

Capítulo 5:

INTRODUCCIÓN A LA FASE EXPERIMENTAL

5.1. INTRODUCCIÓN.

A partir de este capítulo nos centraremos en la parte experimental del presente Proyecto Fin de Carrera. Como ya se ha anticipado anteriormente, en esta fase llevaremos a cabo un estudio comparativo del “nuevo” método de estimación espectral de potencia llamado *método de Thomson* con otros procedimientos clásicos de estimación no paramétricos, todo ello tanto a nivel cualitativo como cuantitativo.

Para ello, previamente ha sido necesario implementar en Matlab (en concreto, en “Matlab 6 Release 12”) las funciones correspondientes a cada uno de dichos métodos.

Este estudio se realizará partiendo de varias secuencias o vectores de señal: medidas de la altura de las olas oceánicas en función del tiempo y según dos calibradores distintos (por cable o por infrarrojo)¹, ...

En este capítulo describiremos los parámetros que se tendrán en cuenta para llevar a cabo la comparación entre métodos así como los algoritmos, secuencias de ejecución, ... que se siguen para la realización del estudio.

Se recuerdan también las características básicas de cada uno de los métodos que tratamos, centrándonos en el sentido más práctico que interesa a nuestra aplicación. Así, mostramos brevemente un esquema acerca de los pasos que contempla la función de Matlab para cada uno de estos métodos de estima.

Esta parte práctica del Proyecto contemplará numerosas pruebas con cada método y para cada señal, modificando los distintos parámetros pero siempre buscando la referencia y la relación con el procedimiento básico para nosotros, aquél objeto de nuestro estudio: *el método de estima del espectro de potencia ‘multitaper’ o método de Thomson*.

¹ Estos datos fueron obtenidos por A. Jessup, Laboratorio de Física Aplicada, Universidad de Washington.

5.2. EL MÉTODO DE THOMSON O MÉTODO ‘MULTITAPER’.

5.2.1. Descripción básica del método.

‘Taper’ o ‘tapering’ es otro nombre para la operación de enventanado en el dominio del tiempo. En general, las estimaciones del espectro de densidad de potencia parten de unos datos del tipo que sigue: $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$. Es decir, los datos de partida se obtienen por truncamiento de un proceso de duración infinita $x(n)$ con una ventana rectangular o ‘taper’.

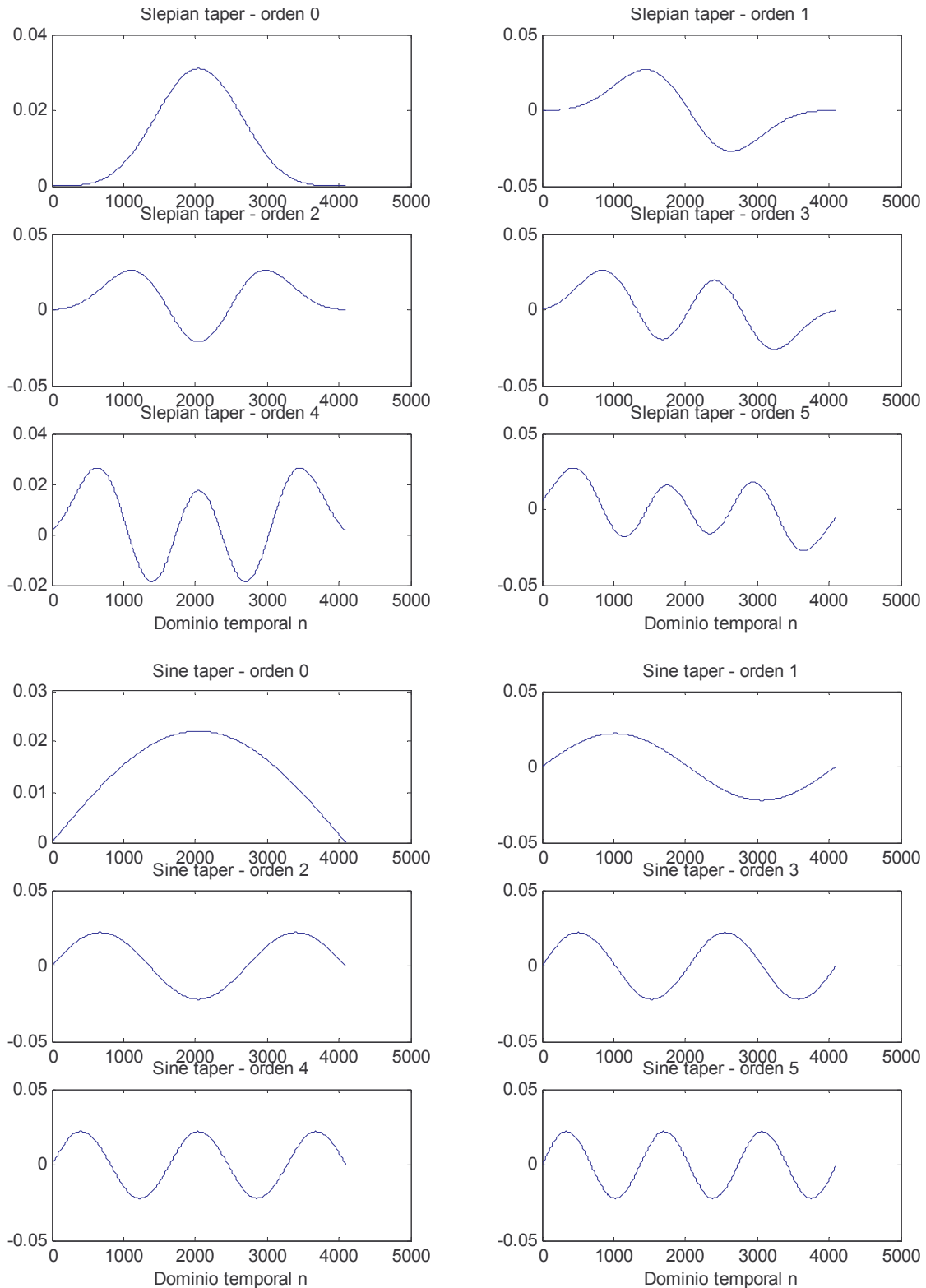
En el caso del método de estima del periodograma único el sesgo y las propiedades de varianza son totalmente inaceptables. Ello provocó el desarrollo de otros métodos de estima que logran reducir tanto el sesgo como la varianza. Este desarrollo se basó en suavizar las estimas en el dominio de la frecuencia (utilizando ventanas de retraso) o promediando los periodogramas calculados sobre varios segmentos cortos (ventanas de datos). Como estas funciones de enventanado (distintas a la rectangular) estrechan normalmente la respuesta a ambos lados del registro de datos, las ventanas pasan a ser denominadas ‘tapers’.

Este método nace en 1982 de manos de David J. Thomson. Éste sugirió una aproximación alternativa para obtener un estimador espectral “directo”: ahora, en lugar de utilizar una única ventana de datos rectangular como en la estimación basada en el periodograma, se emplean varias ‘tapers’ sobre el mismo registro de datos para calcular varios periodogramas modificados. Estos periodogramas modificados son luego promediados (con o sin peso) para obtener la estimación espectral ‘multitaper’.

Ya vimos que la premisa central de esta aproximación ‘multitaper’ es que, si las ‘tapers’ de datos se diseñan adecuadamente, es decir, si fuesen funciones ortogonales entonces, bajo condiciones moderadas, las estimaciones espectrales serían independientes unas de otras para todas las frecuencias. De este modo, el promediado permitiría reducir la varianza mientras que un diseño adecuado de las ventanas nos ayudaría a bajar el sesgo y las pérdidas de resolución.

Thomson propuso como ventanas apropiadas las basadas en las “discrete prolate spheroidal sequences” (DPSS). Éstas forman una base ortogonal y son también conocidas con el nombre de ‘Slepian tapers’. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, podría considerarse cualquier otro conjunto ortogonal cuyas propiedades fuesen interesantes, como el caso de las ‘sine tapers’ que proponen Riedel y Sidorenko.

A continuación podemos ver una representación de los conjuntos de ‘tapers’ que se usan más comúnmente en este método de estima, es decir, de las DPSS y las ‘tapers’ sinusoidales. Se han considerado de la misma longitud que las que se emplean en los próximos capítulos, es decir, de 4096 muestras. Se presentan en cada caso seis ‘tapers’, desde la de orden 0 hasta la de orden 5:



Como podemos apreciar en las figuras anteriores, ambos tipos de ‘tapers’ toman valores tanto negativos como positivos por encima del orden 0. La ‘taper’ de orden cero atenúa fuertemente los valores de datos en $n = 0$ y $n = L$.

Si analizáramos estas mismas ventanas en el dominio de la frecuencia, podríamos observar que conforme el orden aumenta en las ‘Slepian tapers’, la anchura del lóbulo principal y la atenuación de los lóbulos laterales disminuye. Por otro lado, ya vimos que cuando el espectro cambia lentamente, entonces las ‘sine tapers’ pueden reducir la varianza. Estas ‘sine tapers’ tienen un lóbulo principal más estrecho que las ‘Slepian tapers’ aunque también es verdad que los lóbulos laterales son mucho mayores. De esta forma, consiguen un menor sesgo o desviación debido al suavizado del lóbulo principal pero a consecuencia de suprimir los lóbulos laterales. Esto es aceptable si, como se ha dicho, el espectro varía lentamente.

Por último, como breve comparación entre ambos tipos de ‘tapers’, recordemos que:

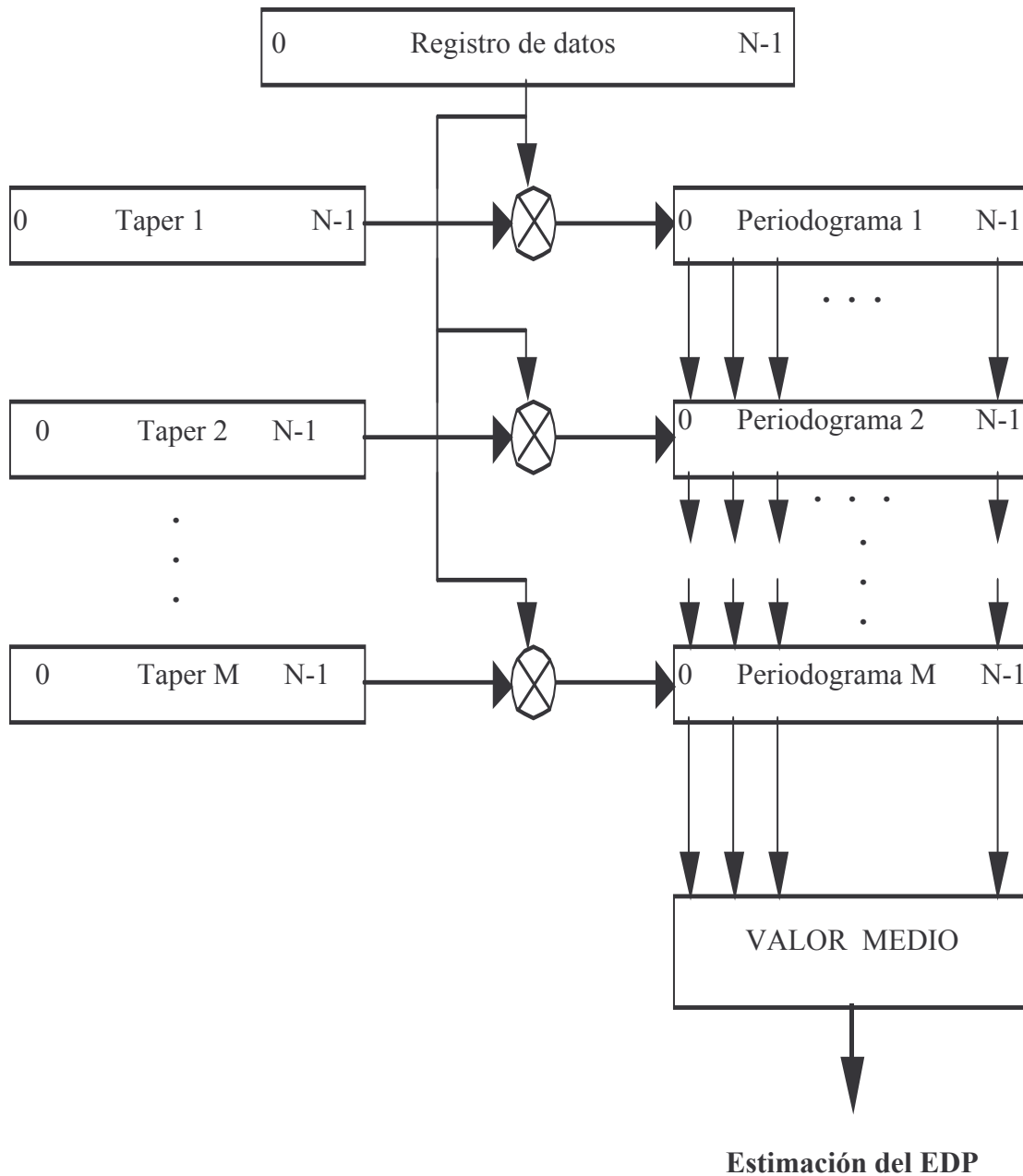
- ‘sine tapers’ frente a ‘Slepian o dpss tapers’:
 - un parámetro (K) frente a 2 parámetros (NW y K).
 - protección moderada contra el derrame frente a una protección ajustable de las ‘dpss tapers’.
 - expresión fácil de computar frente a la necesidad de software para computar las dpss

Por todo ello, la estimación ‘multitaper’ es considerada como una técnica en la que las ‘tapers’ de mayor orden capturan información que estaba perdida cuando sólo se usaba la ‘taper’ de orden cero.

El método ‘multitaper’ es diferente en esencia de todos los demás en el sentido de que no busca producir un espectro altamente suavizado.

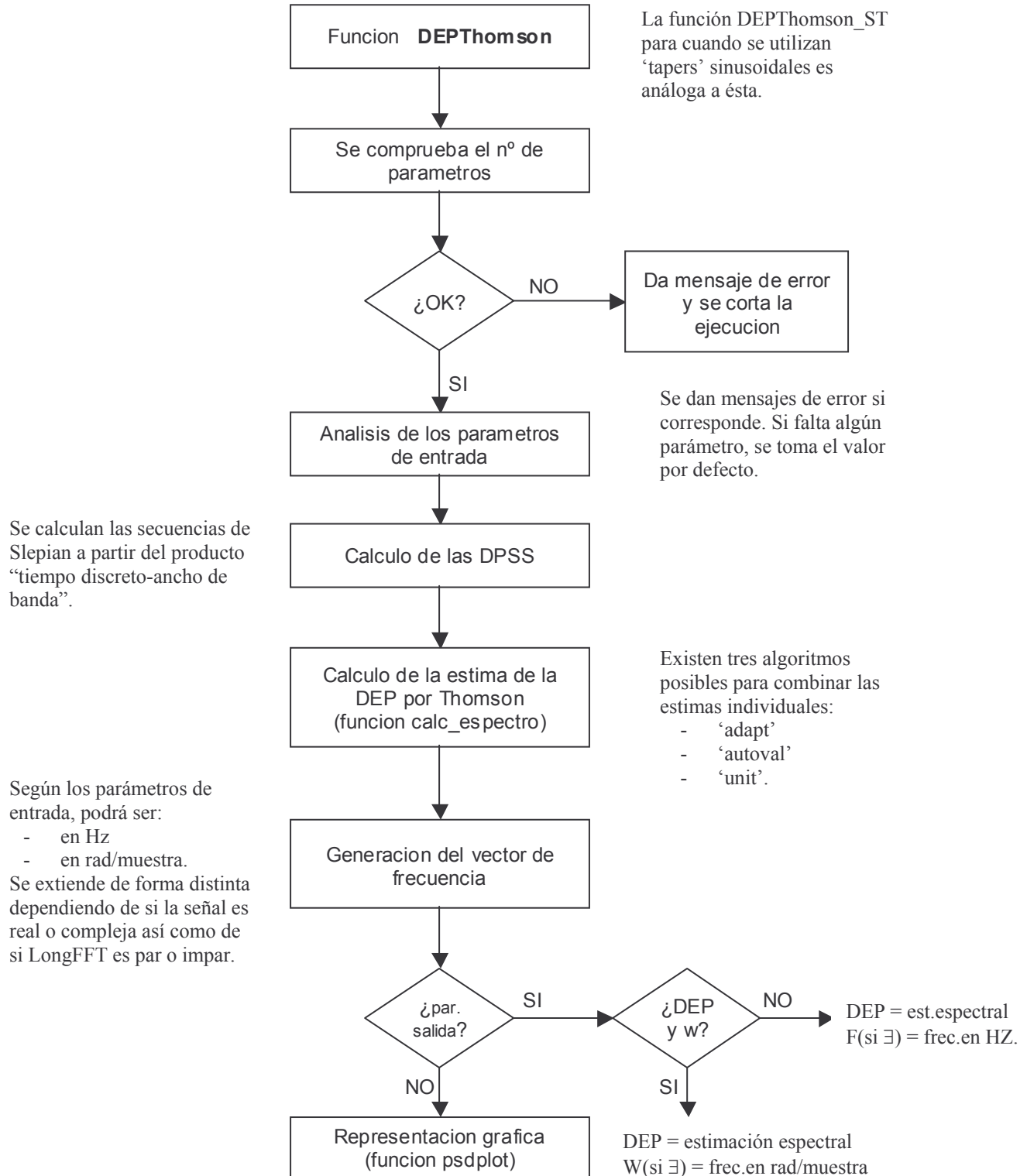
5.2.2. Descripción gráfica del método.

El siguiente dibujo o gráfico nos muestra de forma rápida y clara los fundamentos de la aproximación ‘multitaper’. Es interesante y resulta de utilidad en cuanto contribuye a simplificar la comprensión del método.



5.2.3. Algoritmo.

Describimos a continuación y de forma breve el algoritmo o función en Matlab con el que implementamos el método de Thomson. Se utiliza para ello un diagrama de flujo:



5.3. EL MÉTODO DE BARTLETT: PROMEDIADO DE PERIODOGRAMAS.

5.3.1. Descripción básica del método.

En general, la varianza de la suma de K variables libres obtenidas al azar es 1/K veces la de cada variable individual. Así, para reducir la varianza en el periodograma, recordemos que el método de Bartlett implica tres pasos:

- I. Se subdivide la secuencia de N puntos en K segmentos no solapados de longitud M:

$$x_i(n) = x(n + iM) \quad i=0, 1, \dots, K-1 \quad n=0, 1, \dots, M-1$$

- II. Para cada segmento calculamos el periodograma:

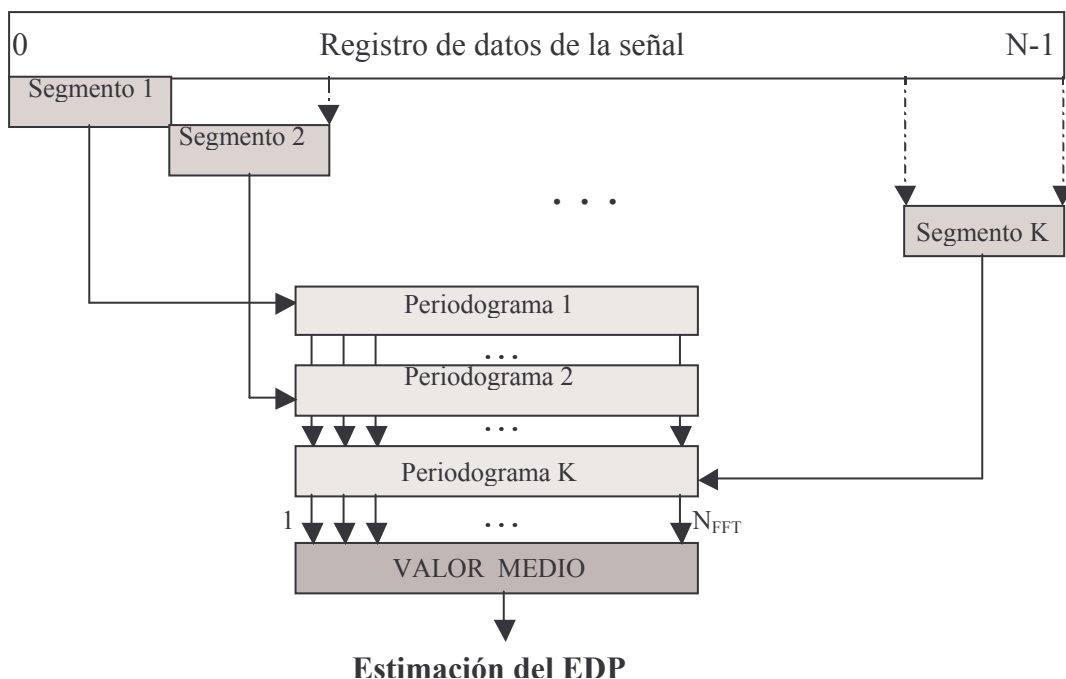
$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \quad i=0, 1, \dots, K-1$$

- III. Finalmente promediamos los periodogramas para los K segmentos y así obtener la estima de la potencia espectral de Bartlett:

$$P_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

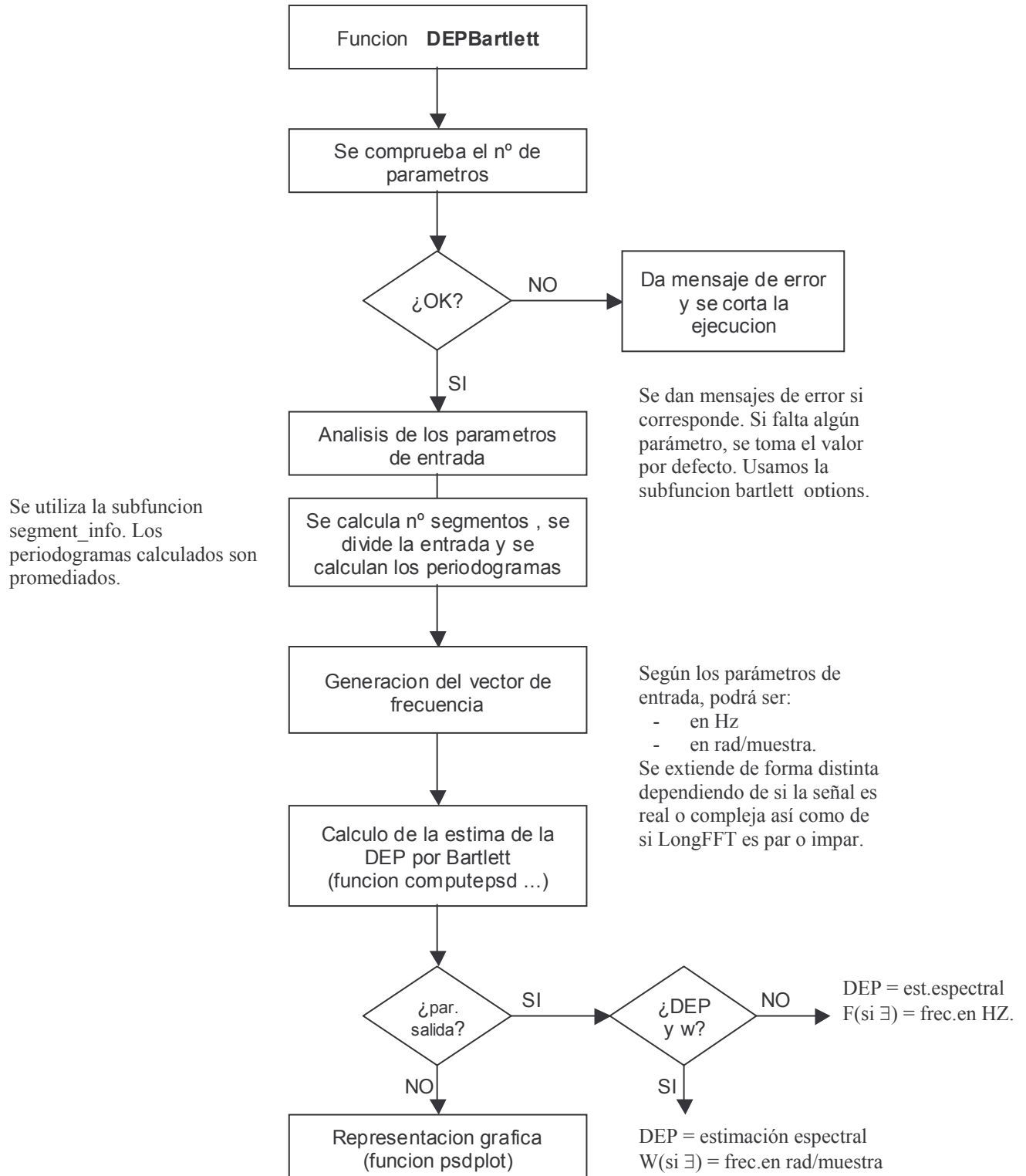
5.3.2. Descripción gráfica del método.

A través del siguiente gráfico podemos observar con claridad cómo se ‘construye’ la estima de Bartlett de la densidad espectral de potencia:



5.3.3. Algoritmo.

Veamos ahora y de forma breve el algoritmo o función en Matlab con el que estimamos la densidad espectral según el método de Bartlett. Para ello nos apoyamos en un diagrama de flujo:



5.4. EL MÉTODO DE WELCH: PROMEDIADO DE PERIODOGRAMAS MODIFICADOS.

5.4.1. Descripción básica del método.

Como ya mencionamos anteriormente, en general, la varianza de la suma de K variables libres obtenidas al azar es 1/K veces la de cada variable individual. Con el objeto de reducir aún más la varianza del periodograma, el método de Welch proponía dos modificaciones al de Bartlett:

- I. Permitted solapamiento en los segmentos de datos:

$$x_i(n) = x(n+iD) \quad n=0,1,\dots,M-1 \quad i=0,1,\dots,L-1$$

- II. Enventanar los segmentos de datos antes de calcular el periodograma, obteniéndose el periodograma “modificado” siguiente:

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i(n) w(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 \quad i=0,1,\dots,L-1$$

con $U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$, el factor de normalización para la potencia de la función ventana.

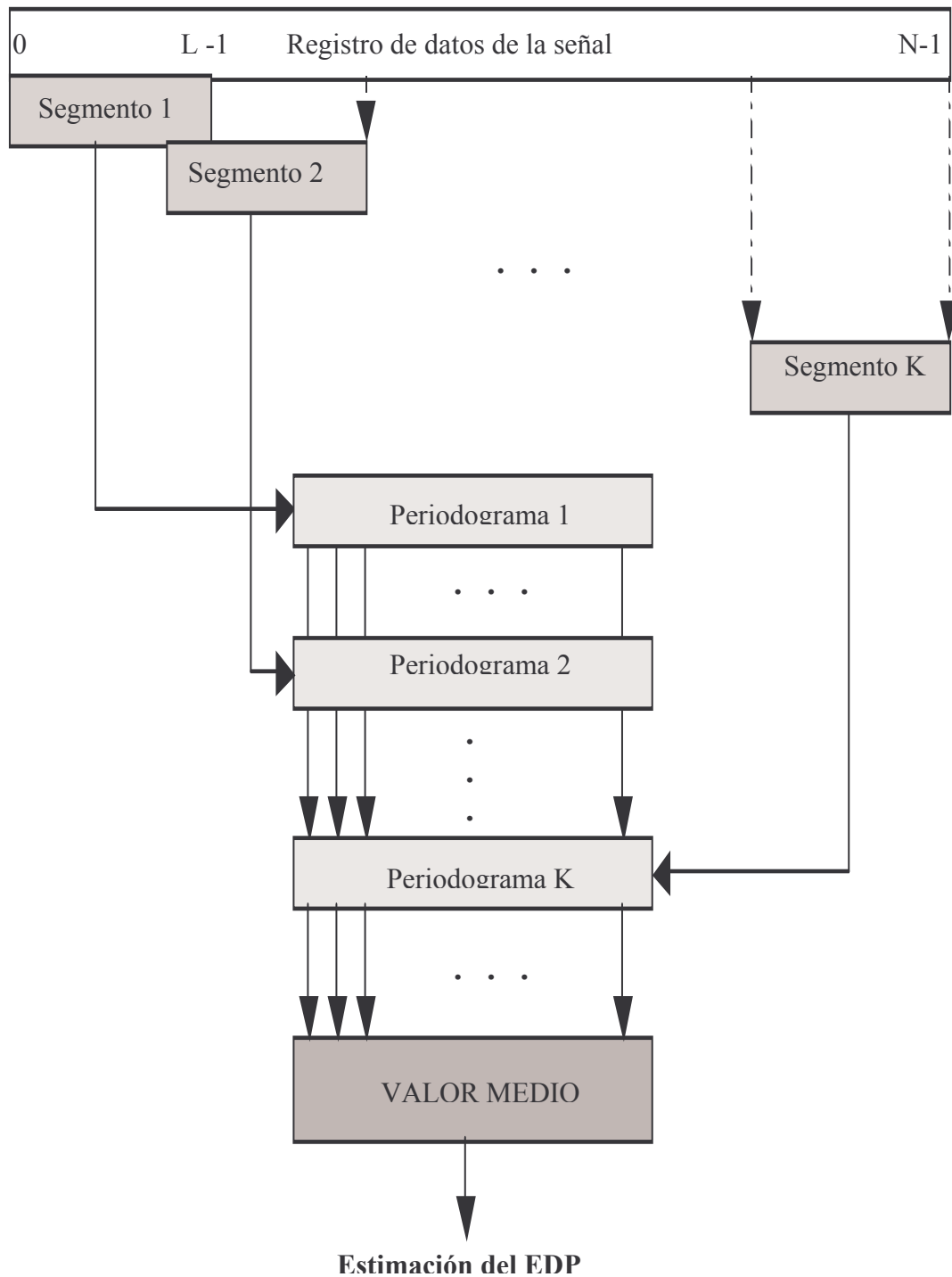
La estima de Welch de la potencia espectral es el promedio de estos periodogramas modificados:

$$P_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)$$

Es posible comprobar que, cuanto mayor es el grado de solapamiento, mayor es la carga computacional que conlleva este método. Así, un solape del 50 %, implica el doble de cálculos de FFTs.

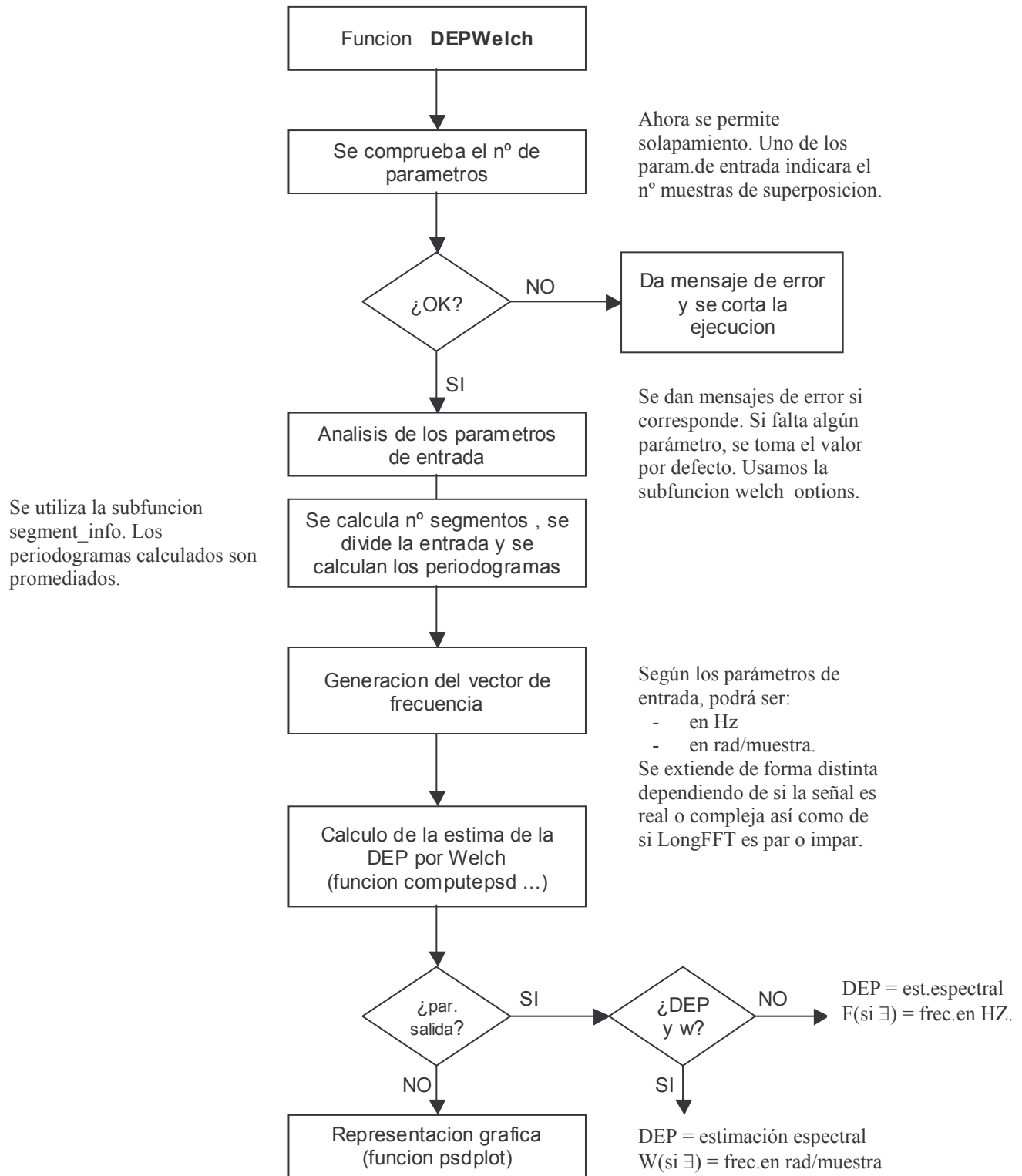
5.4.2. Descripción gráfica del método.

La representación gráfica que sigue ilustra bastante bien los fundamentos en que se basa la estima de Welch de la densidad espectral de potencia:



5.4.3. Algoritmo.

A continuación se presenta de forma breve el algoritmo o función en Matlab con el que estimamos la densidad espectral según el método de Welch. De nuevo nos apoyamos en un diagrama de flujo:



5.5. EL MÉTODO DE BLACKMAN-TUKEY: SUAVIZADO DE PERIODOGRAMAS.

5.5.1. Descripción básica del método.

Blackman y Tukey introdujeron una forma de suavizar el periodograma a través de operaciones en la secuencia de autocorrelación estimada. Ellos propusieron y analizaron el método en que primero se enventana la secuencia de autocorrelación y después se calcula su transformada de Fourier para producir la estima de la potencia espectral.

La estima de Blackman y Tukey es:

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(m)w(m)e^{-j2\pi fm}$$

donde la función ventana $w(n)$ tiene longitud $2M-1$ y es cero para $|m| \geq M$.

En el dominio frecuencial, la expresión anterior es equivalente a una convolución:

$$P_{xx}^{BT}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} P_{xx}(\alpha)W(f - \alpha)d\alpha$$

donde $P_{xx}(f)$ es el periodograma.

El truncar la función ventana (también conocida como ventana de correlación o de retraso) implicaría la aparición de rizados en su espectro debido al efecto de Gibbs. Para evitar este problema, se utilizan ventanas de autocorrelación finitas.

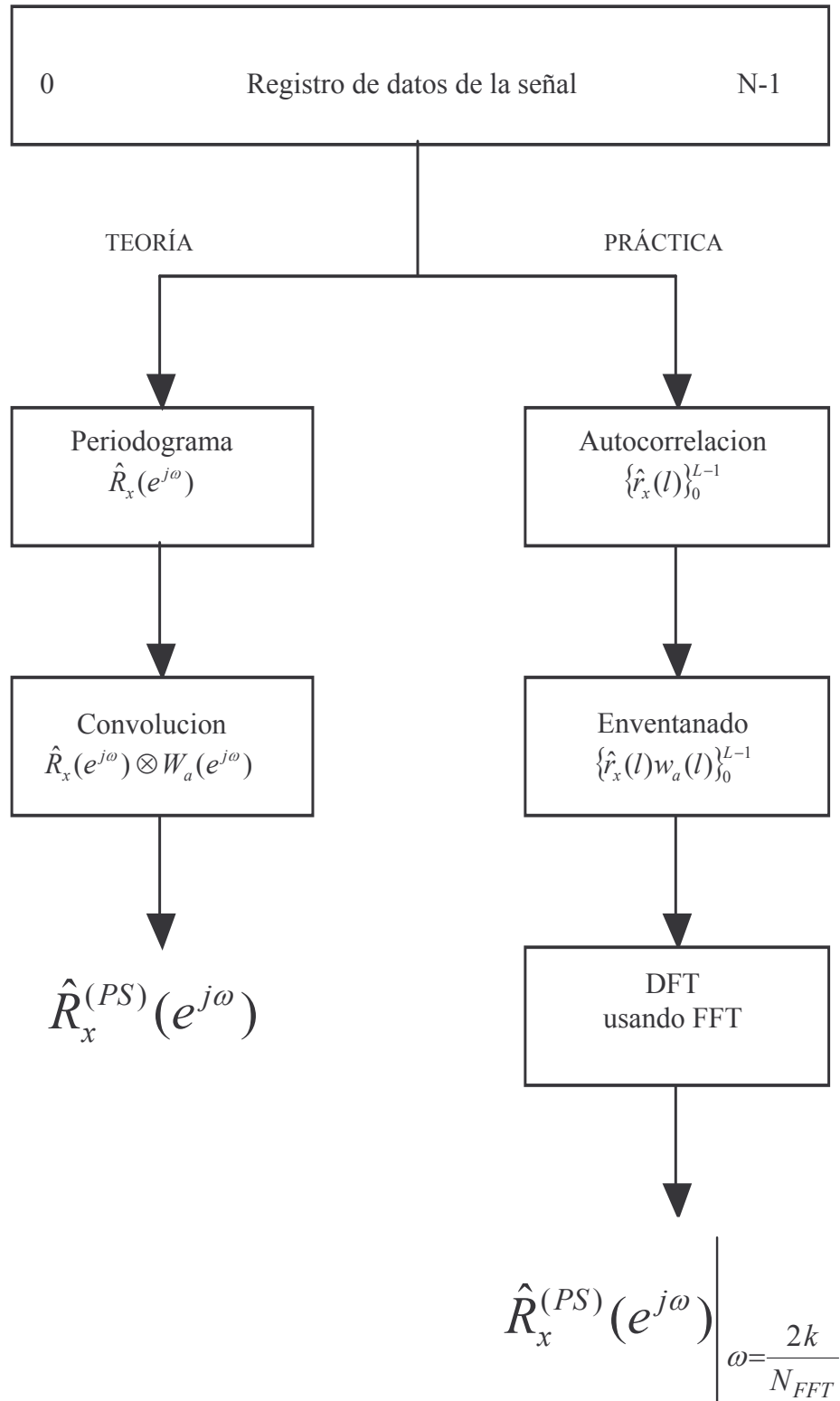
Se desprende claramente que el efecto de enventanar la autocorrelación es equivalente a un suavizado de la estima del periodograma, decreciendo así la varianza de la estima a expensas de la reducción en resolución.

La secuencia $w(n)$ debe ser simétrica (par) con respecto a $m=0$ para asegurar que la estima de la potencia espectral es real.

La resolución del estimador de Blackman-Tukey viene dada por la duración $2L-1$ de la ventana de correlación. Para la mayoría de las ventanas de correlación, la resolución es medida por el ancho de banda de 3 dB del lóbulo principal.

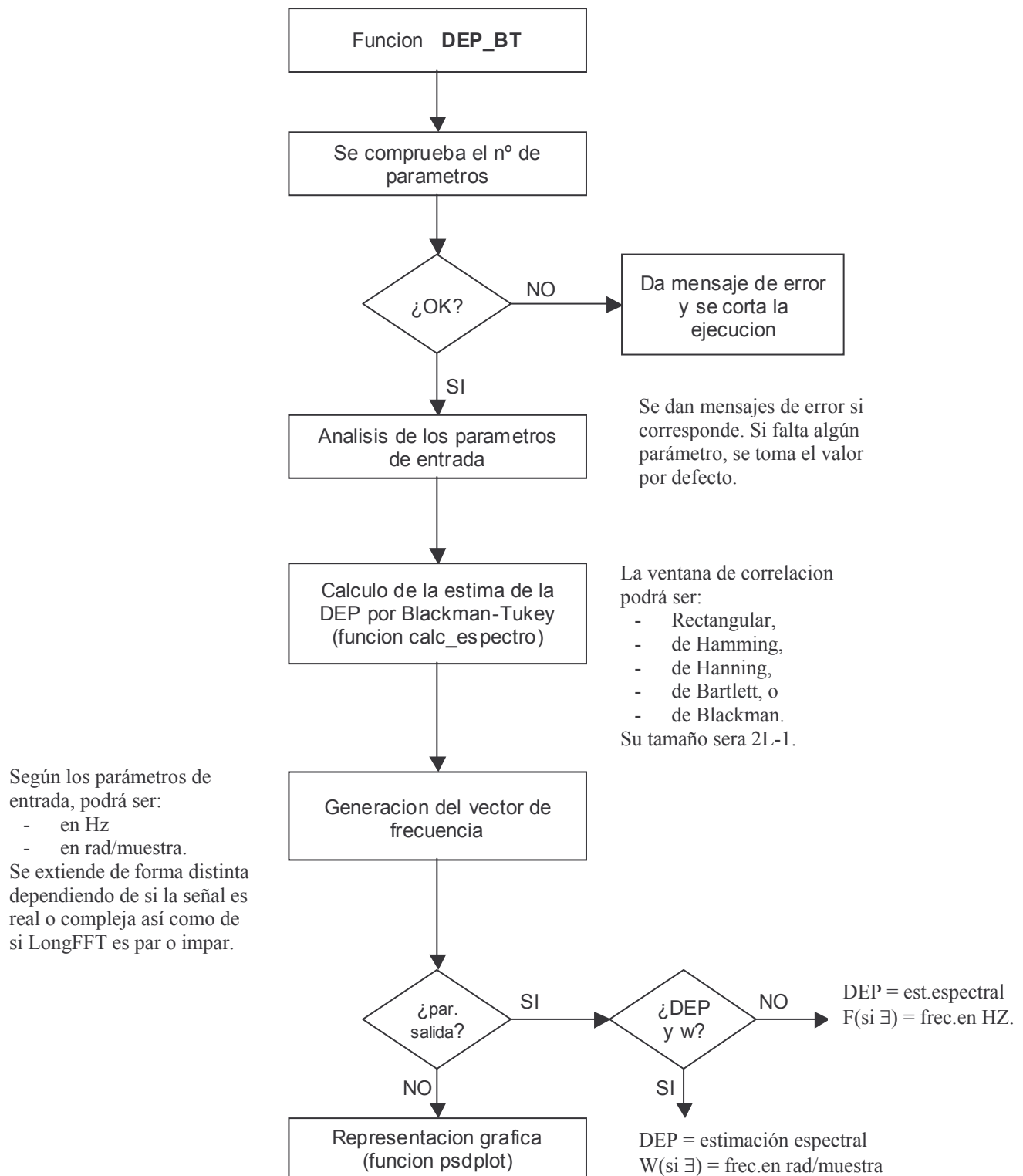
5.5.2. Descripción gráfica del método.

En el siguiente gráfico se establece una comparación entre el cómputo teórico de la estima de Blackman-Tukey y la forma en que su cálculo se lleva a cabo en la práctica.



5.5.3. Algoritmo.

A través del siguiente diagrama de flujo analizamos el algoritmo que utilizamos en Matlab para estimar la densidad espectral según el método de Blackman-Tukey:



5.6. PARÁMETROS DE COMPARACIÓN DE LAS ESTIMAS.

A lo largo de los próximos capítulos, calcularemos las estimas del espectro de potencia de varias secuencias de prueba. Se utilizarán los métodos que hemos ido estudiando hasta este momento. Pero... ¿cómo compararemos los resultados de las estimas que nos ofrece cada método?

Una forma directa y rápida de comparación se llevará a cabo a partir del análisis de las distintas gráficas que se irán obteniendo. Ésta será la que más usaremos. Los otros parámetros de comparación o de medida de calidad que se suelen utilizar, tal y como hemos podido comprobar en la bibliografía consultada, son el valor medio de la estima, su varianza y, sobre todo, un factor de calidad definido a partir de los anteriores y la función de coherencia.

A continuación, describiremos brevemente cada uno de los parámetros mencionados: los primeros ya fueron comentados en capítulos anteriores por lo que haremos más hincapié en la descripción de la función de coherencia.

5.6.1. Valor medio, varianza y factor de calidad.

Como medida de calidad de las estimas espectrales de Bartlett, Welch, Blackman-Tukey y Thomson, usamos la razón entre su varianza y el cuadrado de la media de la estima de la potencia espectral, es decir:

$$Q_A = \frac{\left\{ E[P_{xx}^A(f)] \right\}^2}{\text{var} \left[P_{xx}^A(f) \right]}$$

donde $A=B, W, BT, o T$ para las cuatro estimas de la potencia espectral consideradas. Como vimos en el segundo capítulo, el recíproco de esta cantidad, denominado *variabilidad*, también se puede usar como una medida de calidad.

Como referencia, el periodograma tiene una media y varianza

$$E[P_{xx}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta$$

$$\text{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\text{sen} 2\pi f N}{N \text{sen} 2\pi f} \right)^2 \right]$$

donde

$$W_B(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\text{sen} \pi f N}{\text{sen} \pi f} \right)^2$$

Para N grande (es decir, $N \rightarrow \infty$),

$$E[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta) d\theta = w_B(0) \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}^2(f)$$

Consecuentemente, el periodograma es una estima asintóticamente insesgada de la potencia espectral, pero no es consistente porque su varianza no se aproxima a cero cuando N crece hacia infinito.

De lo anterior deducimos claramente que el factor de calidad del periodograma es igual a 1. Este hecho, es decir, el tener factor de calidad fijo e independiente de la longitud de los datos N, es otra indicación de la pobre calidad de esta estima.

➤ Estima de Bartlett de la potencia espectral

Ya vimos que la media y la varianza de la estima de Bartlett de la potencia espectral son

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\text{sen} 2\pi f M}{M \text{sen} 2\pi f} \right)^2 \right]$$

donde $W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\text{sen} \pi f M}{\text{sen} \pi f} \right)^2$ es la característica de frecuencia de la ventana de Bartlett.

Cuando $N \rightarrow \infty$ y $M \rightarrow \infty$, mientras $K=N/M$ permanece fija, encontramos que

$$E[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f) df = w_B(0) \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

Observamos que la estima de Bartlett es asintóticamente insesgada y si se permite que K crezca al incrementar N, la estima también es consistente. Por tanto, esta estima se caracteriza asintóticamente por el factor de calidad:

$$Q_B = K = \frac{N}{M}$$

➤ **Estima de Welch de la potencia espectral**

La media y la varianza de la estima de Welch de la potencia espectral serán:

$$\bullet \quad E[P_{xx}^W(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta$$

donde

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2.$$

$$\bullet \quad \text{var}[P_{xx}^W(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[P_{xx}^W(f)]\}^2$$

$$- \quad \text{si no existe solapamiento (L=K):} \quad \text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f)$$

$$- \quad \text{si hay un 50% de solapamiento (L=2K):} \quad \text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$ y $M \rightarrow \infty$, la media converge a

$$E[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f)$$

y la varianza a

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] \rightarrow 0$$

así que la estima es consistente.

El factor de calidad queda entonces como sigue:

$$Q_W = \begin{cases} L = \frac{N}{M}, & \text{sin solapamiento} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M}, & \text{para un 50\% de solapamiento y vent. triangular} \end{cases}$$

➤ **Estima de Blackman-Tukey de la potencia espectral**

El valor esperado y la varianza de esta estima se aproximan como sigue:

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta$$

$$\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m) \right]$$

donde $w(m)$ es la ventana usada para la secuencia de autocorrelación estimada. Para ventanas rectangular y de Bartlett (triangular) tenemos

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w^2(m) = \begin{cases} 2M/N, & \text{vent. rectangular} \\ 2M/3N, & \text{vent. triangular} \end{cases}$$

A partir de las expresiones anteriores se deduce claramente que la media de la estima es asintóticamente insesgada. Su factor de calidad para la ventana triangular es

$$Q_{BT} = 1.5 \frac{N}{M}$$

Ya anticipamos en uno de los primeros capítulos que, a partir de estos cálculos, ‘parece’ que las estimas de Welch y Blackman-Tukey son, de alguna manera, mejores que la de Bartlett. El punto principal es que el factor de calidad crece cuando la longitud N de los datos también lo hace.

➤ Estima de Thomson de la potencia espectral

Recordemos que el éxito de esta aproximación reside en la selección de las K ‘tapers’ ortonormales (se tomaran tal que cada una de ellas tenga una buena protección contra las pérdidas y, además, cumplan que sus espectros individuales sean prácticamente incorrelados).

El valor esperado es

$$E[P_{xx}^T(f)] = \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) \overline{W}(f - \theta) d\theta$$

donde

$$\overline{W}(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |W_k(e^{j\omega})|^2$$

es la ventana espectral del estimador ‘multitaper’ promediado, que es obtenido ponderando los espectros de las ‘tapers’ individuales.

La varianza viene dada por

$$\text{var}[P_{xx}^T(f)] \approx \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

donde K es el número de ‘tapers’.

Al igual que en los casos anteriores, como medida de calidad, usamos la razón entre su varianza y el cuadrado de la media de la estima de la potencia espectral, es decir:

$$Q_T = \frac{\left\{ E[P_{xx}^T(f)] \right\}^2}{\text{var} \left[P_{xx}^T(f) \right]}$$

5.6.2. Función de coherencia.

Hasta ahora, hemos comentado técnicas de estima del espectro de potencia de un único proceso aleatorio $x(n)$. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas, podemos tener dos procesos aleatorios conjuntamente estacionarios y necesitar o desear el estudio de la correlación entre ellos. El análisis y cálculo de esta correlación y de las cantidades espectrales asociadas son similares a las que veníamos aplicando con un solo proceso aleatorio. A continuación, introducimos un breve estudio de este tipo de análisis conjunto de señal.

Consideremos $x(n)$ e $y(n)$, dos procesos aleatorios conjuntamente estacionarios, de media cero con espectros de potencia $R_x(e^{j\omega})$ y $R_y(e^{j\omega})$, respectivamente. La densidad espectral de potencia cruzada de $x(n)$ e $y(n)$ está dada por

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xy}(l) e^{-j\omega l}$$

donde $r_{xy}(l)$ es la secuencia de la correlación cruzada entre $x(n)$ e $y(n)$. La expresión anterior corresponde, en general, a una función compleja difícil de interpretar y de representar gráficamente. Por ello, se acostumbra a separar dicha función en sus componentes real e imaginaria, o bien, en su módulo y fase. Así,

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = C_{xy}(\omega) - jQ_{xy}(\omega)$$

donde

$$C_{xy}(\omega) = \text{Re}[R_{xy}(e^{j\omega})]$$

se denomina *coespectro* y

$$Q_{xy}(\omega) = \text{Im}[R_{xy}^*(e^{j\omega})] = -\text{Im}[R_{xy}(e^{j\omega})]$$

es llamada la componente en cuadratura del espectro. Por otro lado,

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = A_{xy}(\omega) \exp[j\Phi_{xy}(\omega)]$$

donde

$$A_{xy}(\omega) = |R_{xy}(e^{j\omega})| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}$$

$$\Phi_{xy}(\omega) = \angle R_{xy}(e^{j\omega}) = \tan^{-1}(-Q_{xy}(\omega)/C_{xy}(\omega))$$

Se define como función de coherencia compleja a la dada por

$$\Psi_{xy}(\omega) = \frac{R_{xy}(e^{j\omega})}{\sqrt{R_x(e^{j\omega})R_y(e^{j\omega})}}$$

Se trata de un coeficiente de valor complejo en el dominio de la frecuencia que mide la correlación entre las amplitudes de las exponenciales complejas con frecuencia ω en las representaciones espectrales de $x(n)$ e $y(n)$. Por ello, para interpretar este coeficiente se trabaja con su magnitud, $|\Psi_{xy}(\omega)|$, a la cual llamamos espectro de coherencia. También se utiliza el cuadrado de esta magnitud (MSC- *Magnitude-squared coherence*), es decir, $|\Psi_{xy}(\omega)|^2$. Está claro que $|\Psi_{xy}(\omega)|$ verifica que $0 \leq |\Psi_{xy}(\omega)| \leq 1$. Dado que el espectro de coherencia se basa en el espectro de amplitud pero ignora el de fase, en la práctica, los espectros de coherencia y de fase son representaciones útiles y de valor real del espectro cruzado.

Cabe destacar que el MSC puede ser utilizado como estadístico de detección. De hecho, aunque los detectores basados en MSC no son muy sensibles a la suposición de datos gaussianos, empíricamente resultan ser unos detectores muy robustos.

Las estimaciones de la coherencia pueden cambiar significativamente dependiendo del grado de alineación de las señales, lógicamente. En resumen, la coherencia es una cantidad útil para establecer comparaciones pero difícil de estimar.

➤ Estimación del espectro de potencia cruzado.

Consideremos la secuencia de datos $\{x(n), y(n)\}$ como las disponibles para llevar a cabo la estimación. El *periodograma cruzado* puede definirse como sigue:

$$\hat{R}_{xy}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xy}(l) e^{-j\omega l}$$

donde

$$\hat{r}_{xy}(l) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n+l)y^*(n) & 0 \leq l \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N+l-1} x(n)y^*(n-l) & -(N-1) \leq l \leq -1 \\ 0 & l \leq -N \text{ o } l \geq N \end{cases}$$

También puede escribirse como:

$$\hat{R}_{xy}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \right] \left[\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\omega n} \right]^*$$

De nuevo, podemos comprobar que las propiedades de sesgo y varianza del periodograma cruzado son tan malas como las del periodograma básico. Así, podemos obtener:

$$\left| \hat{R}_{xy}(e^{j\omega}) \right|^2 = \left(\frac{1}{N} \right)^2 \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \left| \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\omega n} \right|^2 = \hat{R}_x(e^{j\omega}) \hat{R}_y(e^{j\omega})$$

lo cual implica que, si estimamos la coherencia de la magnitud al cuadrado (MSC, como vimos), entonces el resultado es siempre la unidad para todas las frecuencias. Esto, aunque aparentemente con poco sentido, es debido al hecho de que el coeficiente de correlación en el dominio frecuencial se obtiene, para cada frecuencia, a partir de un único par de valores de las dos señales. Por consiguiente, es necesario una cantidad razonable de suavizado en el periodograma para reducir la variabilidad inherente del espectro cruzado y aumentar la precisión de la coherencia estimada. Como hemos estudiado, esta reducción en la varianza se puede alcanzar a través de los distintos métodos o técnicas no paramétricas de estima del espectro de potencia.

5.6.2.1. Cálculos y expresiones para el método de Welch.

A modo de ejemplo ilustrativo, haremos los cálculos para el método de Welch, teniendo en cuenta que la extensión al resto de las técnicas de estima es análoga.

Así, el periodograma cruzado del i-ésimo segmento viene dado por:

$$\hat{R}_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} X_i(e^{j\omega}) Y_i^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left[\sum_{n=0}^{L-1} x_i(n)e^{-j\omega n} \right] \left[\sum_{n=0}^{L-1} y_i(n)e^{-j\omega n} \right]^*$$

El espectro cruzado y suavizado se obtiene promediando los K periodogramas cruzados:

$$\hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{R}_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{KL} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(e^{j\omega}) Y_i^*(e^{j\omega})$$

La DFT de la expresión anterior es

$$\hat{R}_{xy}^{(W)}(k) = \frac{1}{KL} \sum_{i=0}^{K-1} \left[\sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) e^{-j2\pi kn/N} \right] \left[\sum_{n=0}^{L-1} y_i(n) e^{-j2\pi kn/N} \right]^*$$

donde $0 \leq k \leq N-1$, $N > L$.

➤ **Estimación del coespectro y del espectro en cuadratura.**

Una vez estimado el espectro cruzado, podemos ya calcular las estimas de todos los espectros de valor real asociados a éste.

Tan sólo hay que sustituir $R_{xy}(e^{j\omega})$ por su estimación $\hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega})$ en las definiciones de estas funciones.

Así, para determinar el coespectro:

$$\hat{C}_{xy}^{(W)}(\omega) = \text{Re}[\hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega})] = \text{Re}\left[\frac{1}{KL} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(e^{j\omega}) Y_i^*(e^{j\omega})\right]$$

y para estimar el espectro de cuadratura:

$$\hat{Q}_{xy}^{(W)}(\omega) = -\text{Im}[\hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega})] = -\text{Im}\left[\frac{1}{KL} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(e^{j\omega}) Y_i^*(e^{j\omega})\right]$$

➤ **Estimación de los espectros cruzados de amplitud y fase.**

Teniendo en cuenta las expresiones que se indicaron al principio del presente apartado, podemos estimar los espectros cruzados de amplitud $A_{xy}(\omega)$ y el de fase $\Phi_{xy}(\omega)$ entre los procesos aleatorios $x(n)$ e $y(n)$:

$$\hat{A}_{xy}^{(W)}(\omega) = \left| \hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega}) \right| = \sqrt{\left[\hat{C}_{xy}^{(W)}(\omega) \right]^2 + \left[\hat{Q}_{xy}^{(W)}(\omega) \right]^2}$$

$$\Phi_{xy}^{(W)}(\omega) = \angle \hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(-\hat{Q}_{xy}^{(W)}(\omega) / \hat{C}_{xy}^{(W)}(\omega) \right)$$

Como estas estimaciones espectrales son funciones no lineales del coespectro y del espectro en cuadratura, el análisis del sesgo, varianza y covarianza es mucho más complicado.

➤ **Estimación del espectro de coherencia.**

El espectro de coherencia es la magnitud de la coherencia compleja, es decir, $|\Psi_{xy}(\omega)|$. La estimación del espectro de coherencia será entonces:

$$|\hat{\Psi}_{xy}^{(W)}(\omega)| = \frac{|\hat{R}_{xy}^{(W)}(e^{j\omega})|}{\sqrt{\hat{R}_x^{(W)}(e^{j\omega})\hat{R}_y^{(W)}(e^{j\omega})}} = \left\{ \frac{[\hat{C}_{xy}^{(W)}(\omega)]^2 + [\hat{Q}_{xy}^{(W)}(\omega)]^2}{\hat{R}_x^{(W)}(e^{j\omega})\hat{R}_y^{(W)}(e^{j\omega})} \right\}^{1/2}$$

Sus valores se encuentran entre 0 y 1.

5.6.2.2. Cálculos y expresiones para el método de Thomson.

También es posible estimar el espectro de potencia cruzado a partir de la estima del espectro de potencia según el método de Thomson o método ‘multitaper’. Como dijimos antes, se trata de una extensión de las expresiones ya vistas donde sustituimos adecuadamente.

El espectro cruzado es ahora como sigue:

$$\hat{R}_{xy}^{(T)}(k) = \frac{1}{KL_{xy}} \sum_{k=0}^{K-1} \left[\sum_{n=0}^{L_{xy}-1} \omega_k(n) x(n) e^{-j\omega n} \right] \left[\sum_{n=0}^{L_{xy}-1} \omega_k(n) y(n) e^{-j\omega n} \right]^*$$

donde $\omega_k(n)$ es la ‘taper’ de orden k-ésimo y de longitud L_{xy} . El promediar las ‘multitapers’ nos permite reducir la variabilidad respecto al periodograma cruzado.

➤ **Estimación del coespectro y del espectro en cuadratura.**

De nuevo, una vez estimado el espectro cruzado, podemos ya calcular las estimas de todos los espectros de valor real asociados a éste.

Así, para determinar el coespectro:

$$\hat{C}_{xy}^{(T)}(\omega) = \text{Re}[\hat{R}_{xy}^{(T)}(e^{j\omega})]$$

y para estimar el espectro de cuadratura:

$$\hat{Q}_{xy}^{(T)}(\omega) = -\text{Im}[\hat{R}_{xy}^{(T)}(e^{j\omega})]$$

➤ **Estimación de los espectros cruzados de amplitud y fase.**

A partir de las expresiones ya señaladas anteriormente, podemos estimar los espectros cruzados de amplitud $A_{xy}(\omega)$ y el de fase $\Phi_{xy}(\omega)$ entre los procesos aleatorios $x(n)$ e $y(n)$:

$$\hat{A}_{xy}^{(T)}(\omega) = |\hat{R}_{xy}^{(T)}(e^{j\omega})| = \sqrt{[\hat{C}_{xy}^{(T)}(\omega)]^2 + [\hat{Q}_{xy}^{(T)}(\omega)]^2}$$

$$\Phi_{xy}^{(T)}(\omega) = \angle \hat{R}_{xy}^{(T)}(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(-\hat{Q}_{xy}^{(T)}(\omega) / \hat{C}_{xy}^{(T)}(\omega) \right)$$

➤ **Estimación del espectro de coherencia.**

Finalmente, el espectro de coherencia es la magnitud de la función de coherencia compleja, es decir, $|\Psi_{xy}(\omega)|$. La estimación del espectro de coherencia será entonces:

$$|\hat{\Psi}_{xy}^{(T)}(\omega)| = \frac{|\hat{R}_{xy}^{(T)}(e^{j\omega})|}{\sqrt{\hat{R}_x^{(T)}(e^{j\omega})\hat{R}_y^{(T)}(e^{j\omega})}} = \left\{ \frac{[\hat{C}_{xy}^{(T)}(\omega)]^2 + [\hat{Q}_{xy}^{(T)}(\omega)]^2}{\hat{R}_x^{(T)}(e^{j\omega})\hat{R}_y^{(T)}(e^{j\omega})} \right\}^{1/2}$$

Sus valores, claro está, se encuentran entre 0 y 1.