 a 10^{12} Ω), generar un bajo nivel de ruido, posibilidad de integrar muchos dispositivos en un circuito integrado (CI), comportamiento como resistencia controlada por tensión para valores pequeños de V_{DS}, estabilidad con la temperatura, facilidad en la fabricación, la alta impedancia de entrada le permite retener carga el tiempo suficiente para la posibilidad de utilizarlo como elemento de almacenamiento.

Las desventajas que limitan la utilización del FET son:

- Los FET presentan una respuesta en frecuencia pobre debido a la alta capacidad de entrada.

- Los FET presentan una linealidad muy baja.

III. 3. ED02AH FET

El HEMT (High Electron Mobility Transistor) es el nuevo equivalente del FET. El dispositivo HEMT al cual se le ha practicado el análisis es el ED02AH FET y su modelo completo se representa en la Figura 3.5.

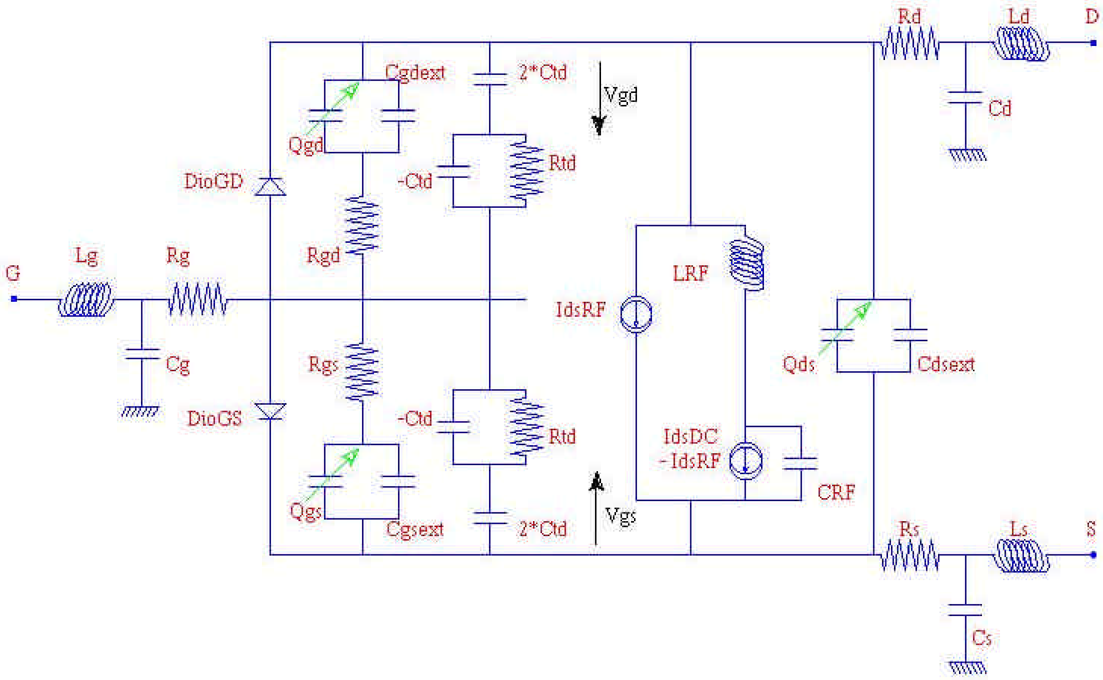


Fig. 3.5. Modelo completo de ED02AH FET

En él hay básicamente 3 elementos no lineales:

1. Las corrientes drenador-fuente (IdsDC e IdsRF)
2. Las cargas puerta-drenador, puerta-fuente y drenador-fuente (Qgs, Qgd y Qds)
3. Las corrientes directa e inversa de los diodos puerta-drenador y puerta-fuente (Igs e Igd).

Nuestro análisis se ceñirá exclusivamente a la corriente drenador-fuente por lo que el modelo arriba visto quedará simplificado en cuanto a las no linealidades.

Los valores de los elementos que aparecen en el modelo se han obtenido a partir de los ficheros *fet2on_interp2.m* y *ednlparam.m* .

III. 4. Modelo de Pequeña Señal

Para obtenerse el modelo de pequeña señal se parte del modelo simplificado en cuanto a los elementos no lineales que se representa en la Figura 3.6.

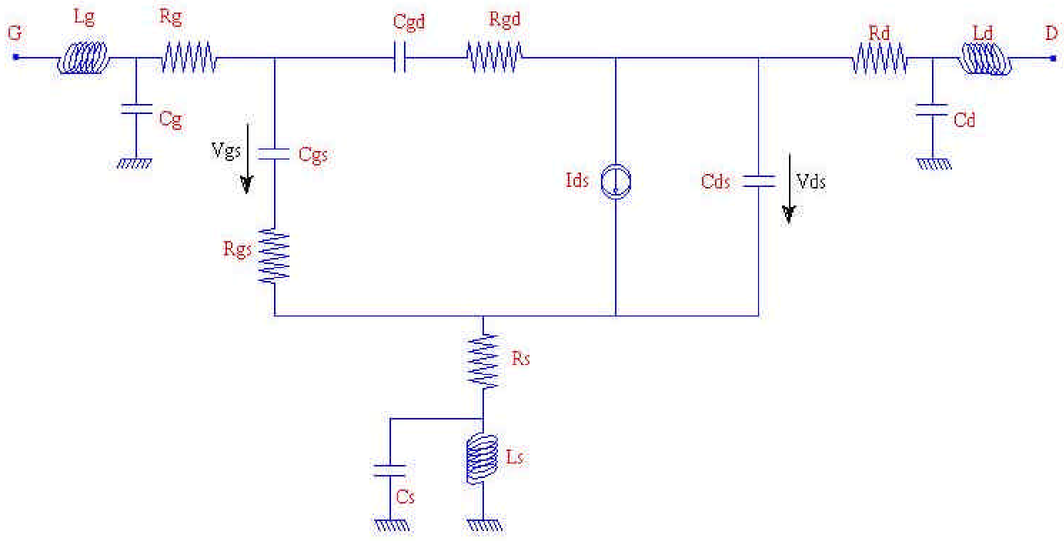


Fig. 3.6. Modelo de pequeña señal

En este modelo se encuentran las capacidades parásitas que aparecen a altas frecuencias, y que teniendo en cuenta la frecuencia en la que vamos a trabajar no podemos despreciar.

Aplicando la simplificación de pequeña señal :

L → c.c.
C → c.a.

nos queda un circuito más reducido con el que trabajar.

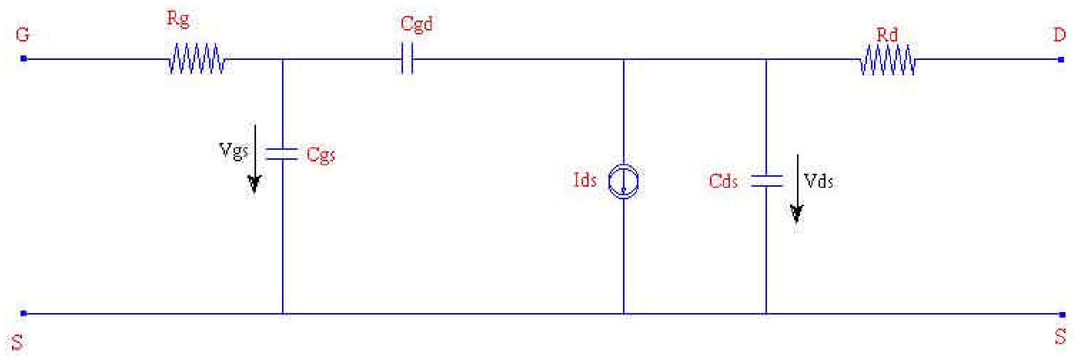


Fig. 3.7. Modelo de pequeña señal simplificado

Con respecto al modelo de pequeña señal tenemos que hacer un apunte que para ilustrarlo con mayor sencillez usaremos el modelo de pequeña señal más simplificado.

Como $I_G = 0 \rightarrow i_g = 0$

$$I_D = f\,(V_{GS}, V_{DS}) \rightarrow \Delta I_D = \left.\frac{d\ I_D}{d\ V_{GS}}\right|_{V_{DS}} \cdot \Delta V_{GS} + \left.\frac{d\ I_D}{d\ V_{GS}}\right|_{V_{GS}} \cdot \Delta V_{DS}$$

$$i_D = \Delta I_D = g_m \cdot v_{gs} + \frac{1}{r_{ds}} \cdot v_{ds} \quad ,,$$

g_m : transconductancia $\left(\frac{mA}{V}\right)$

r_{ds} : resistencia de drenador $(K\Omega)$

Se define el “factor de amplificación”:

$$\mu = -\left.\frac{d\ V_{DS}}{d\ V_{GS}}\right|_{I_D} = -\left.\frac{v_{gs}}{v_{ds}}\right|_{i_d = 0} = g_m \cdot r_{ds}$$

Con este apunte queremos dejar constancia que para una configuración en fuente común (que es la que se ha estudiado en el análisis) para el FET el parámetro de transconductancia g_m está ligado con la ganancia del amplificador. Este hecho se utilizará más adelante.

III. 5. Simplificaciones

La primera de las simplificaciones que se ha hecho es centrarse en exclusiva en la fuente de corriente como único elemento no lineal, dejando de lado las corrientes directa e inversa de los diodos y las cargas (Qgs, Qgd y Qds).

A continuación se han introducido las simplificaciones de pequeña señal.

Además se han tomado las siguientes simplificaciones

- Se han considerado Cgs, Cgd y Cds como condensadores lineales (esto tiene algo que ver con no tener en cuenta las cargas).

- Rgd y Rds no se han tenido en cuenta.

- Se ha despreciado la resistencia de fuente Rs.

Si se llevan estas simplificaciones al modelo se tiene el siguiente circuito con el cual se ha trabajado

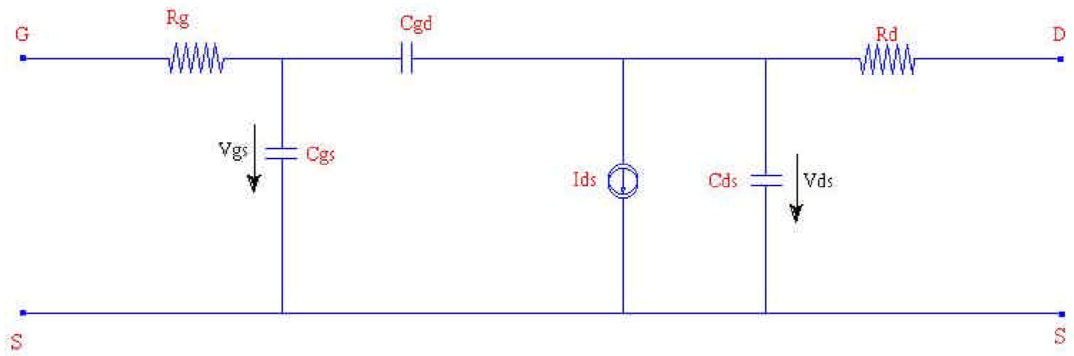


Fig. 3.8. Circuito simplificado de trabajo

Otra simplificación que se ve en el capítulo siguiente es la reducción de la no linealidad de la fuente de corriente.

Para finalizar sólo se ha llegado hasta tercer orden (n=3) en las funciones de transferencia.

Hay que tener en cuenta que este estudio es un primer paso, una aproximación al punto de trabajo que será el punto de partida para un simulador más potente como es LIBRA con el cual se podrá precisar más.

III. 6. La Fuente de Corriente No Lineal Ids

En el modelo completo del HEMT de la tecnología ED02AH se representaban dos fuentes de corriente IdsDC e IdsRF entre el drenador y la fuente. Debido a que no se va a trabajar con frecuencias tan altas sólo interesa la fuente IdsDC, activa a las frecuencias relativamente bajas.

La fuente de corriente no lineal Ids puede escribirse como:

$$Ids = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k0} \cdot v_{gs}^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{0k} \cdot v_{ds}^{k} + \sum_{k,\, l=1}^{\infty} g_{kl} \cdot v_{gs}^{k} \cdot v_{ds}^{l}$$

Se va a introducir una simplificación más relativa a la no linealidad de la fuente. Como se va a trabajar a no muy alta frecuencia (parásitos despreciables) se va a limitar la suma a ***k, l <3***. Además se desprecian los parámetros ***g_{02} y g_{03}*** de la segunda suma y para concluir ***$g_{kl} = 0$ " $k, l >1$***.

Con todo esto la fuente de corriente no lineal Ids queda como sigue:

$$Ids = g_{m1} \cdot v_{gs} + g_{m2} \cdot v_{ds}^{2} + g_{m3} \cdot v_{gs}^{3} + g_{01} \cdot v_{ds}$$

en donde se ha renombrado como g_m a los parámetros g_k.

Para simular esta fuente se ha tomado el modelo que se presenta en [24].

Se han tomado para los parámetros del modelo los valores por defecto para ***FET ON*** que se presentan en las tablas siguientes. Pero antes se va presentar a este elemento no lineal, tal y como se nos presenta en la dirección antes señalada.

Debido a algunos efectos de relajación en el GaAs (aunque muy pequeños para P HEMTs) y al autocalentamiento, la corriente drenador-fuente del P-HEMT varía con la frecuencia. El modelo ED02AH de fuente de corriente de Drenador está así constituido por dos fuentes de corriente:

- I1 = IdsRF, que está activa a todas las frecuencias
- I2= IdsDC- IdsRF, que está sólo activa a bajas frecuencias

Así, IdsRF sólo es vista a altas frecuencias, e IdsDC sólo a bajas frecuencias. La separación se obtiene por una red R-L donde:

- R es la resistencia equivalente de la fuente de corriente
- L es el elemento del modelo LRF

La frecuencia Ftr a la cual se alcanza el valor de RF se obtiene a partir de la inductancia Lrf:

$$Ftr\ @\ \frac{Rds}{2\ pi \cdot Lrf} \cdot 10$$

donde Rds es el valor de RF de la conductancia de salida del FET. LRF tiene un valor 0.006 H·mm resultante a una Ftr de 50kHz para Rds=180 Ohms·mm. Dependiendo del tipo de circuito diseñado, es posible cambiar este valor usando Lrf. Decrementando Lrf probablemente reducirá el tiempo de análisis (acortando las constantes de tiempo) pero puede afectar el comportamiento de la simulación si Ftr es muy alta.

Para mejorar la convergencia en algunos casos particulares, se añade una capacidad CRF en paralelo a la fuente de corriente I2. Pero esto crea, especialmente cuando Rds es alta, un efecto de resonancia en la frecuencia

$$Fres\ @\ \frac{1}{2\ pi \sqrt{LRF \cdot CRF}}$$

Esto debe tenerse en cuenta para diseños en esta zona, aunque la red de alimentación tenga un efecto similar.

Valores de los parámetros

Descripción del parámetro	**Nombre**	**Valor para FET ON**	**Valor para FET OFF**	**Escalado (W en mm)**
Inductancia paso de baja	**Lrf**	0.006H	0.006H	/W
Capacidad paso de alta	**Crf**	1µF	1µF	-

Además de lo arriba señalado hay que tener en cuenta los siguientes parámetros de entrada para el modelo no lineal OMMIC

Descripción del parámetro	**Nombre**	**Valor para FET ON**	**Valor para FET OFF**	**Escalado (W en mm)**
Parámetro de sensibilidad usado para simular dispositivos con diferente Vt	**Vtpcm**	-0.9V	+0.225V	
Parámetro de sensibilidad usado para simular dispositivos con diferentes valores de Idss para un Vt dado	**Kidss**	1	1	

Las ecuaciones que se usan son:

$$Ids_{RF} = Kidss \times CorrIdss \times Id_{smooth}\,[\,Kt \times (Ids1 + Ids2)]$$
$$Ids_{DC} = \left[1 - gdf \times \tanh\left(\,Kgdf \times Vd_{smooth}\,(Vds - Vdsf)\right)\right] \times Ids_{RF}$$

donde:

$$Ids1 = Beta_{1} \times \left[Vt_{smooth}\,(Vg_{smooth}\,(\,Vgs - Vtpcm + Vtpcm0) - VT1\,)\right]^{Q1}$$
$$Ids2 = Beta_{2} \times \left[Vt_{smooth}\,(Vg_{smooth}\,(\,Vgs - Vtpcm + Vtpcm0) - VT2\,)\right]^{Q2}$$

$$Kt = \tanh\,(\,K \times Vds) \times \left[\,\left(\frac{1+ Kisat}{2}\right) - \left(\frac{1 - Kisat}{2}\right) \times \tanh\,(Vds - Vdsisat)\,\right]$$

$$VT1 = VT01 - Gamma1 \times [\,1 - (1 - eta1) \times \tanh\,(Kds1 \times Vds)] \times Vds - ShiftVds0 \times [\,1 - \tanh\,(KVds0 \times Vds)]$$

$$VT2 = VT02 - Gamma2 \times [\,1 - (1 - eta2) \times \tanh\,(Kds2 \times Vds)] \times Vds - ShiftVds0 \times [\,1 - \tanh\,(KVds0 \times Vds)]$$

y:

$$Veff\,(V, Va, Vb, Sigma) = \frac{\sqrt{(V-Va)^2 + Sigma^2} - \sqrt{(V-Vb)^2 + Sigma^2} + Va + Vb}{2}$$

$$Vg_{smooth}\,(X) = Veff\,(\,X, -5.0, 0.6, SigmaVgs)$$
$$Vt_{smooth}\,(X) = Veff\,(\,X, 0.0, 1.5, SigmaVgs)$$
$$Vd_{smooth}\,(X) = Veff\,(\,X, 0.0, 3.0, SigmaVds)$$
$$Id_{smooth}\,(X) = Veff\,(\,X, 0.0, 0.8, 10^{-6})$$

Valores de los parámetros

Descripción del parámetro	**Nombre**	**Valores FET ON**	**Valores FET OFF**	**Escalado (W en mm)**
Coeficiente Ganancia Corriente	**Beta1**	0.937617	3.75616	×W
Coeficiente Ganancia Corriente	**Beta2**	-1.126181	-7.3255	×W
Coeficiente de Umbral	**Vtpcm0**	-0.8	0.125	-
Exponente de corriente	**Q1**	2	2	-
Exponente de corriente	**Q2**	2.38021	2.0	-
Coeficiente de Saturación	**K**	5.4	10.3	-
Coeficiente de Saturación	**Kisat**	0.827	0.65081	-
Coeficiente de Saturación	**Vdisat**	1.5	1.0	-
Correlación Idss Vt	**CorrIdss**	1.08	0.835	-
Coeficiente de Umbral	**VT01**	-0.3934	0.4161	-
Coeficiente de Umbral	**VT02**	-0.1043	0.5730	-
Coeficiente Gd	**Gamma1**	0.12316	0.101768	-
Coeficiente Gd	**Gamma2**	0.092006	0.00337	-
Coeficiente Gd	**Eta1**	0.557334	0.46050	-
Coeficiente Gd	**Eta2**	0.516	11.273	-
Coeficiente Gd	**Kds1**	0.336657	0.42	-
Coeficiente Gd	**Kds2**	2.306676	0.13	-
Coeficiente Gd	**ShiftVds0**	0.1	0.08	-
Coeficiente Gd	**KVds0**	20	20	-
Coeficiente de corriente DC	**gdf**	0.15	0.06	-
Coeficiente de corriente DC	**Kgdf**	0.18	0.5	-
Coeficiente de corriente DC	**Vdsf**	0.7	0.6	-
Coeficiente de alisado	**SigmaVgs**	0.1	0.12	-
Coeficiente de alisado	**SigmaVds**	0.5	0.5	-

Este modelo que se presenta ha sido implementado en el fichero *inewon.m* para ser simulado por el programa MATLAB. En él se han tomado los valores para FET ON. Dicho fichero toma como parámetros de entrada:

1. La tensión de puerta **Vgs** en voltios
2. La tensión de drenador **Vds** en voltios
3. Y el ancho **W** en milímetros, que se obtiene de multiplicar el ancho de puerta *Wu* por el número de dedos de la puerta *Nbd*

y devuelve como salida la corriente de drenador **Ids**.

Se puede ver una representación del resultado del modelo en la gráfica que se presenta a continuación. Dicha gráfica se ha obtenido del fichero *corrienteon.m* que hace uso del modelo implementado en *inewon.m.* En la representación se tiene en el eje de abscisas la tensión de puerta Vgs en voltios y en el eje de ordenadas a la corriente de drenador Ids en amperios. Se ha tomado una tensión de drenador Vds de 3 voltios y se ha elegido el HEMT principal, del que se hablará en el capítulo posterior, que tiene un ancho de puerta de *Wu=50mm* y un número de dedos igual a *Nbd=8*, lo que da un ancho W=0.4 (recuérdese que este parámetro de entrada se da en mm).

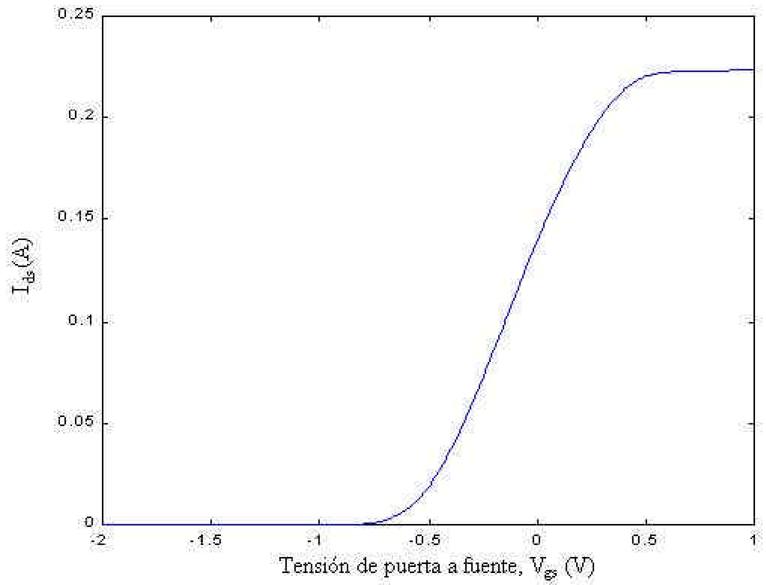


Fig. 3.9. Corriente de drenador Ids

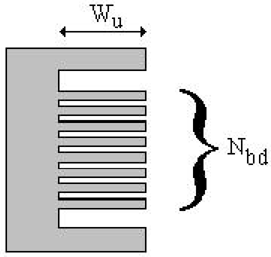
Una vez que se ha obtenido la corriente no lineal se pretende caracterizar a la fuente del modo que se presentó a partir de los parámetros de transconductancia. Para obtener éstos, se ha partido de la corriente Ids y se ha derivado utilizando el programa Mapple (Matlab simbólico) por Vgs y Vds con lo que resultan g_{m1} y g_{01} respectivamente.

Dichos parámetros, resultados de lo anteriormente expuesto, se encuentran implementados en los ficheros *gm1on.m* y *g01on.m* .

Para terminar de caracterizar a la fuente de corriente no lineal se ha derivado respecto a Vgs una y dos veces (ya no se ha empleado Matlab simbólico, sino a través de Matlab y a partir del comando *diff*) al parámetro gm1 resultando los parámetros g_{m2} y g_{m3} respectivamente.

III. 7. El HEMT Principal: HEMT 8´50

En este apartado se va a estudiar al HEMT principal con el que se ha trabajado y al que se le ha aplicado el análisis no lineal.



En concreto, este HEMT tiene un tamaño de 400µm con un número de dedos N_{bd} = 8, con una anchura cada uno de ellos igual a W_u = 50µm.

Los dedos son los que aparecen en el layout para la puerta ya que se suele poner más de un contacto para la puerta.

Como ya se ha dicho, el único elemento que presenta no linealidades, y es causante por tanto de los efectos no lineales, es la fuente de corriente que se encuentra entre el drenador y la fuente. Dicha fuente se ha caracterizado por el modelo no lineal ya presentado en el apartado anterior y se ha obtenido a partir del fichero *corrienteon.m* la simulación en Matlab.

En esta primera gráfica podemos ver la corriente Ids en el eje vertical (en amperios) en función de la tensión de puerta Vgs (en voltios), para una tensión de drenador constante e igual a Vds=3 voltios.

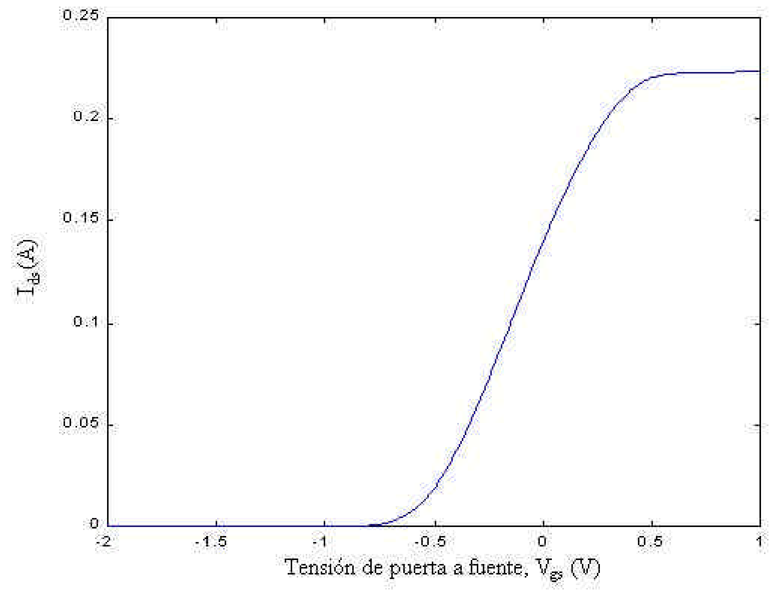


Fig. 3.10. Corriente Ids del HEMT principal H1

Nota: Se ha tomado una tensión de drenador Vds de 3 voltios y un intervalo de la tensión de puerta Vgs desde –2 voltios a 1 voltio por tratarse de valores típicos de alimentación de los puertos.

Tras derivarse sucesivamente por Vgs la corriente de drenador Ids, se obtienen los parámetros gm que a continuación se representan. Las gráficas se corresponden respectivamente con g_{m1} [amperios / voltios], g_{m2} [amperios / voltios^2] y finalmente g_{m3} [amperios / voltios^3]. Las representaciones se tienen para distintos valores de la tensión de puerta Vgs [voltios].

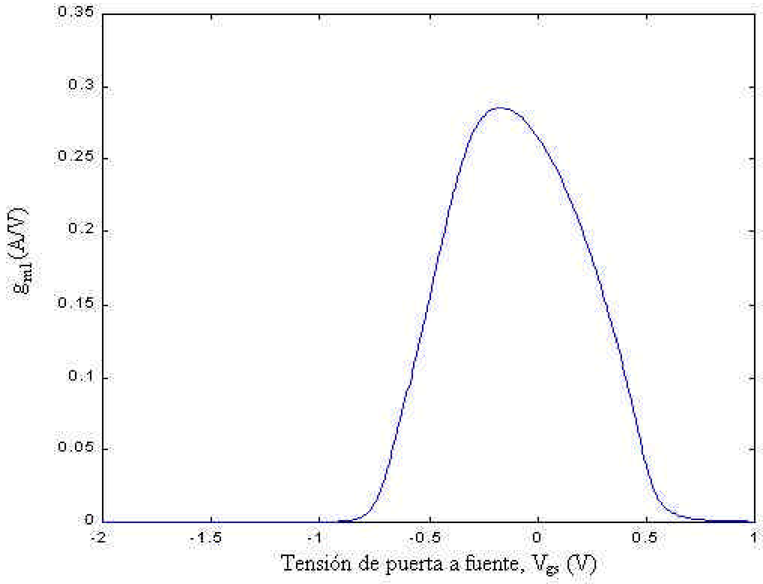


Fig. 3.11. Parámetro g_{m1} del HEMT principal H1

Como ya se expuso en una sencilla demostración en el apartado 4 cuando se trataba el modelo de pequeña señal del FET, el parámetro gm1 arriba mostrado tiene una relación directa con la ganancia del amplificador de RF, luego ha de realizarse una buena elección para la tensión de puerta.

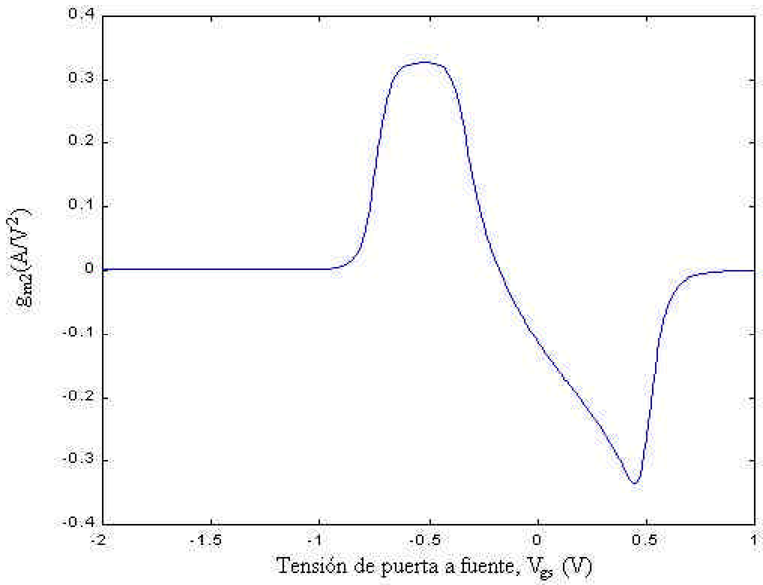


Fig. 3.12. Parámetro g_{m2} del HEMT principal H1

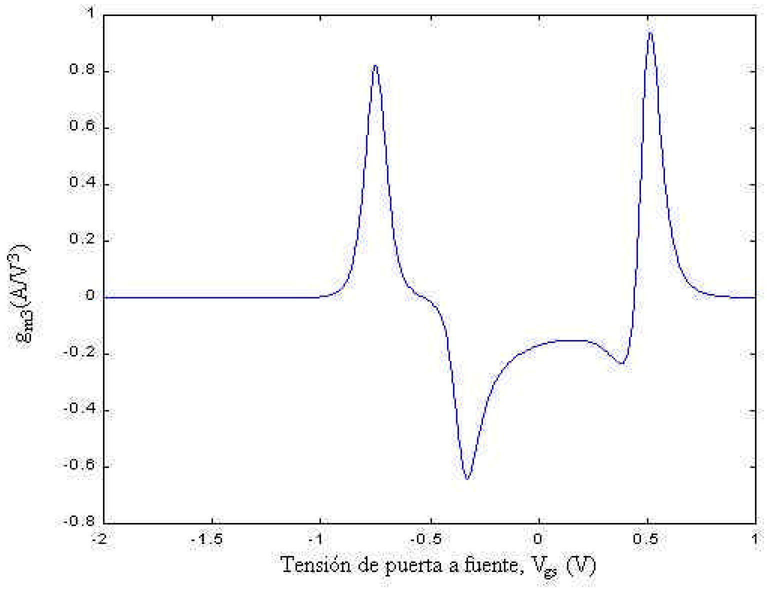


Fig. 3.13. Parámetro g_{m3} del HEMT principal H1

Se quiere hacer notar que el parámetro g_{m3} arriba representado desempeña un papel importante en el ruido de intermodulación de tercer orden (IMD3) de un amplificador de RF.

Con todo esto se tiene caracterizada a la fuente de corriente no lineal Ids a partir de los parámetros gm, tras haberse implementado el modelo no lineal del FET.

Para continuar con el análisis tras la caracterización del elemento no lineal, se hace necesaria una herramienta que facilite el análisis no lineal. La técnica escogida es el análisis mediante Series de Volterra. A partir de las Series de Volterra se obtienen las funciones de transferencia de primer, segundo y tercer orden, es decir $H_1(\omega)$, $H_2(\omega_1, \omega_2)$ y $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de las cuales resultan tanto la potencia fundamental como la intermodulación de tercer orden IMD3, parámetros necesarios para la obtención del punto de intercepto de tercer orden referido a la salida IP3o que caracteriza la linealidad del amplificador.

Se ha tomado una frecuencia de operación de 5.8GHz, una frecuencia baja si se tiene en cuenta que la tecnología ED02AH llega hasta los 100GHz.

Una vez definida la frecuencia de trabajo se desea conocer la dependencia de la linealidad del HEMT principal respecto a la tensión de puerta Vgs, a partir de los distintos puntos de intercepto de tercer orden IP3o que se tienen para cada valor de Vgs. Para ello se ha seguido la secuencia lógica de hallar primero la potencia fundamental a la frecuencia de trabajo de 5.8GHz. Seguidamente se obtuvo la intermodulación de tercer orden IMD3 y finalmente tras una sencilla operación para ver dónde se cortan ambas rectas la consecución de los diferentes puntos de intercepto IP3o. Esto se ha repetido para cada uno de los valores de la tensión de puerta Vgs.

La implementación de todo este proceso se encuentra en el archivo *ip3o.m* y tras la simulación en Matlab se obtiene la representación a partir del fichero *grafip3o.m* . En dicha representación se tienen los diferentes puntos de intercepto de tercer orden IP3o en dBm según la tensión de puerta Vgs.

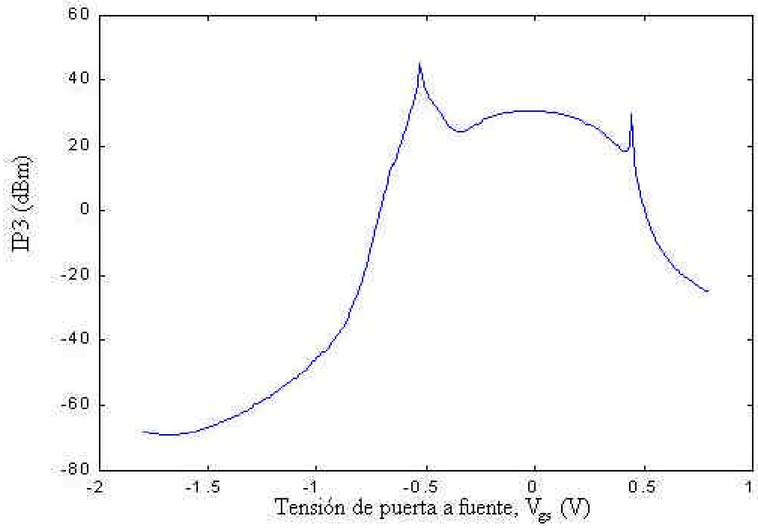


Fig. 3.14. IP3 del HEMT principal H1

Los valores altos del punto de intercepto de tercer orden dan aquellas tensiones de puerta Vgs que posibilitan una mayor linealidad del amplificador de RF.

Así se puede comprobar que el rango de tensiones de puerta que va desde aproximadamente –0.75v a 0.5v presenta IP3o superiores a 20 dBm.

También se observan 2 picos que se corresponden con los cruces por cero del parámetro g_{m3}, responsable como ya se ha dicho de la intermodulación de tercer orden IMD3 y en última instancia del punto de intercepto de tercer orden.

Un mayor g_{m3} (en valor absoluto) se traduce en una potencia de tercer orden más alta y, por consiguiente, el corte de la recta que representa gráficamente al IMD3 con la recta que representa la potencia fundamental se establece antes. Debido a esto se tiene que el punto de intercepto de tercer orden disminuye, y por tanto el rango de operación lineal del amplificador.

Así si el criterio de elección de la tensión de puerta Vgs para el HEMT principal atendiera sólo en exclusiva al punto de intercepto de tercer orden IP3o, con la única exigencia de conseguir un mayor rango de operación lineal del amplificador, el valor con el que se alimentaría a la puerta sería Vgs = -0.5v. Para esta tensión de puerta escogida se tiene el máximo punto de intercepto de tercer orden con un valor que supera los 40 dBm.

Pero la elección no debe obedecer por entero al punto de intercepto de tercer orden. Se debe llegar a un compromiso entre un alto rango de operación lineal del amplificador que viene expresado por el IP3o y una buena ganancia que permita llevar a cabo la función del amplificador de RF y que está relacionada con el parámetro g_{m1} como ya se vio anteriormente.

Si se ven las dos representaciones, tanto del punto de intercepto de tercer orden IP3o como del parámetro g_{m1}, se puede llegar a ese compromiso.

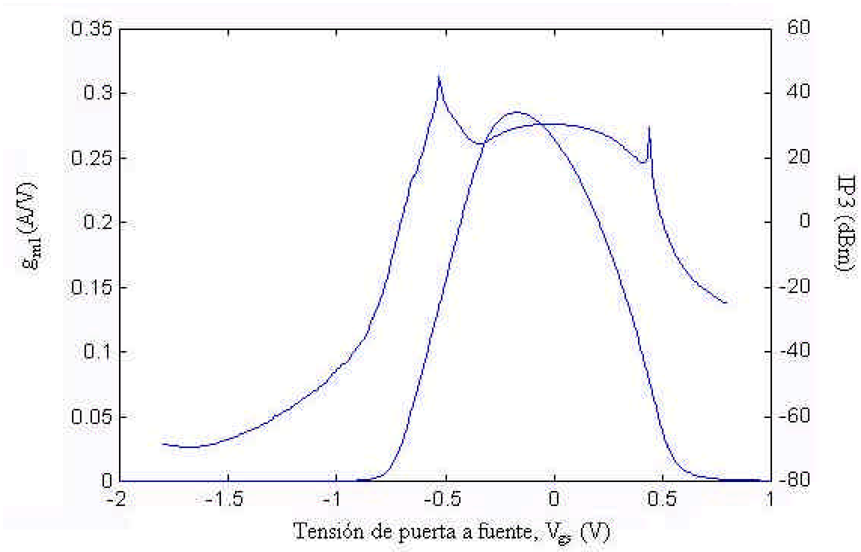


Fig. 3.15. Solapamiento del parámetro g_{m1} e IP3 del HEMT principal H1

Puesto que el rango de valores de la tensión de puerta Vgs para los cuales el parámetro g_{m1} presenta altas ganancias es más reducido (desde -0.4v a 0.1v, aproximadamente, se tienen valores superiores a 0.25A/v) que el rango mencionado con anterioridad (a partir de –0.75v y hasta 0.5v) en el que se tenían puntos de intercepto por encima de los 20dBm, se debe ajustar al primero.

Obsérvese que de haberse tomado como alimentación de puerta la tensión Vgs=-0.5v, motivado por el criterio de elección del máximo punto de intercepto, se tendría una ganancia de aproximadamente la mitad que se puede llegar a conseguir.

Así, y atendiendo a las tablas que se pueden consultar en el apéndice, se ha elegido una tensión de puerta igual a Vgs=-0.33v, voltaje en el cual se tiene una muy aceptable ganancia y un punto de intercepto de tercer orden IP3 alto. Además con este valor de la tensión de puerta se va a ilustrar de una mejor manera la técnica de linealización llevada a cabo, puesto que dicha tensión de –0.33v coincide con el pico negativo de gm3 que se puede ver en su representación correspondiente.

Una vez determinadas tanto la tensión de puerta igual a Vgs=-0.33v como la frecuencia de trabajo a 5.8GHz, y para una tensión constante de drenador Vds=3v del HEMT de tamaño W=400µm, se presenta la potencia fundamental en la siguiente gráfica. Se puede distinguir dos características en la figura:

1. una curva, que se corresponde con la potencia fundamental del amplificador obtenida por Series de Volterra a partir de la simulación en Matlab del fichero *potenciaon.m* a la frecuencia de microondas señalada;

2. y una recta, que se corresponde con la proyección del inicio de la recta de potencia hallada por las Series de Volterra (antes de que comience a curvarse), y es la potencia de primer orden para el HEMT obtenida por matrices de conversión a partir de la simulación en Matlab del archivo *povspi.m* para el punto de trabajo del amplificador.

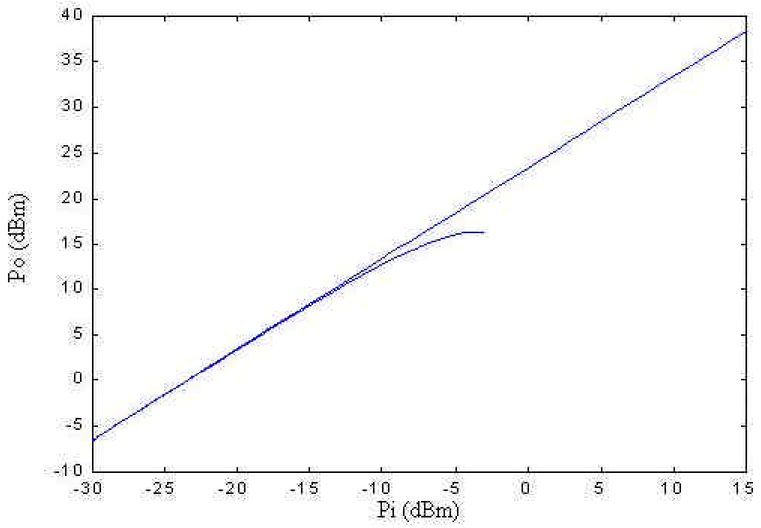


Fig. 3.16. Potencia fundamental de salida del HEMT principal H1

En la gráfica aparece en el eje de abscisas la potencia de entrada al amplificador, Pi, dada en dBm para un rango que va de –30 dBm a 15 dBm. En el eje de ordenadas se tiene la potencia de salida del HEMT, Po, también en unidades de dBm.

Obsérvese que la potencia de salida hallada por Series de Volterra se curva. Ésta es la potencia real, y no la potencia teórica representada por la recta. La potencia real se curva porque la potencia de intermodulación, que se resta a la potencia lineal, aumenta con la señal de entrada.

Así si se toma la recta de la potencia de salida Po, que posee una pendiente constante, se puede observar con una sencilla operación de sustracción entre la potencia de salida Po y la potencia de entrada Pi, que el amplificador principal, HEMT de ancho W=400μm, a la frecuencia de 5.8GHz y para una tensión de drenador Vds=3v y una tensión de puerta de Vgs=-0.33v, presenta una ganancia de 23.4342 dB.

De igual modo se puede contemplar el producto de intermodulación de tercer orden IMD3 para dos tonos del amplificador para las condiciones ya relatadas. La representación se obtiene del fichero *intermod3on.m* .

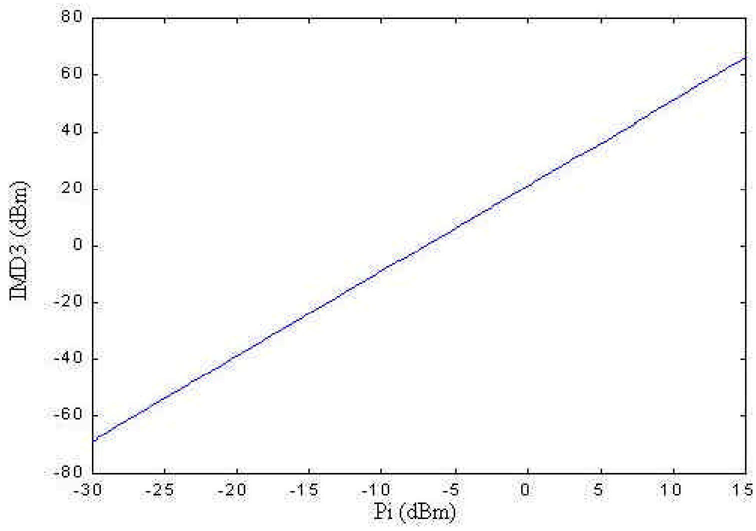


Fig. 3.17. IMD3 del HEMT principal H1

Al igual que antes se tiene en el eje horizontal a la potencia de entrada Pi en unidades de dBm y en el eje vertical a la potencia de tercer orden en dBm también.

El producto de intermodulación de tercer orden IMD3 se ha obtenido mediante el análisis por Series de Volterra, con el que se ha conseguido la función de transferencia de tercer orden.

Por último, y para que se pueda ilustrar de qué manera se obtiene el punto de intercepto de tercer orden IP3o (referido a la salida), se presenta la siguiente gráfica en el que aparece el punto de corte entre la potencia fundamental y la potencia de tercer orden para el HEMT que se estudia.

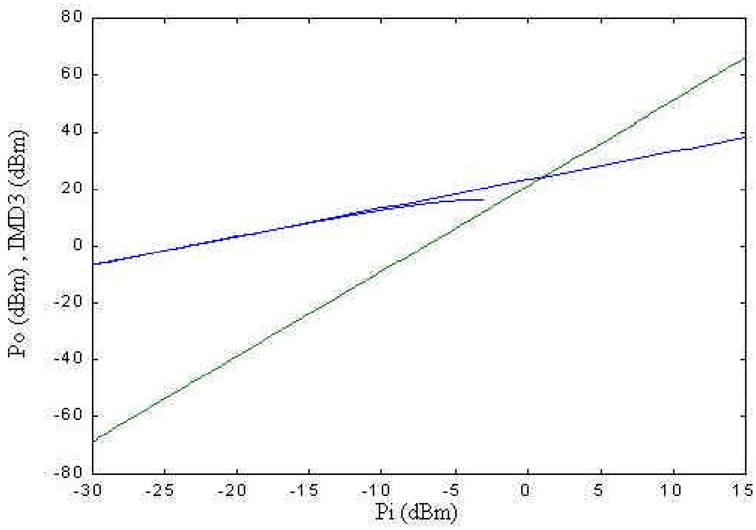


Fig. 3.18. Ilustración para el cálculo del IP3

Esta representación, que se ha realizado para la tensión de puerta Vgs=-0.33v, es la que se obtiene de la simulación en Matlab del fichero *graf3on.m*, y confirma que para dicha alimentación de puerta Vgs y a la frecuencia de trabajo de 5.8GHz se tiene un punto de intercepto de tercer orden de IP3= 24.5517 dBm.

III. 8. Los HEMTs Auxiliares: HEMT 6´50 y HEMT 2´50

Además del HEMT 8×50 principal, del cual se ha hablado en el apartado precedente, se ha trabajado con dos transistores más auxiliares para manifestar la técnica de linealización del amplificador principal.

En este apartado se van a adelantar las aclaraciones pertinentes que justifican el porqué de la elección de estos transistores, así como su correspondiente alimentación de puerta Vgs. Aunque se volverán a tratar las razones de una manera más completa en un capítulo posterior por entero, se cree necesario dar ahora algunos apuntes que esclarezcan esta elección.

Para resolver la linealización del amplificador principal se hace necesaria una compensación del pico negativo del parámetro g_{m3}, que es el responsable de la característica no lineal de tercer orden, a la tensión de puerta Vgs=-0.33v elegida según un criterio que obedecía al compromiso de tener una buena ganancia y disponer de un punto de intercepto de tercer orden IP3 elevado.

Esta cancelación se consigue a partir de transistores auxiliares alimentados a una determinada tensión de puerta que hacen posible la disminución de la característica de tercer orden g_{m3} en el punto de trabajo.

Esta reducción del parámetro g_{m3} se lleva a cabo con la suma a su pico negativo del pico positivo, lo cual implica un desplazamiento a la derecha de la característica g_{m3}. El deslizamiento es obtenido por la alimentación de la puerta a una tensión Vgs menor que para el transistor principal, de ahí que haya que elegir nuevas tensiones de alimentación de la puerta para los transistores auxiliares.

De igual manera, como las características positiva y negativa no son simétricas se hace necesario estudiar distintos tamaños de HEMTs, que proporcionen una mayor cancelación de la característica no lineal y que por tanto sean motivo de la elección de éstos.

A continuación se narra una breve descripción del procedimiento llevado a cabo para la obtención de las características de tamaños de los transistores y de las respectivas alimentaciones de puerta Vgs.

Así se ha partido del modelo no lineal de la fuente de corriente Ids del transistor y se han derivado de la corriente los parámetros gm, tal y como se ha explicado anteriormente, para distintos tamaños de HEMT (el rango de los tamaños de los transistores abarcan desde W=20µm hasta W=400µm).

El fichero *gmW.m* implementado proporciona las distintas gráficas de los parámetros gm así como de la corriente Ids, consecuencia del procedimiento seguido para los distintos anchos de los transistores.

A continuación se presenta la gráfica correspondiente al parámetro g_{m3} en unidades de amperios / voltios^3 , en función de la tensión de puerta Vgs, en voltios, del HEMT. En esta gráfica se puede ver que a mayor ancho W, mayor es la característica g_{m3}.

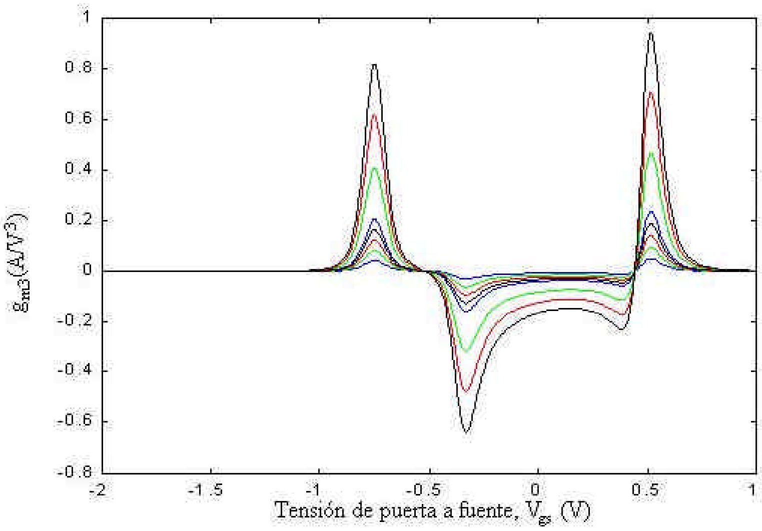
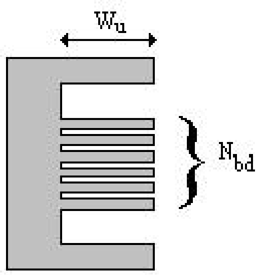


Fig. 3.19. Variación de gm3 para distintos W

Centrándose en el estudio del parámetro g_{m3} se eligió en primera instancia al transistor que proporcionaría una mayor cancelación del pico negativo gracias al valor de su pico positivo, y a continuación se estimó su respectiva tensión de puerta Vgs. Después se repitió el procedimiento para la elección del segundo transistor auxiliar teniendo en cuenta el resultado de la cancelación anterior.

Los transistores que resultaron se describen en los dos siguientes subapartados.

III. 8. a.- HEMT 6´50



El primer transistor auxiliar tiene un ancho de W=300µm, o lo que es lo mismo, la puerta se encuentra dividida en un número de dedos igual a N_{bd} = 6 de ancho W_u = 50µm.

Al igual que se ha hecho para el transistor principal, se puede caracterizar al elemento no lineal que es la fuente de corriente que se encuentra entre el drenador y la fuente mediante el modelo ya presentado.

Sólo hay que tener en cuenta para este caso que el ancho del transistor es de W=300µm frente a los 400µm del transistor principal, puesto que la tensión de drenador se conserva constante e igual a Vds=3v.

A partir de la simulación en Matlab del fichero *gmW.m* se puede extraer la corriente Ids correspondiente al HEMT auxiliar. En la gráfica siguiente se representa a ésta en amperios según la tensión de puerta Vgs en voltios.

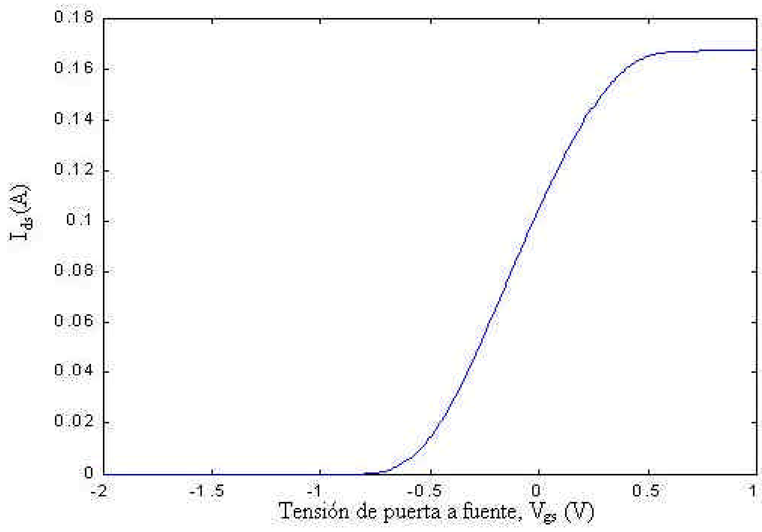


Fig. 3.20. Corriente de drenador Ids para el HEMT auxiliar H2

Para obtener los parámetros gm se sigue el mismo procedimiento que para el HEMT principal. Así derivando sucesivamente a la fuente de corriente no lineal Ids obtenida por la tensión de puerta Vgs, se determinan estos parámetros.

Las representaciones están extraídas del fichero *gmW.m*. En ellas se pueden ver g_{m1} (amperios/voltios), g_{m2} (amperios/voltios^2) y g_{m3} (amperios/voltios^3) respectivamente en función a la tensión de puerta Vgs (voltios).

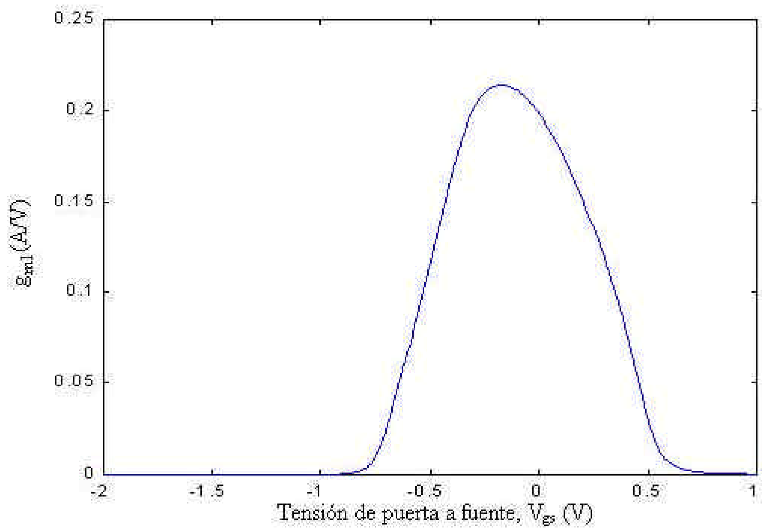


Fig. 3.21. Parámetro g_{m1} de H2

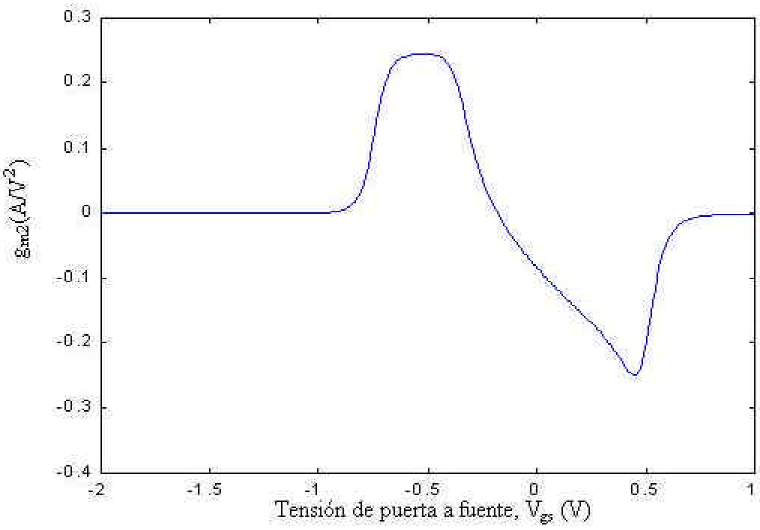


Fig. 3.22. Parámetro g_{m2} de H2

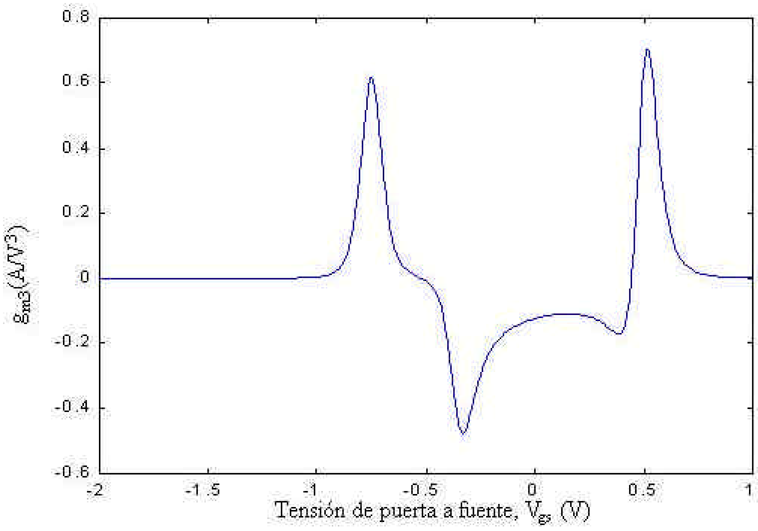


Fig. 3.23. Parámetro g_{m3} de H2

Con esto quedaría caracterizado el único elemento no lineal que presenta el HEMT y se hace posible un mayor estudio de las características no lineales a partir de las Series de Volterra. Pero este análisis más extenso se escapa del objetivo puesto que se trata de un transistor auxiliar.

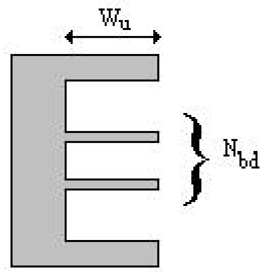
Sólo queda por determinar la alimentación de la puerta para caracterizar a este primer HEMT auxiliar. Así tras el estudio llevado a cabo, y del que se tiene más detalle en el capítulo 4 cuando se describe el proceso de linealización experimentado por el transistor principal, se concluye para el transistor una tensión de puerta igual a Vgs=-0.74v.

Con esta tensión de –0.74v se consigue el mayor cancelamiento del pico negativo de g_{m3} en el amplificador principal, que como ya se ha dicho es el criterio que se ha tomado para la elección de la tensión de puerta Vgs.

III. 8. b.- HEMT 2´50

El segundo HEMT auxiliar que se ha usado es más pequeño que los otros dos. Esto es debido a que la mayor parte de la compensación de las características no lineales del transistor principal se consiguió con el primer transistor auxiliar.

Así el transistor en cuestión tiene un tamaño de W=100µm, y ahora la puerta se encuentra dividida en 2 dedos (N_{bd} = 2) de ancho W_u = 50µm.



Repitiendo el mismo proceso que para el primer HEMT auxiliar, pero ahora atendiendo a un ancho de W=100µm, se han extraído del fichero *gmW.m* las gráficas que caracterizan al elemento no lineal.

Así, y al igual que antes, primero se presenta la fuente de corriente no lineal Ids en amperios según la tensión de puerta en voltios.

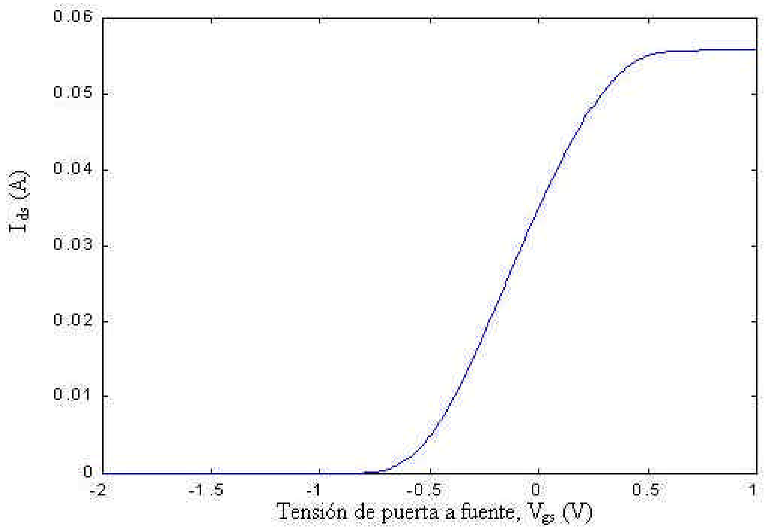


Fig. 3.24. Corriente de drenador Ids para el HEMT auxiliar H3

Obsérvese que para este HEMT auxiliar se tienen corrientes notablemente menores que las obtenidas para los otros dos.

A continuación se tienen las representaciones de los parámetros g_{m1}, g_{m2} y g_{m3} respectivamente, parámetros derivados de la corriente Ids, que se extraen de la simulación del fichero *gmW.m*.

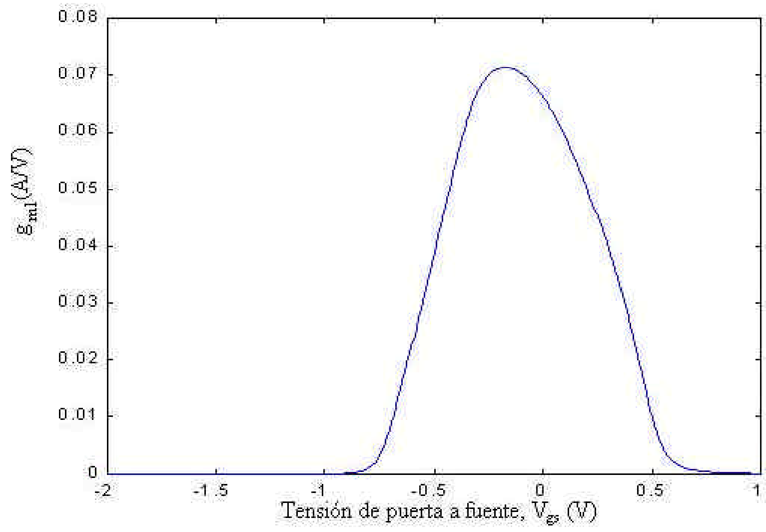


Fig. 3.25. Parámetro g_{m1} de H3

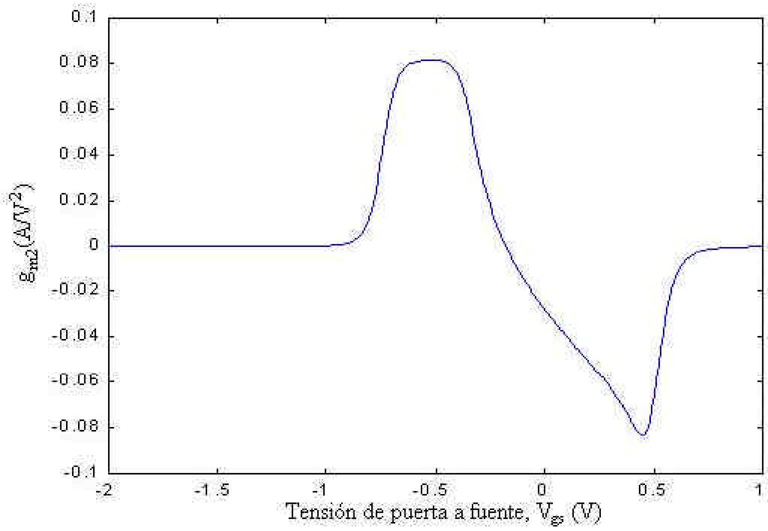


Fig. 3.26. Parámetro g_{m2} de H3

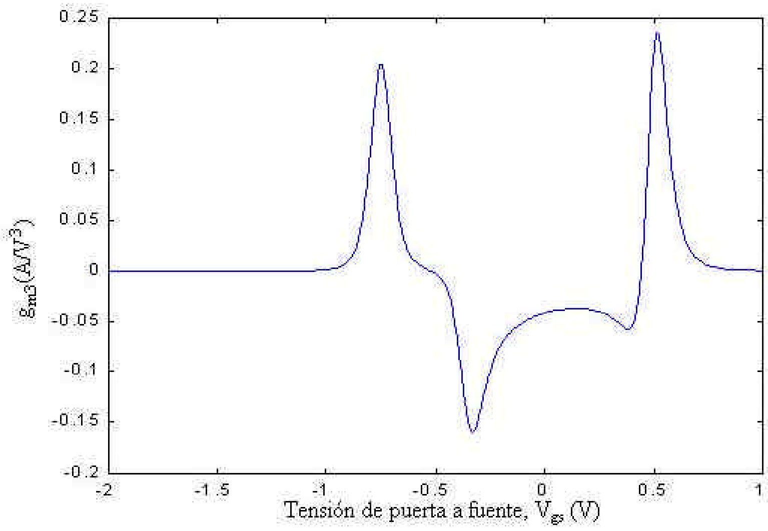


Fig. 3.27. Parámetro g_{m3} de H3

En el eje de abscisas de las 3 gráficas se tiene a la tensión de puerta Vgs en voltios, y en el eje de ordenadas se tiene a g_{m1} en amperios/voltio, a g_{m2} en amperios/voltio^2 y a g_{m3} en amperios/voltio^3 respectivamente.

Para finalizar con la caracterización de este HEMT auxiliar se precisa conocer su correspondiente alimentación de puerta Vgs. Siguiéndose el mismo criterio de minimizar la característica no lineal g_{m3} se ha determinado que el transistor debe presentar una tensión de puerta de Vgs=-0.86v.

Se quiere hacer notar que para la elección de esta Vgs=-0.86v se ha tenido en cuenta la característica no lineal g_{m3} suma del amplificador principal y el primer transistor auxiliar, es decir, se ha tenido ya en cuenta la contribución inicial del HEMT auxiliar de 300µm al HEMT principal de 400µm, y por tanto se ha optimizado mejor.

Capítulo IV

TÉCNICA DE LINEALIZACIÓN

IV. 1. Introducción

A medida que el uso de la comunicación digital aumenta, la linealidad de un amplificador de RF se vuelve más y más importante. Actualmente se requiere alta linealidad para LNAs, además de para amplificadores de potencia y amplificadores de alimentación. Existen varias técnicas para incrementar la linealidad del amplificador, tales como predistorsión [25], feedforward [26], y realimentación [27]. Sin embargo, todas ellas requieren un hardware complejo, por lo que estos métodos son más apropiados para la estación base que para el móvil.

Para aplicaciones móviles, la alta linealidad a bajo consumo de potencia es muy importante. Varias técnicas de linealización, adecuadas para este propósito, se han propuesto en la literatura. Por ejemplo, usar un transistor de región triodo auxiliar para compensar la no linealidad del amplificador principal de RF se propone en [28], y un amplificador auxiliar a baja frecuencia para feedforward de los términos de la intermodulación de segundo orden se adoptó para reducir la no linealidad de tercer orden [29]. Sin embargo, todas ellas necesitan de circuitería adicional que inevitablemente incrementa el consumo de potencia dc.

En este capítulo, siguiendo la idea expuesta en [30], se propone un nuevo método de linealización usando múltiples transistores en fuente común, donde el ancho de puerta además de la alimentación de puerta ($V_{gs} – V_{th}$) de cada puerta se ajusta para compensar las características no lineales del transistor principal. La alimentación de puerta puede variarse o cambiando V_{gs} o alterando V_{th}. Luego, se demuestra su validez implementando un prototipo de amplificador de RF de dos FETs usando dos transistores. Puesto que los transistores auxiliares son más pequeños que el principal y se alimentan por debajo de la tensión umbral, la topología propuesta no consume corriente de dc adicional. En el apartado 2, se describe el principio de linealización usando múltiples transistores. Los resultados de la implementación usando dos transistores se describen en el apartado 3. En el apartado 4 se presentan los resultados para un amplificador de tres FETs prototipo, seguido de las conclusiones.

IV. 2. Método de Linealización usando Múltiples Transistores

En general, la corriente de drenador i_{DS} de un MOSFET en fuente común se expresa como

$$(2.1)\quad i_{DS} = I_{dc} + g_{m1} v_{gs} + \frac{g_{m2}}{2!} v^2_{gs} + \frac{g_{m3}}{3!} v^3_{gs} + \ldots$$

donde g_{m1}, g_{m2} y g_{m3} son, respectivamente, la primera, segunda y tercera derivadas de la corriente con respecto a la tensión puerta a fuente v_{gs}. Es bien conocido [31] que el coeficiente de v^3_{gs} en (4.1) juega un papel importante en la distorsión de intermodulación de tercer orden (IMD3) de un amplificador de RF.

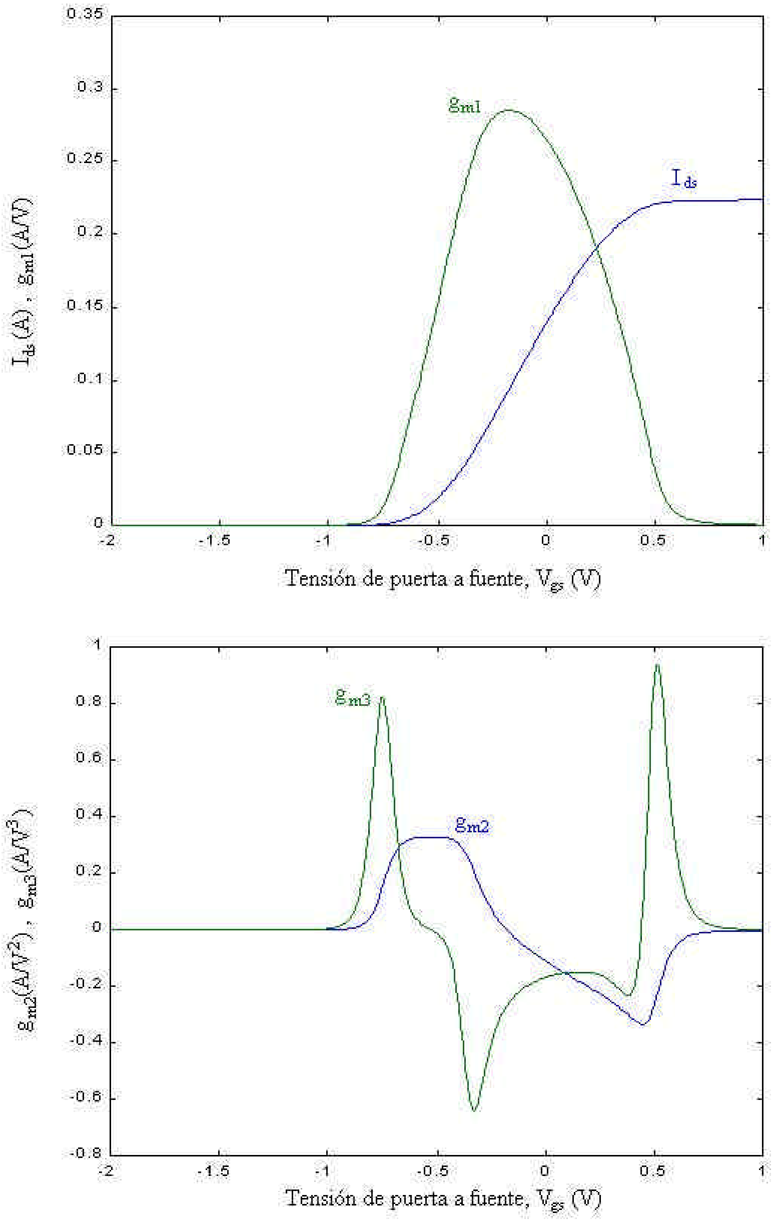


Fig. 4.1. Características dc del HEMT principal H1 de tamaño W=400 μm (8 × 50 μm)

Una medición de las características típicas de la corriente Ids y sus derivadas (g_{m1}, g_{m2}, y g_{m3}) de un HEMT se muestran en la Fig. 4.1.

En la representación anterior se muestra que g_{m3} tiene un pico positivo en la región subumbral, luego cruza por cero cerca de la tensión umbral (V_{th}), y luego aparece un pico negativo en una tensión de puerta ligeramente mayor a V_{th}. Para disponer de la mayor ganancia de RF, en un compromiso con la linealidad del transistor (ver Fig. 3.15 del capítulo 3), la tensión de puerta a fuente del amplificador de RF, V_{gs}, debe estar en el rango entre -0.4 y -0.1 V. Desafortunadamente, el g_{m3} en esta región de alimentación tiene un valor de pico negativo, como se muestra en la Fig. 4.1, degradando la linealidad del amplificador significativamente.

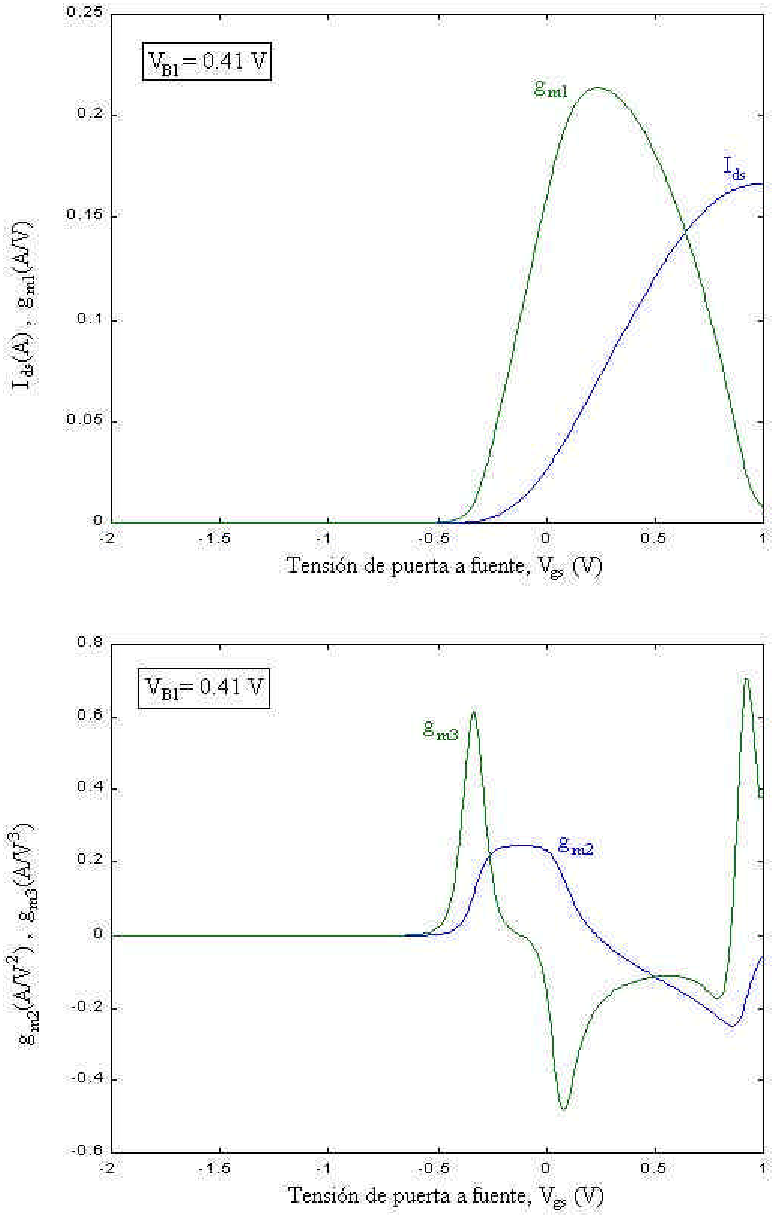


Fig. 4.2. Características dc del HEMT auxiliar H2 de tamaño W=300 mm (6 ´ 50 mm)

En este capítulo, se propone cancelar el pico negativo de g_{m3} del transistor principal a partir del pico positivo de g_{m3} de otro HEMT auxiliar que es alimentado a una alimentación de puerta más pequeña (H1 se alimenta a V_{gs}, y H2 lo hace a V_{gs}–V_{B1}) así que las curvas de transferencia características para H2 se encuentran desplazadas a la derecha por una cantidad igual a V_{B1} como se muestra en la Fig. 4.2 donde se tiene que el valor para el pico positivo de g_{m3} del HEMT auxiliar H2 coincidiría con el valor para el pico negativo de g_{m3} del principal H1.

Luego, una vez que el punto de alimentación para H2 se ha determinado, la cantidad de compensación del parámetro g_{m3} puede elegirse ajustando el ancho de H2. A causa de que las características positiva y negativa de g_{m3} no son simétricas, la región plana compensada para la alimentación de puerta es bastante estrecha con un único HEMT auxiliar. Esta región plana puede extenderse más añadiendo transistores multipuerta auxiliares con su propia tensión de alimentación de puerta además de su propio tamaño, como se muestra en la Fig. 4.3 con la inclusión de un segundo HEMT auxiliar H3.

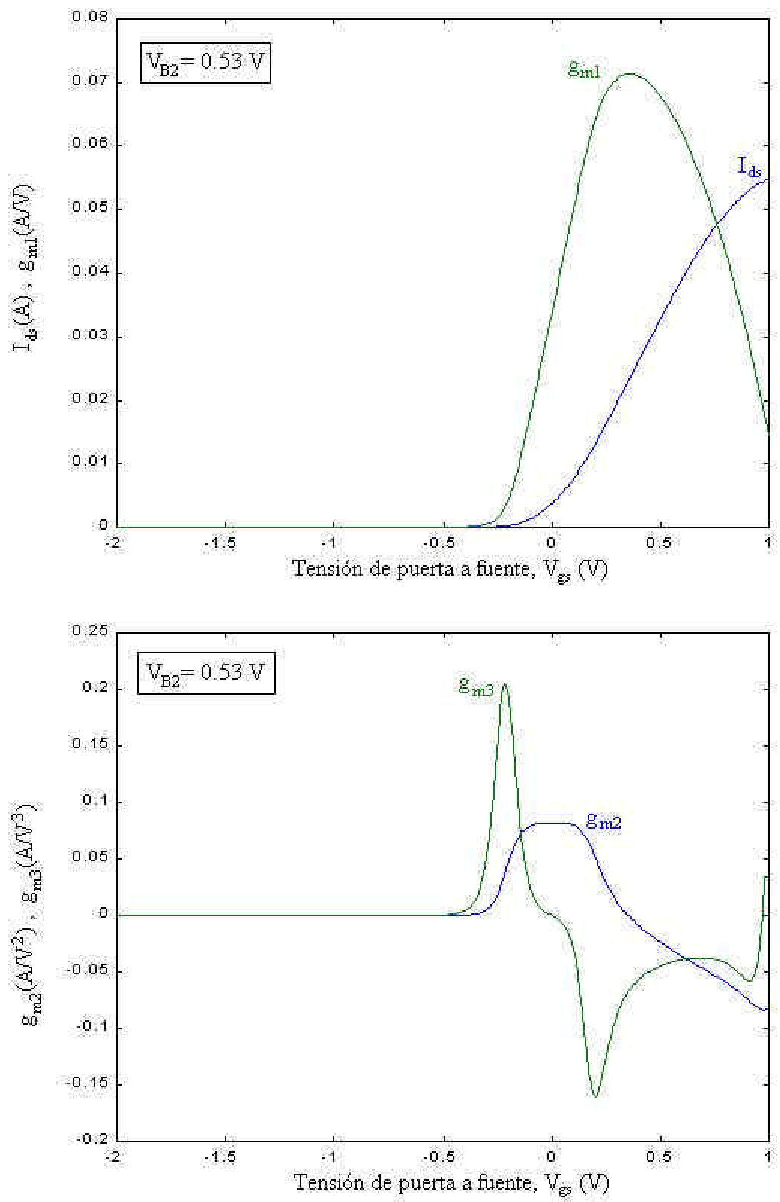


Fig. 4.2. Características dc del HEMT auxiliar H3 de tamaño W=300 μm (2 × 50 μm)

Sin embargo, añadir demasiados transistores puede dar como resultado peores características debido a otros efectos, tales como las capacidades parásitas además de que las pérdidas se incrementan en los transistores auxiliares.

IV. 3. Resultados Experimentales de un Amplificador de Dos FETs Prototipo

Para demostrar la validez de un amplificador de múltiples transistores, se implementa un amplificador RF de dos FETs prototipo usando sólo dos HEMTs y las características de RF son medidas y comparadas con aquéllas de un solo HEMT. En este experimento, el tamaño W de los HEMTs son 400μm (8×50μm) para H1 (el transistor principal), y 300μm (6×50μm) para H2 (el transistor auxiliar). Las características dc medidas de H1 se muestran en la Fig. 4.1 y las características de H2 en la Fig. 4.2. Por la importancia anteriormente señalada del parámetro g_{m3} será éste el parámetro en el que se va a centrar el estudio. La topología que se tiene viene dada por la Fig. 4.4.

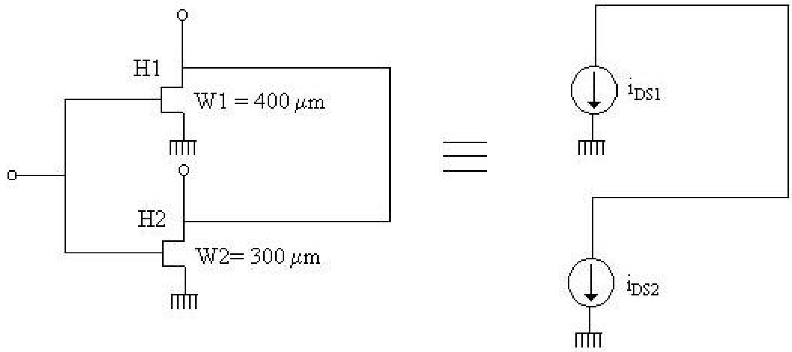
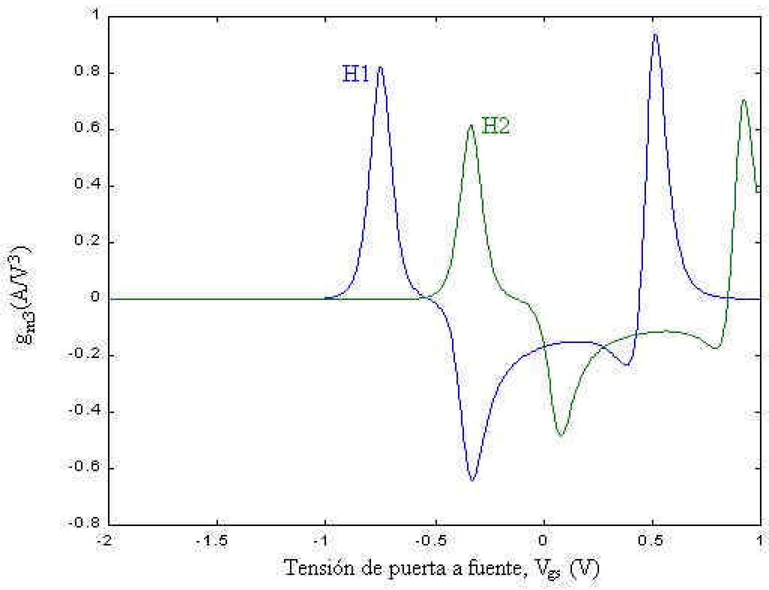


Fig. 4.4. Topología de 2 HEMTs

Así pues, se puede comprobar que con la contribución de este segundo HEMT H2 (auxiliar) se reduce significativamente la parte negativa del parámetro g_{m3}. El resultado se puede ver en la Fig. 4.5.



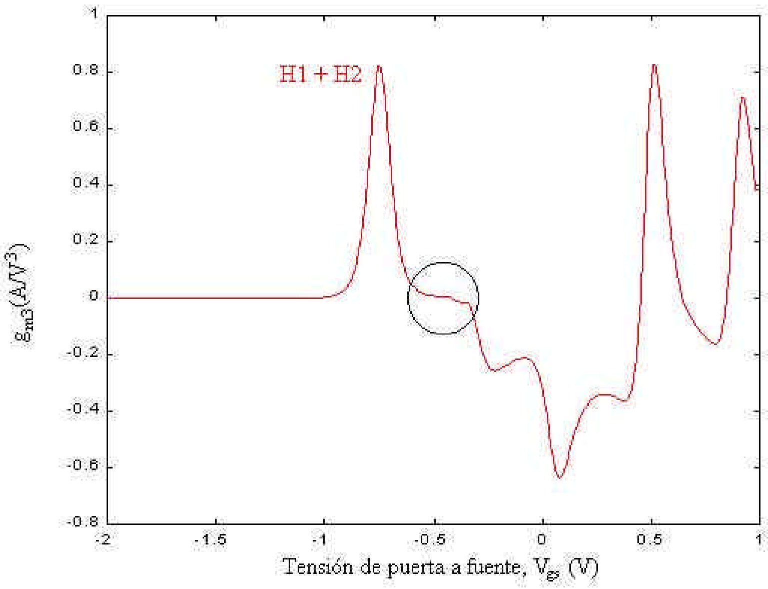


Fig. 4.5. Combinación de H1 y H2

Se pueden comparar en la misma representación las distintas curvas del parámetro g_{m3} para el HEMT principal, para el HEMT auxiliar, y para el amplificador prototipo de dos FETs resultado de la contribución de los dos anteriores. Esta representación dada por la Fig. 4.6 es resultado de la simulación en el programa MATLAB del fichero *iedontotal.m* que proporciona los parámetros del conjunto formado por el transistor principal y el transistor auxiliar.

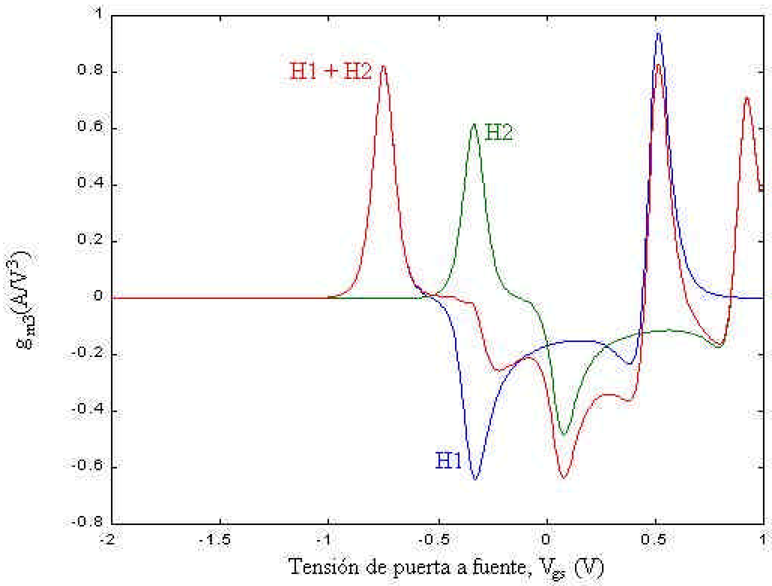


Fig. 4.6. Comparación de las distintas curvas de la característica g_{m3}.

Como ya se dijo antes, se puede observar que la región compensada con un solo HEMT auxiliar es bastante estrecha (aproximadamente 0.15 V). Esto se debe a que las características positiva y negativa del parámetro g_{m3} no son simétricas. De todos modos se puede comprobar que la reducción del pico negativo es significativa.

El experimento llevado a cabo de este amplificador prototipo de dos FETs, consta como ya se ha dicho, del HEMT principal H1 de tamaño W1= 400 μm y del HEMT auxiliar H2 de tamaño W2= 300 μm. Las alimentaciones de puerta para ambos transistores es el punto de trabajo V_{gs} = -0.33 V, pero hay que tener en cuenta que para el transistor auxiliar se toma una tensión de desplazamiento V_{B1}. En este caso, V_{B1} se elige como 0.41 V. Para finalizar la tensión de drenador V_{ds} es de 3 V.

Para medir el comportamiento del amplificador de RF, se empleó la simulación por MATLAB a partir de la elaboración de distintos archivos para tal fin. La frecuencia de trabajo situada en f_0 es de 5.8 GHz. El IMD_3 se midió usando una señal de dos tonos.

Los resultados experimentales arrojados tras la simulación se exponen a continuación.

Tanto el amplificador de un solo HEMT como el de dos HEMTs muestran una ganancia semejante, 23.4342 dB y 23.6376 dB respectivamente a la tensiones de alimentación de puerta de V_{gs} (H_1) = -0.33 V, V_{gs} -V_{B1} (H_2) = -0.74 V. La siguiente figura ilustra lo expuesto, dividiéndose en dos partes para el amplificador de un solo transistor y para el amplificador de dos transistores, Fig. 4.7a y Fig. 4.7b respectivamente.

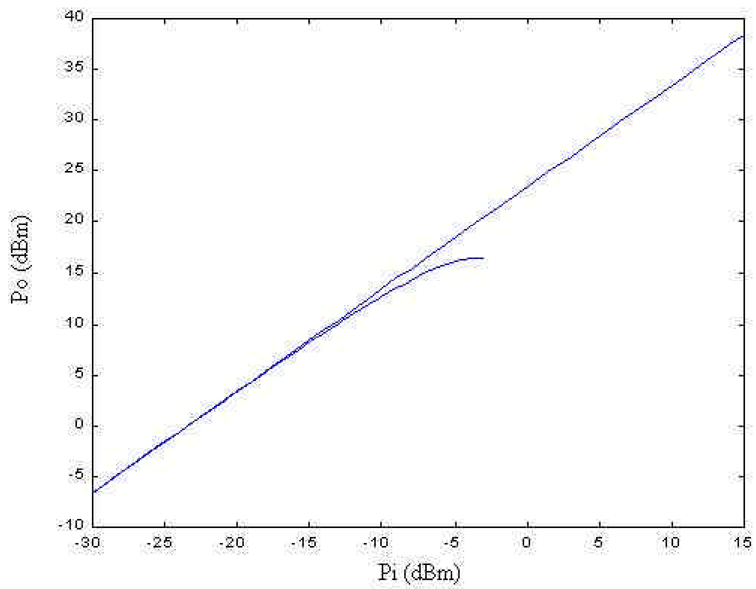


Fig. 4.7a. Potencia de salida Po en dBm frente a la Potencia de entrada Pi en dBm del amplificador principal H1

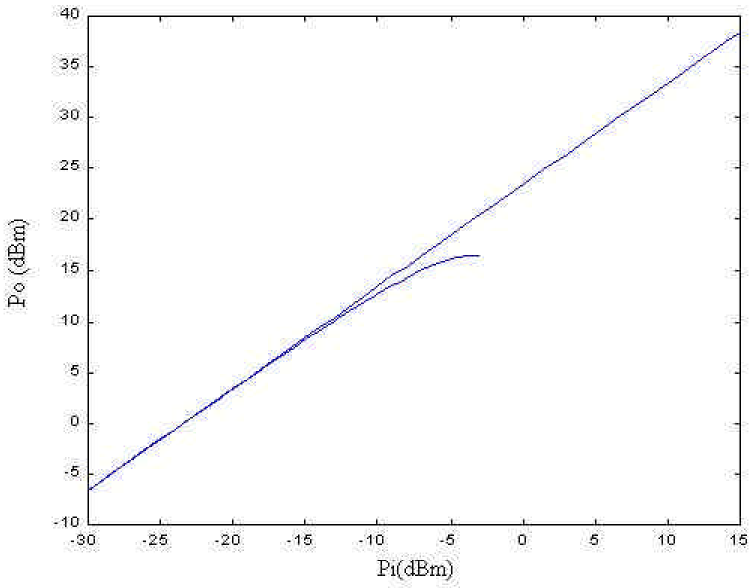


Fig. 4.7b. Potencia de salida Po en dBm frente a la Potencia de entrada Pi en dBm del amplificador prototipo de dos HEMTs H1+H2

Para una mejor comparación y así constatar que la ganancia es prácticamente idéntica se adjunta la siguiente figura en la que en la misma representación se tienen ambas potencias de salida.

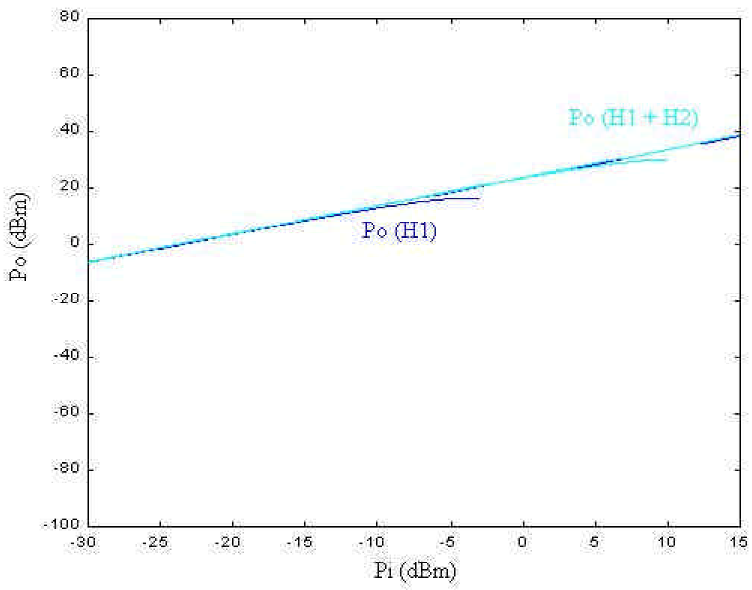


Fig. 4.7c. Comparación entre el amplificador de un solo transistor y el amplificador prototipo de dos transistores

El consumo de corriente es de 52.9 mA y 53.6 mA para el amplificador de un HEMT y el propuesto, respectivamente. Notar que el incremento de corriente debido a H2 es despreciable a causa de que es alimentado por debajo del umbral y que es más pequeño que H1.

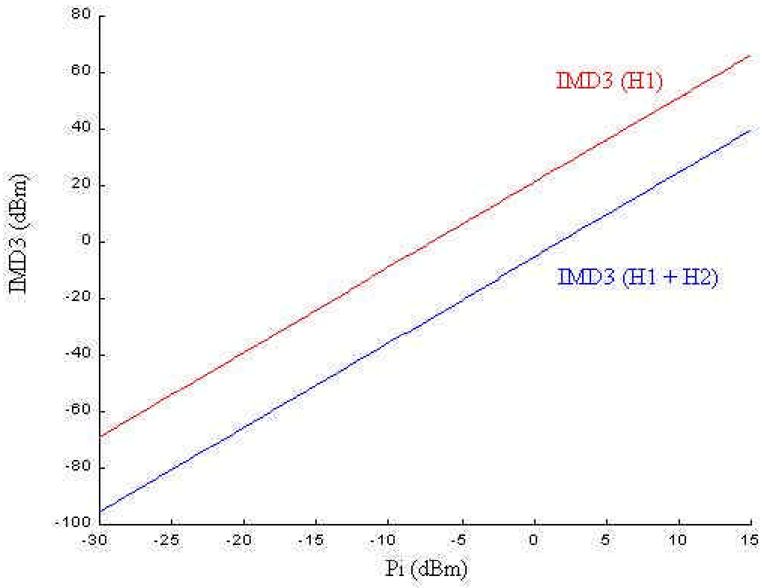


Fig. 4.8. Resultados de simulación de la potencia de distorsión de tercer orden IMD3

La Fig. 4.8 muestra cómo varía la potencia de distorsión IMD3 cuando la potencia de entrada Pi varía. Como se esperaba, IMD3 se reduce significativamente. Si hacemos una ampliación de la gráfica anterior podemos especificar la mejora de reducción del IMD3, Fig. 4.9, y comprobar que IMD3 se reduce en 26.62 dB en el punto en el que se trabaja $V_{gs} = -0.33$ v.

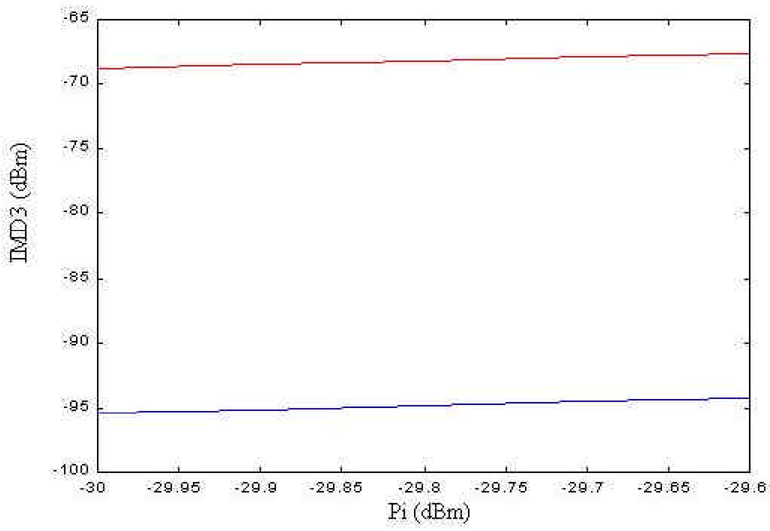


Fig. 4.9. Ampliación

La reducción mostrada de IMD3 provoca un aumento del punto de intercepto de tercer orden (IP3), como se puede comprobar en la siguiente representación.

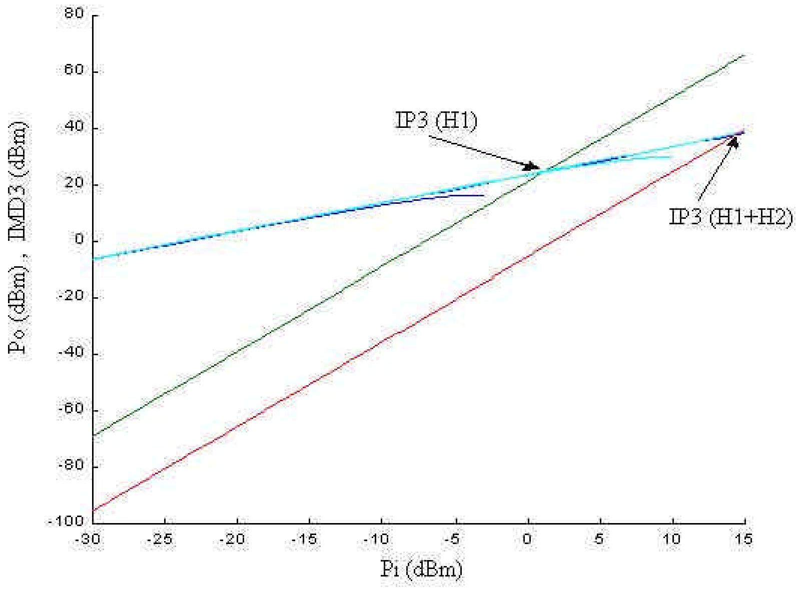


Fig. 4.10. Puntos de intercepto de la recta de la potencia fundamental e IMD3.

La Fig. 4.10 muestra la potencia de salida fundamental y el IMD3 tanto del amplificador de un único HEMT como de la topología propuesta para un amplificador de dos HEMTs cuando la potencia de entrada varía (y a la tensión de puerta de trabajo V_{gs}= - 0.33 v). Así podemos observar el crecimiento del punto de intercepto de tercer orden IP3 referido a la salida al encontrarse las respectivas rectas de potencia de salida fundamental Po y potencia de distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 del HEMT principal y de la suma del HEMT principal y el HEMT auxiliar. En realidad se ha producido un incremento del punto de intercepto de tercer orden, IP3 , de casi 14 dB a la tensión V_{gs}= - 0.33 v.

La siguiente figura muestra la característica del punto de intercepto de tercer orden IP3 referido a la salida cuando varía la tensión de puerta V_{gs} del amplificador de dos transistores. A continuación se compara la curva del punto de intercepto de tercer orden IP3 para el amplificador del HEMT principal y el prototipo de amplificador linealizado que se estudia con el amplificador de dos FETs propuesto. En esta comparación se puede verificar que la linealización se produce al comprobarse que prácticamente la curva para la suma de H1 y H2 se encuentra arriba de la característica para el HEMT principal H1 sólo.

En particular, se puede confirmar que para el punto de trabajo (V_{gs} = - 0.33 v) se produce una gran diferencia con respecto al anterior resultado.

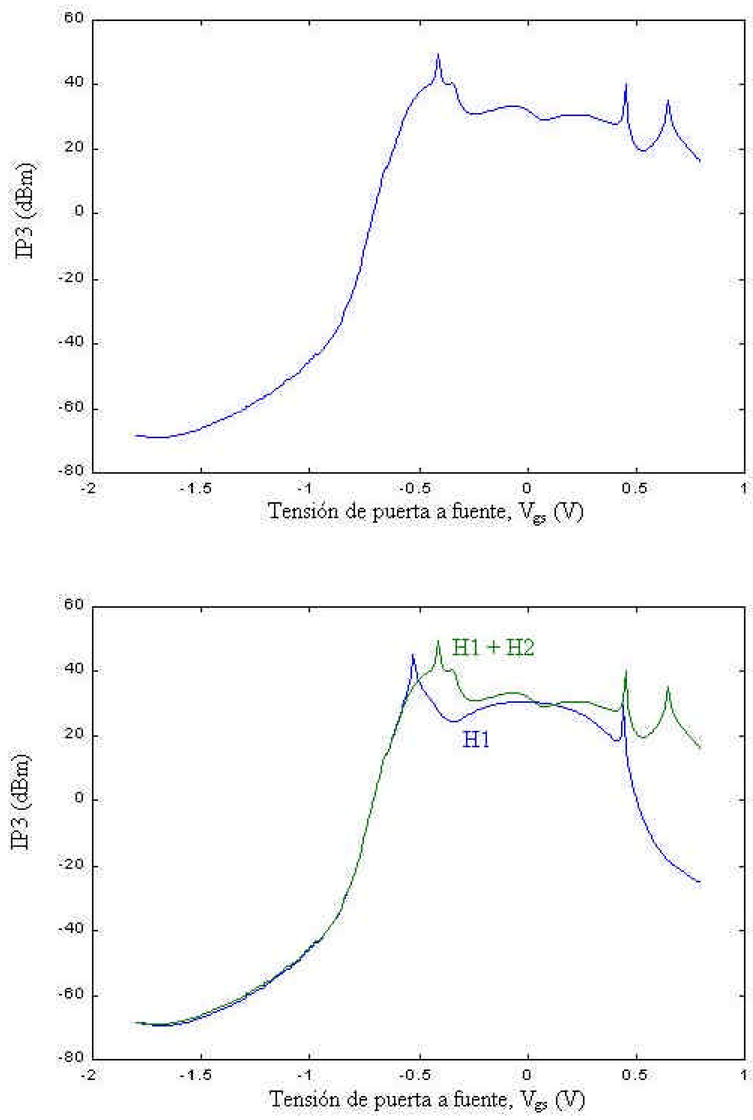


Fig. 4.11. IP3 del amplificador de dos HEMTs y comparación.

Para finalizar con este apartado se resume en la Tabla 4.1 la comparación de comportamientos entre el amplificador en fuente común de un solo HEMT y el propuesto de dos HEMTs, que muestra que la mejora de linealidad se obtiene en el amplificador de dos transistores propuesto sin cambios apreciables en las otras características de RF.

TABLA 4.1
COMPORTAMIENTO RF DEL AMPLIFICADOR PRINCIPAL H1 EN FUENTE COMÚN Y EL AMPLIFICADOR LINEALIZADO PROPUESTO DE DOS TRANSISTORES H1+H2

	Amplificador H1 en fuente común convencional	Amplificador linealizado H1+H2
V_{ds} (V)	3	3
I_{ds} (mA)	52.9	53.6
Ganancia (dB) a f_0 = 5.8 GHz	23.4342	23.6376
IMD3 (dBm) a Pi = -30 dBm	-68.8008	-95.4243
IP3 referido a la salida (dBm) a V_{gs} = -0.33 V	24.5517	38.1417

IV. 4. Resultados Experimentales de un Amplificador de Tres FETs Prototipo

Para demostrar la validez de un amplificador de múltiples transistores, se implementa un amplificador RF de tres transistores prototipo usando tres HEMTs y las características de RF son medidas y comparadas con aquéllas de uno solo. En este experimento, el tamaño W de los HEMTs son 400μm (8×50μm) para H1 (el transistor principal), 300μm (6×50μm) para H2 (el primer transistor auxiliar), y 100μm (2×50μm) para H3 (el segundo transistor auxiliar). Las características dc medidas de H1 se muestran en la Fig. 4.1, las características de H1+H2 se muestran en la Fig. 4.5, y las características de H3 en la Fig. 4.3. Por la importancia anteriormente señalada del parámetro g_{m3} será éste el parámetro en el que se va a centrar el estudio. La topología que se tiene viene dada por la Fig. 4.12.

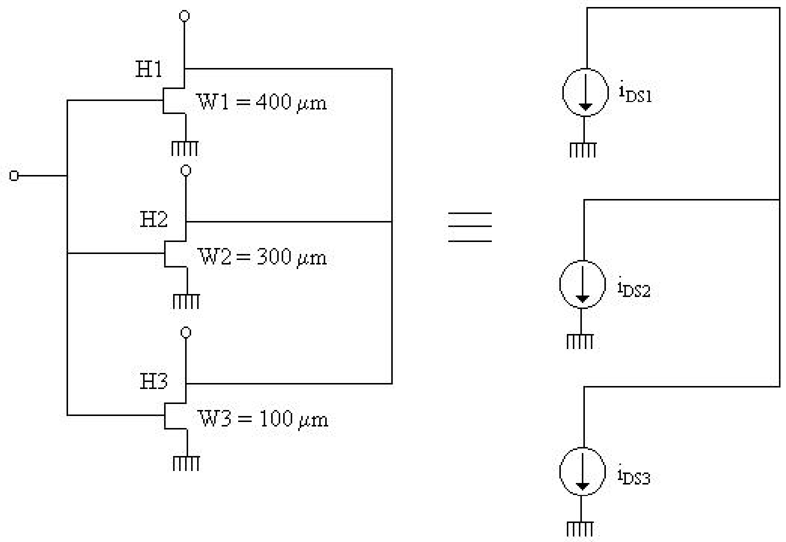


Fig. 4.12. Topología de 3 HEMTs

Así pues, se puede comprobar que con la contribución de este tercer HEMT H3 (auxiliar) se reduce significativamente la parte negativa del parámetro g_{m3} conjunto de la contribución del segundo HEMT auxiliar H2 al HEMT principal H1. Dicho resultado se puede ver en la Fig. 4.13.

Como ya se dijo anteriormente, la región compensada puede extenderse más añadiendo transistores multipuerta auxiliares con su propia alimentación de puerta además de su propio tamaño. Sin embargo, se debe recordar que añadir demasiados HEMTs puede dar lugar a peores características debido a otros efectos, tales como las capacidades parásitas de los transistores auxiliares.

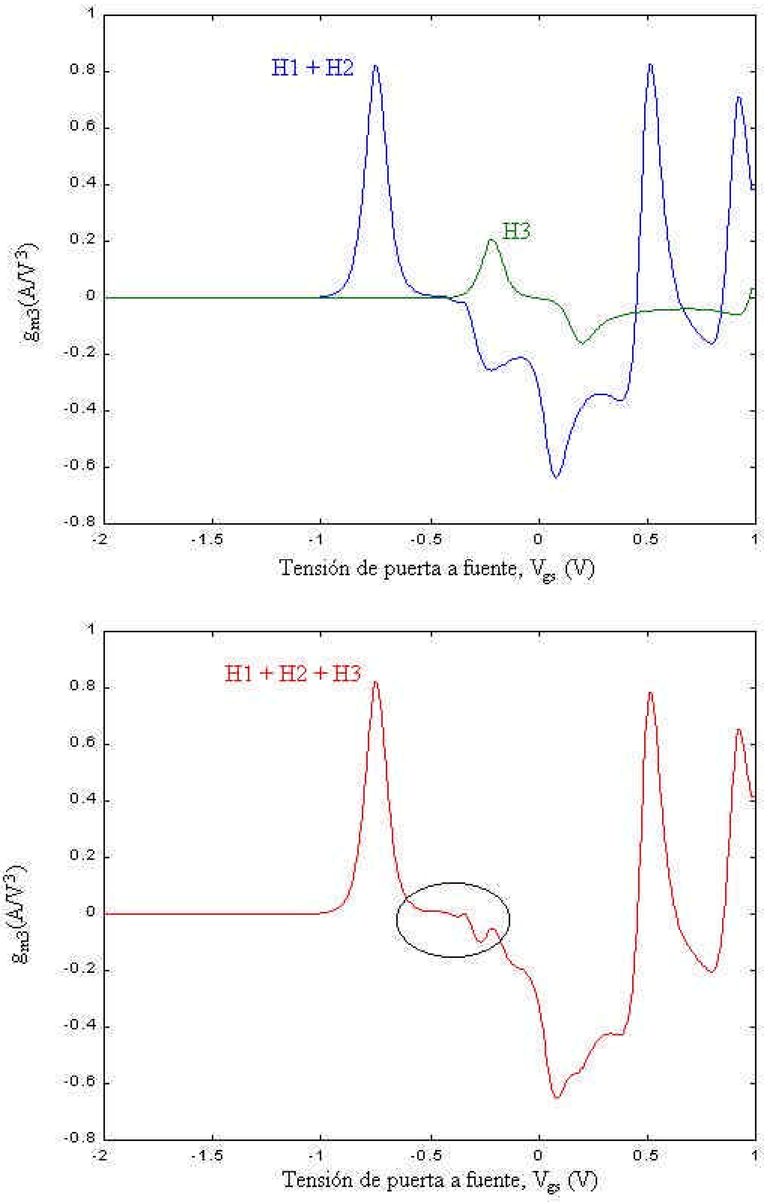


Fig. 4.13 Combinación de H1, H2 y H3

Se pueden comparar en la misma representación las distintas curvas del parámetro g_{m3} para el HEMT principal, para los HEMTs auxiliares, y para los amplificadores prototipos de dos y tres transistores resultado de la contribución de los transistores H1 y H2, y H1, H2 y H3, respectivamente. Esta representación la da la Fig. 4.14 resultado de la simulación en el programa MATLAB del fichero *iedontotal3.m* que proporciona los valores de los parámetros del conjunto formado por el transistor principal y los dos auxiliares.

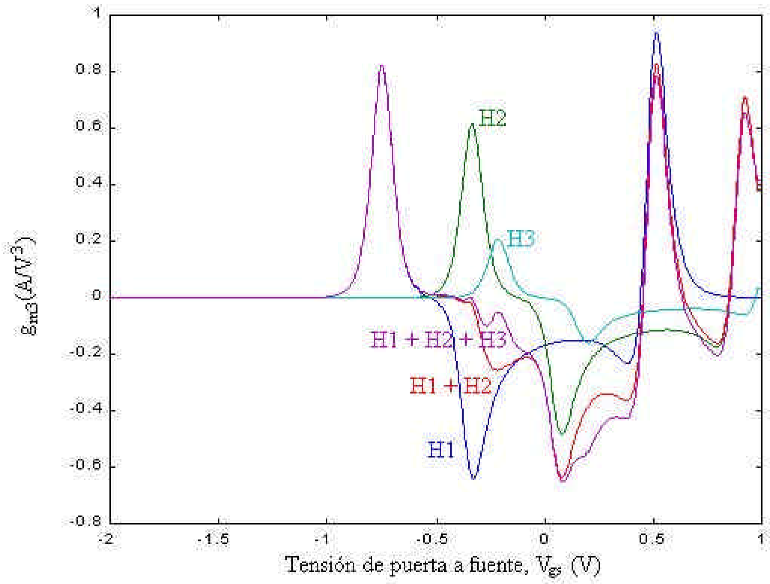


Fig. 4.14. Características g_{m3} de H1, H2, H3, H1+H2 y H1+H2+H3

Puesto que se encuentra muy enmarañado el dibujo anterior se pretende con la siguiente figura, Fig. 4.15, esclarecer la mejora del parámetro g_{m3} en cuanto a linealización se refiere.

Primeramente se representa la linealidad aparecida desde un principio cuando sólo se cuenta con el amplificador principal H1 hasta ahora, con el amplificador de tres FETs prototipo simulado.

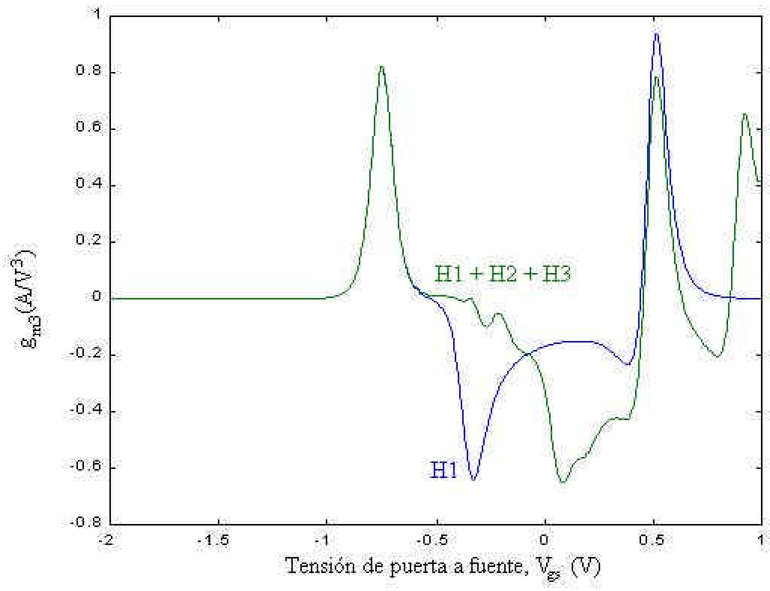


Fig. 4.15a. Evolución de la característica del parámetro g_{m3} .

Y en segundo lugar, se representa una ampliación de la zona en torno al punto de trabajo V_{gs} = -0.33 V. Así podemos comprobar las progresivas reducciones del parámetro g_{m3} por las contribuciones de los transistores auxiliares H2 y H3.

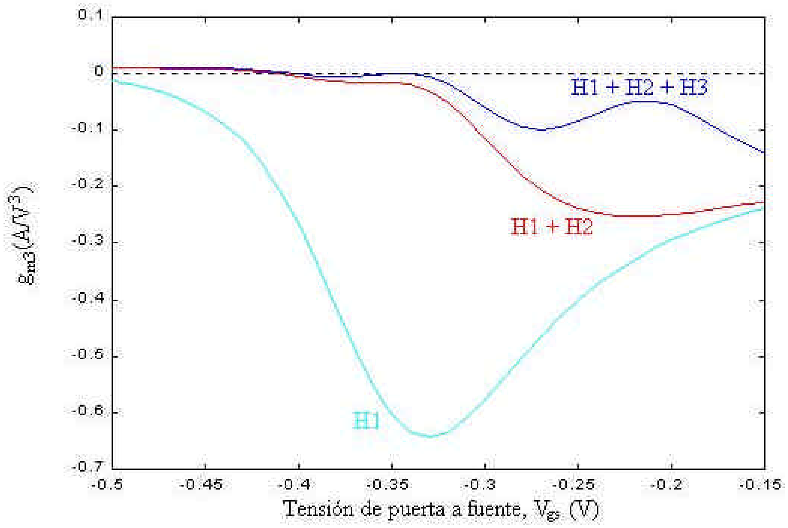


Fig. 4.15b. Ampliación de la curva g_{m3} para el amplificador principal, para el amplificador prototipo de dos HEMTs y para el amplificador prototipo de tres HEMTs en una zona alrededor del punto de trabajo V_{gs} = -0.33 V.

El experimento llevado a cabo de este amplificador prototipo de tres transistores, consta como ya se ha dicho del HEMT principal H1 de tamaño W1= 400 µm, del HEMT auxiliar H2 de tamaño W2= 300 µm y del HEMT auxiliar H3 de tamaño W3= 100 µm. La alimentación de puerta es el punto de trabajo V_{gs} = -0.33 V para los tres transistores, pero hay que tener en cuenta que para el transistor auxiliar H2 se toma una tensión de desplazamiento V_{B1} (en este caso, V_{B1} se elige como 0.41 V) y que para el transistor auxiliar H3 se toma una tensión de desplazamiento V_{B2} (y en este caso, V_{B2} se elige como 0.53 V). Para finalizar la tensión de drenador V_{ds} es de 3 V.

Para medir el comportamiento del amplificador de RF, se empleó la simulación por MATLAB a partir de la elaboración de distintos archivos para tal fin. La frecuencia de trabajo situada en f_0 es de 5.8 GHz. El IMD_3 se midió usando una señal de dos tonos.

Los resultados experimentales arrojados tras la simulación se exponen a continuación.

Tanto el amplificador de un solo HEMT como el de tres HEMTs muestran una ganancia semejante, 23.4342 dB y 23.6428 dB respectivamente a la tensiones de alimentación de puerta de V_{gs} (H_1) = -0.33 V, V_{gs} -V_{B1} (H_2) = -0.74 V y V_{gs} -V_{B2} (H_3) = -0.86 V. Si se compara también para el amplificador de dos transistores prototipo del apartado anterior se observa que la ganancia es prácticamente similar, 23.6376 dB.

La siguiente figura ilustra lo expuesto, dividiéndose en dos partes para el amplificador de un único transistor convencional y para el amplificador de tres transistores prototipo, Fig. 4.16a y Fig. 4.16b respectivamente.

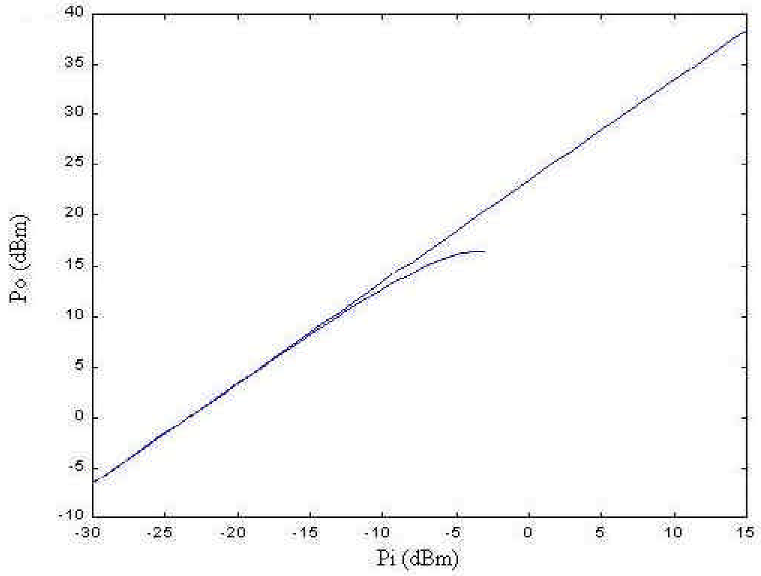


Fig. 4.16a. Potencia fundamental Po del amplificador principal H1

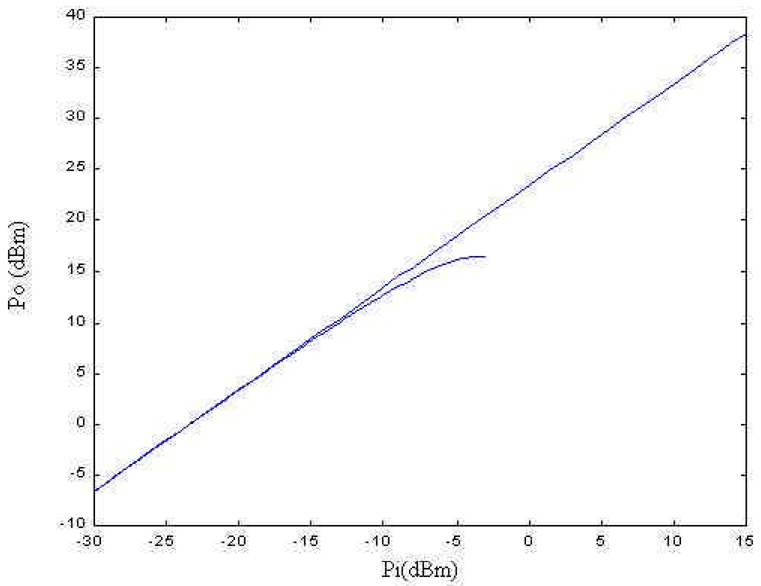


Fig. 4.16b. Potencia fundamental Po en dBm del amplificador prototipo de tres HEMTs H1+H2+H3

Para una mejor comparación y así constatar que la ganancia es prácticamente idéntica se adjunta la siguiente figura en la que en la misma representación se tienen las potencias de salida del amplificador principal y de los amplificadores prototipos.

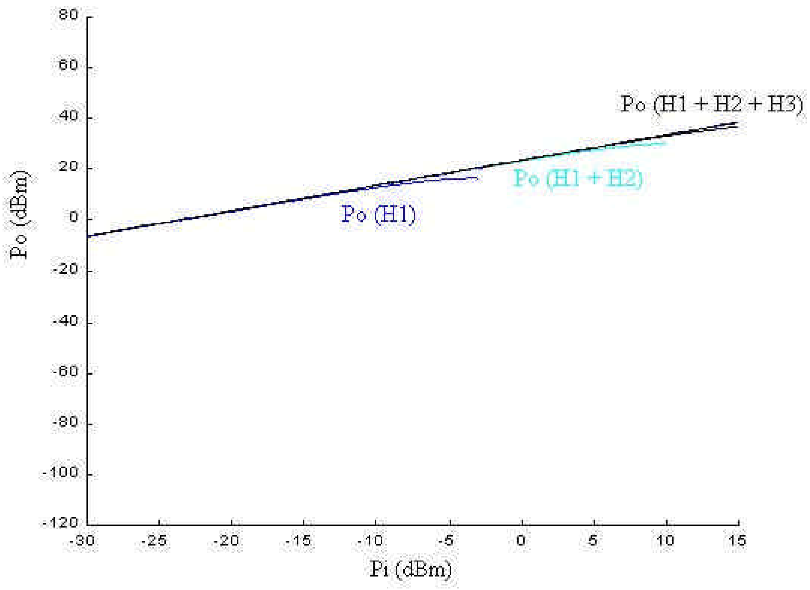


Fig. 4.16c. Comparación de la potencia de salida fundamental Po

El consumo de corriente es de 52.9 mA y 53.7 mA para el amplificador principal H1 y el propuesto de tres transistores, respectivamente. Si se compara también para el amplificador de dos FETs prototipo del apartado anterior se observa que el consumo de corriente es prácticamente semejante al prototipo de tres, 53.6 mA . Notar que el incremento de corriente debido a H2 y H3 es despreciable a causa de que ambos transistores son alimentados por debajo del umbral además de ser más pequeños que H1.

La Fig. 4.17 muestra cómo varía la potencia de distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 cuando la potencia de entrada Pi varía. Como se esperaba, IMD3 del amplificador prototipo de tres FETs se reduce significativamente con respecto al amplificador convencional en fuente común.

Si hacemos una ampliación de la gráfica anterior podemos especificar la mejora de reducción de IMD3, Fig. 4.18, y comprobar que IMD3 se reduce en 41.35 dB en el punto de trabajo V_{gs} = -0.33 V.

Por último en la Fig. 4.19 se muestra la evolución en la reducción de IMD3, primeramente a partir de la inclusión del HEMT auxiliar H2 (amplificador de dos transistores estudiado en el apartado anterior) y finalmente añadiendo el segundo HEMT auxiliar H3 en el amplificador prototipo de tres FETs motivo de estudio de este apartado del capítulo.

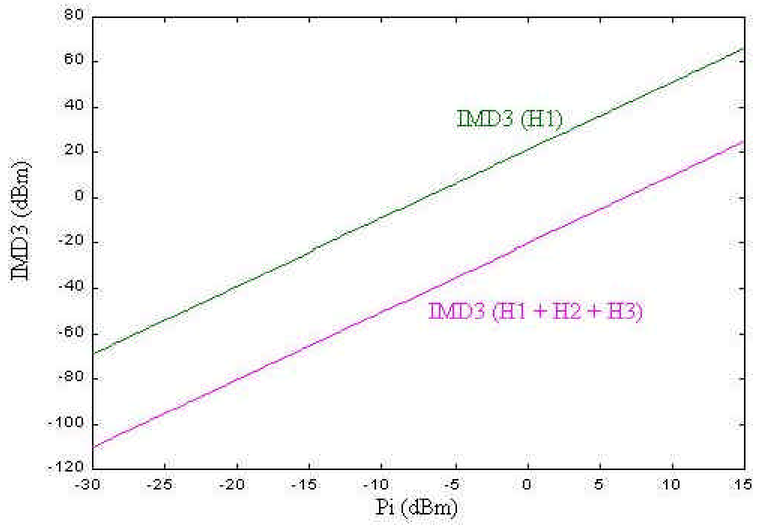


Fig. 4.17. Comparación de la potencia de intermodulación de tercer orden IMD3 entre el amplificador principal y el amplificador de tres FETs prototipo.

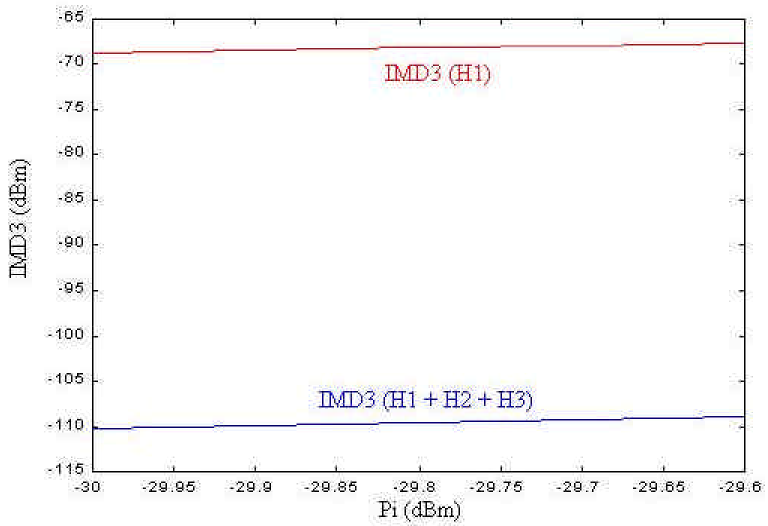


Fig. 4.18. Ampliación

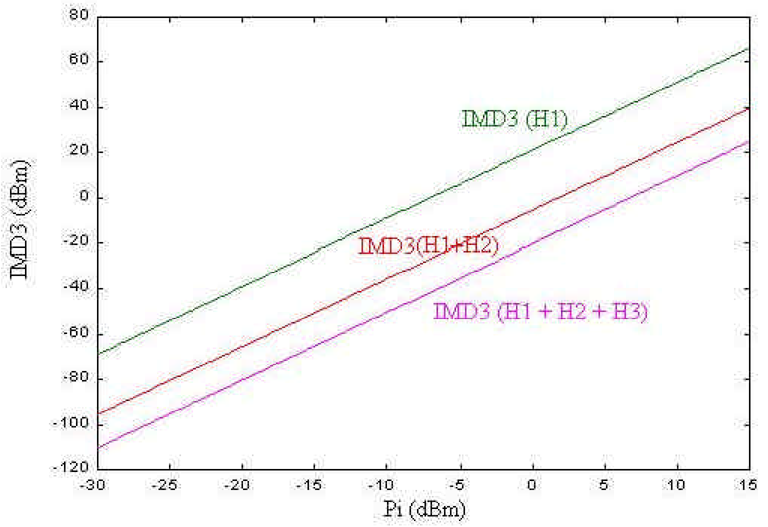


Fig. 4.19a. Comparación de la potencia de intermodulación de tercer orden IMD3 entre el amplificador principal, el amplificador de dos HEMTs prototipo y el amplificador de tres HEMTs prototipo.

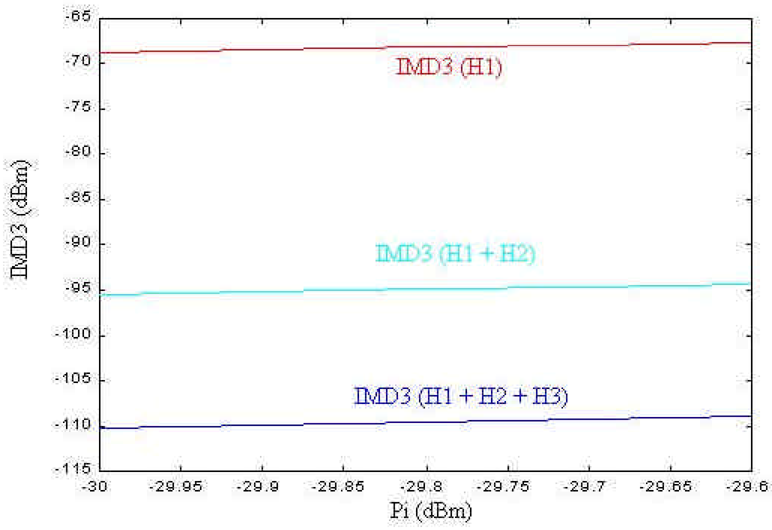


Fig. 4.19b. Ampliación

La reducción mostrada de IMD_3 provoca un aumento del punto de intercepto de tercer orden (IP_3), como se puede comprobar en la siguiente representación.

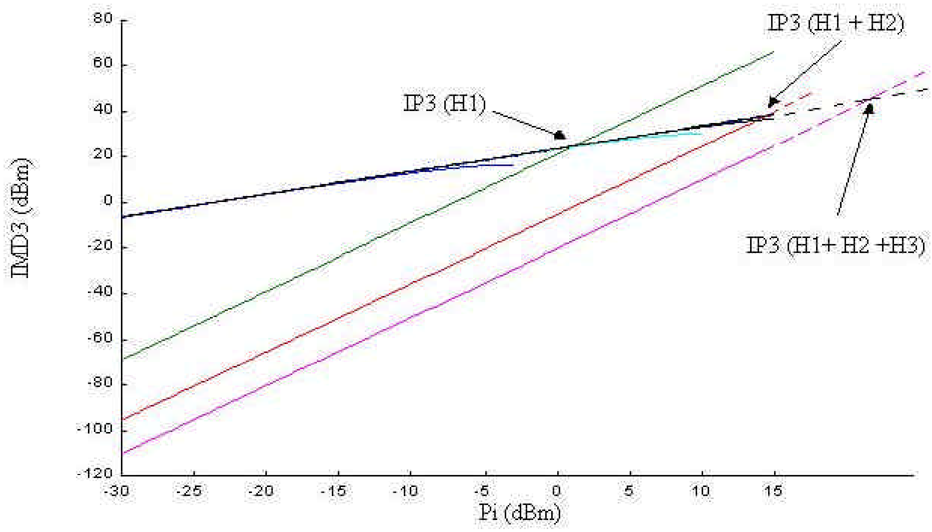


Fig. 4.20. Evolución de los puntos de intercepto de tercer orden IP3

La Fig. 4.20 muestra la potencia de salida fundamental y el IMD3 tanto del amplificador principal como de la topología propuesta para un amplificador de tres FETs cuando la potencia de entrada varía (y a la tensión de puerta de trabajo V_{gs}= - 0.33 v). Además se incluye a modo de comparación el amplificador prototipo de dos transistores que se estudió en el apartado anterior. Así podemos observar el crecimiento del punto de intercepto de tercer orden IP3 referido a la salida al encontrarse las respectivas rectas de potencia de salida fundamental Po y potencia de distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 del HEMT principal y de la suma del HEMT principal y los HEMTs auxiliares H2 y H3. En realidad se ha producido un incremento del punto de intercepto de tercer orden, IP3, de aproximadamente 21 dB a la tensión V_{gs}= - 0.33 v con respecto al amplificador primero H1 (o una mejora alrededor a 7 dB con respecto al amplificador de dos FETs del apartado anterior).

La siguiente figura muestra la característica del punto de intercepto de tercer orden IP3 referido a la salida cuando varía la tensión de puerta V_{gs} del amplificador de tres transistores. A continuación se compara la curva del punto de intercepto de tercer orden IP3 para el amplificador de un solo HEMT y el prototipo de amplificador linealizado que se estudia con el amplificador de tres HEMTs propuesto. En esta comparación se puede verificar que la linealización se produce al comprobarse que prácticamente la curva para la suma de H1, H2 y H3 se encuentra arriba de la característica para el HEMT principal H1 solo.

En particular, se puede confirmar que para el punto de trabajo (V_{gs} = - 0.33 v) se produce una gran diferencia con respecto al anterior resultado.

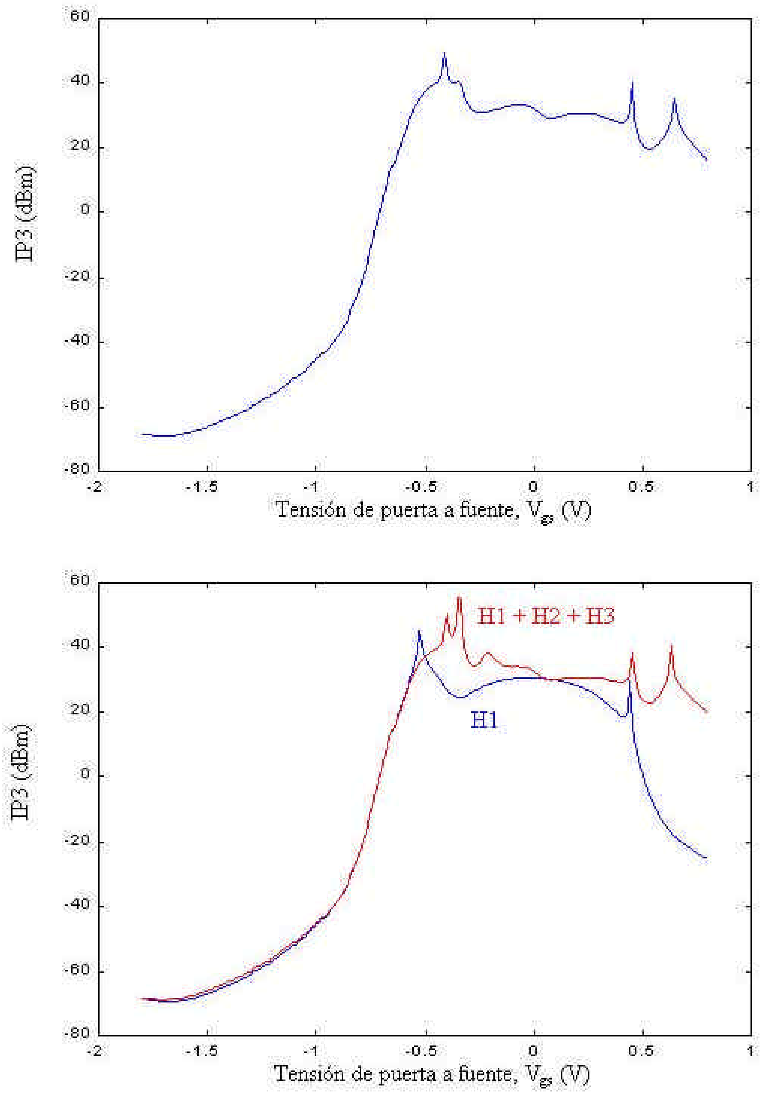


Fig. 4.21. IP3 del amplificador de tres FETs y comparación con el amplificador principal H1

Por continuar con la presentación seguida en el desarrollo de este apartado se incluye la evolución del punto de intercepto de tercer orden referido a la salida IP3, a modo de comparación, comenzando con el amplificador principal de una sola puerta H1, seguido del amplificador prototipo de dos HEMTs estudiado en el apartado anterior y concluyendo con el amplificador de tres HEMTs propuesto en el presente apartado.

Con esta figura se puede constatar que el punto de intercepto IP3 cada vez es más alto para el punto de trabajo V_{gs} = - 0.33 V, lo que implica una mayor linealidad en el comportamiento del amplificador, y por consiguiente, la validez de la técnica de linealización propuesta.

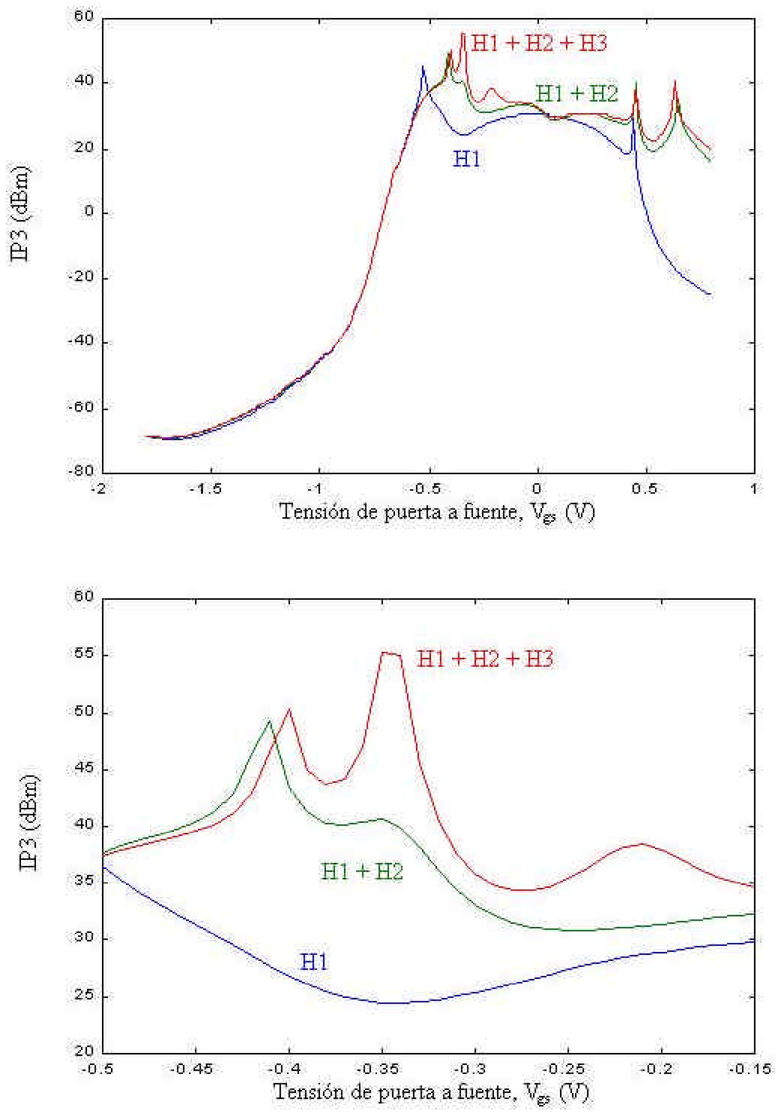


Fig. 4.22. Evolución de IP3

Para finalizar con este apartado se resume en la Tabla 4.2 la comparación de comportamientos entre el amplificador en fuente común de una sola puerta y el propuesto de tres FETs, que muestra que la mejora de linealidad se obtiene en el amplificador de tres transistores propuesto sin cambios apreciables en las otras características de RF.

TABLA 4.2
COMPORTAMIENTO RF DEL AMPLIFICADOR PRINCIPAL H1 EN FUENTE COMÚN Y EL AMPLIFICADOR LINEALIZADO PROPUESTO DE TRES TRANSISTORES H1+H2+H3

	Amplificador H1 en fuente común convencional	Amplificador linealizado H1+H2+H3
V_{ds} (V)	3	3
I_{ds} (mA)	52.9	53.7
Ganancia (dB) a f_0 = 5.8 GHz	23.4342	23.6428
IMD3 (dBm) a Pi = -30 dBm	-68.8008	-110.1545
IP3 referido a la salida (dBm) a V_{gs} = -0.33 V	24.5517	45.5415

IV. 5. Conclusiones

Un método nuevo y sencillo de linealización para transistores amplificadores de RF usando múltiples transistores es propuesto en este capítulo. Para demostrar su validez, se implementa un amplificador prototipo de dos FETs usando dos transistores y su comportamiento RF se compara con el del amplificador principal H1. A 5.8 GHz, la IMD3 de nuestro amplificador prototipo de dos transistores se suprime en 27 dB con similar ganancia, potencia de salida fundamental, y consumo de potencia dc, en comparación con el amplificador principal en fuente común convencional. En cuanto al amplificador prototipo de tres HEMTs, la potencia de distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 disminuye en 42 dB con respecto al amplificador principal, con semejantes características de ganancia, potencia de salida fundamental, y consumo de potencia dc. Luego es de esperar un mejor comportamiento no lineal con la optimización llevada a cabo a partir del uso de múltiples transistores.

Capítulo V

CONCLUSIONES Y NUEVAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

V. 1. Conclusiones

Este capítulo, y en concreto el presente apartado, reúne las conclusiones a las que se ha llegado en la elaboración del análisis llevado a cabo. Éstas se presentan de una manera breve y resumida para una rápida consulta, además de ordenadas conforme se iban oteniendo los resultados en el tiempo.

En la práctica las series de Volterra no nos capacita para hacer algo que no se pudiera hacer de otro modo. Sin embargo, un ataque directo a problemas de sistemas de comunicación a menudo conlleva enfrentarse con un álgebra muy extensa. La proposición de las series de Volterra tiene la virtud que la mayoría de tales problemas pueden ser tratados de un modo ordenado.

La mayoría de los sistemas que se encuentran son, en mayor o menor medida, sistemas no lineales y esto plantea serias dificultades analíticas. Una de las herramientas más útiles en el estudio de los sistemas no lineales es el análisis mediante Series de Volterra.

Así es relativamente sencillo la aplicación de las funciones de Volterra en el desarrollo del análisis de los circuitos no lineales en el dominio de la frecuencia, centrándose el método de análisis en series de potencia cuando se trata de sistemas no lineales sin memoria excitados ligeramente y en la región de pequeña señal.

En el interés de comprobar y medir la distorsión que se produce por efectos no lineales, y por lo general, en el análisis de la respuesta de los sistemas de comunicación y a la predicción del comportamiento de éstos en presencia de interferencia, ha habido una gran necesidad por modelos matemáticos generales que tuvieran en cuenta las respuestas no lineales en los sistemas de comunicación. El trabajo presenta tales modelos. Los métodos de descripción de sistemas no lineales desarrollados en este estudio han sido elaborados para ser aplicados a no linealidades ligeras donde el bajo orden de los kernels de Volterra pueden adecuadamente modelar el comportamiento del circuito. La teoría y resultados presentados en el capítulo correspondiente a las series de Volterra deberían servir para proporcionar un mejor entendimiento de las características de interferencia y sus medidas y poder así aplicarse a otros sistemas no lineal.

La exposición facilitada sobre el análisis de circuitos no lineales a partir de las series de Volterra, subraya técnicas que se emplean para obtener las funciones de transferencia no lineales (método de prueba o “entrada armónica”) o para determinar la respuesta de circuitos no lineales con no linealidades del tipo series de potencia (método de la corriente no lineal),en donde, en este último método, el problema de solucionar una ecuación diferencial no lineal se aproxima solucionando repetidamente las mismas ecuaciones diferenciales pero cada vez con una excitación no lineal diferente. También se explica el cálculo de las funciones de transferencia no lineales de complejas redes no lineales mediante un eficaz método de análisis de red, con la posibilidad de simplificar segmentando el circuito en etapas no lineales y conectarlas en cascada. Con estos métodos es posible caracterizar el comportamiento de cualquier sistema no lineal en las condiciones de pequeña señal y suaves no linealidades del tipo de series de potencia.

Además se han obtenido como resultados los términos principales que ayudan a aplicar el análisis del tipo series de Volterra a sistemas alimentados por ondas sinusoidales o ruido gaussiano.

Las fórmulas completas son series infinitas en las que el esfuerzo de calcular el término de orden n aumenta rápidamente cuando n aumenta. Afortunadamente, en el estudio de sistemas de comunicaciones a menudo es posible despreciar los términos de modulación (i.e., términos en las series de Volterra) de orden más alto que el segundo o tercer orden.

A continuación se han caracterizado los transistores con los que se ha trabajado. En un principio se presenta el análisis no lineal de un transistor *ED02AH FET*, un amplificador monolítico de microondas, a partir de las Series de Volterra.

En concreto se trata de un *HEMT (High Electron Mobility Transistor)* que son transistores equivalentes a FETs para cuando se está en las frecuencias de microondas. El transistor HEMT se usa cuando se trabaja en diseño *MMIC (Monolithic Microwave Integrated Circuits)*.

Antes solía usarse *Tubos de Onda Progresiva (TWA)* como amplificadores de microondas pero en la actualidad, en las aplicaciones de comunicaciones inalámbricas modernas, se vienen utilizando *amplificadores de estado sólido*.

Así se ha presentado el modelo no lineal del HEMT principal H1, centrándose el análisis no lineal en la fuente de corriente no lineal Ids como único elemento no lineal del modelo del transistor.

Se implementó el modelo en MATLAB de la fuente de corriente no lineal Ids en el fichero *inewon.m* de manera satisfactoria y se le extrajeron los parámetros de transconductancia de Ids.

A partir de aquí, ya una vez que se tiene modelada la fuente de corriente no lineal y se le ha extraído los parámetros de transconductancia, con ayuda de las series de Volterra comienza el estudio del FET principal (único transistor que se tiene hasta ahora) que proporciona los siguientes resultados:

1. El tamaño del transistor principal H1 es W = 400 μm
2. Alimentación de puerta $V_{gs}= -0.33$ V.
3. Presenta una ganancia a la frecuencia de operación f=5.8 GHz de 23.4342 dB.
4. La distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 a la potencia de entrada de Pi = – 30 dBm (o a la potencia de salida de Po = – 6.5658 dBm) es de –68.80 dBm.
5. El punto de intercepto de tercer orden referido a la salida para la tensión de puerta $V_{gs}= -0.33$ V es de IP3 = 24.55 dBm

Para la elección de la alimentación de puerta se ha tenido que llegar a un compromiso entre la ganancia del amplificador (reflejada en el parámetro g_{m1}) y la linealidad del mismo (dada por la característica del punto de intercepto de tercer orden IP3).

Seguidamente se estudió la implicación del tamaño W del transistor en los modelos de HEMTs. Así se constató una dependencia directa entre este parámetro y la corriente no lineal Ids que llevaba a que los FETs de mayor tamaño presentaran corrientes y ganancias más altas.

Este estudio obedecía a la necesidad de manejar una gran variedad de modelos de HEMTs para la aplicación de una sencilla técnica de linealización.

Así para ilustración de la técnica los transistores auxiliares H2 y H3, artífices de la linealización del HEMT principal H1, quedan caracterizados por (el estudio que conduce a la elección de estos valores puede seguirse en el capítulo IV que expone el principio de linealización):

para el primer transistor auxiliar H2:
1. El tamaño del HEMT H2 es W = 300 μm
2. La alimentación de puerta de H2 es V_{gs} (H2) = –0.74 V (V_{gs} – V_{B1}, V_{B1}= – 0.41 V)

para el segundo transistor auxiliar H3:
1. El tamaño del HEMT H3 es W = 100 μm
2. La alimentación de puerta de H3 es V_{gs} (H3) = –0.86 V (V_{gs} – V_{B2}, V_{B2}= – 0.86 V)

Con la ayuda de estos transistores, un método nuevo y sencillo de linealización para transistores amplificadores de RF usando múltiples transistores se ha desarrollado y demostrado su validez, a partir de la simulación de, primeramente un amplificador prototipo de dos FETs usando dos transistores y posteriormente de un amplificador de tres FETs. El comportamiento RF se compara en ambos casos con el del amplificador principal H1.

Para el caso del conjunto formado por el HEMT principal H1 y el auxiliar H2, a la frecuencia de operación de 5.8 GHz, la IMD3 de nuestro amplificador prototipo de dos transistores se suprime en 27 dB con similar ganancia, potencia de salida fundamental, y consumo de potencia dc, en comparación con el amplificador principal en fuente común convencional. En cuanto al punto de intercepto de tercer orden referido a la salida IP3 se tiene una mejora de casi 14 dB. Los resultados son los siguientes:

1. El conjunto presenta una ganancia a la frecuencia de operación f=5.8 GHz de 23.6376 dB.
2. La distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 a la potencia de entrada de Pi = – 30 dBm es de – 95.42 dBm
3. El punto de intercepto de tercer orden referido a la salida para la tensión de puerta V_{gs}= – 0.33 V es de IP3 = 38.14 dBm

Para el amplificador prototipo de tres HEMTs, la potencia de distorsión de intermodulación de tercer orden IMD3 disminuye en 42 dB con respecto al amplificador principal, con semejantes características de ganancia, potencia de salida fundamental, y consumo de potencia dc. Respecto al IP3 se mejora en 21 dB. Los resultados son:

1. El conjunto de tres FETs a f=5.8 GHz presenta una ganancia G = 23.6428 dB
2. Para Pi= – 30 dBm se tiene una IMD3= –110.15 dBm
3. El punto de intercepto de tercer orden referido a la salida para la tensión de puerta V_{gs}= – 0.33 V es de IP3 = 45.54 dBm

Como se puede comprobar el conjunto formado por los tres HEMTs supera en linealidad al de dos, pero añadir demasiados transistores puede dar como resultado peores características debido a otros efectos, tales como las capacidades parásitas además de que las pérdidas se incrementan en los transistores auxiliares.

V. 2. Nuevas Líneas de Investigación

En este apartado se exponen unas posibles nuevas líneas de investigación:

- *Simulaciones*

  Las simulaciones que se han realizado para el presente estudio se han llevado a cabo con el programa MATLAB. Sin embargo se puede disponer de mejores simuladores que arrojen mejores datos y más detallados. No obstante los resultados que se han alcanzado pueden ser un muy buen primer punto de partida en un mejor programa de simulación.

- *Construcción*

  Las simulaciones dan una idea de la realidad, cuanto mejor sea la herramienta de simulación más se ajustarán los datos arrojados de la simulación al comportamiento del dispositivo. Sin embargo, jamás se llegará a la precisión de medir en el propio dispositivo. Por eso una posible línea de investigación es la construcción del HEMT monolítico para mediciones.

- *Implementación*

  Tras las simulaciones en un principio y la construcción del HEMT monolítico para las mediciones después, se tendrá depurado el modelo y se podrá optimizar el comportamiento del transistor. Así sólo quedaría el montaje del HEMT monolítico construído en un amplificador.

REFERENCIAS

[1] J. J. Bussgang, L. Ehrman and J. W. Graham, "Analysis of nonlinear systems with multiple inputs," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1088-1119, August 1974

[2] J. O'Donnell, "Communication receivers interference modeling: Nonlinear transfer functions from circuit analysis: Strong excitation," in *Proc. 1972 IEEE Conf. on Communications*, June 1972

[3] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integral Differential Equations.* New York: Dover, 1959, p. 4.

[4] N. Wiener, "Response of a nonlinear device to noise," M.I.T. Radiation Lab., Rep. V-16S, Apr. 6, 1942

[5] N. Wiener, *Nonlinear Problems in Random Theory.* New York Technology Press, 1958

[6] M. B. Brilliant, "Theory of the analysis of nonlinear systems," M.I.T. Research Lab. Electron., Tech. Rep. 345, 1958

[7] D. A. George, "Continuous nonlinear systems," M.I.T. Res. Lab. Electron., Tech. Rep. 355, July 24, 1959

[8] G. D. Zames, "Nonlinear operators for system analysis," M.I.T. Res. Lab. Electron., Tech. Rep. 370, Aug. 25, 1960

[9] R. B. Parente, "Functional analysis of systems characterized by nonlinear differential equations," M.I.T. Res. Lab. Electron., Tech. Rep. 444, July 15, 1966

[10] A. G. Bose, "A theory of nonlinear systems," M.I.T. Res. Lab. Electron., Tech. Rep. 309, May 15, 1956

[11] S. Narayanan, "Transistor distortion analysis using Volterra series representation," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 46, p. 991, May-June 1967

[12] R. E. Maurer and S. Narayanan, "Noise loading analysis of third-order nonlinear system with memory," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-16, pp. 701-712, Oct. 1968.

[13] S. Narayanan, "Intermodulation distortion of cascaded transistors," *IEEE J. Solid State Circuits*, vol. SC-4, pp. 97-106, June 1969

[14] —— , “Application of Volterra series to intermodulation distortion analysis of transistor feedback amplifiers,” *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-17, pp. 518-527, Nov. 1970

[15] H. C. Poon, “Modeling of bipolar transistor using integral charge control model with application to third-order distortion studies,” *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. ED-19, pp. 719-731, June 1972.

[16] Y. L. Kuo and J. D. Witkowski, “Computer-aided distortion analysis of bipolar transistor circuits,” Bell Telephone Labs., Inc. North Andover, Mass., 1972

[17] R. Meyer, M. J. Shensa, and R. Eschenbach, “Cross modulation and intermodulation in amplifiers at high frecuencies,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-7, pp. 16-23, Feb. 1972.

[18] E. Bedrosian and S. O. Rice, “The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and Gaussian inputs”, *Proc. IEEE*, vol. 59, pp. 1688-1707, December 1971

[19] Signatron, Inc., Tech. Rep. 3, Contract F30602-73-C-0193, Rome Air Develop. Cen., Rome, N.Y.

[20] A. Mircea and H. Sinnreich, “Distortion noise in frequency-dependent nonlinear networks,” *Proc. Inst. Elec. Eng.*, vol. 116, 1969, pp. 1644-1648

[21] E. Bedrosian and S.O. Rice, “Distortion and crosstalk of linearly filtered angle-modulated signals,” *Proc. IEEE*, vol. 56, Jan. 1968, pp. 2-13

[22] S. O. Rice, “Second and third order modulation terms in the distortion produced when noise modulated FM waves are filtered,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 48, pp. 87-142.

[23] A. Mircea, carta personal a E. Bedrosian and S.O Rice.

[24] http://duero.us.es/ommic/ED02AH/ELEMENTS/FETLS.HTM

[25] N. Nojima and T. Konno, “Cuber predistortion linearizer in 800 MHz band land mobile telephone system,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-34, no. 4, pp. 169-177, 1985

[26] H. Seidel, “A microwave feedforward experiments”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 2879-2916, 1971

[27] M. Minowa, *et al.*, "Backoff improvement of an 800 MHz GaAs FET amplifier for a QPSK transmitter using adaptative nonlinear distortion canceller," in *IEEE Veh. Technol. Conf.*, 1990, pp. 542-546.

[28] S. Tanaka, F. Behbahani, and A. A. Abidi, "A linearization technique for CMOS RF power amplifiers," in *IEEE Symp. VLSI Circuits Dig. Technical Papers*, 1997, pp. 93-94.

[29] Y. Yang and B. Kim, "A new linear amplifier using low-frequency second-order intermodulation component feedforwarding," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 9, no. 10, pp. 419-421, 1999.

[30] B. Kim, J.-S. Ko and K. Lee, "A new linearization technique for MOSFET RF amplifier using multiple gated transistors," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 10, no. 9, pp. 371-373, September 2000

[31] N. B. de Carvalho and J. C. Pedro, "Large- and small-signal IMD Behavior of microwave power amplifiers," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, pp. 2364-2374, Dec. 1999.