

Capítulo 6

Resultados Obtenidos

Este capítulo dedicará su contenido a mostrar los resultados de los experimentos realizados. Se realizaron pruebas con cuatro sistemas diferentes. En cada sección se describe un sistema mediante sus ecuaciones de estado y los resultados correspondientes a través de gráficas generadas con la herramienta Matlab.

1. INTRODUCCIÓN

En programación genética es habitual tener que correr el programa varias veces antes de obtener algún resultado. Así fue en nuestro caso, algunos de los sistemas probados necesitaron pocas ejecuciones para proporcionar una función de Lyapunov, otros necesitaron algunas más y hubo uno en particular con el que no hubo suerte.

Los resultados se muestran gráficamente en grupos de 4 figuras. En la gráfica de la esquina superior izquierda se muestra la función de Lyapunov $V(x)$; a su derecha se imprime $\min(0, V(x))$ que nos ayudará a ver aquellos puntos donde $V(x) < 0$. En la esquina inferior izquierda se muestra $\dot{V}(x)$ y a su derecha $\max(0, \dot{V}(x))$ que nos permitirá ver fácilmente los

puntos en los que $\dot{V}(x) > 0$. Hay que decir que si bien la representación gráfica puede ayudar bastante bien a la comprobación de resultados, no es una forma exacta de hacerlo. Para ello sería necesario acudir al análisis numérico.

El conjunto de nodos terminales utilizados en las pruebas, es siempre el mismo y viene dado por:

$$T = \{x_1, x_2, f_1, f_2, -10, \dots, 10\}$$

2. SISTEMA POLINOMIAL SIMPLE

El primer sistema analizado fue el sistema no lineal descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2\end{aligned}$$

El rango de valores permitidos para las variables de estado viene dado por

$$\begin{aligned}x_1 &\in [-1, 1] \\ x_2 &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

El conjunto de funciones o nodos no terminales utilizados con este sistema fue:

$$F = \{+, -, \times, \div, \sqrt{}, ()^2\}$$

El primer resultado proporcionado tras la ejecución del programa genético resultó ser la función $V(x_1, x_2) = f_1^2 + f_2^2$, es decir:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + (-x_1^2 - x_2)^2$$

cuya derivada con respecto al tiempo viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= (2x_1 x_2^2 + 4x_1^3 + 4x_1 x_2) \dot{x}_1 + (2x_1 x_2^2 + 2x_2 + 2x_1^2) \dot{x}_2 = \\ &= 2x_1^2 x_2^3 + 2x_1^4 x_2 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 x_2 - 2x_1^4 - 2x_2^2\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 6.1. La función proporcionada parece una función de Lyapunov válida. En torno al origen se pueden intuir problemas pero el programa escrito en Matlab para detectar el mínimo de la superficie indica que el mínimo está en el origen. Esta función probaría la estabilidad según Lyapunov del sistema ya que su derivada respecto al tiempo es siempre negativa excepto en el origen.

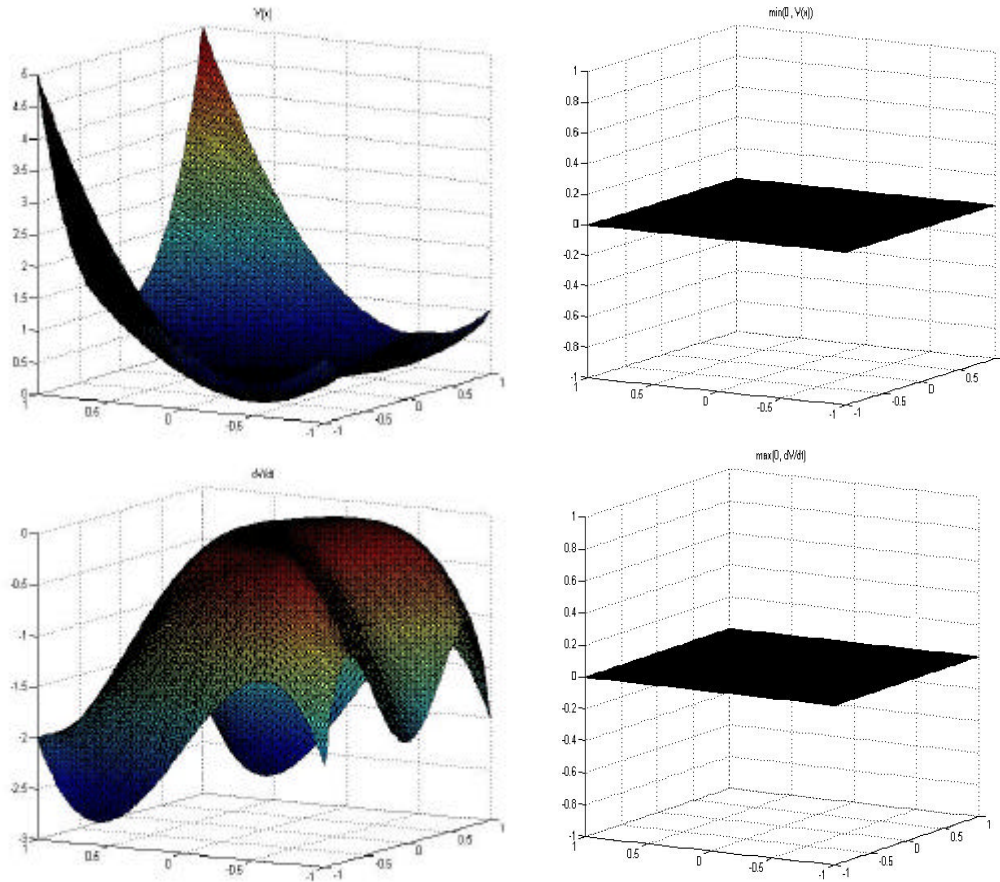


Figura 6.1 Resultado de la búsqueda de una función de Lyapunov para un sistema polinomial simple. $V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + (-x_1^2 - x_2^2)^2$

En otro ensayo la función obtenida fue la siguiente:

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^4$$

cuya derivada parcial con respecto al tiempo viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (8x_1^7 + 24x_1^3x_2^4 + 24x_1^5x_2^2 + 8x_1x_2^6) \dot{x}_1 + (8x_2^7 + 24x_1^4x_2^3 + 24x_2^5x_1^2 + 8x_2x_1^6) \dot{x}_2 = \\ &= -8x_2^8 - 24x_1^4x_2^4 - 8x_1^6x_2^2 - 24x_1^2x_2^6 \end{aligned}$$

Las gráficas asociadas a esta función se muestran en la figura 6.2. Se comprueba fácilmente como estamos ante una función de Lyapunov válida. En el origen vale 0 y en cualquier otro punto siempre se mantiene por encima de 0. Además se prueba la estabilidad del sistema ya que la $\dot{V}(x)$ se

hace cero en algunos puntos, manteniéndose negativa en el resto del dominio.

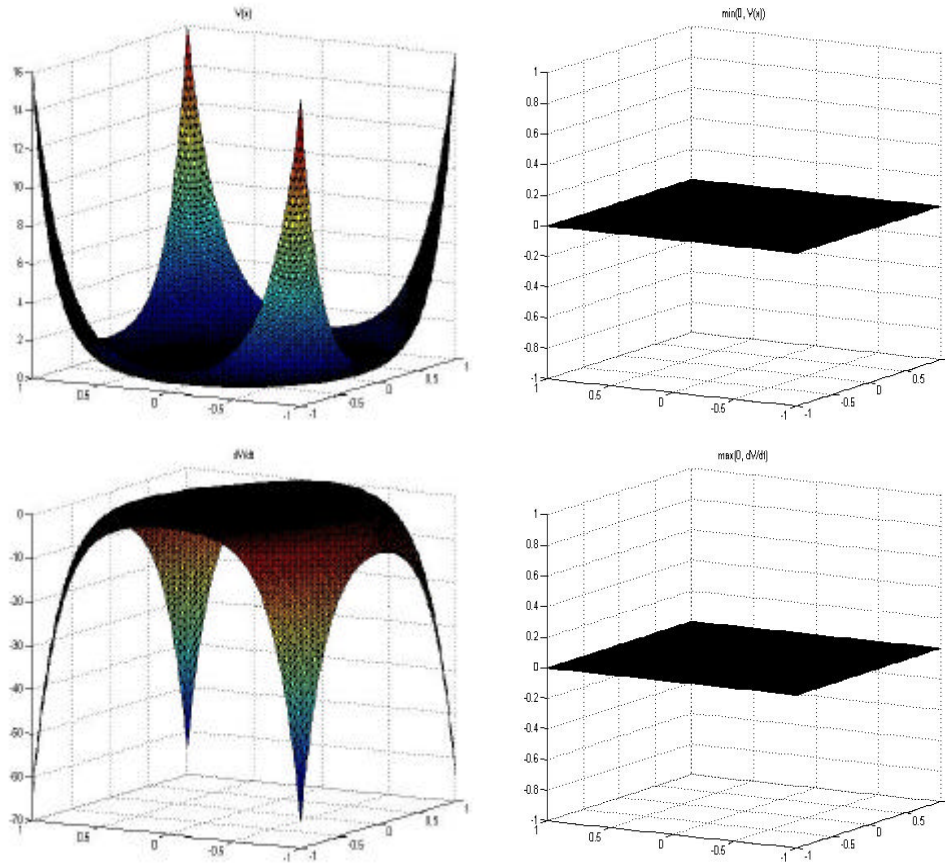


Figura 6.2 Función de Lyapunov para un sistema polinomial simple

$$V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^4$$

A continuación se va a poner un ejemplo de falsa alarma. En una de las pruebas realizadas sobre este sistema, el programa retornó como función de Lyapunov válida:

$$V(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Se comprueba fácilmente como cumple los dos primeras condiciones para ser función de Lyapunov, sin embargo esta función no es continuamente diferenciable. Si calculamos la expresión de $\dot{V}(x)$ llegamos a:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Esta expresión no está definida en el origen pero basta con que el origen no esté incluido en los casos de prueba como para que el programa genético la dé por buena.

3. PÉNDULO AMORTIGUADO

El siguiente sistema que se analizó fue un péndulo amortiguado descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen } x_1 - x_2\end{aligned}$$

Los intervalos que definen el dominio son:

$$\begin{aligned}x_1 &\in \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right] \\ x_2 &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

El conjunto de nodos no terminales utilizados en esta ocasión fue:

$$F = \{+, -, \times, \div, \sqrt{}, ()^2, \text{sen}, \cos, \arctan\}$$

Los resultados fueron bastante satisfactorios. Se encontraron varias funciones de Lyapunov para el sistema y además, bastante rápido. No más tarde de 6 o 7 generaciones. En las siguientes figuras se muestran algunos de estos resultados.

Concretamente, en la figura 6.3 se puede ver la función devuelta por el programa genético en la primera prueba que se hizo y que obedece a la expresión:

$$V(x_1, x_2) = \text{atan}^2 x_1 - \text{sen}(-7.83)[-x_2 - \text{sen } x_1]^2$$

y la expresión para la $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V} = \frac{2x_2 \text{atan} x_1}{1 + x_1^2} + 2 \text{sen}(-7.83)[x_2 + \text{sen } x_1][-x_2 \cos x_1 + x_2 + \text{sen } x_1]$$

Esta función prueba la estabilidad, según Lyapunov, del sistema ya que en el origen $\dot{V}(x) = 0$.

Por otro lado, en la figura 6.4 podemos ver una función que fue devuelta como 100% de Lyapunov. Se observa que es una función un tanto rara, con una arcotangente dentro de otra. Sin embargo, ésto es un claro ejemplo de lo bueno de la programación genética: nos puede conducir a soluciones que jamás se nos podrían ocurrir y todo gracias a la potencia del operador de cruce y la aleatoriedad intrínseca al método.

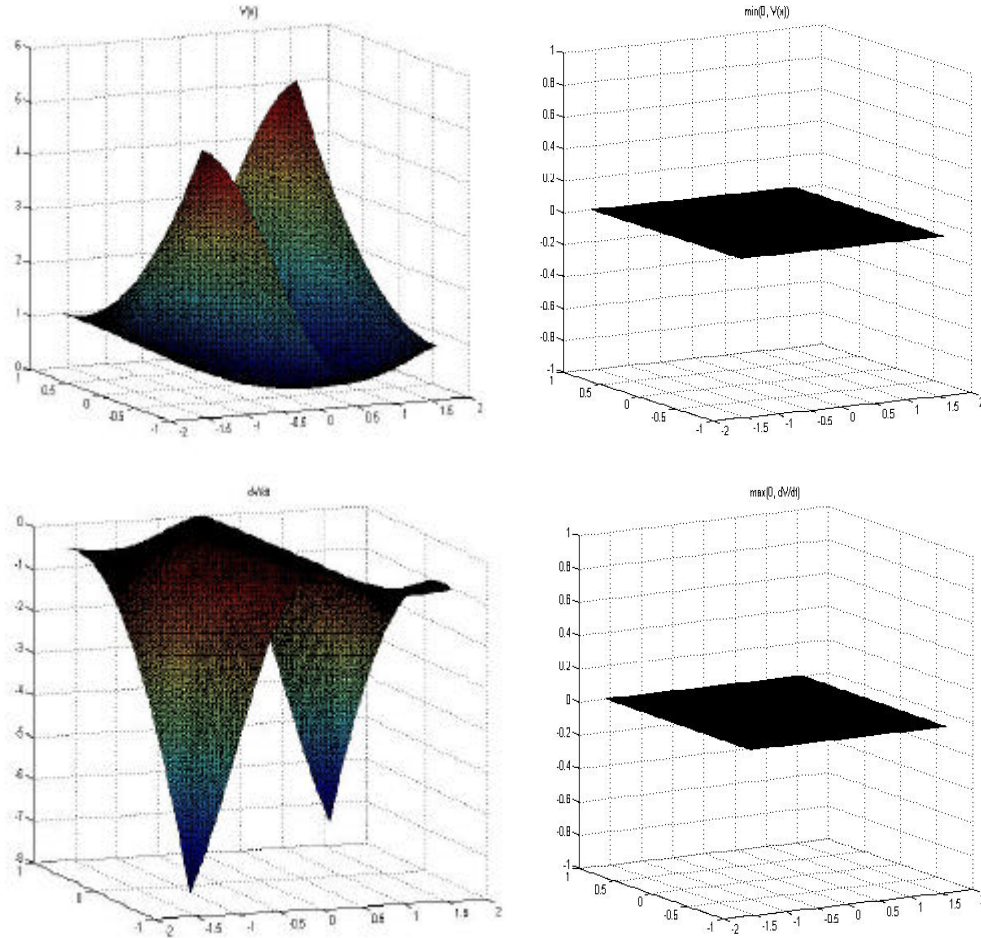


Figura 6.3 Función de Lyapunov para el péndulo amortiguado dada por la expresión $V(x_1, x_2) = atan^2 x_1 - \text{sen}(-7.83)[-x_2 - \text{sen} x_1]^2$

Dicha función se escribe como sigue¹:

$$V(x_1, x_2) = atan[x_1^2 + x_2^2 + atan(f_2^2)]$$

y su derivada parcial con respecto al tiempo:

$$\dot{V} = \frac{-1}{(1+A^2)(1+B^2)} [2f_2x_2 \cos x_1 + 2f_2^2] + \frac{1}{1+A^2} [2x_1x_2 + 2x_2f_2]$$

donde:

$$A = x_1^2 + x_2^2 + atan(f_2^2)$$

$$B = f_2^2 = (-x_2 - \text{sen}x_1)^2$$

¹ Se adopta el convenio de llamar $f_1 = dx_1/dt$ y $f_2 = dx_2/dt$

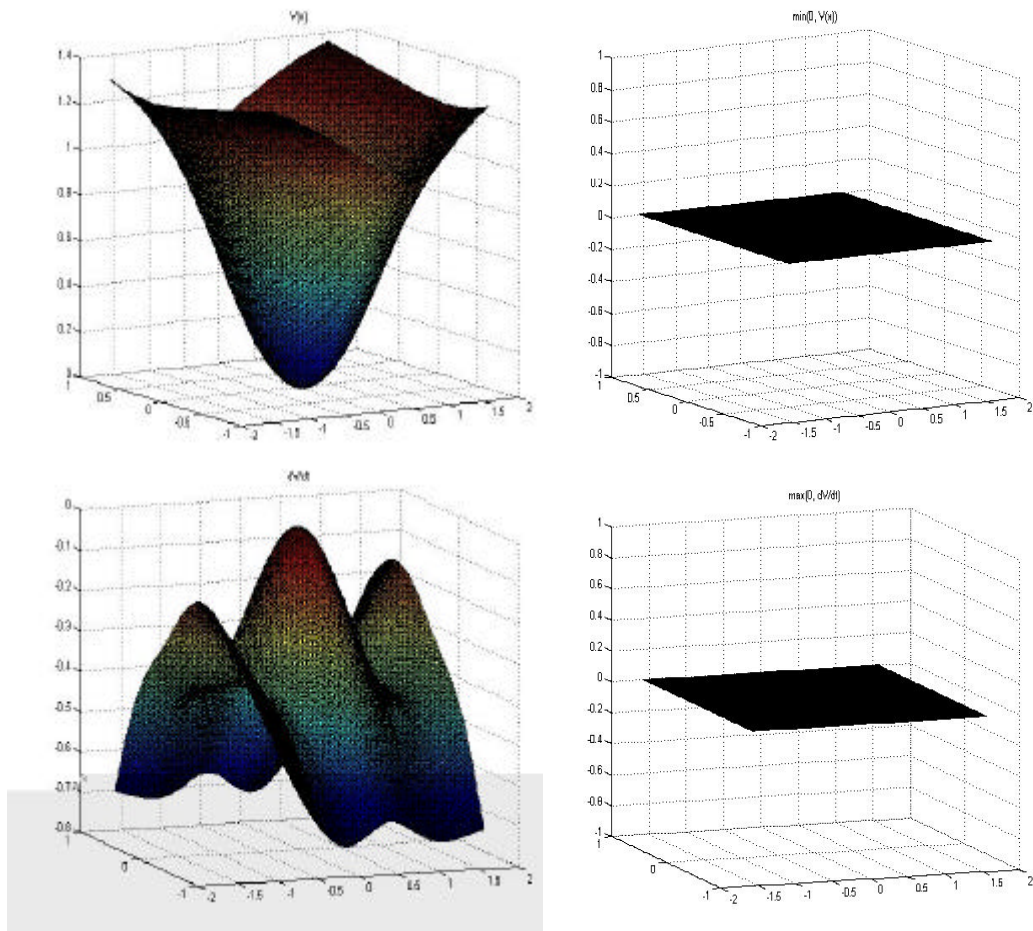


Figura 6.4 función de Lyapunov para el sistema del péndulo amortiguado
 dada por $V(x_1, x_2) = \text{atan}[x_1^2 + x_2^2 + \text{atan}(f_2^2)]$

4. SISTEMA QUE CONTIENE LA FUNCIÓN TANGENTE

El sistema en cuestión está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\tan x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1\end{aligned}$$

Los rangos de valores para las variables de estado que definen el dominio del problema son:

$$\begin{aligned}x_1 &\in [-1, 1] \\ x_2 &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

El conjunto de nodos no terminales utilizado en los ensayos con este sistema viene dado por:

$$F = \{+, -, \times, \div, \sqrt{}, ()^2, \text{sen}, \text{cos}, \text{tan}\}$$

En la figura 6.5 se muestra el resultado de una de las pruebas realizadas, cuyo resultado fue la función de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = f_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Esta función tiene una derivada con respecto al tiempo que obedece a la siguiente expresión:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 4 \cdot [-x_1 \tan x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 - x_2^2]$$

que es negativa en todo el dominio excepto en el origen que vale cero. Por tanto estamos ante una función de Lyapunov válida que prueba la estabilidad del sistema, ya que la función $V(x)$ presenta un mínimo en el origen.

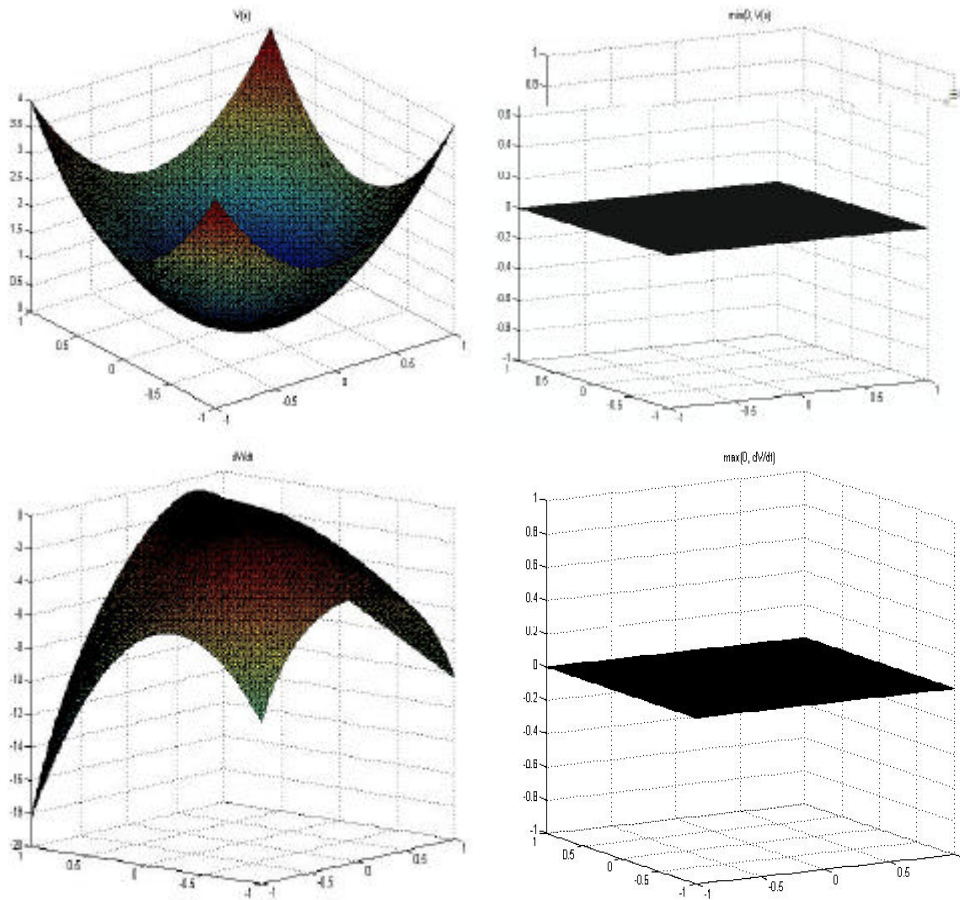


Figura 6.5 Función de Lyapunov para el sistema con la función tangente, dada por la expresión $V(x_1, x_2) = f_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$

El resultado de otro ensayo, que se ilustra en la figura 6.6, muestra una falsa alarma. La función producida fue:

$$V(x_1, x_2) = \tan^2[\cos(\cos x_1)] + \sin[\cos(x_1^2)] \cdot \tan^2 x_2$$

Se observa como la función V presenta el mínimo en el origen, sin embargo la $\dot{V}(x)$ se hace mayor que cero en las esquinas del dominio. Su expresión matemática es:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left\{ 2\tan[\cos(\cos x_1)] \cdot [1 + \tan^2(\cos(\cos x_1))] \sin(\cos x_1) \sin x_1 - \right\} \dot{x}_1 + \\ & + \left\{ -2x_1 \tan^2 x_2 \cdot \cos(\cos x_1^2) \sin x_1^2 \right. \\ & \left. + [2\tan x_2 \sin[\cos x_1^2] \cdot [1 + \tan^2 x_2]] \right\} \dot{x}_2 \end{aligned}$$

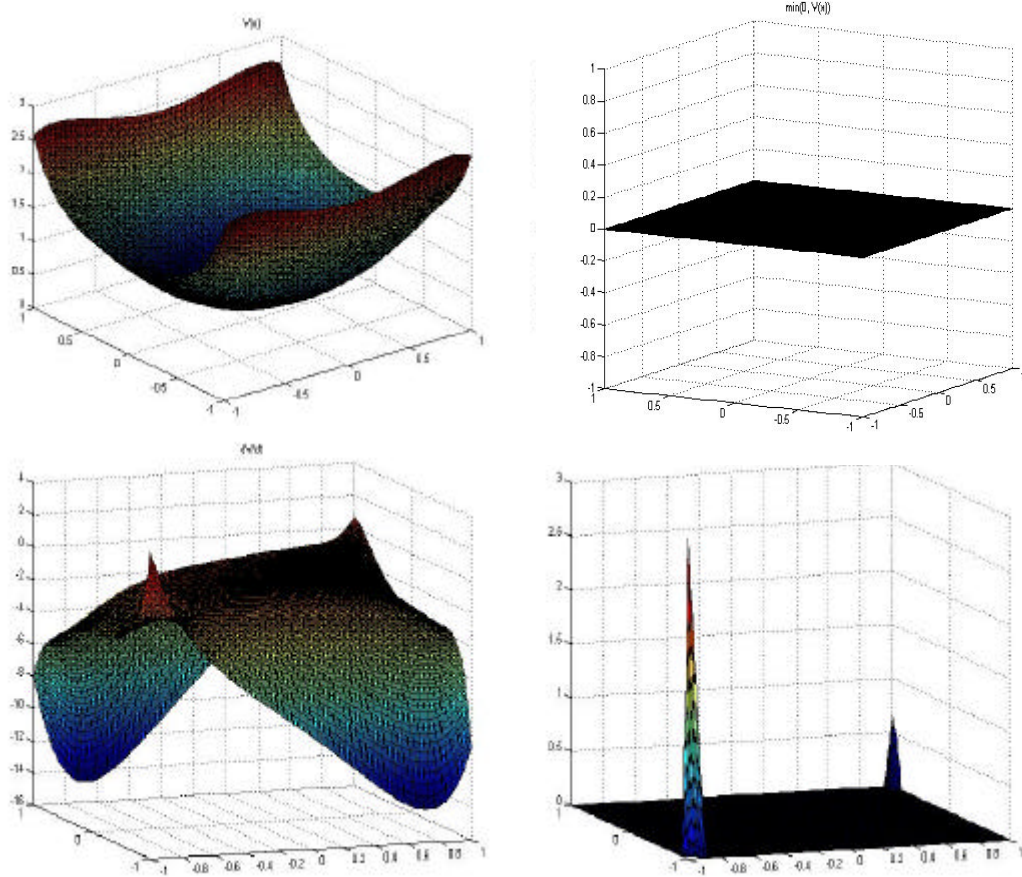


Figura 6.6 Falsa alarma para el sistema con que contiene la función tangente.

$$V(x_1, x_2) = \tan^2[\cos(\cos x_1)] + \sin[\cos(x_1^2)] \cdot \tan^2 x_2$$

Por último, vamos a ver un último experimento realizado sobre este sistema. El programa genético propuso como función de Lyapunov la siguiente expresión:

$$V(x_1, x_2) = \frac{\cos^2(\cos x_2)}{\cos x_1}$$

Observamos como se trata de una función un tanto rara y que sugiere la utilidad de la programación genética para expandir el rango de posibilidades a la hora de encontrar una solución. Por ejemplo, esta solución sería difícil que se le ocurriera a un ser humano. El resultado se ilustra en la figura 6.7.

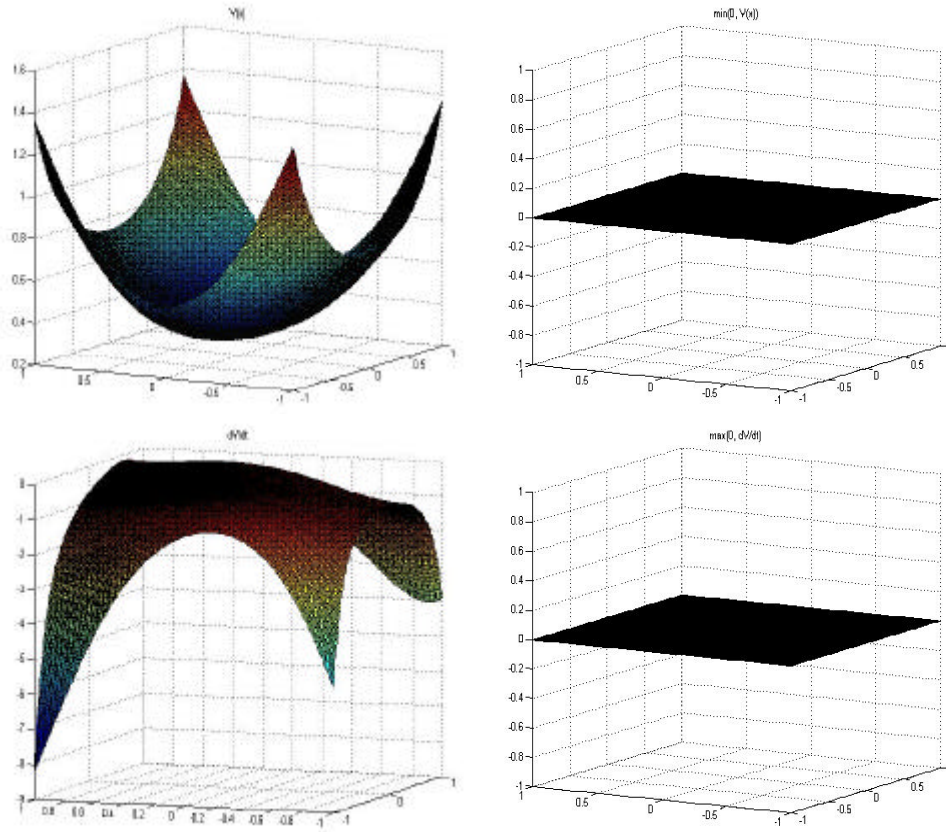


Figura 6.7 Función de Lyapunov dada por $V(x_1, x_2) = \frac{\cos^2(\cos x_2)}{\cos x_1}$

Su derivada parcial respecto al tiempo se escribe como:

$$\dot{V} = \frac{\cos^2(\cos x_2) \sin x_1}{\cos^2 x_1} \dot{x}_1 + \frac{2 \sin x_2 \cos(\cos x_2) \sin(\cos x_2)}{\cos x_1} \dot{x}_2$$

Efectivamente, la función presenta un mínimo en el origen y derivada respecto al tiempo se mantiene siempre por debajo de cero, excepto en el origen, cuyo valor es cero.

5. PÉNDULO INVERTIDO

El último sistema analizado fue un péndulo actuado, representado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - 12k_1 \sin x_1 \cos^2 x_1 + (3k_1 - 1) \frac{\sin x_1 \cos x_1}{1 + \cos x_1} - k_2 x_2 \cos x_1 \end{aligned}$$

donde se han tomado los valores $k_1 = k_2 = 1$. El dominio viene definido por:

$$\begin{aligned} -p &< x_1 < p \\ -3 &\leq x_2 \leq +3 \end{aligned}$$

aunque los límites para x_2 se pueden variar sin que los resultados finales cambien significativamente.

Este sistema es objeto de estudio en el Departamento de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla, y su ley de control ha sido simulada con éxito. Sin embargo no se ha probado su estabilidad. De ahí surge la necesidad de encontrar una función de Lyapunov para dicho sistema.

El conjunto de funciones o nodos no terminales utilizado en las pruebas con este sistema fue:

$$F = \{+, -, \times, \div, \sqrt{}, ()^2, \sin, \cos, \operatorname{atan}\}$$

Hay que decir que se han eliminado algunas de estas funciones en algunas pruebas, e introducido otras nuevas como por ejemplo la función tangente.

Los primeros ensayos no produjeron ninguna función de Lyapunov, es decir, ningún individuo fue probado con éxito en el 100% de los casos de prueba. Ante esta situación se planteó lo siguiente: si se reduce el dominio del problema a un entorno cercano al origen, las posibilidades de que aparezca una función de Lyapunov pueden ser mayores. Lo que se hace con esta idea es suponer que el péndulo realiza pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio (x_1 pequeña) y con una velocidad muy baja (x_2 pequeña). Si tenemos éxito, esto es, si aparece una función de Lyapunov en este entorno, podemos hacer evolucionar esa misma población haciendo el dominio un poco más grande cada vez que aparezca una función válida (ver sección 5.3 del capítulo anterior).

Se realizó un primer ensayo en el que los casos de prueba se encontraban en un dominio circular en torno al origen, de radio 0.1p. El resultado fue positivo, es decir, apareció una función que cumplía todos los requisitos para ser una función de Lyapunov. Esta función es:

$$V(x_1, x_2) = x_2^2 - f_2 x_1$$

y su derivada parcial respecto al tiempo se escribe como:

$$\dot{V} = - \left[f_2 + x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right] \cdot \dot{x}_1 + [2x_2 + x_1 \cos x_1] \cdot \dot{x}_2$$

La solución se ilustra en la figura 6.8.

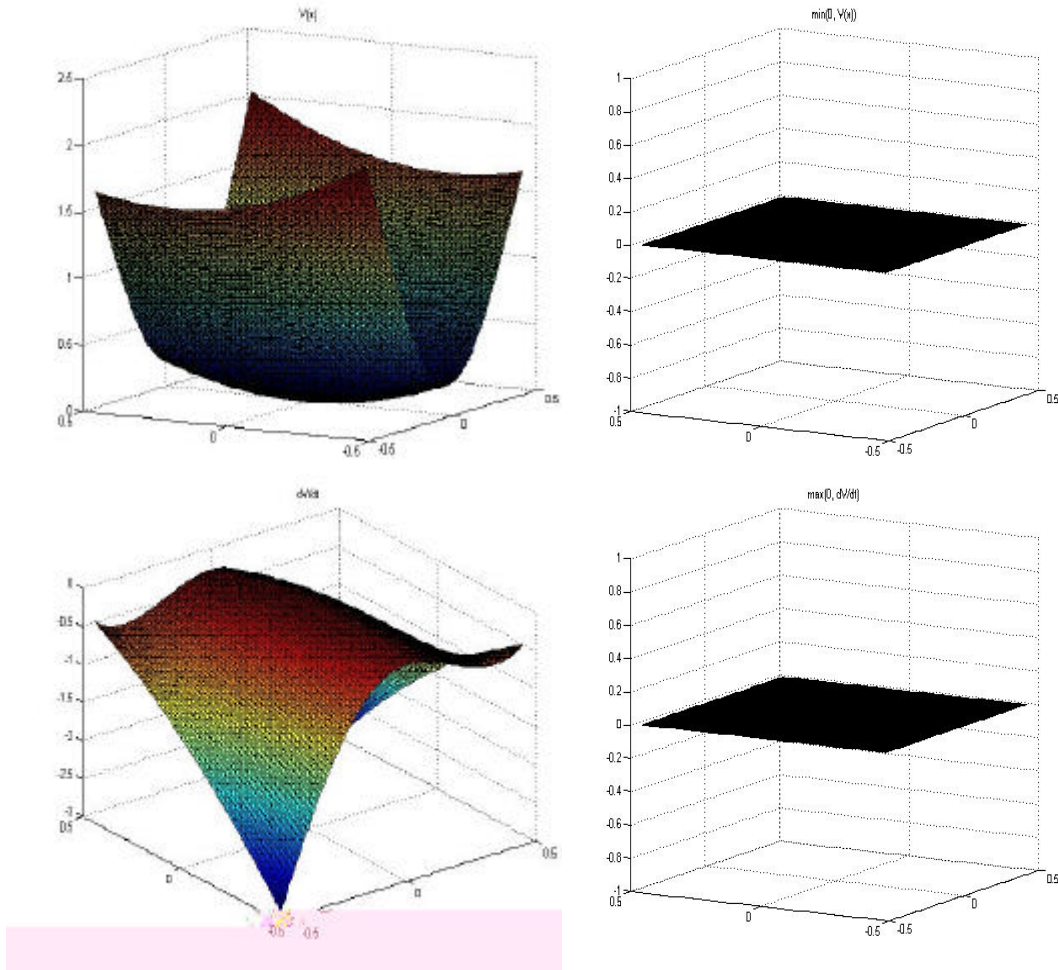


Figura 6.8 Función de Lyapunov para el péndulo invertido en un dominio acotado en torno al origen. $V(x_1, x_2) = x_2^2 - f_2 x_1$

Si esta misma función la representamos en un dominio circular un poco más grande, por ejemplo con un radio de 0.2π , se puede observar en la figura 6.9 como ya la derivada de V se hace mayor que cero en algunas zonas.

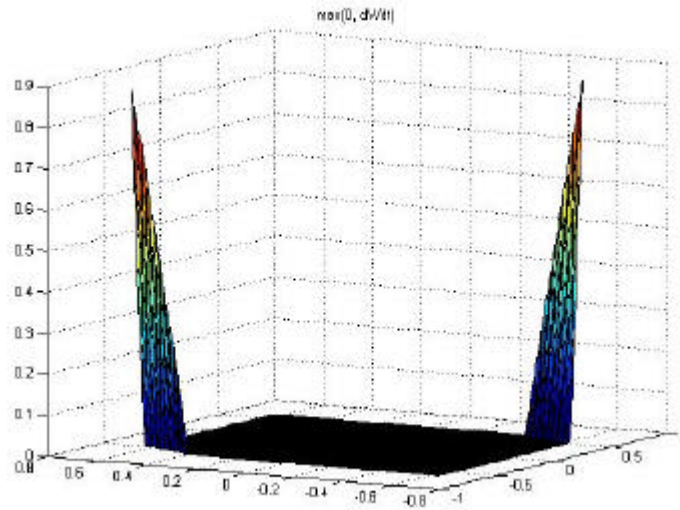


Figura 6.9 derivada de V por encima de cero para $V(x_1, x_2) = x_2^2 - f_2 x_1$

El siguiente paso consiste entonces en hacer evolucionar las poblaciones haciendo el dominio mayor cada vez que aparezca una función de Lyapunov, hasta llegar al dominio original del problema. Los siguientes ensayos se realizaron con el programa genético preparado para esta circunstancia: muchas más generaciones y distinto criterio de terminación (ver sección 5.3 del capítulo 5).

En una prueba realizada con 40 generaciones, apareció una primera función válida en la generación 25 para un dominio de radio 0.1p. La función obedecía a la expresión:

$$V(x_1, x_2) = 1.39 + \sin(x_2^2 x_1) + x_2^2 [\cos x_1 + 8.935] + f_2^2$$

y su derivada, a esta otra:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \cos(x_2^2 x_1) x_2^2 - x_2^2 \sin x_1 + 2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= 2 x_2 [\cos(x_2^2 x_1) + \cos x_1 + 8.935] + 2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 6.10, se trató de una falsa alarma. Mientras que la V(x) si ofrece un mínimo absoluto en el origen, su derivada se eleva

ligeramente por encima de cero en algunas zonas del dominio. Hecho que sugiere que la medida de la aptitud debe ser mejorada.

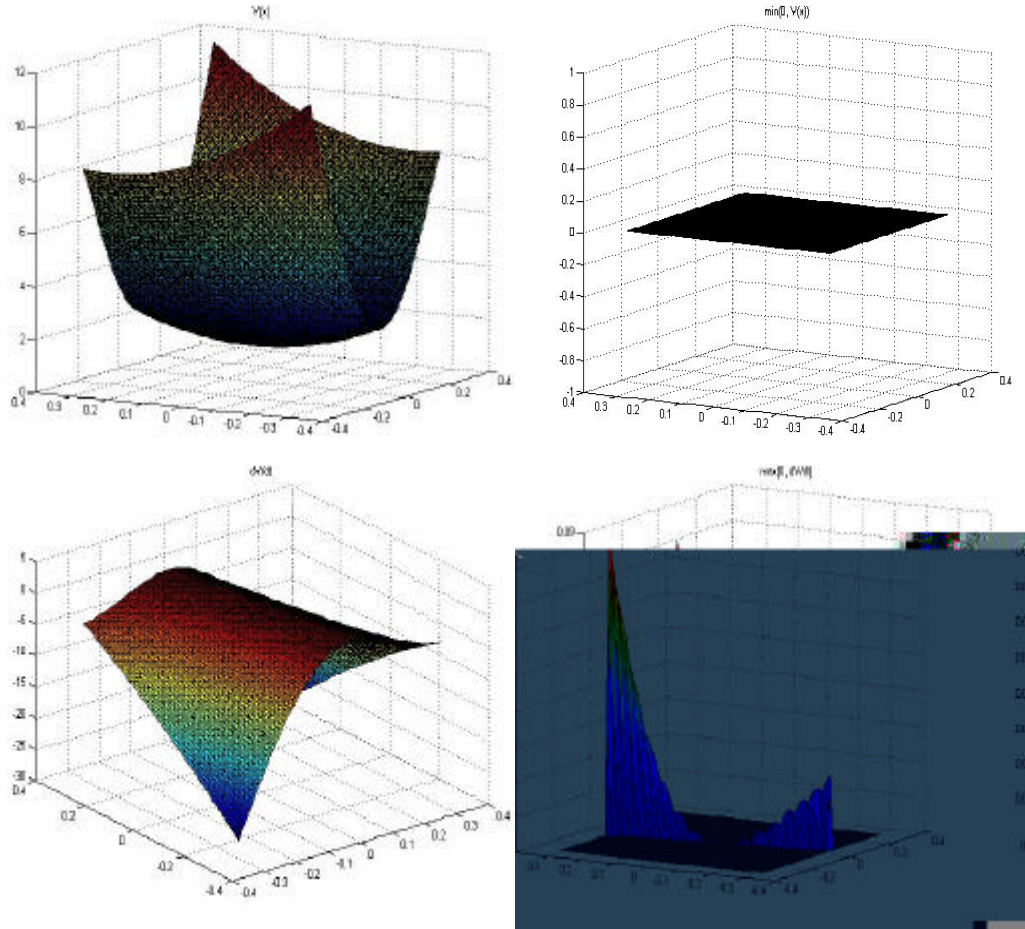


Figura 6.10 Falsa alarma dada por la función

$$V(x_1, x_2) = 1.39 + \sin(x_2^2 x_1) + x_2^2 [\cos x_1 + 8.935] + f_2^2$$

En otra ejecución del programa genético con 70 generaciones como máximo, apareció una función de Lyapunov válida en la generación 17, en un dominio de radio 0.1p. Las poblaciones siguieron evolucionando hasta que en la generación 41 el programa se detuvo. Es decir, proporcionó una función de Lyapunov apta para un dominio de radio p. Dicha función es:

$$V(x_1, x_2) = f_2^2 + 6x_2^2 + x_1^2 + 0.88^2 + \cos[\cos x_1(x_1 + f_2)]$$

y su derivada:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + 2x_1 - \sin[\cos x_1 (x_1 + f_2)] \left\{ -(x_1 + f_2) \sin x_1 + \cos x_1 \left(1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + 12x_2 - \sin[\cos x_1 (x_1 + f_2)] \cdot \left[\cos x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]$$

Lo que se hizo fue representar gráficamente (de la forma que se viene haciendo) la función en un pequeño dominio en torno al origen, para posteriormente ir aumentando dicho dominio gradualmente. En la figura 6.11 se muestra el resultado para un radio de 0.1p y se observa como se cumplen todas las condiciones de Lyapunov.

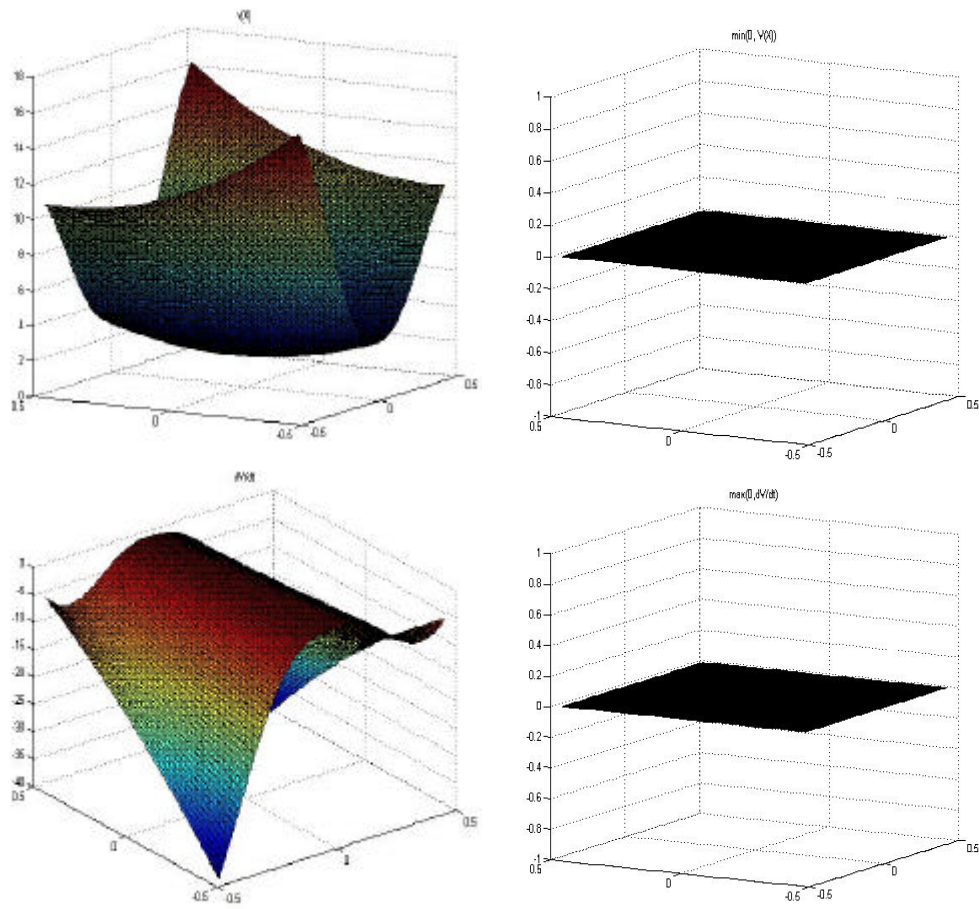


Figura 6.11 Función de Lyapunov para el péndulo invertido en dominio de radio 0.1p.

$$V(x_1, x_2) = f_2^2 + 6x_2^2 + x_1^2 + 0.88^2 + \cos[\cos x_1 (x_1 + f_2)]$$

Sin embargo, si representamos la misma función en un dominio de radio 0.5p, se observa que la derivada se hace mayor que cero en varias zonas. Ello se refleja en la figura 6.12, donde se ha representado la función $\max(0, dV/dt)$.

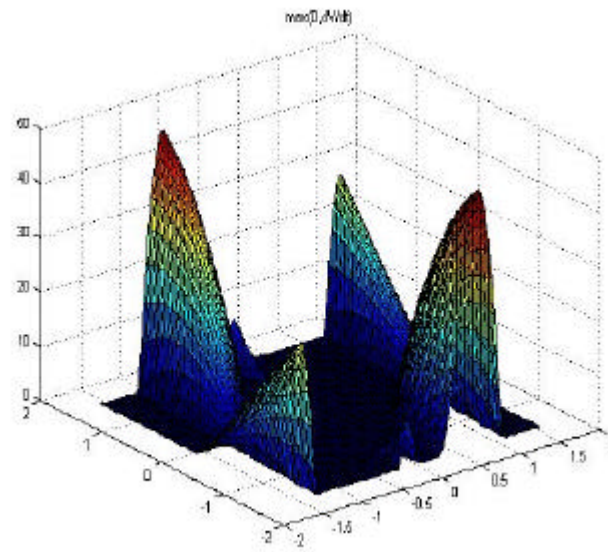


Figura 6.12 Derivada de V por encima de cero para un dominio de radio $0.5p$

Hecho que vuelve a sugerir que la medida del grado de aptitud debe ser mejorada ya que el programa genético tomó esta función por buena en todo el dominio (radio= p).

Sin embargo, hay un hecho que creo interesante destacar. Si miramos la figura de arriba en planta (ver figura 6.13), se observa que las partes de la función dV/dt que son mayores que cero se encuentran en su mayor parte en las esquinas del dominio.

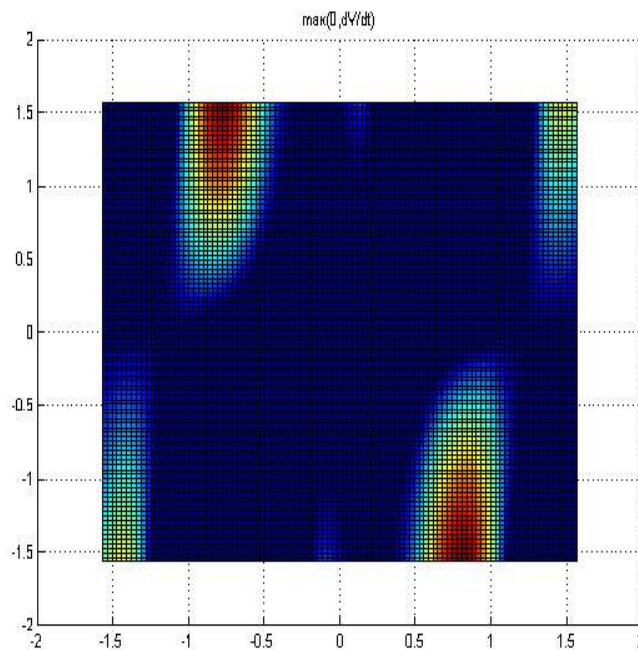


Figura 6.13 Visión en planta de la figura 6.12

En la figura 6.13, las manchas coloreadas son los lóbulos que se elevan por encima de cero en la figura 6.12. Lo que quiero resaltar es que el programa genético analiza las funciones en un dominio circular, enmarcado exactamente en el plano de estados de la figura 6.13. Teniendo en cuenta ésto, la probabilidad de que un caso de prueba esté dentro de ese círculo imaginario es mayor que si consideramos el dominio en su totalidad (en la forma cuadrada).

Este fenómeno de violación de la condición $dV/dt < 0$, se dió en muchas de las pruebas realizadas y puede ser un signo de que la búsqueda no va tan mal encaminada.

De todos modos, se produjeron más falsas alarmas con este sistema de las que se esperaban en un principio.

6. CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE TRABAJO

La principal conclusión a la que he llegado después de todas las pruebas realizadas es que la medida de la aptitud debe ser mejorada con el fin de reducir el número de falsas alarmas, y en consecuencia, hacer el método más robusto. Aún así, el programa fue capaz de proporcionar funciones válidas con relativa rapidez en algunos de los casos.

Hay que decir que aquellos sistemas en los que se han obtenido resultados satisfactorios son sistemas relativamente simples que se han analizado con el único fin de comprobar cómo se comportaba el método desarrollado antes de pasar a estudiar el sistema verdaderamente interesante, que es el péndulo actuado. Sistema con el que finalmente no se ha podido conseguir lo que se pretendía, demostrar su estabilidad. Ya se indicó al principio de este documento que se trataba de una misión un tanto difícil, aunque también se ha abierto un camino que puede servir para futuros trabajos de investigación.

También resulta interesante destacar que todos los sistemas estudiados aquí son de dimensión dos por lo que cabe esperar que con sistemas de tres variables de estado, por poner un ejemplo, el método no se comporte muy bien. La malla de puntos analizados en el espacio de estados debería ser mucho mayor para reducir el número de falsas alarmas producidas.

Tras leer esta memoria, el lector podría pensar que se ha tratado de un proyecto poco fructífero. Sin embargo, el trabajo que hay detrás de él no es poco. Se ha intentado mejorar el algoritmo realizando varios cambios y para constatar los efectos de cada modificación se han realizado numerosos ensayos. Por otro lado, cada uno de esos ensayos requería su tiempo de análisis e interpretación de resultados.

Algunas líneas futuras de trabajo podrían ser:

- Como ya se ha mencionado, mejorar la medida del grado de aptitud con el fin de proporcionarle al programa genético información más precisa con el fin de que cometa menos errores.
- Tener en cuenta en qué medida se violan las condiciones de Lyapunov. Por ejemplo, no es lo mismo que dV/dt se haga mayor que cero en algunas décimas, que en decenas de unidades. Penalizando este tipo de hechos, se podría mejorar la implementación.
- Desarrollar funciones C que permitan insertar y eliminar de la población, individuos que nos sean de interés con el fin de observar su evolución.
- Plantear la utilización de nuevos operadores genéticos que doten al programa de una mayor inteligencia. De particular interés podrían resultar operadores relacionados con las ERCs.