

# Capítulo 4

## Modelo Analítico

### 4.1. Modelo del NC-PDI

El proceso de detección se puede modelar analíticamente [1][6]. Se considera que, en presencia de errores de frecuencia, es más apropiado utilizar un diseño basado en un detector NC-PDI.

- **Probabilidad de Falsa Alarma**

Sea  $H_0$  la hipótesis de señal sin sincronismo. Se puede modelar estadísticamente las salidas del integrador como variables aleatorias gaussianas con media cero y varianza igual a la varianza del ruido AWGN.

Indicando con  $\Lambda$  la variable de decisión del PDI, la función de probabilidad bajo  $H_0$  es

$$p_{\Lambda|H_0}(\Lambda) = \frac{\Lambda^{M-1} e^{-\Lambda/2L\sigma^2}}{(2L\sigma^2)^M (M-1)!} \quad (4.1)$$

donde  $L$  es la longitud de la señal,  $\sigma^2$  la varianza total de ruido normalizada a  $L$  y  $M$  es la longitud de PDI. Integrando entre el umbral de decisión  $\xi$  e  $\infty$ , la probabilidad de falsa alarma es

$$P_{fa} = \int_{\xi}^{\infty} p_{\Lambda|H_0}(\Lambda) d\Lambda = e^{-\xi/2L\sigma^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(\xi/2L\sigma^2)^k}{k!} \quad (4.2)$$

- **Probabilidad de detección fallida**

Sea  $H_1$  la hipótesis de sincronismo de señal. Sin tener en cuenta el error de frecuencia, se puede modelar estadísticamente las salidas del integrador como variables aleatorias gaussianas con varianza igual a la varianza del ruido AWGN y media no nula.

Indicando con  $\Lambda$  la variable de decisión del PDI, la función de probabilidad bajo  $H_1$  es

$$p_{\Lambda|H_1}(\Lambda) = \frac{1}{2L\sigma^2} \left( \frac{\Lambda}{ML^2E_s(1-|\delta|^2)} \right)^{\frac{M-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\Lambda + ML^2E_s(1-|\delta|^2)}{2L\sigma^2} \right\} I_{M-1} \left( \frac{\sqrt{\Lambda ML^2E_s(1-|\delta|^2)}}{L\sigma^2} \right) \quad (4.3)$$

donde  $I_{M-1}(x)$  es la función de Bessel modificada de primer modo de orden  $M-1$ ,  $E_s$  es la energía de símbolo y  $\delta$  es el desplazamiento temporal entre la señal recibida y la réplica generada localmente. La probabilidad de detección correcta resulta ser

$$P_d = \int_{\xi}^{\infty} p_{\Lambda|H_1}(\Lambda) d\Lambda = Q_M \left( \frac{\sqrt{MLE_s(1-|\delta|^2)}}{\sigma}, \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{L}\sigma} \right) \quad (4.4)$$

donde  $Q_M(a, b)$  es la función  $Q$  de Marcum generalizada de orden  $M$ , definida como

$$Q_M(a, b) = \int_b^{\infty} x \left( \frac{x}{a} \right)^{M-1} \exp \left( -\frac{x^2 + a^2}{2} \right) I_{M-1}(ax) dx \quad (4.5)$$

#### 4.1.1. Criterio MAX

La aplicación del criterio MAX se puede considerar como caso particular del criterio TC con umbral igual a cero ( $\xi = 0$ ). Siendo  $P_{x_1, c}$  la probabilidad de una celda en el primer dwell de nuestro proceso, la probabilidad de detección y falsa alarma en la estrategia de verificación simple son

$$P_{d_1, c} = \int_0^{\infty} P(u|H_1) \left( \int_0^u P(x|H_0) dx \right)^{L_F-1} du \quad (4.6)$$

$$P_{fa1,c} = (L_F - 1) \int_0^\infty P(u|H_0) \left( \int_0^u P(x|H_1) dx \right) \left( \int_0^u P(x|H_0) dx \right)^{L_F-2} du \quad (4.7)$$

donde  $L_F$  es la longitud de trama (que es igual a la región de incertidumbre) y  $P(x|H_i)$  es la probabilidad de la variable de detección bajo la hipótesis  $H_i$ ,  $i = 0, 1$ . Tras diversas manipulaciones, obtenemos las expresiones finales:

$$P_{d1,c} = \int_0^\infty \frac{1}{2L\sigma^2} \left( \frac{u}{ML^2E_s} \right)^{\frac{M-1}{2}} \exp\left\{ -\frac{u + ML^2E_s}{2L\sigma^2} \right\} I_{M-1} \left( \frac{\sqrt{uML^2E_s}}{L\sigma^2} \right) \left( 1 - e^{-u/2L\sigma^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(u/2L\sigma^2)^k}{k!} \right)^{L_F-1} du \quad (4.8)$$

$$P_{fa1,c} = (L_F - 1) \int_0^\infty \frac{u^{M-1} e^{-u/2L\sigma^2}}{(2L\sigma^2)^M (M-1)!} e^{-u/2L\sigma^2} \left[ 1 - Q_M \left( \frac{\sqrt{MLE_s}}{\sigma}, \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{L}\sigma} \right) \right] \left( 1 - e^{-u/2L\sigma^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(u/2L\sigma^2)^k}{k!} \right)^{L_F-2} du \quad (4.9)$$

Para el caso de verificación paralela, la expresión de la probabilidad de detección se modifica. Sin embargo, la probabilidad de falsa alarma permanece igual (4.9). La siguiente expresión muestra la probabilidad de detección para  $n = 3$ .

$$P_{d1,c} = \int_0^\infty P(u|H_1) \left( \int_0^u P(x|H_0) dx \right)^{L_F-1} du + \int_0^\infty P(u|H_0) \left( \int_0^u P(x|H_1) dx \right) \left( \int_0^u P(x|H_0) dx \right)^{L_F-2} du + \int_0^\infty P(u|H_0) \left( \int_0^u P(x|H_0) \left( \int_0^x P(y|H_1) dy \right) dx \right) du \quad (4.10)$$

### 4.1.2. Criterio TC

Este criterio se aplica en el segundo dwell (ver Sec. 3.3.2). En este caso, las expresiones son similares a las del detector NC-PDI. Suponiendo una celda por símbolo y  $\delta$  igual a 0, la probabilidad de una celda (detección correcta o falsa alarma) en el segundo dwell,  $P_{x_2,c}$  es

$$P_{d_2,c} = Q_M \left( \frac{\sqrt{MLE_s}}{\sigma}, \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{L}\sigma} \right) \quad (4.11)$$

$$P_{fa_2,c} = e^{-\xi/2L\sigma^2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(\xi/2L\sigma^2)^k}{k!} \quad (4.12)$$

donde  $\xi$  es el umbral de detección.

## 4.2. Técnica del Grafo de Flujo

El procedimiento de adquisición se puede modelar como una cadena de Markov. El proceso es semi-Markov cuando el tiempo necesario para abandonar un estado no es constante. Se puede representar el proceso de Markov con un grafo de flujo. Los estados de la cadena se convierten en los nodos del grafo, interconectados por flechas con una ganancia apropiada. Las ganancias tienen siguiente forma genérica:

$$H(z) = P_b z^{T_b}$$

siendo  $P_b$  la probabilidad asociada con la transición,  $z$  la variable del dominio transformado y  $T_b$  el tiempo asociado a esa transición. La función de transferencia del grafo es la función de generación de la cadena de Markov.

Sea  $P_{acq}(z)$  la función de generación del grafo de flujo. Si se conoce la probabilidad de adquisición  $P_{acq}(z)$ , se puede encontrar de forma inmediata el tiempo medio de adquisición derivando y particularizando para  $z = 1$ :

$$\bar{T}_{acq} = E\{T_{acq}\} = \left[ \frac{dP_{acq}(z)}{dz} \right]_{z=1} \quad (4.13)$$

Considerando las dos siguientes hipótesis, obtendremos la expresión del tiempo medio de adquisición para cada estrategia.

- Sólo hay una celda en la región de incertidumbre que satisface la condición S (2.1), la llamaremos celda- $S$
- Todas las variables testeadas son estadísticamente independiente.

### 4.2.1. Estrategia de Verificación Simple

La Figura 4.1 representa el grafo de flujo para la estrategia de verificación simple (ver Sección 3.3.2).  $n$  denota el número de variables que provienen del criterio MAX, en este caso  $n = 1$ .

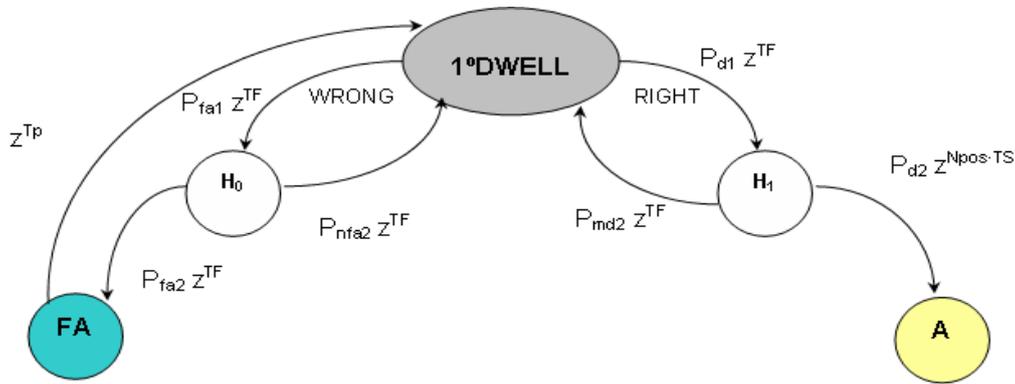


Figura 4.1: Grafo para  $n = 1$

La región de incertidumbre contiene  $L_F - 1$  celdas  $H_0$  (celdas de no sincronismo) y una celda  $H_1$  (correspondiente a la celda de sincronismo).  $T_s$  es el tiempo de símbolo,  $T_F$  es el tiempo de trama,  $T_p$  es el tiempo de penalización para recuperarse del suceso de falsa alarma (para simplificar lo modelamos con un valor fijo igual a  $2T_F$ ) y  $N_{pos}$  es la posición de adquisición en la región de incertidumbre.

- *Modo de búsqueda*

Dos eventos independientes son posibles: detección correcta  $P_{d1}$  y falsa alarma  $P_{fa1}$

$$P_{d1} = P_{d1,c} \quad P_{fa1} = P_{fa1,c} \quad (4.14)$$

donde  $P_{d1,c}$  y  $P_{fa1,c}$  son las expresiones (4.8) y (4.9) respectivamente, y  $P_{d1} + P_{fa1} = 1$ .

■ *Modo de verificación*

Dos eventos independientes son posibles analizando el estado  $H_1$ :

1. Detección correcta: la variable supera el umbral con probabilidad (4.11), es decir:

$$P_{d_2} = P_{d_2,c} \quad (4.15)$$

2. Detección fallida: La variable no supera el umbral con probabilidad

$$P_{md_2} = P_{md_2,c} = 1 - P_{d_2,c} \quad (4.16)$$

Dos eventos son posibles analizando el estado  $H_0$ :

1. Falsa alarma: La variable supera el umbral con probabilidad (4.12), es decir.

$$P_{fa_2} = P_{fa_2,c} \quad (4.17)$$

2. Rechazo correcto: la variable no supera al umbral con probabilidad

$$P_{nfa_2} = P_{nfa_2,c} = 1 - P_{fa_2,c} \quad (4.18)$$

Reduciendo el grafo a su función de transferencia y usando (4.13), obtenemos la expresión para el tiempo medio de adquisición:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{acq}(N_{pos}) = \frac{P_{d_1}P_{d_2}}{P_{den}^2} & \left\{ T_p P_{FA} [2(1 - P_{d_1}P_{md_2})(1 - P_{fa_1}) - P_{den}] + \right. \\ & T_F [2(1 - P_{fa_1})(2P_{fa_1} + P_{d_1}P_{md_2}(1 - 4P_{fa_1})) \\ & \left. + (1 - 3P_{fa_1})P_{den}] + N_{pos}T_s(1 - P_{fa_1})P_{den} \right\} \quad (4.19) \end{aligned}$$

donde

$$P_{den} = (1 - 2P_{fa_1})(1 - P_{d_1}P_{md_2}) \quad (4.20)$$

$$P_{FA} = P_{fa_1}P_{fa_2} \quad (4.21)$$

Se puede observar que  $\bar{T}_{acq}$  depende de la posición de adquisición  $N_{pos}$ . Para eliminar esta dependencia consideramos  $N_{pos}$  como una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $[1, L_F]$ . De este modo,

$$\bar{T}_{acq} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_{acq}(N_{pos})P_{N_{pos}}dN_{pos} \quad (4.22)$$

donde  $P_{N_{pos}}$  es la función densidad de probabilidad de la posición de adquisición.

Finalmente, la expresión para el tiempo medio de adquisición es:

$$\bar{T}_{acq} = \frac{P_{d1}P_{d2}}{L_F P_{den}^2} \left\{ L_F \left[ T_p P_{FA} \left[ 2(1 - P_{d1}P_{md2})(1 - P_{fa1}) - P_{den} \right] + T_F \left[ 2(1 - P_{fa1})(2P_{fa1} + P_{d1}P_{md2}(1 - 4P_{fa1})) + (1 - 3P_{fa1})P_{den} \right] \right] + \frac{L_F^2}{2} T_s (1 - P_{fa1})P_{den} \right\} \quad (4.23)$$

### 4.2.2. Estrategia de Verificación Paralela

La Figura 4.2 representa el grafo de flujo para la estrategia de verificación paralela (ver Sección 3.3.2).

La región de incertidumbre contiene  $L_F - 1$  celdas  $H_0$  (celdas de no sincro-

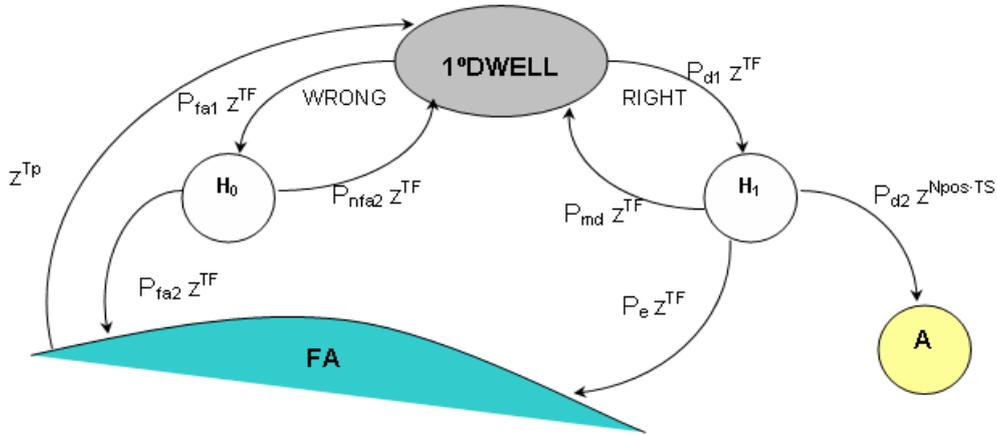


Figura 4.2: Grafo con  $n \neq 1$

nismo) y una celda  $H_1$  (correspondiente a la celda de sincronismo).  $T_s$  es el tiempo de símbolo,  $T_F$  es el tiempo de trama,  $T_p$  es el tiempo de penalización para recuperarse del suceso de falsa alarma (para simplificar lo modelamos con un valor fijo igual a  $2T_F$ ) y  $N_{pos}$  es la posición de la última celda testada por el criterio TC en la región de incertidumbre.

En esta estrategia, las probabilidades del segundo dwell no dependen únicamente de una celda; depende de  $n$  celdas provenientes del criterio MAX. Para el estudio de esta estrategia hay que hacer las siguientes consideraciones:

1. Sea  $P_{x, c}$  la probabilidad de sólo una celda.
2. Sea  $P_i$  la probabilidad de que la variable acumulada  $u_i$  sea la mayor de las restantes con  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Esto es,

$$P_i = \int_0^\infty P_{\Lambda|H_1}(u) \left[ \int_0^u P_{\Lambda|H_0}(x) dx \right]^i du \quad (4.24)$$

■ *Modo de búsqueda*

Dos eventos independientes son posibles: detección correcta  $P_{d_1}$  y falsa alarma  $P_{fa_1}$

$$P_{d_1} = P_{d_1, c} \quad P_{fa_1} = P_{fa_1, c} \quad (4.25)$$

donde  $P_{d_1, c}$  y  $P_{fa_1, c}$  son las expresiones (4.10) y (4.9) respectivamente, y  $P_{d_1} + P_{fa_1} = 1$ .

■ *Modo de verificación*

En este caso las probabilidades son más complejas, no son inmediatas. A continuación, podemos observar un ejemplo para  $n = 3$ , después generalizaremos las expresiones de probabilidad obtenidas. En el Cuadro 4.1 mostramos todas las combinaciones posibles. Partiendo del estado  $H_1$ , se diferencian tres eventos:

1. Detección correcta: la celda- $S$  supera el umbral y el valor de las otras dos variables son menores que el valor de la celda- $S$ .

$$P_{d_2} = P_{d_2, c} [P_{nfa_2, c}^2 P_0 + 2P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c} P_1 + P_{fa_2, c}^2 P_2] \quad (4.26)$$

Observar que esta expresión (4.26) es similar al binomio de Newton.

2. Detección fallida: las tres están por debajo del umbral pero el valor de la celda  $S$  es el mayor.

$$P_{md_2} = P_{md_2, c} P_{nfa_2, c}^2 P_2 \quad (4.27)$$

DE $H_1$	DE $H_0$
$P_{d_2, c} P_{fa_2, c} P_{fa_2, c}$	$P_{fa_2, c} P_{fa_2, c} P_{fa_2, c}$
$P_{d_2, c} P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c}$	$P_{fa_2, c} P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c}$
$P_{d_2, c} P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c}$	$P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c}$
$P_{d_2, c} P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c}$	$P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c}$
$P_{md_2, c} P_{fa_2, c} P_{fa_2, c}$	$P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c} P_{fa_2, c}$
$P_{md_2, c} P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c}$	$P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c} P_{nfa_2, c}$
$P_{md_2, c} P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c}$	$P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c} P_{fa_2, c}$
$P_{md_2, c} P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c}$	$P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c} P_{nfa_2, c}$

Cuadro 4.1: Probabilidades de transición para  $n = 3$ 

- Adquisición errónea: al menos una de las variables de la celda- $\bar{S}$  es mayor que la celda- $S$ . Esto sucede con la siguiente probabilidad

$$P_e = 1 - P_{d_2} - P_{md_2} \quad (4.28)$$

Testeando  $H_0$ , se diferencian dos eventos:

- Rechazo correcto: Todas las variables están por debajo del umbral.

$$P_{nfa_2} = P_{nfa_2, c}^3 \quad (4.29)$$

- Falsa alarma: al menos una variable de las variables acumuladas supera el umbral.

$$P_{fa_2} = 1 - P_{nfa_2} = 1 - P_{nfa_2, c}^3 \quad (4.30)$$

Ahora, generalizando para cualquier  $n$ , testeando el estado  $H_1$ :

- Detección correcta: la celda- $S$  supera el umbral y el valor de las otras  $n - 1$  variables acumuladas es menor que el valor de la celda- $S$ .

$$P_{d_2} = P_{d_2, c} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P_{nfa_2, c}^{n-1-k} P_{fa_2, c}^k P_k \quad (4.31)$$

donde  $P_{d_2, c}$  es la expresión (4.11)

2. Detección fallida: las  $n$  variables acumuladas están por debajo del umbral pero el valor de la celda- $S$  es el mayor.

$$P_{md_2} = P_{md_2, c} P_{nfa_2, c}^{n-1} P_{n-1} \quad (4.32)$$

donde  $P_{md_2, c} = 1 - P_{d_2, c}$ .

3. Adquisición errónea: al menos una de la celdas- $\bar{S}$  es mayor que la celda- $S$ . Esto sucede con la siguiente probabilidad

$$P_e = 1 - P_{d_2} - P_{md_2} \quad (4.33)$$

Testeando  $H_0$ , se diferencian dos eventos:

1. Rechazo correcto: todas las  $n$  variables acumuladas están por debajo del umbral.

$$P_{nfa_2} = P_{nfa_2, c}^n \quad (4.34)$$

2. Falsa alarma: al menos una variable de las variables acumuladas supera el umbral.

$$P_{fa_2} = 1 - P_{nfa_2} = 1 - P_{nfa_2, c}^n \quad (4.35)$$

Reduciendo el grafo a su función de transferencia y usando (4.13), obtenemos la expresión para el tiempo medio de adquisición:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{acq}(N_{pos}) = \frac{P_{d_1} P_{d_2}}{P_{den}^2} & \left\{ T_p \left[ (1 - P_{fa_1}) (2P_{FA} (1 - P_{d_1} P_{md_2}) \right. \right. \\ & \left. \left. + P_{d_1} P_e (1 - 2P_{fa_1} - 2P_{fa_1} P_{fa_2})) - P_{FA} P_{den} \right] + \right. \\ & T_F \left[ 2(1 - P_{fa_1}) (2P_{fa_1} + P_{d_1} (1 - 4P_{fa_1}) (P_{md_2} + P_e)) \right. \\ & \left. \left. + (1 - 3P_{fa_1}) P_{den} \right] + N_{pos} T_s (1 - P_{fa_1}) P_{den} \right\} \quad (4.36) \end{aligned}$$

donde, en este caso,

$$P_{den} = (1 - 2P_{fa_1}) (1 - P_{d_1} (P_{md_2} + P_e)) \quad (4.37)$$

$$P_{FA} = P_{fa_1}P_{fa_2} \quad (4.38)$$

Obtenemos la expresión final eliminado la dependencia con  $N_{pos}$ .

$$\begin{aligned} \bar{T}_{acq} = \frac{P_{d_1}P_{d_2}}{L_F P_{den}^2} & \left\{ L_F \left[ T_p \left[ (1 - P_{fa_1})(2P_{FA}(1 - P_{d_1}P_{md_2}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + P_{d_1}P_e(1 - 2P_{fa_1} - 2P_{fa_1}P_{fa_2})) - P_{FA}P_{den} \right] + \right. \\ & \left. T_F \left[ 2(1 - P_{fa_1})(2P_{fa_1} + P_{d_1}(1 - 4P_{fa_1})(P_{md_2} + P_e)) \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (1 - 3P_{fa_1})P_{den} \right] \right] + \frac{L_F^2}{2} T_s (1 - P_{fa_1})P_{den} \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$