

---

## ***Capítulo 3***

### **Modulación Sigma-Delta**

---

#### **3.1 Introducción**

Recientemente, los convertidores A/D y D/A de sobremuestreo están tomando popularidad para aplicaciones de alta resolución y velocidad media-baja tales como de audio digital de alta calidad. Entre las razones más importantes para este auge se incluyen las siguientes:

- Los convertidores de sobremuestreo permiten relajar las especificaciones de la circuitería analógica en contrapartida de una circuitería digital más compleja. Este intercambio es deseable para a tecnologías modernas submicra con fuentes de 3.3V, donde la compleja circuitería digital de alta-velocidad es fácilmente realizable en menor área mientras que la realización de circuitos analógicos de alta resolución es complicada debido a fuentes de alimentación de bajo voltaje y pobre impedancia de salida de transistor (causado por efectos de canal-corto). Con los convertidores de sobremuestreo, los componentes analógicos han reducido sus requerimientos para a tolerancias pareadas y ganancias de los amplificadores.
- Los convertidores de sobremuestreo simplifican los requerimientos de los filtros analógicos anti-solapamiento (*anti-aliasing*) para convertidores A/D y filtros de alisado (*smoothing*) para D/A. Por ejemplo, para un CA/D suele ser requerido un solo con filtro anti-solapamiento de primer orden, que puede ser realizado en el mismo chip o, en el peor caso, en un chip externo de muy bajo coste. Además, un muestreador y mantenedor (*sample and hold*) no suele ser necesario a la entrada de un convertido A/D de sobremuestreo.

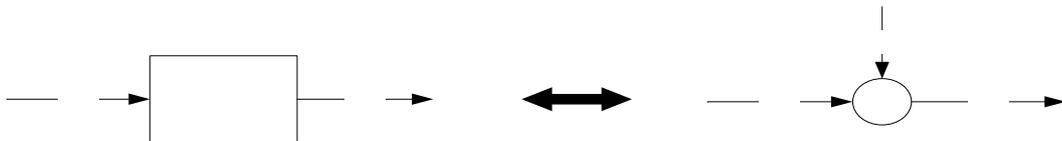
En este capítulo comenzaremos discutiendo los aspectos básicos del sobremuestreo. Comprobaremos después que podremos obtener una resolución extra de bits fruto de muestrear mucho más rápido de la frecuencia de Nyquist. Además, veremos asimismo, que esta resolución extra puede ser conseguida con tasas de sobremuestreo inferiores empleando “*noise-shaping*” que traduciremos como *moldeado* o *conformación* (emplearemos ambos términos indistintamente) del espectro del ruido de cuantización a través del uso de la realimentación. El uso de la conformación del ruido de cuantización a señales sobremuestreadas lo referiremos como modulación sigma-delta. Discutiremos finalmente los moduladores  $\Sigma\Delta$  de primer y segundo orden y su configuración en cascada.

### 3.2 Sobremuestreo sin conformación de ruido

En esta sección trataremos las ventajas de muestrear a tasas superiores a la de Nyquist. Comprobaremos que se puede obtener un rango dinámico extra ensanchando el espectro de la potencia del ruido de cuantización sobre un rango de frecuencias mayor. Este incremento, no obstante, será sólo de 3dB por cada duplicado de la tasa de muestreo. Para obtener un rango dinámico mucho mayor conforme se incrementa la tasa de muestreo, se puede usar el moldeado del ruido a través de realimentación como discutiremos en la próxima sección (Ver apartado 3.3).

#### 3.2.1 Modelo del ruido de cuantización

Comenzaremos modelando un cuantizador como la adición de un ruido de cuantización  $e(n)$  como muestra la siguiente figura 3-1.



**Figura 3-1** Cuantizador y su modelo lineal

La señal de salida  $y(n)$ , es igual al valor cuantizado más próximo de  $x(n)$ . El error de cuantización es la diferencia entre los valores de entrada y salida. Este modelo es exacto si se reconoce que el error de cuantización no es una señal independiente, sino que puede estar fuertemente relacionada con la señal de entrada,  $x(n)$ . Este modelo lineal es aproximado cuando las suposiciones son hechas sobre las propiedades estadísticas de  $e(n)$ , tales como que  $e(n)$  es un ruido blanco (*white-noise*). Sin embargo, incluso con la aproximación, este modelo permite una sencilla comprensión de los moduladores  $\Sigma\Delta$  y, con algunas excepciones, es razonablemente precisa.

### 3.2.2 Suposición de ruido blanco

Si  $x(n)$  es muy activa,  $e(n)$  puede ser aproximado como una variable aleatoria uniformemente distribuida entre  $\pm\Delta/2$ , donde  $\Delta$  equivale a la diferencia entre dos niveles de cuantización adyacentes. De este modo la potencia del ruido de cuantización vale  $\Delta^2/12$  y es independiente de la frecuencia de muestreo,  $f_s$ . También, la densidad espectral de  $e(n)$ ,  $S_e(f)$ , es blanca (constante en frecuencia) y toda su potencia está concentrada en  $\pm f_s/2$ .

Asumiendo ruido de cuantización blanco, la densidad espectral del ruido de cuantización,  $S_e(f)$ , será como la de la figura 3-2

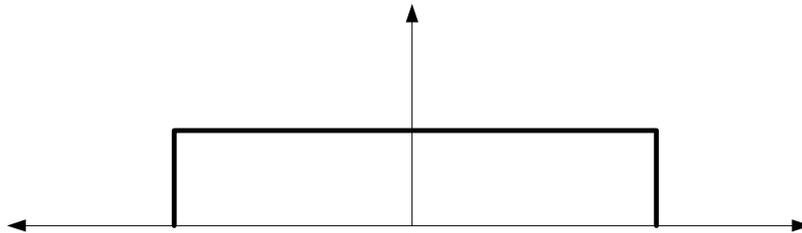


Figura 3-2 Densidad espectral del ruido de cuantización asumida

La altura de la densidad espectral se puede calcular como consecuencia de que la potencia total del ruido es  $\Delta^2/12$  y ésta equivale al área bajo  $S_e(f)$ , contenida entre  $\pm f_s/2$ , o matemáticamente,

$$\int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_e^2(f) df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} k_x^2 df = k_x^2 f_s = \frac{\Delta^2}{12}$$

Solucionando la relación anterior

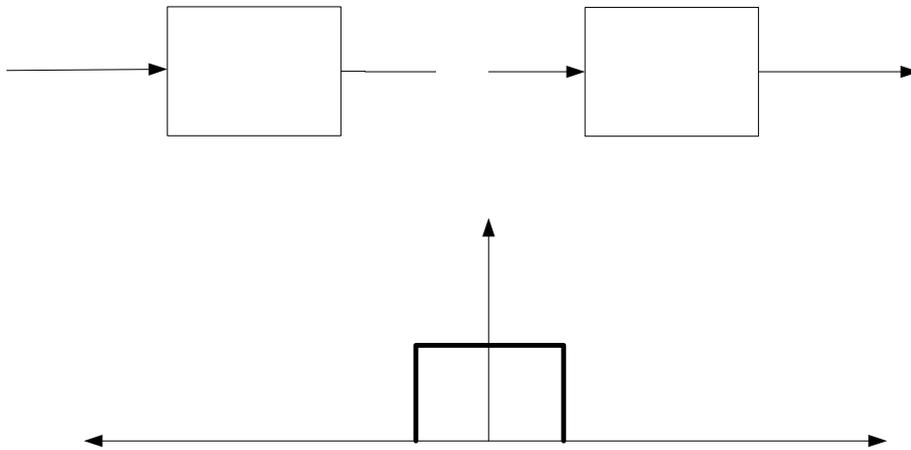
$$k_x = \left( \frac{\Delta}{\sqrt{12}} \right) \sqrt{\frac{1}{f_s}}$$

### 3.2.3 Ventajas del sobremuestreo

El sobremuestreo se da cuando las señales de interés están limitadas en banda a  $f_0$  mientras que la tasa de muestreo es  $f_s$ , donde  $f_s > 2f_0$  (siendo  $2f_0$  la frecuencia de Nyquist). Definimos la tasa de sobremuestreo, *OSR* (*oversampling ratio*, también aparece en la literatura identificada por *M*), como:

$$OSR \equiv \frac{f_s}{2f_0}$$

Después de la cuantización, una vez que las señales de interés están todas por debajo de  $f_0$ ,  $y_1(n)$  es filtrado por  $H(f)$  para generar la señal  $y_2(f)$ , como muestra la figura 3-3. Este filtro elimina el ruido de cuantización mayor que  $f_0$ .



**Figura 3-3** (a) Posible sistema de sobremuestreo sin conformación de ruido. (b) Respuesta frecuencial del filtro para eliminar gran parte del ruido de cuantización.

Asumiendo que la señal de entrada es una onda sinusoidal, su máximo valor de pico es  $A=2^N(\Delta/2)$ . Para este máximo de la onda sinusoidal, la potencia de la señal,  $P_s$ , es:

$$P_s = \left( \frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta 2^N}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\Delta^2 2^{2N}}{8}$$

La potencia de la señal dentro de  $y_2(n)$  permanece siendo la misma que anteriormente ya que asumimos que el contenido frecuencial de la señal está por debajo de  $f_0$ . Sin embargo, la potencia del ruido de cuantización es reducida a

$$P_e = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_e^2(f) |H(f)|^2 df = \int_{-f_0}^{f_0} k_x^2 df = \frac{2f_0}{f_s} \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{1}{OSR} \right)$$

De esta forma, duplicando  $OSR$  (es decir, muestreando a dos veces la tasa) se decreta la potencia del ruido de cuantización en un medio o, equivalentemente, 3dB (ó 0.5 bits).

También podemos calcular el máximo  $SNR$  (en dB) al ser la relación entre la potencia máxima de la señal sinusoidal y la del ruido de cuantización en la señal  $y_2(n)$ .

$$SNR_{\max} = 10 \log \left( \frac{P_s}{P_e} \right) = 10 \log \left( \frac{3}{2} 2^{2N} \right) + 10 \log(OSR)$$

lo que equivale también a

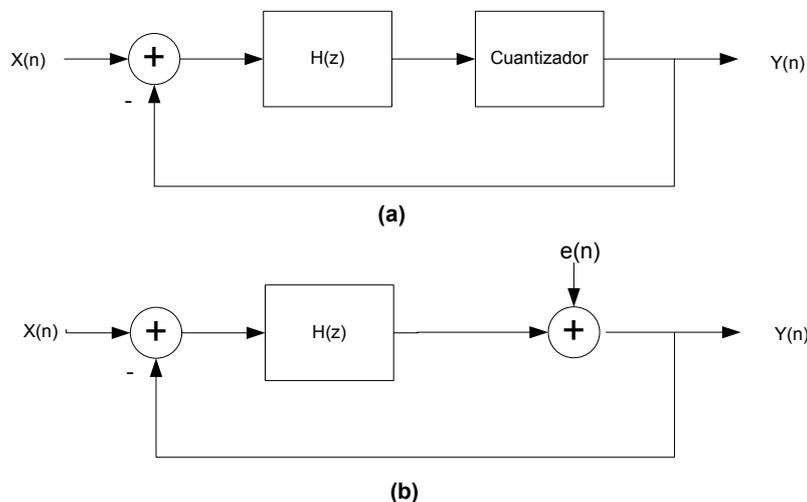
$$SNR_{\max} = 6.02N + 1.76 + 10 \log(OSR)$$



banda la señal de entrada a frecuencias inferiores a la mitad de la frecuencia de sobremuestreo,  $f_s$ . Cuando la tasa de sobremuestreo es grande, el filtro *anti-aliasing* puede ser bastante simple, tal como un *filtro RC paso-bajo*. A continuación del filtro *anti-aliasing*, la señal en tiempo continuo  $x_c(t)$ , es muestreada por un *sample&hold* (muestra y mantiene). Esta señal es después procesada por el modulador  $\Sigma\Delta$ , que convierte la señal analógica en una señal digital con conformación de ruido y baja resolución. El tercer bloque en el sistema es un *diezmador*. Éste convierte la señal digital sobremuestreada de baja resolución en una digital de alta resolución a una tasa de muestreo inferior que suele ser dos veces la frecuencia del ancho de banda deseado de la señal de entrada. El filtro de diezmado puede ser conceptualmente pensado como un filtro paso-baja formado por varias etapas. Es importante reseñar que en múltiples realizaciones, donde el modulador  $\Sigma\Delta$  es implementado mediante capacidades conmutadas, el bloque independiente correspondiente al *Sample&Hold* no es necesario, ya que la señal en tiempo continuo es inherentemente muestreada por los interruptores y la entrada de las capacidades de los SC (switched-capacitors)  $\Sigma\Delta$ .

### 3.3.1 Modulador sigma-delta

En la figura 3-5 se muestra un modulador  $\Sigma\Delta$  general con moldeado de ruido y su modelo lineal.



**Figura 3-5** Un modulador y su modelo lineal: (a) un modulador sigma-delta general (estructura interpolativa); (b) modelo lineal del modulador mostrando la adición de ruido de cuantización.

Esta configuración es conocida como *estructura interpolativa* y es análoga a un amplificador realizado empleando un amplificador operacional y realimentación. En esta analogía, la realimentación reduce el efecto del ruido de la etapa de salida del amplificador operacional en la señal de salida del amplificador en el bucle cerrado a bajas frecuencias cuando la ganancia del amplificador es elevada. A altas frecuencias, cuando la ganancia del amplificador es baja, el ruido no es reducido. Observar que el cuantizador es mostrado aquí para el caso general en el que se pueden dar varios niveles

de salida. Mientras la mayoría de los convertidores de sobremuestreo actuales hacen uso de cuantizadores de 1-bit (sólo dos niveles de salida) debido a razones ya discutidas (apartado 3.2.4), realmente no hay motivo por el que restringirnos a tales implementaciones. De hecho, los convertidores multibit, están ganando popularidad.

Considerando el modelo mostrado en la figura 3-5-b con dos entradas independientes (lo que es una aproximación, ver 3.2.1 y 3.2.2), podemos tomar una función de transferencia de la señal,  $S_{TF}(z)$ , y una función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$ .

$$S_{TF}(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)}$$

$$N_{TF}(z) \equiv \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{1+H(z)}$$

Observar que los ceros de la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$ , serán los mismos que los polos de  $H(z)$ . En otras palabras, cuando  $H(z)$  sea infinito, vemos que  $N_{TF}(z)$  es cero. Podemos escribir también la señal de salida como la combinación de la señal de entrada y la de ruido, siendo cada una filtrada por la correspondiente función de transferencia. Tenemos, en el dominio frecuencial:

$$Y(z) = S_{TF}(z)X(z) + N_{TF}(z)E(z)$$

Para conformar el ruido de cuantización de una forma eficaz, escogeremos  $H(z)$  tal que su magnitud sea grande de 0 a  $f_0$  (sobre la banda de frecuencia de interés). Con dicha elección, la función de transferencia de la señal,  $S_{TF}(z)$ , aproximará la unidad en la banda de interés de modo similar a un amplificador operacional en configuración de realimentación con ganancia unidad. Además, la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$ , se aproximará a cero en la misma banda de frecuencias. Por lo tanto, el ruido de cuantización es reducido en la banda frecuencial de interés mientras que la señal no se ve afectada. El ruido de alta frecuencia no es reducido por la realimentación ya que hay una pequeña ganancia de bucle a altas frecuencias. Sin embargo, un filtrado posterior puede eliminar el ruido de cuantización fuera de banda con mínimos efectos sobre la señal deseada.

Antes de escoger funciones específicas para  $H(z)$ , reseñar que el nivel máximo de la señal de entrada en banda,  $x(n)$ , debe permanecer dentro de los niveles máximos de la señal de realimentación,  $y(n)$ ; en caso contrario, la gran ganancia de  $H(z)$  provocará que la señal de entrada al cuantizador saturé. De hecho, muchos moduladores requieren que la señal de entrada sea significativamente más pequeña que los niveles extremos de salida del cuantizador para mantener el modulador estable. Sin embargo, el nivel máximo de la señal de entrada,  $x(n)$ , para frecuencias donde la ganancia de  $H(z)$  es pequeña, no provocará necesariamente que la señal de entrada al cuantizador saturé.

### 3.3.2 Modulador Sigma-Delta de primer orden

Para realizar un moldeado de ruido de primer orden, la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$ , debería tener un cero en continua ( $z=1$ ) por lo que el ruido de

cuantización es filtrado paso-alta. Dado que los ceros de  $N_{TF}(z)$  son iguales a los polos de  $H(z)$ , podemos obtener un moldeado de ruido de primer orden tomando  $H(z)$  como un integrador en tiempo discreto (polo en  $z=1$ ).

$$H(z) = \frac{1}{z-1}$$

El diagrama de bloques se muestra en la figura 3-6:

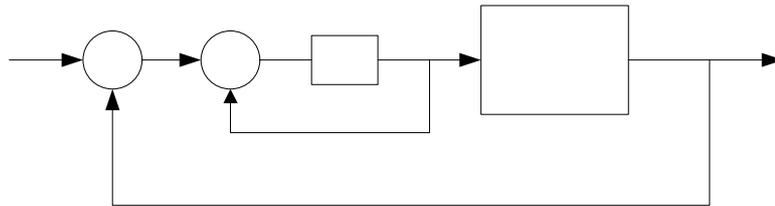


Figura 3-6 Modulador sigma-delta de primer orden

### 3.3.2.1 Estudio en dominio temporal

Desde el punto de vista del dominio temporal, si la realimentación opera correctamente y el sistema es estable, entonces la señal de entrada al cuantizador está acotada ( $\neq \infty$ ). Como el integrador tiene ganancia infinita en  $dc$ , el promedio del valor a la entrada del integrador en tiempo discreto debe ser exactamente cero (media de  $u(n)$ - $y(n)$  igual a cero). Este resultado implica que el valor medio (valor en  $dc$ ) de  $u(n)$  debe ser igual al valor medio (valor en  $dc$ ) de  $y(n)$ .

### 3.3.2.2 Función de transferencia

El primer paso en el diseño de los convertidores es la obtención de las ecuaciones teóricas de los mismos. Para ello se aplica la *transformada Z*, en la que los retrasos son fácilmente tratables. En cuanto a los cuantizadores, se considera el modelo ya visto en el que a la señal de entrada se le añade el ruido de cuantización. Un detalle importante a señalar en este punto es el tratamiento de los cuantizadores de 1-bit. Para fijar la pendiente de estos cuantizadores (indefinida en principio) se considera un bloque de ganancia delante de ellos. El valor de esta ganancia se toma como el inverso de la ganancia del bucle externo de la etapa completa. Consideraremos aquí las ganancias de los amplificadores para cada entrada.

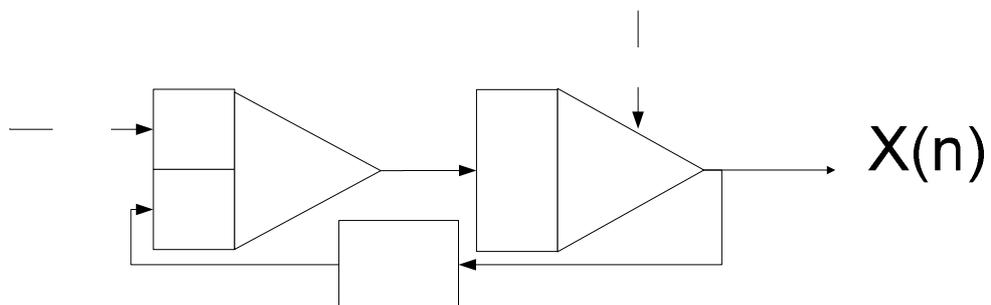


Figura 3-7 Modulador sigma-delta de primer orden

Desde el punto de vista del dominio frecuencial, la función de transferencia de la señal,  $S_{TF}(z)$ , viene dada por

$$S_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{g_1}{g_1'} H(z)}{1 + H(z)} = \frac{\frac{g_1}{g_1'} \frac{1}{(z-1)}}{1 + \frac{1}{(z-1)}} = \frac{g_1}{g_1'} z^{-1}$$

de donde hemos obtenido la condición de realización

$$\frac{g_1}{g_1'} = 1 \Rightarrow g_1' = g_1$$

tal que resulte

$$S_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1}$$

y la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$

$$N_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(z-1)}} = (1 - z^{-1})$$

Comprobamos que la función de transferencia de la señal es un simple retraso, mientras que la función de transferencia del ruido es un diferenciador en tiempo discreto (filtro paso-alto).

### 3.3.2.3 Relación señal ruido (SNR)

Para calcular la magnitud de la función de transferencia del ruido,  $|N_{TF}(f)|$ , sustituimos  $z = e^{j\omega T} = e^{j2\pi f / f_s}$

$$N_{TF} = 1 - e^{-j2\pi f / f_s} = \frac{e^{j\pi f / f_s} - e^{-j\pi f / f_s}}{2j} \times 2j \times e^{-j\pi f / f_s} = \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) \times 2j \times e^{-j\pi f / f_s}$$

Tomando la magnitud en ambos lados de la igualdad, tenemos una función paso-alta

$$|N_{TF}(f)| = 2 \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

La potencia del ruido de cuantización sobre la banda de frecuencias de 0 a  $f_0$  viene dada por

$$P_e = \int_{-f_0}^{f_0} S_e^2(f) |N_{TF}(f)|^2 df = \int_{-f_0}^{f_0} \left(\frac{\Delta^2}{12}\right) \frac{1}{f_s} \left[2 \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)\right]^2 df$$

y, haciendo la aproximación  $f_0 \ll f_s$  ( $OSR \gg 1$ ), podemos aproximar  $\sin((\pi f)/f_s)$  a  $(\pi f)/f_s$ , resultando

$$P_e \cong \left(\frac{\Delta^2}{12}\right)\left(\frac{\pi^2}{3}\right)\left(\frac{2f_0}{f_s}\right)^3 = \frac{\Delta^2 \pi^2}{36} \left(\frac{1}{OSR}\right)^3$$

Asumiendo que el máximo de la potencia de la señal es el obtenido anteriormente, el SNR máximo para este caso resulta

$$SNR_{\max} = 10 \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \log\left(\frac{3}{2} 2^{2N}\right) + 10 \log\left[\frac{3}{\pi^2} (OSR)^3\right]$$

o, equivalentemente

$$SNR_{\max} = 6.02N + 1.76 - 5.17 + 30 \log(OSR)$$

Observamos que duplicando el *OSR* se produce un incremento de *SNR* para el modulador de primer orden de 9dB o, equivalentemente, una ganancia de 1.5 bits/octava. Podemos comparar este resultado con el de 0.5 bits/octava obtenido para el sobremuestreo sin conformación de ruido (Ver 3.2.3).

### 3.3.3 Modulador Sigma-Delta de segundo orden

#### 3.3.3.1 Función de transferencia

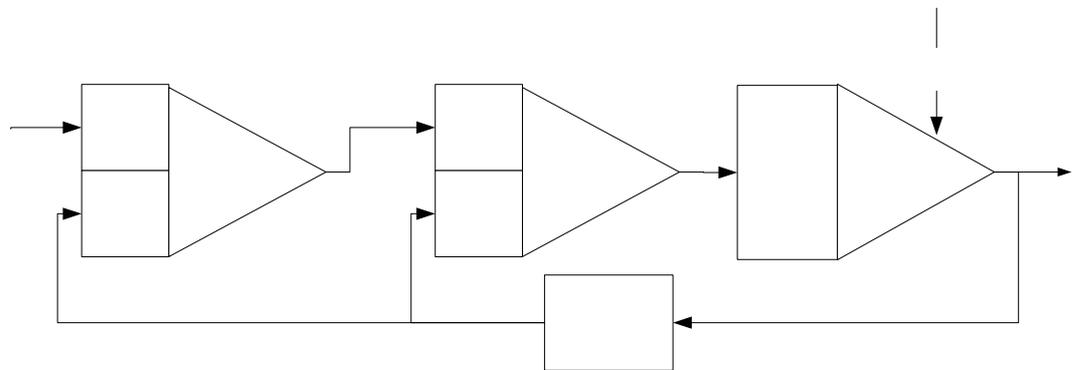


Figura 3-8 Modulador Sigma-delta de segundo orden

Tal y como describimos para el modulador de primer orden, también aquí, para compensar problemas de la pendiente del cuantizador de un bit, al modelo del cuantizador le añadimos una ganancia que se corresponde con la del bucle de realimentación más externo;  $1/(g_1 g_2)$ , en este caso.

La salida,  $Y(z)$ , será función de la entrada,  $X(z)$ , y el ruido de cuantización,  $E(z)$ ,

$$Y(z) = N_{TF}(z)E(z) + S_{TF}(z)X(z)$$

Desde el punto de vista del dominio frecuencial, la función de transferencia de la señal,  $S_{TF}(z)$ , viene dada por

$$S_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{g_1'}{g_1} H(z)^2}{1 + \frac{g_2'}{g_1 g_2} H(z) + H(z)^2} = \frac{\frac{g_1'}{g_1} z^{-2}}{1 + \left(\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2\right) z^{-1} + \left(\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2\right) z^{-2}}$$

y la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$

$$N_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \frac{g_2'}{g_1 g_2} H(z) + H(z)^2} = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 + \left(\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2\right) z^{-1} + \left(\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2\right) z^{-2}}$$

En este caso resultan las siguientes condiciones de realización

$$\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2 = 0 \Rightarrow g_2' = 2g_1 g_2$$

$$\frac{g_1'}{g_1} = 1 \Rightarrow g_1' = g_1$$

Necesarias para eliminar términos del denominador tal que las correspondientes funciones de transferencia queden

$$S_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-2}$$

$$N_{TF}(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1})^2$$

Así la salida  $Y(z)$  será

$$Y(z) = (1 - z^{-1})^2 E(z) + z^{-2} X(z)$$

### 3.3.3.2 Relación señal ruido (SNR)

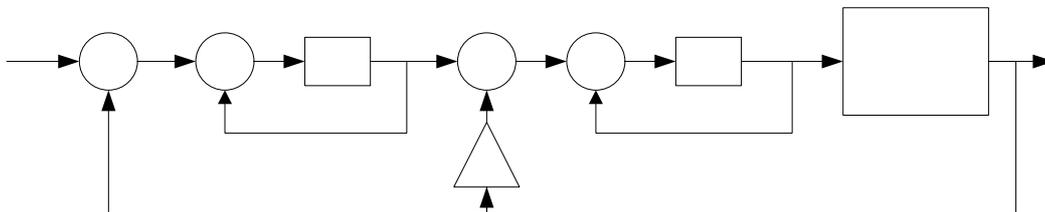


Figura 3-9 Modulador sigma-delta de segundo orden

El modulador mostrado en la figura 3-9 realiza un moldeado de ruido de segundo orden (la función de transferencia del ruido,  $N_{TF}(z)$ , es una función paso-alta de segundo orden). Nótese que hemos impuesto  $g_2' = 2g_1 g_2 = 2$  como consecuencia de lo deducido en el apartado anterior.

Para este modulador la función de transferencia de la señal viene dada por

$$S_{TF}(f) = z^{-2}$$

y la función de transferencia del ruido

$$N_{TF}(f) = (1 - z^{-1})^2$$

cuya magnitud resulta

$$|N_{TF}(f)| = \left[ 2 \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) \right]^2$$

resultando una potencia del ruido de cuantización en la banda de interés tal que

$$P_e \cong \frac{\Delta^2 \pi^4}{60} \left( \frac{1}{OSR} \right)^5$$

De nuevo, asumiendo que el máximo de potencia de la señal es el obtenido con anterioridad, el SNR máximo para este caso será

$$SNR_{\max} = 10 \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \log\left(\frac{3}{2} 2^{2N}\right) + 10 \log\left[\frac{5}{\pi^4} (OSR)^5\right]$$

o, equivalentemente

$$SNR_{\max} = 6.02N + 1.76 - 12.9 + 50 \log(OSR)$$

Podemos comprobar que doblando el OSR mejora el SNR para un modulador de segundo orden en 15dB o, una ganancia de 2.5 bits/octava.

### 3.3.4 Modulador Sigma-Delta de orden L

En el caso general, cuando hay L integradores, es decir, para moduladores de orden L, en caso de que el sistema sea estable, puede demostrarse que la potencia del ruido de cuantización en la banda de la señal viene dada aproximadamente por

$$P_e = \frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^{2L}}{2L+1} \left( \frac{2f_0}{f_s} \right)^{2L+1}$$

y la función de transferencia del ruido vendrá dada por

$$N_{TF}(z) = (1 - z^{-1})^L$$

Así pues, al aumentar el orden, L, del sistema, se incrementa la atenuación del ruido en las frecuencias más bajas (banda de la señal), lo que contribuye de forma positiva en la relación señal a ruido del modulador, y, por el contrario, en las frecuencias altas el ruido es amplificado.

Además, cada vez que se duplica el factor de sobremuestreo, la potencia de ruido se divide por el factor

$$\frac{P_e|_L^1}{P_e|_L^2} = \frac{\frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^{2L}}{2L+1} \left(\frac{2f_0}{f_s}\right)^{2L+1}}{\frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^{2L}}{2L+1} \left(\frac{2f_0}{2f_s}\right)^{2L+1}} = 2^{2L+1}$$

donde

$P_e|_L^1$  : Potencia del ruido para OSR

$P_e|_L^2$  : Potencia del ruido para (2·OSR)

Este decremento en la potencia de ruido también provoca una mejora de la relación señal a ruido del sistema, en concreto:

$$SNR|_2(dB) = SNR|_1(dB) + \Delta SNR(dB)$$

$$\Delta SNR(dB) = 10 \log(2^{2L+1}) = 3(2L+1)dB$$

donde

$SNR|_1$  : SNR para OSR

$SNR|_2$  : SNR para (2·OSR)

Considerando la relación existente entre el número de bits del cuantizador,  $N$ , y la SNR proporcionada por el sistema ( $SNR(dB) \sim 6 \cdot N$ ), el incremento de  $3 \cdot (2L+1)$  dB en la relación señal a ruido del modulador, al duplicar la tasa de muestreo, equivale a obtener una precisión extra de  $(L+0.5)$  bits.

No obstante, el hecho de que la SNR del modulador  $\Sigma\Delta$  aumente con el orden del sistema, no implica que sea preferible la utilización  $\Sigma\Delta$  de un de mayor orden en una determinada aplicación, puesto que existen dificultades para la implementación de sistemas de alto orden ( $L=3$ ) estables.

En los sistemas  $\Sigma\Delta$  de alto orden es necesario usar limitadores de amplitud para evitar problemas de inestabilidad. Los moduladores de alto orden sólo pueden ser condicionalmente estables, por lo que presentan una elevada sensibilidad a los parámetros del circuito.

Por este motivo nos centraremos en moduladores de primer y segundo orden (cuya estabilidad podremos garantizar) pero distribuidos en configuración cascada como veremos a continuación.

### 3.3.5 Modulador Sigma-Delta en cascada

Esta arquitectura también es conocida en la literatura como *multietapa* o *MASH*. En la figura podemos apreciar su estructura que atendiendo a la nomenclatura habitual de esta arquitectura denominaríamos “*modulador  $\Sigma\Delta$  en cascada  $L_1-L_2 \dots -L_N$* ” y que se basa en la conexión en cascada de moduladores de bajo orden (orden 1 ó 2 típicamente) donde podemos asegurar la estabilidad. La lógica digital será la encargada de eliminar el

ruido de cuantización resultante de cada etapa. El resultado final es que se obtiene la señal de entrada al modulador junto con el ruido de cuantización de la última etapa, el cual es conformado por una función que tiene igual orden al número de integradores de las cascada, por lo que será más eficiente esta conformación que si solo tuviésemos una etapa.

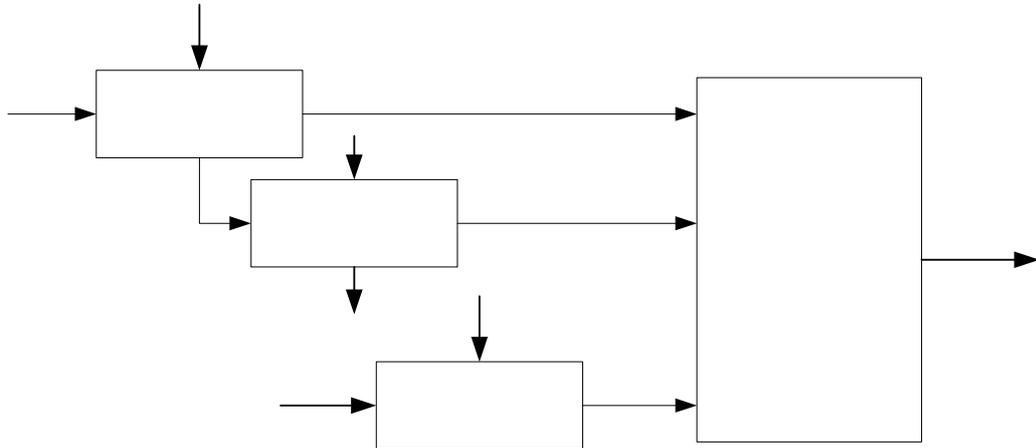


Figura 3-10 Diagrama de bloques de modulador Sigma-Delta en cascada  $L_1-L_2-\dots-L_N$

Considerando la implementación con un cuantizador de un solo bit, las principales ventajas/desventajas de esta arquitectura son:

- Ventajas:
  - Se obtienen  $SNR$  altos para factores de sobremuestreo ( $OSR$ ) de bajo valor.
  - Estabilidad garantizada (pues se basan en arquitecturas de lazo simple de bajo orden, y por tanto, estables).
  - Utilización del máximo rango de la señal de entrada.
- Desventajas:
  - Alta sensibilidad a ciertas no linealidades circuitales.

Una última característica a destacar de esta arquitectura es ~~X~~ que, si bien se complica la parte digital del CA/D al incluir una lógica de cancelación, esto favorece la integración en tecnología VLSI (Very Large Scale Integration) estándar y se beneficia de este modo del escalado tecnológico.

$e_1$

Sigma-

$X_2$

### 3.3.5.1 Modulador Sigma-Delta en cascada 2-2

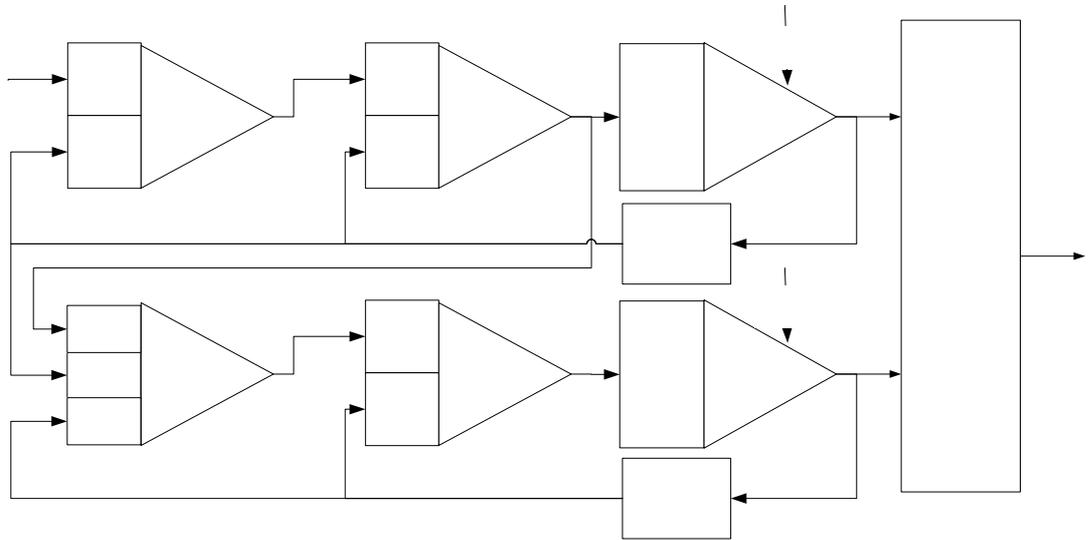


Figura 3-11 Esquema de un modulador sigma-delta cascada 2-2 con cuantizadores de 1-bit

Del modulador de segundo orden sabemos

$$Y_1(z) = (1 - z^{-1})^2 E_1(z) + z^{-2} X(z)$$

para lo cual vimos que debe cumplirse

$$\frac{g_2'}{g_1 g_2} - 2 = 0 \Rightarrow g_2' = 2g_1 g_2$$

$$\frac{g_1'}{g_1} = 1 \Rightarrow g_1' = g_1$$

De acuerdo al esquema de la figura, y sin más que operar y añadiendo una nueva condición de realización durante el desarrollo,  $g_4' = 2g_3'' g_4$ , para eliminar términos en “z” del denominador, se obtiene

$$Y_2(z) = \left( \frac{g_3 g_2 g_1 - g_3'}{g_3''} \right) z^{-4} X(z) + \left[ \left( \frac{g_3 g_2 g_1 - g_3'}{g_3''} \right) z^{-2} (1 - z^{-1})^2 - \left( \frac{g_3 g_2 g_1}{g_3''} \right) z^{-2} \right] E_1(z) + (1 - z^{-1}) E_2(z)$$

Ahora, mediante el bloque digital de cancelación, y tomando como entrada las salidas del modulador  $Y_1(z)$ ,  $Y_2(z)$  hemos de eliminar el ruido de cuantización correspondiente a la primera etapa de la cascada del modulador,  $E_1(z)$ .

Para ello tomamos la siguiente configuración para el bloque digital de cancelación

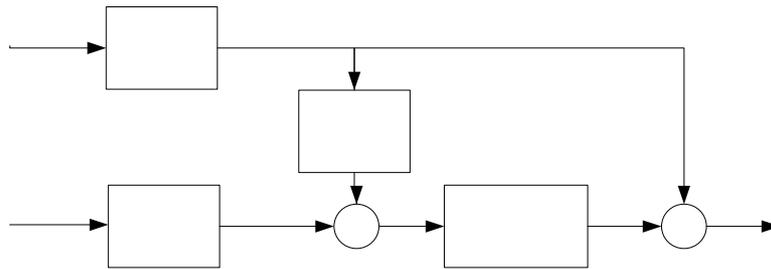


Figura 3-12 Bloque digital de cancelación para modulador sigma-delta cascada 2-2

Donde tenemos que

$$d_0 = \frac{g_3'}{g_1 g_2 g_3} - 1$$

$$d_1 = \frac{g_3''}{g_1 g_2 g_3}$$

$Y_1(z)$

y la salida  $Y(z)$  resulta

$$Y(z) = z^{-4} X(z) + \frac{g_3''}{g_1 g_2 g_3} (1 - z^{-1})^4 E_2$$

Observamos que la señal de entrada no tiene ninguna constante multiplicativa y que hemos conseguido anular el ruido de cuantización del primer cuantizador,  $E_1$ .

Por último, es importante reseñar que hemos considerado en este caso que todos los cuantizadores de la cascada son de 1-bit. Es habitual, no obstante, tomar el último de los cuantizadores de más de un bit para afinar la digitalización del ruido de la etapa anterior. En este caso no contaríamos con el bloque multiplicativo  $1/(g_3'' g_4)$  a la entrada del segundo cuantizador. Las condiciones de realización resultan, de este modo más restrictivas

$Y_2(z)$

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1' \\ g_2 &= 2g_1 g_2' \\ g_4 &= 2 \\ g_4 &= \frac{1}{g_3''} \end{aligned}$$

siendo la salida  $Y_2(z)$

$$Y_2(z) = (g_4 g_3 g_2 g_1 - g_4 g_3') z^{-4} X(z) + [(g_4 g_3 g_2 g_1 - g_4 g_3') z^{-2} (1 - z^{-1})^2 - (g_4 g_3 g_2 g_1) z^{-2}] E_1(z) + (1 - z^{-1}) E_2(z)$$

Por lo que respecta a la bloque digital de cancelación, éste sería de la misma estructura que el implementado anteriormente y sólo habríamos de ajustar los coeficiente  $d_0$  y  $d_1$  para eliminar el ruido de cuantización de la primera etapa.

### 3.3.5.2 Modulador Sigma-Delta en cascada 2-1-1

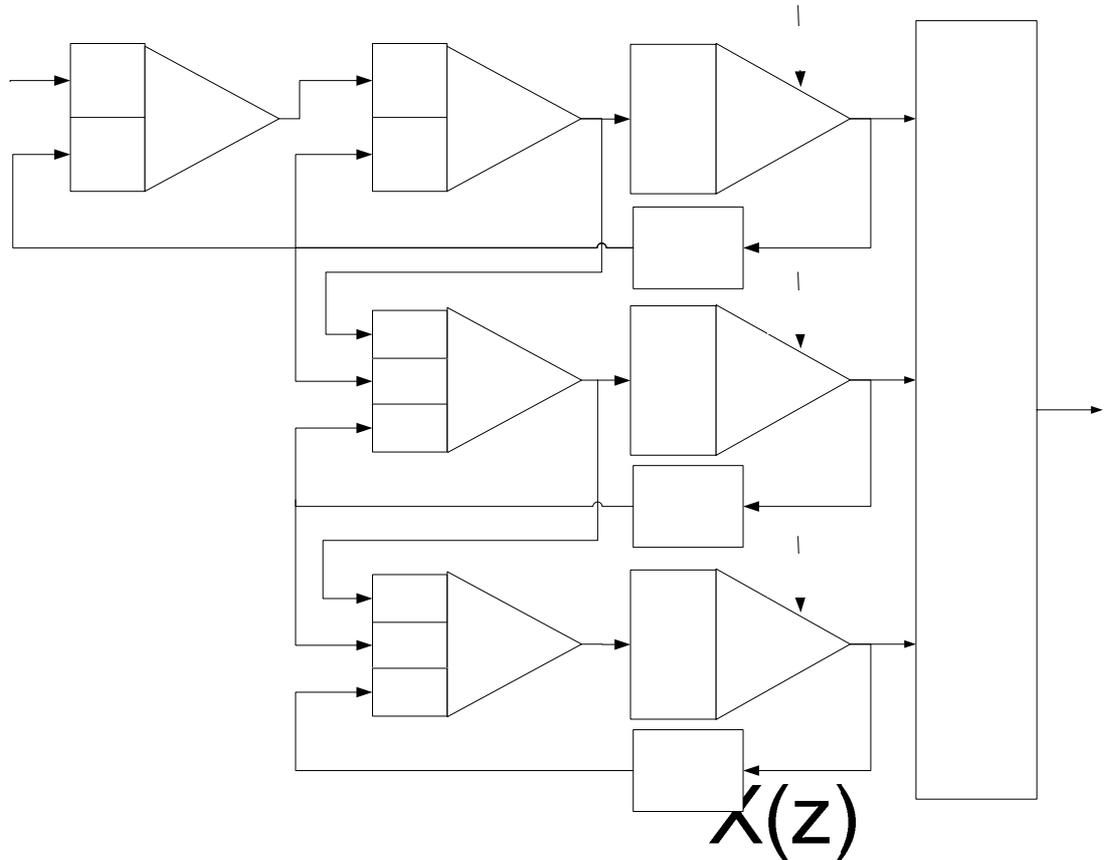


Figura 3-13 Modulador sigma-delta 2-1-1 con último cuantizador genérico

En la figura 3-13 se muestra el esquema de un modulador sigma-delta en cascada 2-2-2 con el último cuantizador genérico.

Mediante un desarrollo análogo al de los moduladores vistos anteriormente (orden 1, 2 y 2-2, ver apartados 3.3.2, 3.3.3 y 3.3.5.1 respectivamente) llegamos a las siguientes expresiones para las salidas:

$$Y_1(z) = (1 - z^{-1})^2 E_1(z) + z^{-2} X(z)$$

$$Y_2(z) = (1 - z^{-1}) E_2(z) + \left[ \frac{g_3 g_2 g_1 - g_3'}{g_3''} z^{-1} (1 - z^{-1})^2 - \frac{g_3 g_2 g_1}{g_3''} z^{-1} \right] E_1(z) + \frac{g_3 g_2 g_1 - g_3'}{g_3''} z^{-3} X(z)$$

$$Y_3(z) = (1 - z^{-1}) E_3(z) - g_4 g_3'' z^{-1} E_2(z)$$

donde para evitar la aparición de elementos en el denominador, se han hecho las siguientes suposiciones:

$$g_1 = g_1'$$

$$g_2 = 2g_1g_2'$$

$$g_4'' = 1$$

$$g_4' = g_4g_3''$$

Obsérvese que la salida  $Y_3(z)$  no depende ni de la entrada  $X(z)$  ni del ruido de cuantización de la primera etapa  $E_1(z)$ .

Vemos ahora cual será la estructura del bloque de cancelación de ruido que tendrá como entrada  $Y_1, Y_2, Y_3$ :

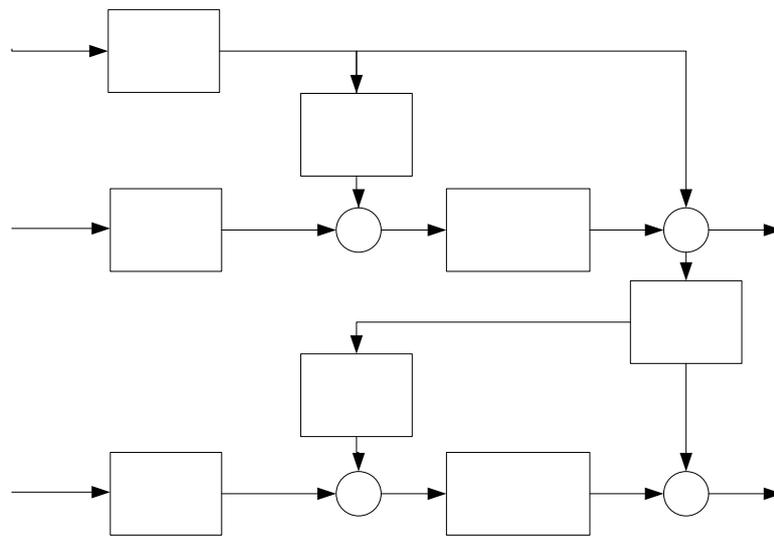


Figura 3-14 Bloque de cancelación de ruido para modulador sigma-delta 2-1-1

Donde los coeficientes son:

$$d_0 = \frac{g_3'}{g_1g_2g_3} - 1$$

$$d_1 = \frac{g_3''}{g_1g_2g_3}$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = \frac{g_4''}{g_1g_2g_3g_4}$$

y la salida total del modulador  $Y_{211}(z)$  resulta

$$Y_{211}(z) = z^{-4}X(z) + \frac{g_4''}{g_1g_2g_3g_4}(1 - z^{-1})^4 E_3$$

Nótese que este ejemplo contempla y también el modulador 2-1 ya que podemos tomar la salida  $Y_{21}(z)$  de la figura 3-14 que resulta:

$$Y_{21}(z) = z^{-3}X(z) + \frac{g_3''}{g_1 g_2 g_3} (1 - z^{-1})^3 E_2$$

### 3.3.5.3 Modulador Sigma-Delta en cascada orden L

De forma análoga a la desarrollada en los casos anteriores, una vez que se tiene la salida de cada una de las etapas, se calculan los coeficientes y los bloques que hay que colocar en la parte digital para cancelar los errores de cuantización de las etapas intermedias. La salida total debe tener la forma:

$$Y(z) = z^{-L}X(z) + K(1 - z^{-1})^{-L}E_N(z)$$

Donde  $L$  es el orden total del convertidor y  $N$  el número de etapas. En el caso de la arquitectura 2-2,  $L$  vale 4 y  $N$  vale 2, mientras que para la 2-1-1,  $L$  vale 4 y  $N$  vale 3. La constante  $K$  aparece tras la cancelación del ruido y, tal y como se desprende de los ejemplos anteriores, está relacionada con la inversa de los coeficientes de cada etapa. Si su producto es un valor pequeño, su inverso será muy grande. Esto hace que el ruido se vea magnificado por una constante mayor que la unidad. Por tanto hay una pérdida en la  $SNR$  con respecto al caso ideal.

### 3.3.5.4 Selección de coeficientes

Aunque el proyecto en cuestión no contempla el estudio en sí de los moduladores sigma-delta sino el proporcionar una herramienta de simulación para ello, comentaremos aquí algunos aspectos relativos a dicho estudio dado que es interesante tenerlos en mente para que las herramientas proporcionadas resulten lo más útiles posible.

Para la elección de los valores de los coeficientes a la entrada de los integradores, se han de tener en cuenta las siguientes condiciones:

- Deben cumplirse las condiciones impuestas por las ecuaciones.
- Deben adaptar la señal a la entrada de los integradores para que a la salida de los mismos no sobrepase el rango impuesto por la tensión de alimentación.
- Los valores han de ser lo mayor posible para que la inversa del producto de los coeficientes directos sea lo menor posible.
- En lo posible, elegirlos de modo que los coeficientes digitales (función de los valores analógicos) queden potencia de dos. Esto simplifica enormemente las operaciones digitales ya que no harían falta multiplicadores, sino simplemente registros de desplazamiento.
- Los valores han de ser sintetizables en la tecnología de realización escogida.

Dichas condiciones entran en conflicto unas con otras, ya que el adaptar la señal de entrada exige valores pequeños de los coeficientes (especialmente en las etapas de segundo orden), pero por otro lado, queremos los valores tan grandes como sea posible. Además las relaciones entre los coeficientes impuestos por las ecuaciones nos impiden cambiarlos de forma independiente.

### **3.3.5.5 Sensibilidad de parámetros**

Vemos otro aspecto importante relativo al estudio de los moduladores sigma-delta.

La sensibilidad de cada parámetro viene determinada por su influencia en la cancelación de ruido de cuantización de las distintas etapas. Lógicamente, el ruido más importante en el sistema es el de cuantización de la primera etapa. Por tanto, las variables que estén relacionadas de una u otra forma con este ruido serán las más sensibles.

En general, el ruido de cuantización puede aparecer en la salida por varios motivos:

- Errores en la cancelación de ruido en la parte digital: Los parámetros digitales se determinan a partir de los valores de los parámetros analógicos. Una variación en cualquiera de ellos hace que la cancelación no sea perfecta.
- Comportamiento indeseado de las etapas: Una variación en los parámetros que aparecen en las ecuaciones de comportamiento de las etapas hace que dichas condiciones no se cumplan. Aparecen denominadores en las funciones de transferencia de señal y ruido que no se espera en la parte digital (cuyos bloques están calculados sobre el comportamiento correcto de todas las etapas). Por tanto, la cancelación tampoco será exacta y parte del ruido de cuantización pasará a la salida.
- Paso de la señal de entrada a la tercera etapa: En el ejemplo correspondiente al modulador 2-1-1 (apartado 3.3.5.2) los coeficientes están escogidos de forma que la señal de entrada no entra en la tercera etapa. Esto simplifica enormemente la parte digital de cancelación de ruido

### **3.3.6 No linealidades**

Comentamos a continuación algunas de las no linealidades presentes en los moduladores sigma-delta.

#### **3.3.6.1 Variaciones en los coeficientes de los integradores**

Los coeficientes de ganancia de los integradores modelan diversos aspectos relativos a la implementación circuital del modulador por lo que no tendremos un control exacto sobre el valor de los mismos. Esta no linealidad corresponde a la variación de dichos coeficientes respecto a los valores deseados por desapareamiento de elementos que dependerán de la tecnología escogida.

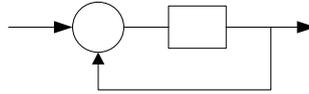
#### **3.3.6.2 Pérdidas en los integradores**

La ganancia real en continua de los amplificadores no es infinita y el modulador se verá afectado por este hecho.

Para el caso ideal, ganancia infinita, teníamos:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Que se corresponde con la siguiente estructura:

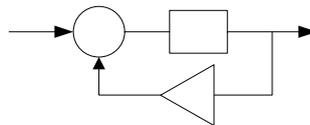


**Figura 3-15**  $H(z)$ , modelo ideal

Sin embargo, en la práctica la ganancia del amplificador limita la ganancia en continua del integrador. Esto produce pérdidas en los integradores. La función de transferencia del integrador, teniendo en cuenta este efecto, puede modelarse como:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - (1 - \varepsilon)z^{-1}}$$

que se corresponde con el siguiente diagrama de bloques:



**Figura 3-16**  $H(z)$ , modelo con pérdidas

Observamos como se desplaza el polo de  $z = -1$ .

### 3.3.6.3 Jitter

Una posible fuente de aumento de potencia del ruido de cuantización es la resultante de que se produzca un muestreo no uniforme de la señal de entrada debido al efecto jitter sobre el reloj.

Este efecto se da cuando las muestras de la señal de entrada no son tomadas a intervalos equiespaciados de tiempo ( $T_s \neq cte$ , ver apartado 2.2.2).

Si no muestreamos a intervalos regulares de tiempo, la relación señal ruido a la salida se verá afectada.

