

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo introductorio se definirá el objetivo del proyecto, haremos una breve descripción de la teoría de Lyapunov sobre la estabilidad de sistemas no lineales y por último se intentará justificar de alguna manera por qué se ha optado por los algoritmos genéticos a la hora de alcanzar la meta propuesta.

1. OBJETIVO

El estudio de sistemas dinámicos no lineales siempre ha sido una labor compleja en la que aparece como parte importante el demostrar la estabilidad del sistema en torno a un punto de equilibrio. Para demostrar la estabilidad de un punto de equilibrio se suele hacer uso de la teoría de Lyapunov, en la cuál todo se limita a encontrar una función con unas determinadas propiedades, denominada función de Lyapunov. Si somos capaces de encontrar dicha función, habremos demostrado la estabilidad del sistema.

La tarea de encontrar una función de Lyapunov para un determinado sistema, ha sido tradicionalmente una labor analítica y a menudo tediosa que puede llevar al interesado a emplear tardes enteras, días e incluso semanas en alcanzar su objetivo. En la actualidad no existen métodos aplicables con carácter general para encontrar funciones de Lyapunov en una cantidad

razonable de tiempo. Pues bien, ante este panorama, el proyecto se plantea como objetivo el desarrollar un método que pueda encontrar una función de Lyapunov para un sistema dado de forma automática y en un espacio corto de tiempo haciendo uso de la programación genética.

La programación genética es una variante de los algoritmos genéticos, una herramienta de optimización heurística cuya popularidad está creciendo en los últimos años gracias a su eficacia probada en la resolución de algunos problemas reales. Su forma de operar se basa en probar simultáneamente conjuntos de posibles soluciones al problema planteado, haciendo evolucionar este conjunto en base a las reglas de la teoría Darwiniana de la evolución natural de las especies.

Ya que el objetivo de este proyecto es encontrar una función de Lyapunov para un sistema dinámico no lineal, estos conjuntos de soluciones candidatas a resolver el problema consistirán en expresiones matemáticas, que sometidas a un proceso evolutivo tratarán de convertirse en funciones de Lyapunov.

Estamos hablando de un objetivo que se antoja difícil de conseguir ya que, como se ha dicho antes, vamos a utilizar un método de naturaleza heurística que debe tener en cuenta además, factores problemáticos como suelen ser la derivabilidad de una función o la existencia de extremos absolutos.

El sistema que motivó este proyecto es un péndulo actuado, objeto de estudio en el departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla. Aunque este sistema es el verdadero objeto de estudio, se realizaron pruebas con otros sistemas dinámicos no lineales con el fin de comprobar previamente cómo se comportaba el método desarrollado.

2. FUNCIONES DE LYAPUNOV

Consideremos un sistema dinámico no lineal¹ descrito por la ecuación:

$$\dot{x} = f(x)$$

Son de particular importancia en el estudio de este tipo de sistemas los llamados puntos de equilibrio x_e , que son aquellos en los que se cumple que $f(x_e)=0$ y por tanto, anulan la variación con respecto al tiempo de las variables de estado. En esta situación el sistema llega a un estado de equilibrio que permanece inalterado.

¹ Trabajaremos con sistemas dinámicos no lineales de dimensión dos, es decir, x será un vector de dos componentes de la forma $x=[x_1 \ x_2]$.

Un equilibrio será estable si $f'(x) < 0$, y recibe la denominación de atractor ya que todas las trayectorias del sistema tienden a dicho estado. Por otro lado, el equilibrio será inestable si $f'(x) > 0$, en cuyo caso recibe el nombre de repulsor ya que el punto es fuente emanadora de trayectorias.

En términos más informales se puede decir que un atractor es una región del espacio de estados que atrae todas las trayectorias que se inician en una región más amplia, de la que la primera es una parte, llamada cuenca de atracción. Por lo tanto, a cada atractor se le asocia una cuenca de atracción que está constituida por todos aquellos puntos del espacio de estados tales que una trayectoria iniciada en ellos acaba convergiendo al atractor en cuestión.

2.1. Teoría de Lyapunov

El estudio de la estabilidad de los sistemas en torno a los puntos de equilibrio se puede hacer con gran sencillez y elegancia con la ayuda de la teoría de Lyapunov [4]. La utilidad del método de Lyapunov reside en el hecho de que su teoría establece una condición suficiente para la estabilidad de un sistema dinámico. El establecimiento de esta suficiencia consiste en la determinación de una función de energía, llamada función de Lyapunov, la cual puede calcularse sin el conocimiento explícito de la solución de la ecuación diferencial que gobierna el sistema bajo estudio.

2.2. El Teorema de Lyapunov

Antes de mostrar el teorema es conveniente introducir algunas ideas que resultarán útiles a la hora de entender con claridad su enunciado. En particular se van a definir los conceptos de función definida positiva y definida negativa.

Una función escalar $V(x)$, de n variables, se dice que es definida positiva en una región $\mathfrak{R}^n$ alrededor del origen si:

1. $V(x)$ es continuamente diferenciable en $\mathfrak{R}^n$.
2. $V(0) = 0$.
3. $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ perteneciente a $\mathfrak{R}^n$.

Si la condición (3) de la definición anterior se cambia por $V(x) = 0$ para todo x perteneciente a $\mathfrak{R}^n$, entonces se dice que $V(x)$ es semidefinida positiva.

Si $V(x) < 0$, entonces dicha función es definida negativa; y por último si $V(x) = 0$ entonces $V(x)$ es semidefinida negativa.

Pues bien, una vez vistos estos conceptos, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema debido a Lyapunov.

Teorema

El estado de equilibrio $x_e = 0$ de un sistema autónomo es estable si existe una función definida positiva $V(x)$, tal que su derivada total con respecto al tiempo $dV(x)/dt$ a lo largo de toda trayectoria del sistema, es semidefinida negativa.

Toda función $V(x)$ que satisfaga las condiciones del teorema anterior recibe el nombre de función de Lyapunov. En otras palabras, una función escalar y continuamente diferenciable $V(x)$, donde x pertenece a $\mathfrak{R}^n$, es una función de Lyapunov de un sistema que es estable en el origen, si se cumplen las siguientes condiciones en un dominio D que contiene al origen:

- 3) $V(0) = 0$
- 3) $V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$
- 3) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$

En cuanto a la condición (1) hay que decir que en el caso de que $V(0)$ sea distinto de cero (siempre que esté definido), siempre se podrá definir una nueva función $\hat{V}(x) = V(x) - V(0)$ que sí satisface el primer criterio.

Si se consideran las condiciones 1y 2 de arriba tal y como están expresadas y la condición 3 se reescribe como:

- 3) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$

entonces se dice que el sistema es asintóticamente estable.

Las funciones de Lyapunov pueden utilizarse para hacer estimaciones de la cuenca de atracción de un atractor puntual determinado; pero no sólo son útiles para demostrar la estabilidad de un sistema sino que también son parte importante en ciertos métodos de diseño para el control de sistemas no lineales.

3. PROCEDIMIENTOS DE BÚSQUEDA

La primera pregunta que el lector se podría hacer es: *¿por qué utilizar algoritmos genéticos para encontrar funciones de Lyapunov?*. Se tratará de establecer una breve comparativa entre los algoritmos genéticos y los procedimientos tradicionales de búsqueda y optimización. Tras esta exposición, puede que la siguiente pregunta planteada sea: *¿y por qué no?*.

3.1. Introducción a los Algoritmos Genéticos

Los algoritmos genéticos son algoritmos de búsqueda basados en la teoría genética de la selección natural y fueron desarrollados por John Holland y sus colaboradores en la Universidad de Michigan. En su investigación, todo giraba en torno a una idea central, desarrollar un método de búsqueda robusto; es decir, un método que combinara de forma adecuada eficiencia y eficacia para producir resultados satisfactorios en entornos de trabajo completamente diferentes². Efectivamente, si se tiene un sistema artificial de búsqueda robusto, los beneficios serán varios; los costes en su rediseño se podrán reducir e incluso eliminar; si se consiguen niveles más altos de adaptación al espacio de búsqueda, el sistema podrá realizar su labor por más tiempo y mejor.

Características como robustez, eficiencia o flexibilidad se encuentran a menudo en los sistemas biológicos pero no en los artificiales. Diferentes documentos y experimentos han demostrado que los algoritmos genéticos proporcionan un método de búsqueda robusto en espacios complejos, siendo el principal monográfico sobre el tema la obra pionera de Holland *Adaptation in Natural and Artificial Systems* [1]. En los últimos años, estos algoritmos están encontrando un campo de aplicación cada vez mayor en círculos empresariales, científicos y de ingeniería. Las razones son varias; son computacionalmente simples y muy potentes a la hora de buscar una solución cada vez mejor; además no están limitados por restricciones en el espacio de búsqueda tales como continuidad, derivabilidad o unimodalidad.

En el siguiente capítulo se analizará con más detalle los algoritmos genéticos y todas aquellas cualidades que los hacen tan atractivos, pero antes es necesario realizar un ligero repaso de los procedimientos de búsqueda más aceptados.

3.2. Métodos Tradicionales de Búsqueda y Optimización

Actualmente la literatura especializada identifica tres técnicas principales de búsqueda: las basadas en el cálculo analítico, las enumerativas y las aleatorias. Examinémoslas con el fin de comprobar si cubren de forma satisfactoria las necesidades planteadas en cuanto a robustez se refiere.

Las técnicas basadas en el cálculo analítico se subdividen a su vez en dos clases: las indirectas y las directas. Los métodos indirectos buscan extremos locales resolviendo el conjunto de ecuaciones resultantes de hacer el gradiente de la función objetivo igual a cero. Esta situación se refleja en la figura 1.1.

² Cuando hablamos de entornos de trabajo, se hace referencia a espacios de búsqueda.

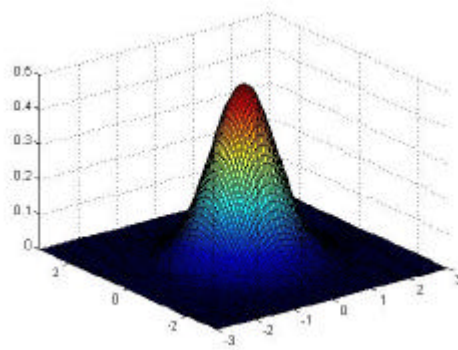


Figura 1.1 Función con un único extremo

Dada una superficie como la de la figura, la búsqueda de un posible pico empieza por considerar sólo aquellos puntos con pendiente cero en todas las direcciones. Por otro lado, en los métodos directos también denominados algoritmos escaladores³, se va evaluando la función en un punto, pasando de un punto a otro, en el cuál el resultado de la evaluación es superior. La búsqueda termina cuando se encuentra un valor máximo de la función de evaluación. Estos métodos analíticos han sido muy estudiados y mejorados con el paso de los años, sin embargo no son robustos por una razón muy simple: realizan una búsqueda de carácter local. Por ejemplo, supongamos que la superficie mostrada en la figura 1.1 es solo una parte de la superficie completa que se muestra en la figura 1.2. Está claro que si la búsqueda comienza en la vecindad del pico más bajo, el método no proporcionará la solución que se desea. Además, la aplicación de esta clase de procedimientos depende de la existencia de derivabilidad, continuidad, unimodalidad y otras características en la función bajo estudio, hecho que restringe la naturaleza del espacio de búsqueda.

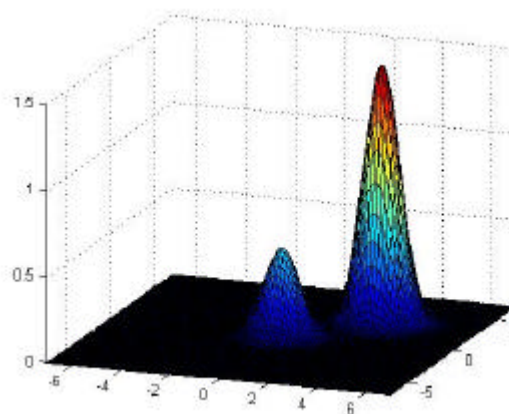


Figura 1.2 Función con extremos locales y absolutos

³ En la literatura inglesa, denominados de *hill-climbing*

Los algoritmos enumerativos se basan en una idea muy directa: en un espacio de búsqueda finito, el algoritmo examina el valor de la función objetivo en cada punto de dicho espacio, uno cada vez. Aunque la simplicidad del algoritmo puede resultar atractiva, y la enumeración es una forma de búsqueda muy *humana* (cuando el número de posibilidades es pequeño), estos métodos deben ser desechados en la misión de encontrar un algoritmo robusto por un motivo claro, son muy poco eficientes cuando el espacio de búsqueda es muy grande.

Los algoritmos aleatorios han conseguido una creciente popularidad a medida que se han ido descubriendo los defectos de los métodos analíticos y enumerativos. A pesar de todo, muestran también una importante falta de eficiencia cuando estamos ante búsquedas que pueden resultar extensas en el tiempo. No hay ninguna razón que lleve a pensar que mejoran, por ejemplo, a los algoritmos enumerativos. Pero se debe tener cuidado de no confundir un algoritmo de búsqueda aleatorio, con un procedimiento de búsqueda aleatorizado como puede ser el algoritmo genético. Dicho algoritmo usa la elección aleatoria solo como herramienta para guiar la búsqueda.

Aunque este análisis no ha sido muy riguroso, ha servido para llegar a una conclusión importante: los procedimientos de búsqueda tradicionales no son robustos (lo cual no quiere decir que no sean útiles en algunos casos) y por tanto surge la necesidad de buscar alternativas. En el siguiente capítulo se examinarán los algoritmos genéticos con más detalle y veremos cómo proporcionan esa robustez que tanto se desea en cualquier procedimiento de búsqueda.