

3. PRECODIFICADORES LINEALES DE BLOQUES PARA MÍNIMA BER CON ECUALIZACIÓN ZF

3.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado, determinaremos el precodificador lineal que minimiza la tasa de error de bit para moderadas y elevadas relaciones señal ruido en sistemas de transmisión por bloques con ecualización cero forzado y detección por umbral.

El diseño es determinado para los dos esquemas estándares de eliminación de interferencia interbloque, es decir, relleno de ceros y prefijo cíclico.

Veremos como ambos precodificadores MBER (ZP y CP), proveen tasas de error sustancialmente menores que los esquemas estándares de transmisión por bloques, como es el caso de la modulación por división ortogonal en frecuencia OFDM. Las correspondientes ganancias en SNR, pueden llegar a ser del orden de varios decibelios.

Analizaremos también como el precodificador MBER que se vale de prefijo cíclico puede ser obtenido modificando en dos etapas el esquema de modulación water-filling multitono discreto en el que la matriz diagonal water-filling es sustituida por una matriz de rango completo consistente en la multiplicación de la matriz diagonal de asignación de energía que minimiza el error cuadrático medio por la matriz de la transformada discreta de Fourier.

3.2. TRANSMISIÓN POR BLOQUES

En este proyecto, emplearemos un modelo generalizado de Transmisión – Recepción en bloques de información desarrollado en [19]. Dicho modelo abarca muchos sistemas de comunicación modernos, entre los que se incluyen OFDM y DMT, y se puede observar en la **Figura 3.1**.

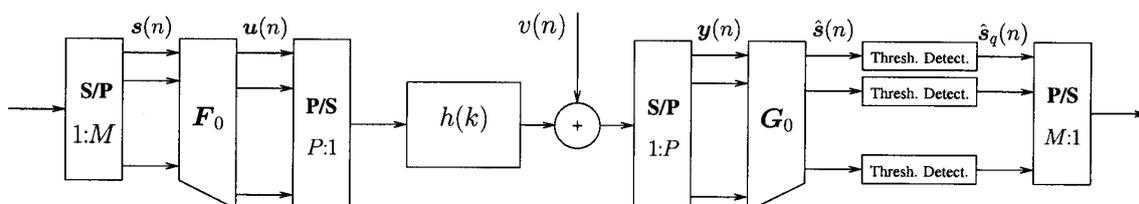


Figura 3.1: Modelo discreto equivalente en banda base para un sistema de transmisión por bloques



3.2.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Para la descripción de nuestro modelo, denotaremos

$$\mathbf{s}(n) \triangleq [s(nM), s(nM + 1), \dots, s(nM + M - 1)]^T \quad (3.1)$$

como el n -ésimo bloque de datos a ser transmitido. Para cada bloque de M símbolos de datos, $P > M$ símbolos son transmitidos a través del canal.

Esta redundancia es la llave para eludir la interferencia interbloque (IBI) en el receptor como se verá más adelante. El vector de símbolos transmitidos

$$\mathbf{u}(n) \triangleq [u(nP), u(nP + 1), \dots, u(nP + P - 1)]^T \quad (3.2)$$

es determinado por

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) \quad (3.3)$$

donde \mathbf{F}_0 es $P \times M$. Si

$$\mathbf{y}(n) \triangleq [y(nP), y(nP + 1), \dots, y(nP + P - 1)]^T \quad (3.4)$$

denota el n -ésimo bloque de entradas en el receptor, entonces el vector de datos con los símbolos ecualizados, $\hat{\mathbf{s}}(n)$, viene dado por

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{G}_0 \mathbf{y}(n) \quad (3.5)$$

donde \mathbf{G}_0 es $M \times P$.

Los datos de entrada al receptor son el resultado de la convolución entre la respuesta impulsiva del canal $h(k)$ y el ruido aditivo gaussiano que introduce éste. Así,

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) + v(n)$. Esto puede ser escrito en forma vectorial como

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_k \mathbf{u}(n-k) + \mathbf{v}(n) \quad (3.6)$$

donde las matrices \mathbf{H}_k , de dimensión $P \times P$, vienen determinadas por

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} h(kP) & h(kP-1) & \dots & h(kP-P+1) \\ h(kP+1) & h(kP) & \ddots & h(kP-P+2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(kP+P-1) & h(kP+P-2) & \dots & h(kP) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, el bloque de símbolos ecualizados en el receptor puede ser expresado como

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{G}_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_k \mathbf{u}(n-k) + \mathbf{G}_0 \mathbf{v}(n). \quad (3.8)$$



3.2.2. TRANSMISIÓN CON RELLENO DE CEROS (ZP) Y PREFIJO CÍCLICO (CP)

Para canales con respuesta impulsiva finita (FIR), la expresión (3.8), puede ser simplificada con una juiciosa elección del tamaño y la redundancia de bloque; por ejemplo esto es bien conocido en el caso especial de transmisores y receptores basados en prefiijo cíclico. Para establecer esto formalmente, se harán las siguientes suposiciones

- i. El canal tiene respuesta impulsiva finita (FIR) de orden L , $\mathbf{h}(k)$, que satisface que $\mathbf{h}(k)=\mathbf{0}$ para $k<0$ y $k>L$.
- ii. La longitud de los bloques de símbolos transmitidos, P , es escogida tal que $P \geq M+L$ y $P > 2L$.

Usando (3.7) y estas suposiciones, (3.8) puede ser simplificada a

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{G}_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) + \mathbf{G}_0 \mathbf{H}_1 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-1) + \mathbf{G}_0 \mathbf{v}(n). \quad (3.9)$$

La IBI en el bloque n ésimo de símbolos igualados, ahora viene solamente del bloque anterior, pero esta IBI limitará todavía el funcionamiento del sistema a altas SNR. Para eliminar la interferencia interbloque, podemos observar que como $\mathbf{h}(k)$ es cero fuera de $0 \leq k \leq L$, \mathbf{H}_1 tiene elementos distintos a cero solamente en su submatriz derecha superior $L \times L$.

Por lo tanto, la IBI se puede eliminar, independiente de la respuesta impulsiva del canal, si imponemos la estructura en \mathbf{H}_0 y \mathbf{G}_0 de modo que $\mathbf{G}_0 \mathbf{H}_1 \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$. En este proyecto, se aplica esa estructura eligiendo \mathbf{F}_0 y \mathbf{G}_0 de modo que $\mathbf{F}_0 = \mathbf{T}\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}\mathbf{R}$ donde \mathbf{F} y \mathbf{G} son parámetros libres, y \mathbf{T} y \mathbf{R} son escogidos tales que $\mathbf{R}\mathbf{H}_1\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Hay dos opciones estándar para \mathbf{T} y \mathbf{R} , llamadas (véase [21] y las referencias en éste) como sigue a continuación.

3.2.2.1. Transmisión con Relleno de Ceros

Eligiendo,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{zp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(P-L)} \\ \mathbf{0}_{L \times (P-L)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

y

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{zp} = \mathbf{I}_P \quad (3.11)$$



resulta una matriz “delgada” $F = F_{zp}$, de dimensiones $(P-L) \times M$ y otra matriz “gruesa” $G = G_{zp}$, de dimensiones $M \times P$.

3.2.2.2. Transmisión con Prefijo Cíclico, con eliminación de las muestras interferentes en el receptor

Eligiendo,

$$T = T_{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times (P-2L)} & I_L \\ & I_{(P-L)} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y

$$R = R_{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times L} & I_{P-L} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

resulta una matriz “delgada” $F = F_{cp}$, de dimensiones $(P-L) \times M$ y otra matriz “gruesa” $G = G_{cp}$, de dimensiones $M \times (P-L)$.

El vector de símbolos ecualizados para ambas opciones, relleno de ceros (ZP) y prefijo cíclico (CP), puede ser escrito de forma común como

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{GHFs} + \mathbf{GRv} \quad (3.14)$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{RH}_0\mathbf{T}$.

Para el caso ZP tenemos,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{zp} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(L) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & h(0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & h(L) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

que es una matriz Toeplitz “delgada” de dimensiones $P \times (P-L)$.

Para el caso CP tenemos,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{cp} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 & h(L) & h(L-1) & \dots & h(1) \\ h(1) & h(0) & 0 & \dots & 0 & h(L) & \dots & h(2) \\ \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & h(L) & h(L-1) & \dots & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

que es una matriz circulante “gruesa” de dimensiones $(P-L) \times (P-L)$. La matriz de autovectores de dicha matriz circulante, es la matriz (normalizada) con su



transformada discreta de Fourier (DFT) [10], esto supone una gran ventaja en el diseño de los sistemas que usan prefijo cíclico [1], [21]. En simples escenarios, los esquemas CP emplean típicamente precodificadores y ecualizadores de la forma $\mathbf{F}_{cp} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{\Delta}_T$ y $\mathbf{G}_{cp} = \mathbf{\Delta}_R \mathbf{D}_{P-L}$, donde \mathbf{D}_N es la matriz DFT normalizada de dimensiones $N \times N$.

$$[\mathbf{D}_N] = N^{-1/2} \exp(-j2\pi kn/N) \quad (3.17)$$

para $0 \leq k, n \leq N-1$, y $\mathbf{\Delta}_T$ y $\mathbf{\Delta}_R$ son las matrices de cargamento de energía y de ecualización respectivamente. Cuando $M = P-L$, $\mathbf{\Delta}_T$ y $\mathbf{\Delta}_R$ son matrices diagonales, y en ese caso, (3.14) se simplifica a

$$\hat{\mathbf{s}}_{cp} = \mathbf{\Delta}_R \mathbf{\Delta}_H \mathbf{\Delta}_T \mathbf{s} + \mathbf{\Delta}_R \mathbf{D}_{P-L} \mathbf{v}_{cp}. \quad (3.18)$$

Aquí $\mathbf{v}_{cp} = \mathbf{R}_{cp} \mathbf{v}$, y $\mathbf{\Delta}_H$ es una matriz diagonal cuyo elemento i -ésimo es $H(e^{j2\pi i/(P-L)})$, $0 \leq i \leq P-L-1$, donde $H(e^{j\omega}) = \sum_k h(k) \exp(-j\omega k)$ es la respuesta en frecuencia del canal.

El esquema estándar de CP-OFDM, en el que $M = P-L$ y $\mathbf{\Delta}_T = \mathbf{I}_M$, donde \mathbf{I}_M es la matriz identidad de orden M , es un ejemplo de este simple esquema. En casos más generales, el algoritmo de "cargamento de energía" puede dar lugar a $Q \leq P-L$ subportadoras a las que le es asignada la energía y sobre las que podemos transmitir $M \leq Q$ símbolos [3], [15],[21], [22]. En estos casos, la expresión del precodificador puede ser escrita de la siguiente forma,

$$\mathbf{F}_{cp} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{Q} \overline{\mathbf{\Delta}_T} \mathbf{\Theta} \quad (3.19)$$

donde $\overline{\mathbf{\Delta}_T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Delta}_T \mathbf{Q}$ es una matriz diagonal de dimensiones $Q \times Q$ que contiene los elementos diagonales no nulos de $\mathbf{\Delta}_T$ y \mathbf{Q} es la correspondiente matriz de selección de dimensiones $(P-L) \times Q$ que consiste en las columnas de \mathbf{I}_Q que se corresponden con los elementos no nulos de $\mathbf{\Delta}_T$. La matriz $\mathbf{\Theta}$ es de dimensiones $Q \times M$ y satisface que $\mathbf{\Theta}^H \mathbf{\Theta} = \mathbf{I}_M$.

En esquemas DMT estándar, [3], [15], típicamente tenemos $Q=M$ y $\mathbf{\Theta} = \mathbf{I}_Q$, pero en ciertas aplicaciones inalámbricas un aumento de la diversidad puede ser obtenido escogiendo $Q = P-L$ y $M \leq Q$, con $\mathbf{\Theta}$ elegida de modo que se mantenga cierta condición en el rango [21], [22]. Aunque no se impondrá ninguna estructura a nuestro precodificador CP-MBER, nuestros diseños podrán ser expresados de forma análoga, como se verá más adelante.

3.3. DERIVACIÓN DE LA BER

Al estudio de sistemas de transmisión por bloques descrito arriba, a las suposiciones 3.2.2.i y 3.2.2.ii, vamos a añadir las siguientes,



- iii. Durante la transmisión, la IBI va a ser eliminada adoptando cualquiera de las opciones de aquella, basadas en prefijo cíclico o relleno de ceros.
- iv. El canal es completamente conocido y se empleará ecualización ZF en el receptor. En una sección posterior se hará el estudio con ecualización MMSE y se compararán ambas elecciones. Así,

$$\mathbf{G} = (\mathbf{HF})^\dagger \quad (3.20)$$

Entonces, $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{GHFs} + \mathbf{GRv} = \mathbf{s} + (\mathbf{HF})^\dagger \mathbf{Rv}$, donde $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H$ denota la pseudo-inversa izquierda de la matriz "alta" \mathbf{X} de rango de columnas completa. Una condición necesaria para la existencia de la pseudo-inversa izquierda de \mathbf{HF} es que M , que es el número de columnas de \mathbf{F} , no sea mayor que el rango de \mathbf{H} [10]. Demostraremos después, que esta condición es también suficiente para la construcción de dicha \mathbf{F} .

- v. Los símbolos transmitidos son equiprobables, antipodales e incorrelados con cada otro, es decir,

$$\mathbf{E} \{ \mathbf{ss}^H \} = \mathbf{I} \quad (3.21)$$

La suposición antipodal es asumida por simplicidad para la derivación teórica de la BER, si bien los resultados pueden ser extendidos a otras constelaciones como 4-QAM y QPSK, como será el caso en las simulaciones que llevaremos a cabo con posterioridad.

- vi. El vector de ruido \mathbf{v} , es blanco, Gaussiano y de media cero, con matriz de covarianza,

$$\mathbf{E} \{ \mathbf{vv}^H \} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3.22)$$

Ahora procederemos a obtener la expresión para la probabilidad de error de bit (BER) media del sistema de comunicaciones representado en la **Figura 3.1**, cuando el vector de símbolos \mathbf{s} es transmitido, $\hat{\mathbf{s}}$ viene determinado por la expresión (3.14) y representa el vector de señal recibida. Los elementos de dicho vector son cuantizados por un detector por umbral para obtener $\hat{\mathbf{s}}_q$, cuyos elementos serán ± 1 en el caso antipodal.

La BER media de la señal detectada, es la media de la probabilidad de error de cada elemento del bloque de información transmitida, es decir,

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P_{em} \quad (3.23)$$



donde P_{em} denota la BER del m-ésimo símbolo.

Como la energía de señal de cada símbolo es unitaria y la matriz de covarianza del ruido recibido es $\sigma^2 \mathbf{G}\mathbf{G}^H$, siguiendo básicos pasos como por ejemplo se explica en [14], puede ser demostrado que la probabilidad de que el símbolo m-ésimo en $\hat{\mathbf{S}}_q$, sea erróneo, se puede escribir como

$$P_{em} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 [\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}}} \right) \quad (3.24)$$

donde $\operatorname{erfc}(\zeta) \triangleq (2/\sqrt{\pi}) \int_{\zeta}^{\infty} e^{-z^2} dz$ y $[\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}$ denota el elemento (m,m) de la matriz $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$. El término $\sigma^2 [\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}$ representa la varianza de ruido en la estimación en el receptor del m-ésimo símbolo del vector de señal transmitido.

Sustituyendo (3.24) en (3.23), tenemos

$$P_e = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 [\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}}} \right). \quad (3.25)$$

Si definimos $\phi(x) = \operatorname{erfc}(1/\sqrt{2\sigma^2 x})$ para $x > 0$, entonces

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^{-(1/2)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 x}\right) \times \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sigma^2 x}\right) x^{-(5/2)}. \quad (3.26)$$

Por lo tanto, si $x < 1/3\sigma^2$, entonces $\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} > 0$. Aplicando este hecho a

(3.25), determinamos que $\phi([\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm})$ es una función convexa si la potencia de ruido σ^2 es menor que $1/3[\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}$. Si esta condición se satisface para toda m , es decir, si la relación señal ruido en el receptor es suficientemente elevada, entonces la BER media de bloque, P_e , es convexa también. La propiedad de convexidad es deseable en el desarrollo de un algoritmo para el diseño del precodificador que minimiza la BER ya que todo precodificador óptimo localmente lo es también globalmente. El desarrollo de tal algoritmo se presenta en la siguiente sección.

3.4. DISEÑO DEL PRECODIFICADOR PARA MÍNIMA BER

Abordaremos ahora el diseño de un precodificador óptimo \mathbf{F} en (3.14) tal que la BER mínima es alcanzada, sujeta a un límite en la potencia de transmisión. No



impondremos ninguna estructura a \mathbf{F} , pero en el caso de prefijo cíclico, veremos que el precodificador MBER retiene algunas de las características estructurales de los esquemas OFDM y DMT. La potencia de transmisión viene dada por $\text{tr}(E\{\mathbf{F}_0\mathbf{s}(\mathbf{F}_0\mathbf{s})^H\}) = \text{tr}(\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^H)$, donde $\text{tr}(\mathbf{x})$ representa la traza de la matriz \mathbf{x} .

Para sistemas basados en ZP, $\text{tr}(\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^H) = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^H)$, es decir, la potencia de transmisión es igual a la potencia usada para transmitir los datos. En el caso de sistemas CP, la potencia total de transmisión es igual a la potencia usada para transmitir los datos más la potencia empleada para la transmisión del prefijo cíclico. Sin embargo, la proporción de la potencia total empleada en la transmisión del prefijo cíclico es típicamente muy pequeña y es normal en la práctica definir la potencia de transmisión como simplemente la potencia requerida para la transmisión de los datos de información, véase [3], [5], [9] y [21]. Por lo tanto, $\text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^H)$ es también usada para representar la potencia de transmisión en sistemas basados en prefijo cíclico.

Podemos formular el problema del diseño como sigue:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}} P_e \\ \text{Sujeto a } \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^H) \leq p_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde P_e viene dado por (3.25), la matriz \mathbf{G} en (3.25) es el ecualizador cero forzado (ZF) en (3.20), que depende tanto de \mathbf{H} como de \mathbf{F} ; y por último p_0 es una constante que limita la potencia de transmisión. Como P_e es convexa a moderadas y elevadas CNRS, podemos aplicar la desigualdad de Jensen [4], para obtener la siguiente cota mínima en la probabilidad de error de bit:

$$P_e = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \text{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 [\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}}} \right) \geq \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{M} \sum_{m=1}^M [\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}}} \right) \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{M}{2\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)}} \right) \triangleq P_{e,\text{LB}} \quad (3.29)$$

La igualdad en (3.28) se mantiene si y o solo si $[\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm}$ es igual $\forall m \in [1, M]$. La desigualdad en (3.28) es válida solo cuando P_e es convexa, es decir, cuando

$$[\mathbf{G}\mathbf{G}^H]_{mm} < \frac{1}{3\sigma^2}, \quad \forall m \in [1, M]. \quad (3.30)$$

La cantidad $P_{e,\text{LB}}$ en (3.29) define una cota mínima de la BER P_e . Para el diseño del precodificador óptimo, primero vamos a minimizar $P_{e,\text{LB}}$. Llevando a cabo



esto, veremos que una particular elección de precodificador alcanza esta cota inferior ya minimizada.

De la sección anterior, sabemos que \mathbf{F} , es una matriz rectangular de dimensiones $(P-L) \times M$. Si parametrizamos \mathbf{F} en términos de su descomposición en valores singulares [8], tenemos

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (3.31)$$

donde $\boldsymbol{\Phi}$ es una matriz diagonal positiva de dimensiones $M \times M$, mientras que \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices cuadradas unitarias de dimensiones $(P-L)$ y M respectivamente. De (3.15) y (3.16), sabemos que la naturaleza de la matriz del canal \mathbf{H} depende de si es empleada la técnica ZP o CP, pero en cualquier caso, podemos escribir

$$(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{W} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{W}^H \quad (3.32)$$

donde $\boldsymbol{\Lambda}$ y \mathbf{W} son, respectivamente, las matrices (cuadradas) de autovalores y autovectores de $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$, ambas de dimensión $(P-L)$. Los autovalores $\{\lambda_i\}$ en $\boldsymbol{\Lambda}$, que no son negativos, están ordenados en orden descendente.

En el caso ZP, hay garantía de que $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ sea no singular mientras $h(k)$ no sea idénticamente igual a cero. Sin embargo en el caso CP, el rango de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ no será completo si ocurre que $H(e^{j\omega})$ tiene un cero en $\omega = 2\pi k / (P-L)$ para algún entero k . Para la sección que nos ocupa, excluirémos explícitamente estos tipos de canales en el caso CP, de modo que será asumido que $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ tiene rango completo tanto en el caso ZP como CP. Sin embargo, el diseño del precodificador para mínima BER sigue siendo válido para sistemas CP en los que $H(e^{j2\pi k / (P-L)}) \rightarrow 0$ para algún entero k porque los correspondientes subcanales serán automáticamente eliminados mediante un algoritmo que se describirá en la siguiente sección.

Dado (3.31), para ecuación ZF $\mathbf{G} = (\mathbf{H}\mathbf{F})^\dagger$, podemos escribir

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^H = \mathbf{V}^H \boldsymbol{\Phi}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H}\mathbf{U} & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{V}. \quad (3.33)$$

Prosiguiendo, como $\text{erfc}(\cdot)$ es una función monótona decreciente, para minimizar $P_{e, \text{LB}}$ en (3.29), solo necesitaremos minimizar $\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)$. Por simplificación rotacional, definiremos

$$\mathbf{Z}(\mathbf{U}) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H}\mathbf{U} & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (3.34)$$

Como era de esperar de (3.31), $\mathbf{Z}(\mathbf{U})$ es una función de solo las primeras M columnas de \mathbf{U} . Sin embargo, esta notación realza las características en común con esquemas relacionados de transmisión, como los discutidos en la sección anterior.



Ahora el problema de minimizar $P_{e, \text{LB}}$ sobre \mathbf{F} , sujeto a $\text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^H) \leq \rho$, la restricción de convexidad en (3.30) y usando ecuación ZF en \mathbf{G} , es equivalente a

$$\min_{\mathbf{U}, \Phi, \mathbf{V}} \text{tr}(\Phi^{-2} \mathbf{Z}(\mathbf{U})) \quad (3.35.a)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\Phi^2) \leq \rho_0 \quad (3.35.b)$$

$$\text{y } \left[\mathbf{V}^H \Phi^{-1} \mathbf{Z}(\mathbf{U}) \Phi^{-1} \mathbf{V} \right]_{mm} \leq \frac{1}{3\sigma^2} \quad (3.35.c)$$

donde hemos usado la propiedad unitaria de \mathbf{V} y la relación $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ para matrices dimensionalmente compatibles \mathbf{A} y \mathbf{B} para simplificar el objetivo en (3.35.a).

El problema en (3.35) es bastante complejo de resolver directamente, debido a la presencia de (3.35.c), pero, como veremos a continuación, la minimización de (3.35.a) sobre \mathbf{U} y Φ sujeto a (3.35.b) tiene una solución analítica. Así, procederemos a la resolución del problema en (3.35) omitiendo inicialmente la restricción (3.35.c) obteniendo unas ciertas \mathbf{U} y Φ y luego solucionando la dificultad restante.

Para llevar a cabo lo anterior, observamos que el parámetro de diseño \mathbf{V} , no participa en la función objetivo de (3.35.a), ni tampoco en la restricción de potencia (3.35.b). Por lo tanto, su papel es intentar satisfacer la restricción (3.35.c), que asegura la convexidad de P_e en (3.25) y así la validez de la cota mínima en (3.29).

Dadas cualesquiera \mathbf{U} y Φ , una óptima elección para \mathbf{V} , es la que maximiza el mínimo de la restricción satisfecha (o minimiza el máximo de la restricción violada) (3.35.c), es decir, la matriz \mathbf{V} que minimiza el mayor elemento diagonal en la expresión de la parte izquierda de dicha restricción. Tal matriz \mathbf{V} , es proporcionada por el siguiente Lema.

Lema 1: Dada una matriz $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ semidefinida positiva (simétrica) $\mathbf{A} = \Psi \Gamma \Psi^H$, donde Γ es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores de \mathbf{A} y $\Psi \Psi^H = \mathbf{I}$, entonces tenemos lo siguiente.

$$\text{i. } \min_{\mathbf{V}^H = \mathbf{I}} \max_m \left[\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V} \right]_{mm} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{M}. \quad (3.36)$$

ii. El mínimo valor de (3.36) puede ser obtenido escogiendo

$$\mathbf{V} = \Psi \mathbf{D}_M \quad (3.37)$$

donde \mathbf{D}_M , denota la matriz DFT normalizada de dimensiones $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$.

Demostración: Primero probaremos que el lado derecho de la expresión (3.36) es una cota mínima del lado izquierdo de la igualdad. Después, veremos que la matriz \mathbf{V} en (3.37) alcanza dicha cota mínima.



- i. Como \mathbf{V} es unitaria, $\text{tr}(\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}) = \text{tr}(\mathbf{A})$. Además como \mathbf{A} es semidefinida positiva, los elementos diagonales de \mathbf{A} y $\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}$ son no negativos. Dados el conjunto de secuencias de longitud N de números no negativos $\{x_i\}_{i=1}^N$ que suman y , la secuencia que minimiza el máximo valor de x_i es $x_i = y/N$. Aplicando este resultado a la parte izquierda de (3.36) y observando que la condición en la construcción de \mathbf{V} puede restringir los valores que los elementos diagonales de $\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}$ pueden tener, resulta que
- $$\min_{\mathbf{V}^H = \mathbf{I}} \max_m [\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}]_{mm} \geq \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{M}.$$
- ii. Tomemos $\mathbf{V} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Upsilon}$, donde $\mathbf{\Upsilon}$ es alguna matriz unitaria. Entonces, tenemos

$$[\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}]_{mm} = [\mathbf{\Upsilon}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Upsilon}]_{mm} = \sum_{\ell=1}^M \gamma_{\ell} |v_{m\ell}|^2$$

donde γ_{ℓ} es el ℓ -ésimo elemento diagonal de $\mathbf{\Gamma}$, y $v_{m\ell}$ es elemento (m, ℓ) de $\mathbf{\Upsilon}$. Si $\mathbf{\Upsilon}$ se elige como la matriz DFT normalizada, es decir, si $\mathbf{V} = \mathbf{\Psi} \mathbf{D}_M$, como la magnitud de cada elemento de la matriz DFT es igual a $|d_{m\ell}|^2 = 1/M$, tenemos que

$$[\mathbf{V}^H \mathbf{A} \mathbf{V}]_{mm} = \sum_{\ell=1}^M \gamma_{\ell} \frac{1}{M} = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{M} \text{ para todo } 1 \leq m \leq M.$$

Esto completa la demostración.

Sin verificar el anterior lema, precisamos que existen otras matrices \mathbf{V} , que alcanzan el mínimo en (3.36), entre las que se incluyen la matriz DFT inversa \mathbf{D}_M^H y si M es potencia de 2, la matriz normalizada Hadamard de dimensiones $M \times M$. Todo lo requerido para que una matriz \mathbf{V} sea óptima es que sea unitaria y todos sus elementos tengan la misma magnitud.

Dicho lema, provee la clave para la obtención de una solución analítica al problema de minimizar $P_{e.LB}$ en (3.35), como veremos después. También, nos muestra que hay un precodificador que minimiza $P_{e.LB}$ y realmente alcanza esta cota, como precisaremos más adelante.

Para derivar una solución analítica al problema en (3.35), observamos que aplicando el lema, existe una matriz \mathbf{V} que satisface la condición (3.35.c) si y solo si el valor óptimo del objetivo es menor que $M / (3\sigma^2)$. Así, dicho problema (3.35) puede ser resuelto en las siguientes dos etapas. Primero, minimizando (3.35.a) sobre \mathbf{U} y $\mathbf{\Phi}$, sujeto a (3.35.b), i.e.,



$$\min_{\mathbf{U}, \Phi} \text{tr}(\Phi^{-2} \mathbf{Z}(\mathbf{U})) \quad (3.38.a)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\Phi^2) \leq p_0 \quad (3.38.b)$$

Tomemos \mathbf{U}_{opt} y Φ_{opt} , denotando la solución óptima al problema en (3.38). Entonces existe una matriz complementaria \mathbf{V}_{opt} que satisface (3.35.c) si y solo si

$$\text{tr}(\Phi_{\text{opt}}^{-2} \mathbf{Z}(\mathbf{U}_{\text{opt}})) \leq \frac{M}{3\sigma^2} \quad (3.39)$$

Además, si esta condición se mantiene, una solución para \mathbf{V}_{opt} es $\Psi \mathbf{D}_M$, donde $\mathbf{Z}(\mathbf{U}_{\text{opt}}) = \Psi \Gamma \Psi^H$ es la descomposición en autovalores y vectores de $\mathbf{Z}(\mathbf{U}_{\text{opt}})$. Veremos después que $\mathbf{Z}(\mathbf{U}_{\text{opt}})$ es una matriz diagonal, con lo que $\Psi = \mathbf{I}$ y la matriz DFT normalizada es una elección óptima para \mathbf{V} . Con el análisis de arriba, hemos pasado de la complejidad del problema formulado en (3.35) a la solución de un simple problema de optimización en (3.38) seguido de un test de viabilidad en (3.39) y la construcción de \mathbf{V}_{opt} mediante la aplicación del lema. Es decir, la ecuación (3.39) permite saber si la solución al problema simplificado en (3.38) es viable para el problema original expresado en (3.35).

Todo ello deriva en resolver un problema simple de optimización como (3.38). Este problema es equivalente al diseño del precodificador mínimo MSE para ecualización ZF con dimensiones $(P-L) \times M$. Para ver tal equivalencia, nótese que como estamos usando un ecualizador cero-forzado, el error cuadrático medio en $\hat{\mathbf{s}}$ en (3.14), a saber $\text{tr}(E\{(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})^H\})$, puede ser escrito como $\sigma^2 \text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)$. Usando (3.33) y la propiedad de invariación unitaria de la función traza, tenemos que $\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H) = \text{tr}(\Phi^{-2} \mathbf{Z}(\mathbf{U}))$ y así la equivalencia.

Como se demuestra en el Apéndice A, el precodificador que minimiza el error cuadrático en $\hat{\mathbf{s}}$ para ecualización ZF tiene

$$\Phi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M^{1/2})}} \Lambda_M^{1/4} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{U}_{\text{opt}} = [\mathbf{W}_M \mathbf{W}_M^\perp] \quad (3.41)$$

donde $\Lambda_M = \text{diag}(\lambda_{P-L-M+1}, \dots, \lambda_{P-L})$ consiste en los M autovalores más pequeños de $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ ordenados de orden decreciente, \mathbf{W}_M es una matriz de tamaño $(P-L) \times M$ y consiste en las últimas M columnas de \mathbf{W} (que son los autovectores correspondientes a dichos M autovalores más pequeños), y por último \mathbf{W}_M^\perp se construye con las primeras $P-L-M$ columnas de \mathbf{W} .



Sustituyendo (3.40) y (3.41) en (3.39), encontramos que la solución óptima para el problema (3.38) es viable para el original (3.35) si y solo si

$$\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M^{1/2})^2} \geq \frac{3\sigma^2}{M}. \quad (3.42)$$

Además, $\mathbf{Z}(\mathbf{U}_{\text{opt}})$ es diagonal y así podemos escoger $\mathbf{V}_{\text{opt}} = \mathbf{D}_M$, simplemente. Por lo tanto, si (3.42) es satisfecha, entonces un precodificador que resuelve el problema (3.35), es decir, minimiza $P_{e,\text{LB}}$ sujeto al límite más bajo en el que es válido y a un máximo de potencia transmitida, viene dado por

$$\mathbf{F}_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M^{1/2})^2}} \mathbf{W}_M \Lambda_M^{1/4} \mathbf{D}_M. \quad (3.43)$$

Por otra parte, este precodificador mínimo \mathbf{F}_{opt} , da lugar a que los elementos diagonales de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ sean iguales [ver parte ii) de la demostración del lema], y así, la BER real de este precodificador alcanza la cota más baja reducida al mínimo. Por lo tanto, \mathbf{F}_{opt} en (3.43) es un precodificador para mínima BER. Esta BER minimizada es

$$P_{e,\text{min}} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{Mp_0}{2\sigma^2 (\text{tr}(\Lambda_M^{1/2}))^2}} \right). \quad (3.44)$$

3.4.1. OBSERVACIONES

Las siguientes observaciones sobre el diseño del precodificador para mínima BER están por orden.

1. El diseño abordado arriba para el precodificador MBER, \mathbf{F} , conduce a una estructura definida para éste como una matriz general “delgada” de rango por columnas completo y es por lo tanto aplicable a ambas opciones ZP y CP para la eliminación de la IBI.
2. El diseño del precodificador MBER ha sido obtenido por explotación adicional del precodificador MMSE para ecualización ZF dado por (3.40) y (3.41). El conjunto de todos los precodificadores MMSE para ecualización cero forzado viene dada por

$$\mathbf{F}_{\text{MMSE-ZF}} = \mathbf{U}_{\text{opt}} \begin{bmatrix} \Phi_{\text{opt}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V} = \mathbf{W}_M \Phi_{\text{opt}} \mathbf{V} \quad (3.45)$$



donde \mathbf{V} es una matriz arbitraria unitaria $M \times M$. Por lo tanto, el precodificador para mínima BER, es también un precodificador MMSE-ZF, pero a la inversa no es necesariamente cierto. En particular, solo aquellas matrices \mathbf{V} en (3.45), cuyos elementos son de igual magnitud alcanzan la mínima BER. El papel de esta clase especial de matrices \mathbf{V} es asegurar que los elementos diagonales de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ sean iguales y por lo tanto, el que alcancemos la cota más baja minimizada de la BER generada mediante la desigualdad de Jensen y la minimización del error cuadrático medio. En la práctica, dicho papel consiste en la distribución de la potencia de ruido sobre los subcanales para que la relación señal ruido a la entrada de cada uno de los detectores presentes en la **Figura 3.1**, sea la misma. La eficacia de esta clase de matrices \mathbf{V} se ilustrará en la siguiente sección.

3. Si definimos el cociente de la potencia de la señal transmitida y la potencia de ruido recibida (SNR) como $\rho \triangleq p_0 / (P\sigma^2)$, entonces de (3.42), el diseño del MBER anterior es válido si

$$\rho > \frac{3(\text{tr}(\Lambda_M^{1/2}))^2}{MP} \triangleq \rho_c. \quad (3.46)$$

Esta condición es una función del canal (a través de Λ) y de los tamaños de bloques M y P y puede ser evaluada antes de intentar solucionar el problema en (3.38). Para satisfacer esta condición, podemos incrementar la potencia de transmisión para aumentar la SNR o eliminar los subcanales correspondientes a los elementos mayores de Λ_M para así bajar el valor de ρ_c . El proceso de eliminación selectiva de subcanales tiene como objetivo evitar la transmisión de potencia sobre aquellos que tengan baja ganancia y reasignarla entre los restantes. Aunque el denominador en (3.46) también se disminuye, el numerador lo hace más rápidamente y por lo tanto el valor de ρ_c decrece. El beneficio del esquema con eliminación de subcanales de baja ganancia es que el precodificador para mínima BER se garantiza sin violar la restricción de potencia transmitida, pero el tamaño de bloque y por tanto la tasa de transmisión es menor (Recalcar que de la suposición v, el “bit loading” es asumido uniforme). El valor de ρ_c determina la SNR por debajo de la cual es necesario emplear la técnica de eliminación de subcanales defectuosos en lo que a ganancia se refiere y esto determina cómo se realiza la compensación entre la BER y la tasa de transmisión. El proceso de eliminación de dichos subcanales y el correspondiente diseño de precodificador MBER puede ser implementado mediante los siguientes pasos:

- Primero, determinar el nuevo tamaño de bloque \bar{M} : tomar $\bar{M} = M$ y mientras $\rho < 3(\text{tr}(\Lambda_{\bar{M}}^{1/2}))^2 / (P\bar{M})$, hacer $\bar{M} = \bar{M} - 1$.



- Después, construir $\mathbf{F}_{\text{MBER-DROP}}$, que no es más que el precodificador original MBER expuesto en (3.43) donde ha sido reemplazado M por \bar{M} , i.e.,

$$\mathbf{F}_{\text{MBER-DROP}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\text{tr}(\bar{\Lambda}_M^{1/2})}} \mathbf{W}_M \bar{\Lambda}_M^{1/4} \mathbf{D}_M. \quad (3.47)$$

3.4.2. PRECODIFICADORES MBER PARA SISTEMAS CP

El esquema de diseño del precodificador para mínima BER presentado al principio de la sección 3.4. es válido para los dos esquemas de transmisión ZP y CP. En ambos, el precodificador es una matriz de rango por columnas completo de dimensiones $(P-L) \times M$. Sin embargo, en el caso de transmisión CP, podemos usar la estructura especial de \mathbf{H}_{cp} en (3.16) para simplificar la expresión de \mathbf{F}_{MBER} . En este caso, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{cp}} = \mathbf{D}_{P-L}^H \bar{\Delta}_H \mathbf{D}_{P-L}$, donde el elemento (i,i) de la matriz diagonal $\bar{\Delta}_H$ es $H(e^{j2\pi i/(P-L)})$, $0 \leq i \leq P-L-1$. Definamos una matriz de permutación cuadrada, \mathbf{P} , de dimensión $(P-L)$, tal que los elementos diagonales de $\mathbf{P}^T \bar{\Delta}_H \mathbf{P}$ están ordenados de modo que sus magnitudes van en orden creciente. Además, tomemos

$$\bar{\Delta}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \mathbf{P}^T \bar{\Delta}_H \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

que denota la matriz diagonal $M \times M$ que contiene las M ganancias de subportadoras con las mayores magnitudes. Entonces, $\bar{\Lambda}_M = (\bar{\Delta}_H^H \bar{\Delta}_H)^{-1}$, $\mathbf{W} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}$, $\mathbf{W}_M = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}_M$, donde $\mathbf{P}_M = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_M \end{bmatrix}$ contiene las últimas M columnas de \mathbf{P} .

Por lo tanto, para esquemas de transmisión de código cíclico, la condición para la validez de nuestro precodificador MBER puede ser rescrita como

$$\rho > \rho_{\text{c.cp}} = \frac{3 \left(\left(\text{tr}(\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/2} \right) \right)^2}{MP} \quad (3.49)$$

Y el precodificador CP-MBER como

$$\mathbf{F}_{\text{CP-MBER}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\text{tr}(\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/2}}} \cdot \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}_M (\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/4} \mathbf{D}_M \quad (3.50)$$

Usando (3.45), el conjunto de todos los precodificadores que minimizan el error cuadrático medio para sistemas CP que emplean ecualización ZF pueden ser expresados como



$$\mathbf{F}_{\text{CP-MMSE-ZF}} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}_M \bar{\Delta}_{\text{MMSE-ZF}} \mathbf{V} \quad (3.51)$$

donde \mathbf{V} es una matriz unitaria arbitraria y

$$\bar{\Delta}_{\text{MMSE-ZF}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\text{tr}(\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/2}}} (\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/4} \quad (3.52)$$

es la matriz diagonal MMSE de cargamento de energía de dimensiones $M \times M$ para ecuación ZF. Cuando $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, el precodificador MMSE-ZF en (3.51) toma una forma similar al esquema estándar DMT discutido al final de la sección 3.4.3., véase también (3.60) y (3.61) después. La diferencia está en que en el estándar DMT, la matriz diagonal cargamento de energía es calculada vía “water-filling”, mientras que (3.52) es la matriz diagonal cargamento de energía que minimiza el error cuadrático medio para ecuación cero forzado.

Una ventaja de la mencionada matriz diagonal MMSE-ZF (3.52), es que tiene una expresión cerrada y por tanto es algo simple de implementar. Por el contrario, el esquema que utiliza “water-filling” requiere solucionar un problema no lineal mediante un algoritmo iterativo, aumentando la complejidad respecto a la primera.

El precodificador CP-MBER expresado en (3.50) también toma una forma similar a la del sistema estándar DMT, pero en este caso, la matriz diagonal de cargamento de energía es reemplazada por una matriz completa que consiste en la matriz diagonal MMSE-ZF multiplicada posteriormente por la matriz DFT.

El diagrama de bloques del sistema de transmisión CP con el precodificador MBER que se ha diseñado, puede ser contemplado en la **Figura 3.2**, donde el receptor emplea un ecualizador ZF, es decir, $\mathbf{G}_{\text{cp}} = (\mathbf{H}_{\text{cp}} \mathbf{F}_{\text{cp}})^{\dagger} = \mathbf{D}_M^H \bar{\Delta}_{\text{MMSE-ZF}}^{-1} \bar{\Delta}_H^{-1} \mathbf{P}_M^T \mathbf{D}_{P-L}$. El sistema englobado dentro de la caja delimitada por rayas discontinuas puede ser visto como un sistema DMT con MMSE-ZF.

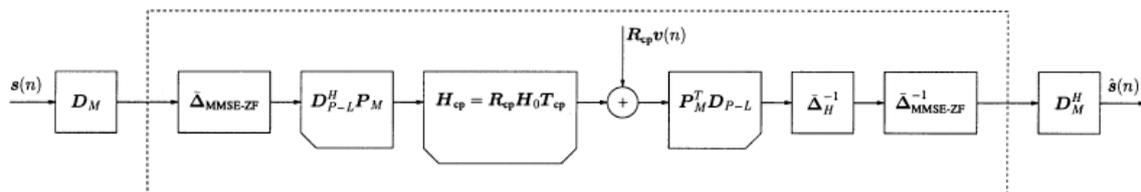


Figura 3.2: Precodificador MBER para el esquema de transmisión CP.



3.4.3. EVALUACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO

Compararemos el funcionamiento de varios precodificadores ZP y CP en la transmisión binaria sobre canales de distinta naturaleza, tanto con buenas características en frecuencia como adversas, y el rendimiento medio de dichos precodificadores sobre una clase de canales generados aleatoriamente.

Como se mencionó anteriormente, la SNR se define como $\rho \triangleq p_0 / (P\sigma^2)$ y en todos los diseños que se lleven a cabo se considerará sin pérdida de generalidad que la potencia de transmisión será normalizada, i.e., $p_0 = 1$.

Para precodificadores que usen transmisión con relleno de ceros, ZP, las comparaciones se establecerán entre diseños obtenidos mediante diversos criterios como MBER, MMSE para ecualización ZF [19], máxima SNR [19] y relleno de ceros en OFDM [13], [19]. Del conjunto de precodificadores que minimizan el error cuadrático medio con expresión general (3.45), se ha escogido uno en el que el grado de libertad existente, la matriz unitaria \mathbf{V} , es la matriz identidad \mathbf{I} .

Si M símbolos son transmitidos en cada bloque, los precodificadores ZP adquieren respectivamente las siguientes expresiones:

$$\mathbf{F}_{\text{ZP-MBER}} = \sqrt{\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M^{1/2})}} \mathbf{W}_M \Lambda_M^{1/4} \mathbf{D}_M \quad (3.53)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ZP-MMSE-ZF-I}} = \sqrt{\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M^{1/2})}} \mathbf{W}_M \Lambda_M^{1/4} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ZP-MSNR}} = \sqrt{\frac{p_0}{\text{tr}(\Lambda_M)}} \mathbf{W}_M \Lambda_M^{1/2} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ZP-OFDM}} = \sqrt{\frac{p_0}{M}} \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{Q}_M \quad (3.56)$$

donde \mathbf{Q}_M consiste en M columnas de \mathbf{I}_{P-L} , para el caso del precodificador ZP-OFDM y el CP-OFDM que se verá después, usualmente tendremos $M = P-L$, en ese caso $\mathbf{Q}_M = \mathbf{I}_{P-L}$.

Para el caso de esquemas de transmisión de código cíclico, CP, examinaremos los siguientes precodificadores: MBER, MMSE para ecualización ZF, OFDM y water-filling DMT. La matriz unitaria en el diseño MMSE es de nuevo elegida como la matriz identidad. Los precodificadores adquieren las siguientes formas:



$$\mathbf{F}_{\text{CP-MBER}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\text{tr}(\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/2}}} \cdot \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}_M (\bar{\Lambda}_H^H \bar{\Lambda}_H)^{-1/4} \mathbf{D}_M \quad (3.57)$$

$$\mathbf{F}_{\text{CP-MMSE-ZF-I}} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{P}_M \bar{\Delta}_{\text{MMSE-ZF}} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{F}_{\text{CP-OFDM}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{M}} \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{Q}_M \quad (3.59)$$

$$\mathbf{F}_{\text{WF-DMT}} = \mathbf{D}_{P-L}^H \mathbf{Q}_{\text{WF}} \bar{\Delta}_{\text{WF}} \quad (3.60)$$

donde $\bar{\Delta}_{\text{WF}} = \mathbf{Q}_{\text{WF}}^T \Delta_{\text{WF}} \mathbf{Q}_{\text{WF}}$. Aquí, Δ_{WF} es la matriz de cargamento de energía water-filling que maximiza la tasa de información alcanzable y \mathbf{Q}_{WF} consiste en las columnas de \mathbf{I}_{P-L} que se corresponden con los valores no nulos de Δ_{WF} . El elemento diagonal i -ésimo de Δ_{WF} es [3], [15]

$$[\Delta_{\text{WF}}]_{ii} = \begin{cases} \sqrt{\eta - \frac{\sigma^2}{[\Delta_H^H \Delta_H]_{ii}}} & \text{si } \eta > \frac{\sigma^2}{[\Delta_H^H \Delta_H]_{ii}} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (3.61)$$

donde $[\Delta_H^H \Delta_H]_{ii} = |\text{H}(e^{j2\pi i / (\cdot)})|^2$, $0 \leq i \leq P-L$ y η es una constante elegida tal que la potencia $\text{tr}(\Delta_{\text{WF}} \Delta_{\text{WF}}^H) = \rho_0$.

De (3.61), queda claro que a subcanales con ganancia pequeña puede no ser asignada ninguna potencia, i.e., pueden ser considerados como caídos. Sin embargo el criterio de eliminación de estos subcanales es distinto aquí respecto al establecido en la sección 3.4.1. Antes de proceder con ejemplos, se hará énfasis en el hecho de que para establecer una comparación consistente entre varios esquemas de transmisión, emplearemos reparto uniforme de bits para cada de los \bar{M} subcanales en los que se asigna potencia. Así, los resultados obtenidos por el esquema water-filling son mejor considerados como referencia porque en la práctica, no se utiliza un reparto de bits uniforme en los sistemas que usan dicho esquema.

3.5. RESULTADOS

3.5.1. EJEMPLO 1: CANAL CON BUENA CALIDAD DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

En este ejemplo, se examina el funcionamiento de varios Transmisores-Receptores lineales cuando se transmiten bloques de datos sobre un canal con las siguientes características

- Coeficientes $\{0.3038+0.2554i \ 0.5056+0.5587i \ 0.2855+0.0035i \ 0.2834+0.1843i \ 0.2793+0.0305i\}$.
- Orden $L = 4$.

Los parámetros empleados en las simulaciones en relación a los bloques de información son

- Longitud de bloque de datos original $M = 32$.
- Tamaño de bloque final a transmitir $P = 36$.

En este caso $M = P-L$, por lo tanto, $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}$ y $\Lambda_M = \Lambda$.

La magnitud de la DFT de $P-L = 32$ puntos la respuesta impulsiva del canal se muestra en la **Figura 3.3**.

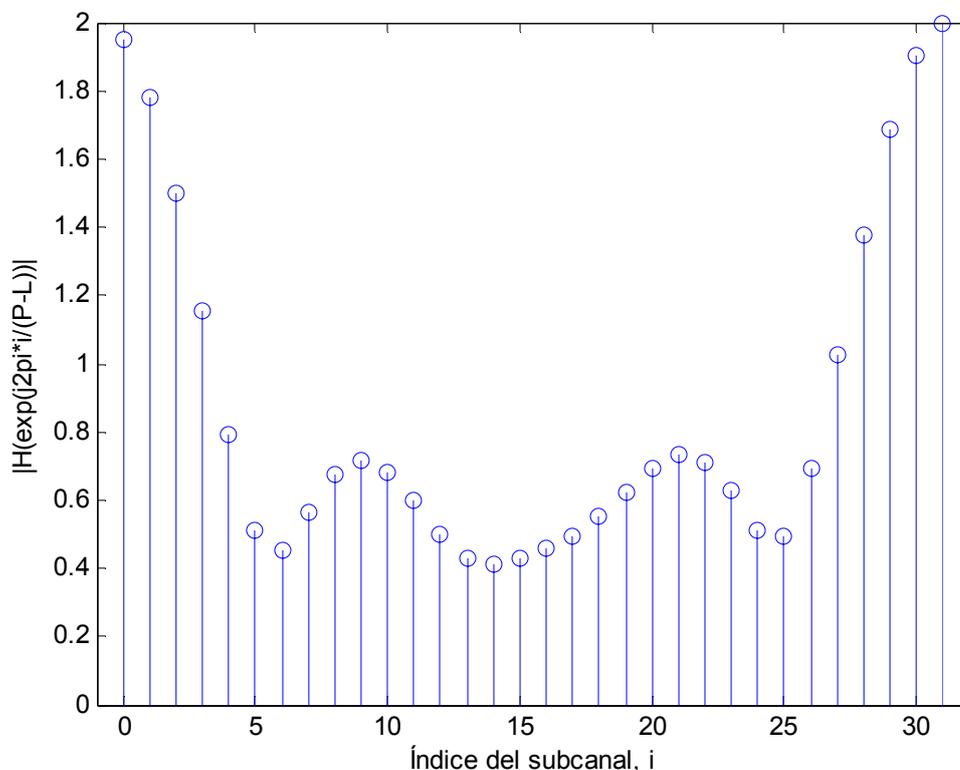


Figura 3.3: Respuesta en frecuencia del canal en Ejemplo 1.

Puede observarse que el cociente entre las ganancias de subcanales máxima y mínima es 4, por lo que se trata de un canal de buena calidad en lo que a respuesta en frecuencia se refiere.

Para esquemas ZP, el valor crítico de SNR en (3.46) es $\rho_{c.zp} = 7.46$ dB, mientras que para sistemas que emplean CP es $\rho_{c.cp} = 7.61$ dB. El motivo de esta diferencia radica en que para un canal dado $\mathbf{h}(\mathbf{k})$ y longitudes de bloque \mathbf{M} y \mathbf{P} ,

$$\mathbf{H}_{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(P-L)} & \mathbf{I}_L \\ \mathbf{0}_{L \times (P-2L)} & \end{bmatrix} \mathbf{H}_{zp} \text{ y por tanto puede ser demostrado que } \rho_{c.cp} \geq \rho_{c.zp}, [21].$$

Vamos a comparar la curva de probabilidad de error de bit arrojada por varios Transmisores - Receptores lineales en un rango de SNR entre 0 y 18 dB. En la **Figura 3.4** se muestra los resultados los distintos esquemas ZP analizados y análogamente en la **Figura 3.5** los obtenidos para los basados en CP. En las simulaciones llevadas a cabo para la obtención de dichas figuras no se ha hecho uso de la técnica que no asigna potencia a subcanales con baja ganancia, aunque sí se empleará en figuras posteriores.

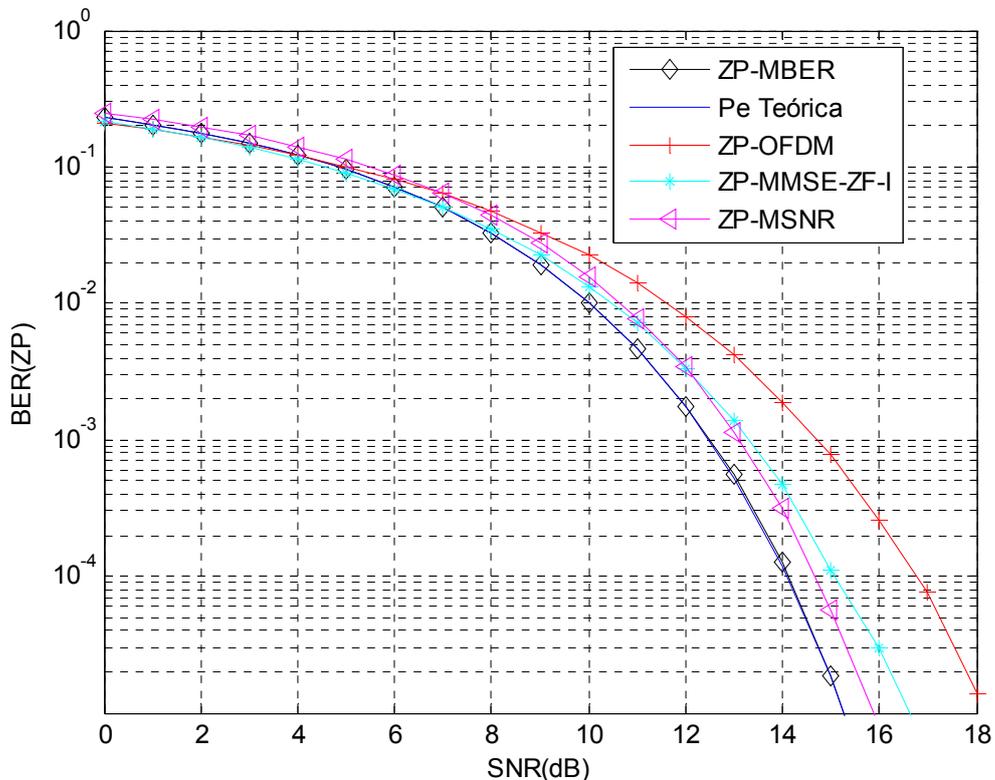


Figura 3.4: Curvas BER de precodificadores ZP en Ejemplo1.

De la **Figura 3.4** se hace notar que aunque el esquema ZP-MSNR no es un diseño que minimiza el error cuadrático medio, a altas SNR mejora el rendimiento ofrecido por el diseño ZP-MMSE-ZF en el que la matriz unitaria que se tiene como grado de libertad se ha escogido como la matriz identidad.

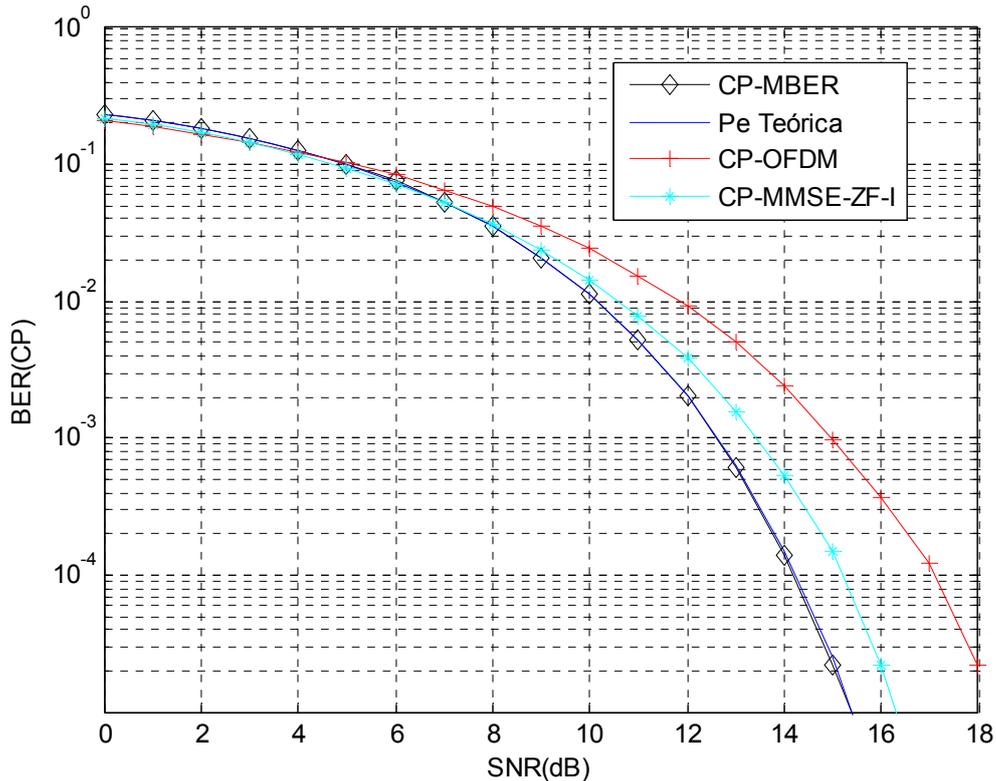


Figura 3.5: Curvas BER de precodificadores CP en Ejemplo1.

Sin embargo, aunque nuestro precodificador para mínima BER es un diseño MMSE en el que se ha seleccionado una matriz unitaria especial para resolver el grado de libertad, supera a ambos diseños ZP-MMSE-ZF-I y ZP-MSNR en prestaciones en lo que se refiere a probabilidad de error.

Del análisis de las **Figuras 3.4 y 3.5** podemos concluir que en ambos casos, el diseño MBER que venimos desarrollando en estas páginas provee una mejora significativa en los resultados de probabilidad de error de bit obtenidos sobre los restantes esquemas cuando $\rho \geq \rho_c$. Sin embargo a valores pequeños de SNR, las diferencias entre las curvas características resultantes en las simulaciones de los distintos esquemas comienzan a ser muy pequeñas.



En **Figura 3.6(a)** se representan las graficas de la BER correspondientes a los esquemas ZP y CP que minimizan ésta y en los que está permitido no asignar potencia a subcanales con respuestas impulsivas pobres. Se establece la comparación de estos dos sistemas con el de DMT, dotado con el algoritmo de water-filling previsto en (3.61) y reparto de bits uniforme.

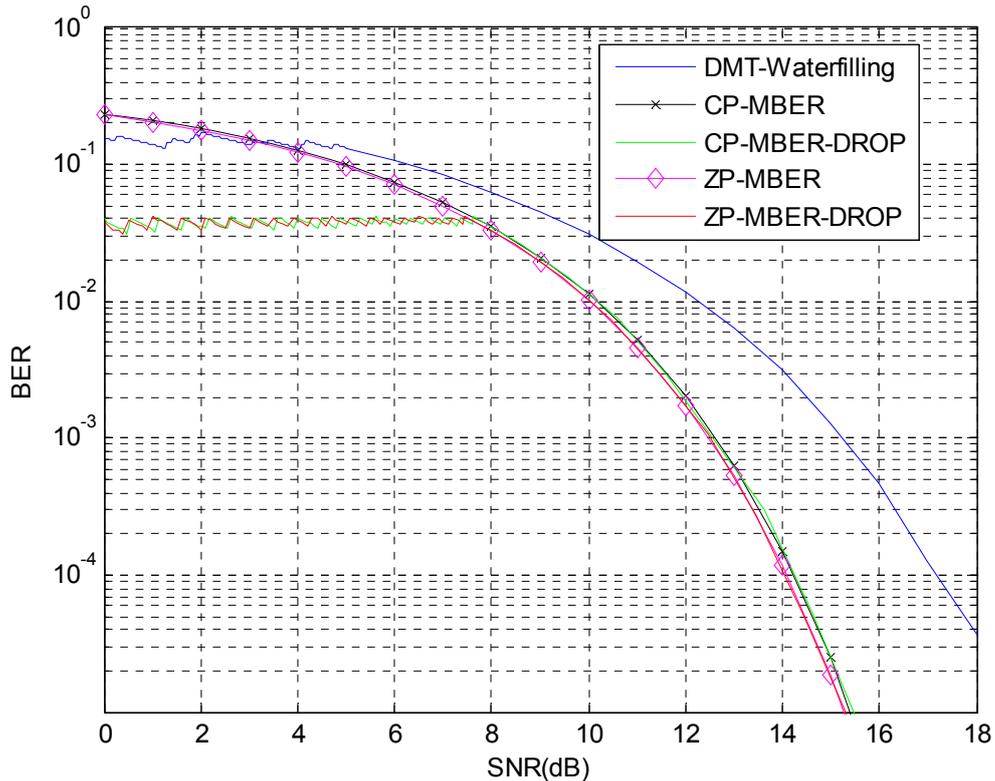


Figura 3.6 (a): Curvas BER frente a la SNR de bloque de los precodificadores CP-MBER y ZP-MBER con descarte de subcanales y precodificador DMT dotado de water-filling resultantes en el Ejemplo 1.

Como era de esperar, puede observarse que a altas relaciones señal ruido, el rendimiento de los esquemas MBER con eliminación de subcanales defectuosos, designados en la figura anterior como ZP-MBER-DROP y CP-MBER-DROP, es el mismo que el obtenido con los esquemas originales ZP-MBER y CP-MBER, respectivamente.

A SNR's por debajo de ρ_c , los sistemas ZP-MBER-DROP y CP-MBER-DROP comienzan a descartar subcanales, mientras que en el caso del diseño DMT equipado con water-filling, los subcanales son eliminados por debajo de $5 \text{ dB} < \rho_c$ aproximadamente.



Sobre el rango completo de SNR que estamos contemplando, ambos esquemas, ZP-MBER-DROP y CP-MBER-DROP, proporcionan mejores resultados que el sistema DMT con water-filling y reparto uniforme de bits. La ganancia estimada de estos dos esquemas óptimos sobre DMT a una BER de 10^{-4} es de 3.5 dB aproximadamente.

Recalcar que cuando un subcanal es descartado por su mala respuesta en frecuencia, la potencia que estaba asignada a dicho subcanal es distribuida entre los restantes subcanales y por lo tanto, la probabilidad de error mejora de una forma discontinua. Esto conduce a curvas de BER con característica dentada a bajas SNR's, como se puede contemplar en la **Figura 3.6 (a)** que nos ocupa.

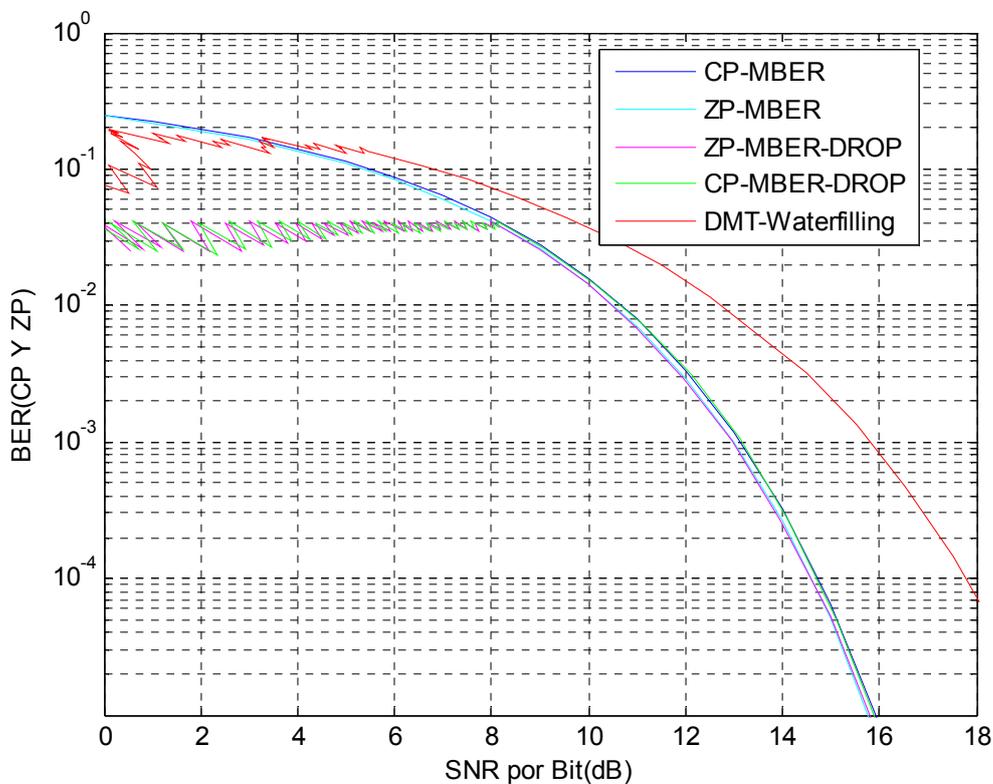


Figura 3.6 (b): Curvas BER frente a la SNR media por bit de los precodificadores CP-MBER y ZP-MBER con descarte de subcanales y precodificador DMT dotado de water-filling resultantes en el Ejemplo 1.

Dada la política de asignación de bit uniforme seguida, el descarte de canales conduce a una reducción del número de bits por bloque y por tanto a una reducción de la tasa de bits. Para incluir los efectos de este cambio de tasa en nuestro análisis, en la **Figura 3.6 (b)** se ha representado la probabilidad de error de bit frente a la SNR media por bit definida como $\rho \triangleq p_0 / (\bar{M}\sigma^2)$, en lugar de frente a la SNR por bloque $\rho \triangleq p_0 / (P\sigma^2)$.



Como la técnica de descarte de canales de ambos diseños MBER y el esquema DMT con el algoritmo de water-filling se basan en una restricción en la potencia transmitida por bloque, no por subcanal, las gráficas de la BER frente a la SNR media por bit pueden estar multievaluadas a pequeños valores de la relación señal ruido. Sin embargo, las tendencias básicas en las **Figuras 3.6 (a) y (b)** son las mismas.

Para explicar el rendimiento ventajoso de los sistemas MBER desarrollados, se han representado en las **Figuras 3.7 y 3.8** los elementos diagonales de las matrices \mathbf{GG}^H para los diferentes precodificadores ZP y CP. La comparación llevada a cabo aquí ha sido evaluada a $\rho = 18$ dB, así que para ninguno de los diseños alguno de los subcanales es descartado. Recordar también de secciones previas que para minimizar la BER, primero hemos de minimizar $\text{tr}(\mathbf{GG}^H)$.

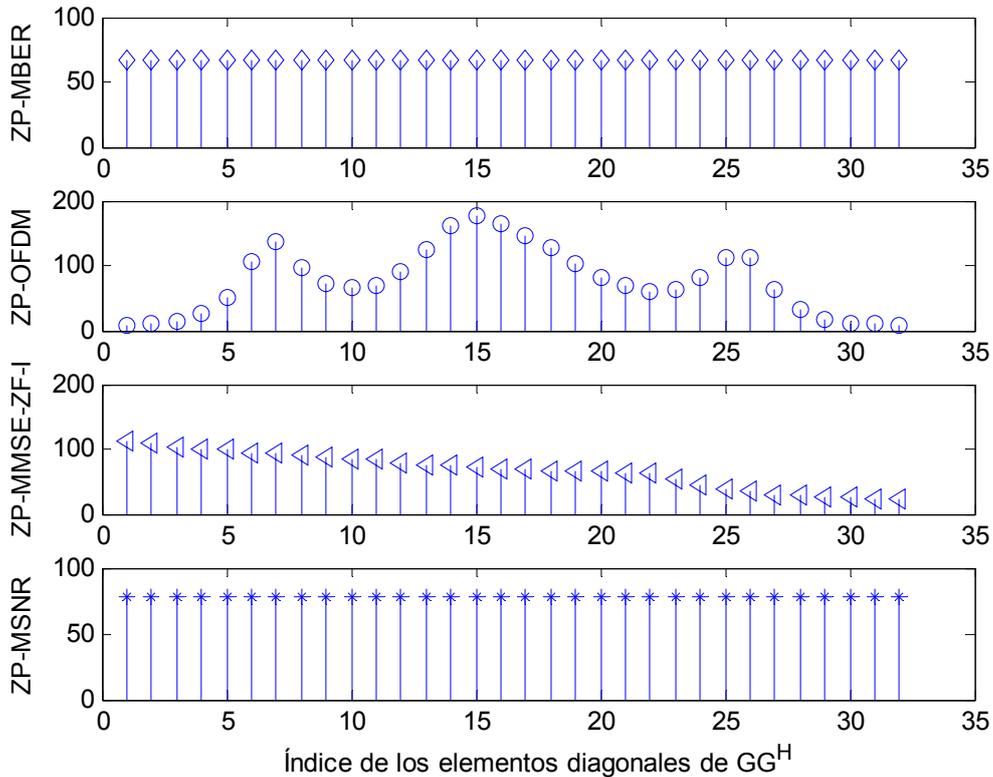


Figura 3.7: Elementos diagonales de \mathbf{GG}^H para los esquemas ZP en el Ejemplo1.

En el caso de diseños que emplean relleno de ceros, se ha de notar que ni ZP-OFDM ni ZP-MSNR son diseños que minimizan el error cuadrático medio; por lo tanto, los valores de la traza de \mathbf{GG}^H para dichos esquemas son mayores que los correspondientes a diseños MMSE. Sin embargo, también podemos observar que para el precodificador ZP-MSNR, los elementos diagonales de \mathbf{GG}^H son iguales.

Por otra parte, entre los diseños englobados dentro de la categoría MMSE, es decir, los que minimizan $\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)$, el precodificador ZP-MBER es el único diseño para el cual la matriz $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ tiene iguales sus elementos diagonales y son de menor valor que en el caso ZP-MSNR, como se deriva de las gráficas representadas en la figura de arriba.

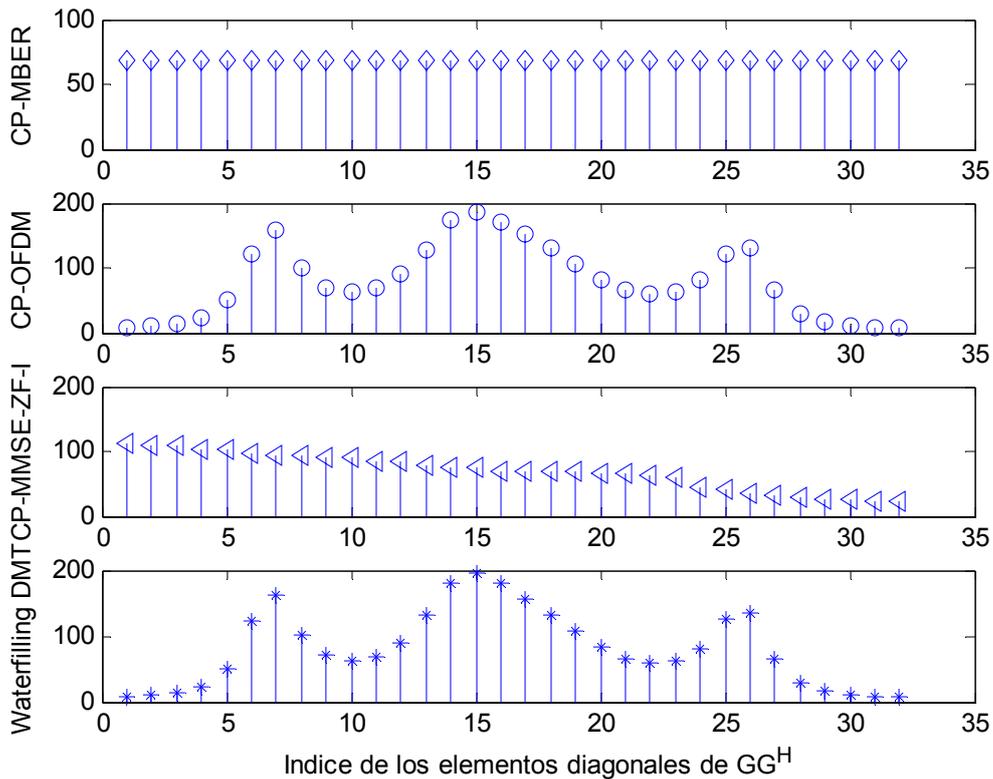


Figura 3.8: Elementos diagonales de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ para los esquemas CP en el Ejemplo1.

Observaciones similares a las realizadas en el caso ZP pueden ser efectuadas respecto al CP en la **Figura 3.8** asociada. Tanto el esquema CP-OFDM como el multitono discreto dotado de water-filling, no son diseños MMSE y los elementos diagonales correspondientes al producto $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ no son iguales entre si. El precodificador CP-MBER es el único diseño que emplea prefijo cíclico, minimiza la traza de $\mathbf{G}\mathbf{G}^H$ y además consigue que los elementos diagonales de dicho producto matricial sean idénticos.

Para concluir con el análisis comparativo que venimos desarrollando, se han representado en la **Figura 3.9**, las gráficas de los tamaños de bloque generados por los precodificadores que emplean descarte de subcanales, en concreto, por los esquemas ZP-MBER-DROP, CP-MBER-DROP y DMT water-filling, en el rango completo de SNR que estamos considerando en el Ejemplo 1.

Como era de esperar, los sistemas MBER-DROP comienzan a no asignar potencia a subcanales, i.e, los descartan, por debajo de una relación señal ruido igual a ρ_c . A partir de este valor el tamaño de bloque se mantiene invariante como $M = 32$. Para el sistema multitono discreto, en el ejemplo que nos ocupa, la gráfica de la longitud de bloque se mantiene por encima de las obtenidas para los precodificadores de mínima BER; aún así aquel obtiene una curva de probabilidad de error claramente desventajosa respecto a éstos últimos.

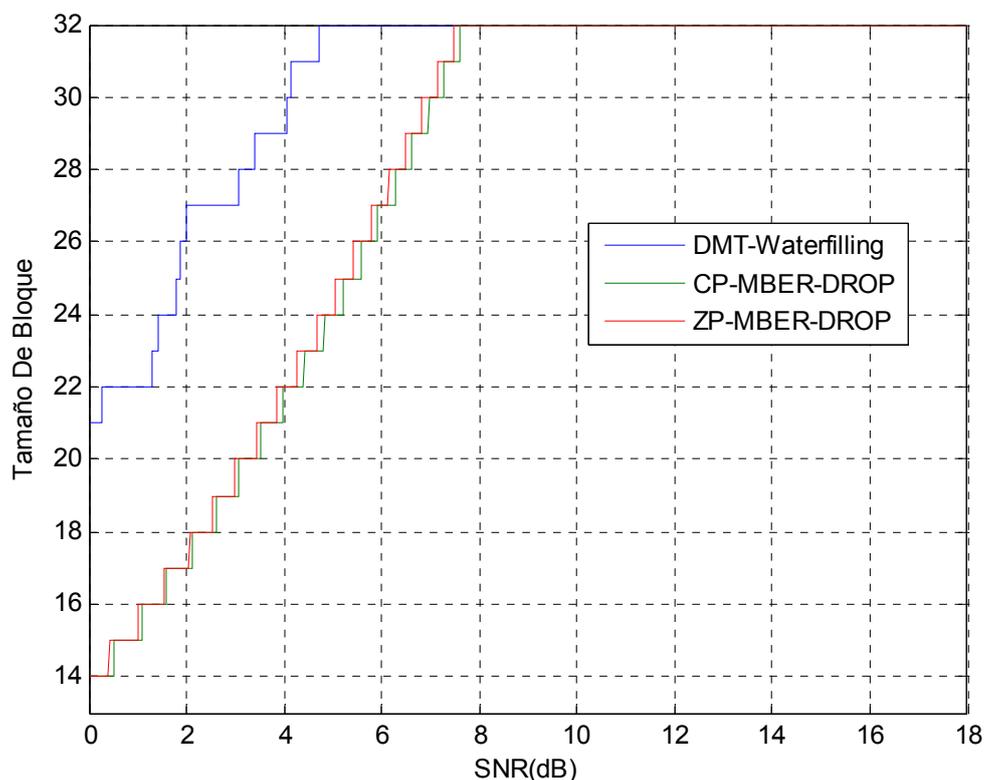


Figura 3.9: Tamaños de bloque generados por los precodificadores ZP-MBER-DROP, CP-MBER-DROP y DMT water-filling en el Ejemplo 1.

3.5.2 EJEMPLO 2: CANAL CON CALIDAD MEDIA DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

En este ejemplo, se examina el funcionamiento de varios Transmisores-Receptores lineales cuando se transmiten bloques de datos sobre un canal con las siguientes características

- Coeficientes $\{0.6121, -0.533- 0.4481j, 0.369j, 0.0513- 0.0388j\}$.
- Orden $L = 3$.

Los parámetros empleados en las simulaciones en relación a los bloques de información son

- Longitud de bloque de datos original $M = 32$.



- Tamaño de bloque final a transmitir $P = 35$.

En este caso también $M = P-L$, por lo tanto, $\mathbf{W}_M = \mathbf{W}$ y $\Lambda_M = \Lambda$.

La magnitud de la DFT de $P-L = 32$ puntos la respuesta impulsiva del canal se muestra en la **Figura 3.10**. El cociente entre la ganancia máxima que alcanza algún subcanal y la mínima es 8.75, lo que significa que este canal posee una respuesta en frecuencia más selectiva que el de el primer ejemplo.

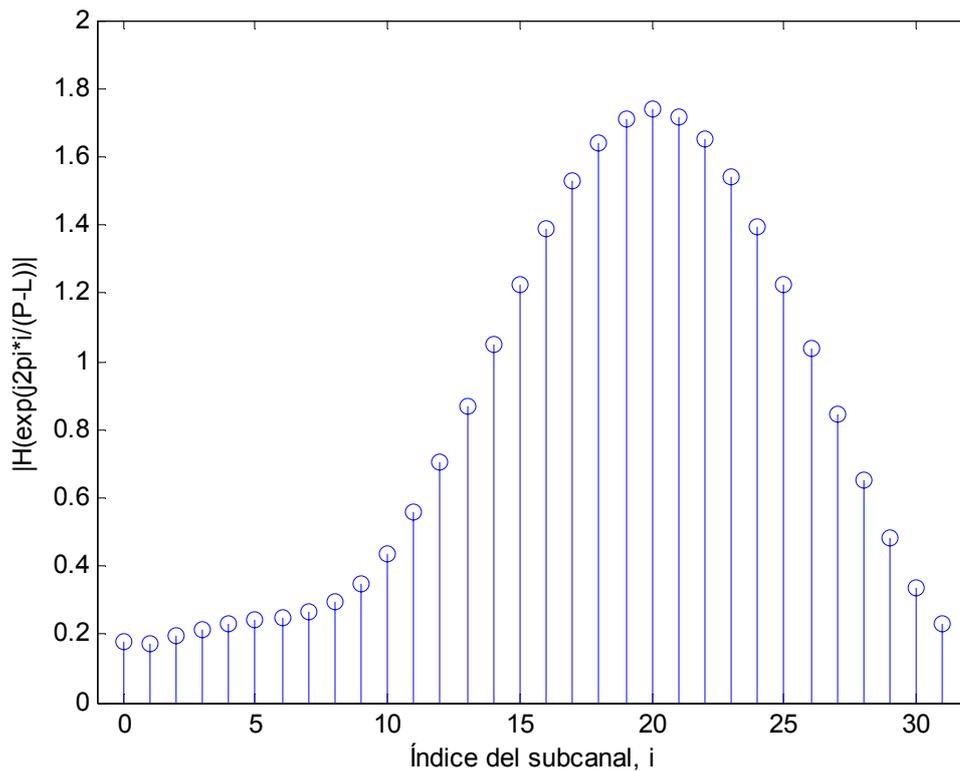


Figura 3.10: Respuesta en frecuencia del canal en Ejemplo 2.

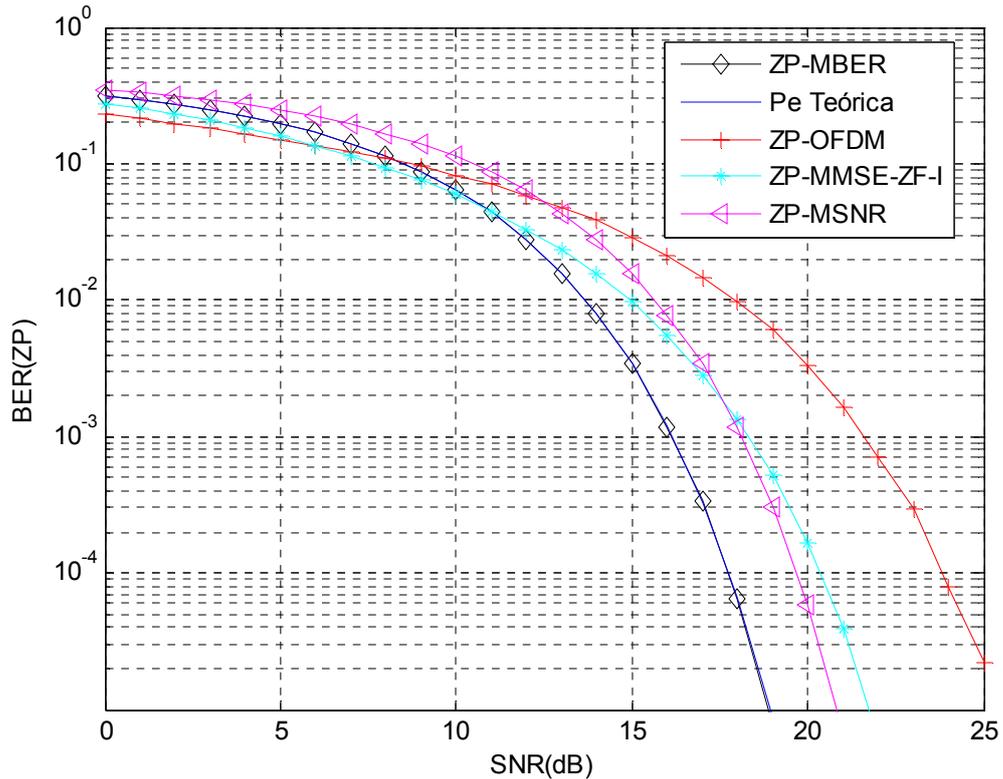


Figura 3.11: Curvas BER de precodificadores ZP en Ejemplo 2.

Para precodificadores ZP, la SNR umbral calculada mediante (3.46) para este canal es $\rho_{c.zp} = 11,13$ dB, mientras que para el caso CP es $\rho_{c.cp} = 11.41$ dB.

Las **Figuras 3.11 y 3.12** muestran las gráficas de probabilidad de error obtenidas a partir de las simulaciones de los sistemas que emplean relleno de ceros y prefijo cíclico, respectivamente.

De forma similar a lo observado en el primer ejemplo, los diseños MBER, muestran un claro rendimiento superior cuando $\rho \geq \rho_c$. Sin embargo, cuando $\rho \leq \rho_c$ las diferencias entre las curvas de probabilidad de cada esquema no son prácticamente notables.

La ganancia en la relación señal ruido de los precodificadores MBER sobre el sistema que emplea el tradicional OFDM a una BER de 10^{-4} es en este caso de 7 dB, lo que da una idea de la mejora que introducen los esquemas que se han diseñado en este proyecto.

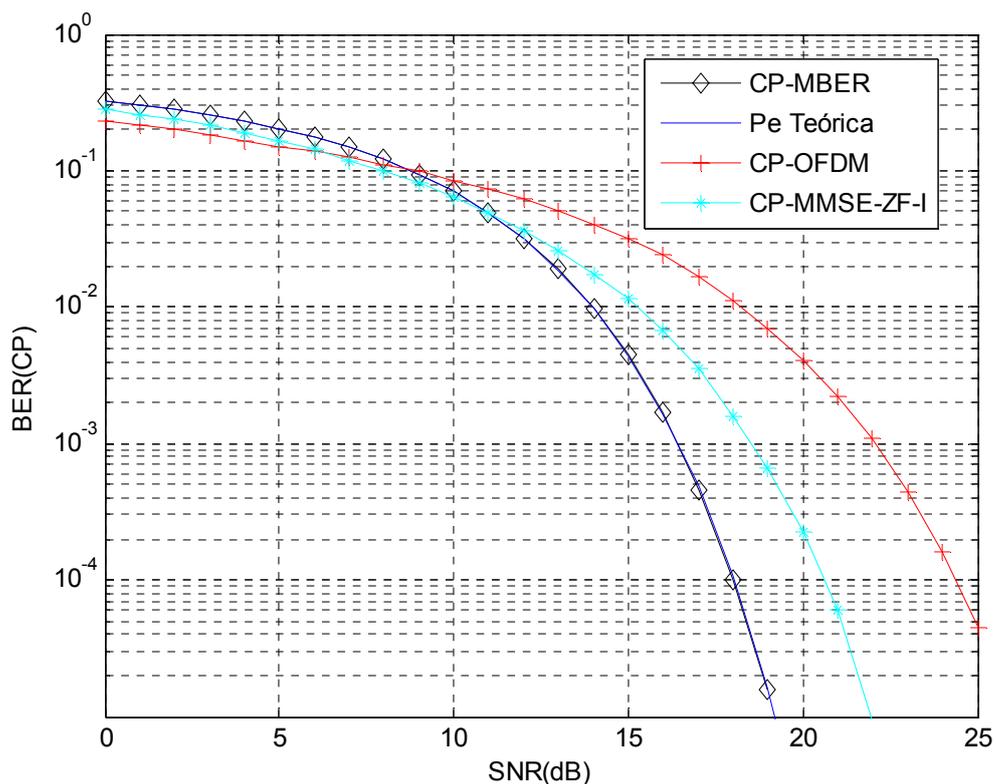


Figura 3.12: Curvas BER de precodificadores CP en Ejemplo 2.

La **Figura 3.13 (a)** compara las curvas de probabilidad errónea de bit de los esquemas en los que está permitido descartar subcanales con pequeña ganancia a bajas relaciones señal ruido.

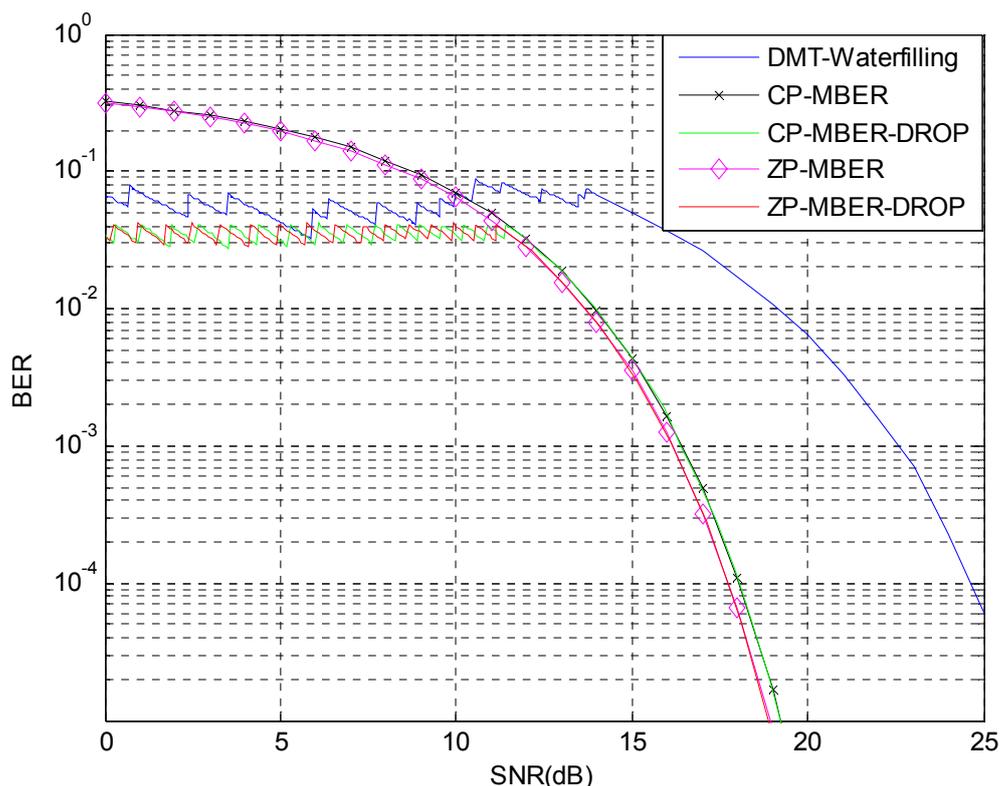


Figura 3.13 (a): Curvas BER frente a la SNR de bloque de los precodificadores CP-MBER y ZP-MBER con descarte de subcanales y precodificador DMT dotado de water-filling resultantes en el Ejemplo 2.

A SNR's por debajo del correspondiente ρ_c , ambos sistemas ZP-MBER-DROP y CP-MBER-DROP comienzan a suprimir subcanales. Estos esquemas proporcionan una sustancial mejora sobre los resultados obtenidos por los correspondientes diseños ZP-MBER y CP-MBER.

El sistema que emplea multitono discreto con el algoritmo water-filling emplea su propia técnica de descarte de subcanales. Como dicha técnica es distinta de la que se sirven los diseños MBER-DROP, empieza a eliminar subcanales a una mayor relación señal ruido entorno a los 14 dB.

A pesar del hecho de que el esquema DMT water-filling, se vale de un menor tamaño de bloque que nuestros precodificadores para mínima BER para SNR's por debajo de 14 dB aproximadamente (véase **Figura 3.14**), el sistema que hemos diseñado consigue mejor comportamiento en lo que a probabilidad de error se refiere, como era de esperar.

Esta tendencia también se advierte claramente en la **Figura 3.13 (b)**, en la que se ha representado el mismo vector de probabilidad de error de nuevo frente a la SNR por bit en lugar de frente a SNR por bloque. Como se mencionó en el Ejemplo 1, la curva para la BER frente a la SNR media por bit puede estar multievaluada a bajas relaciones señal ruido.

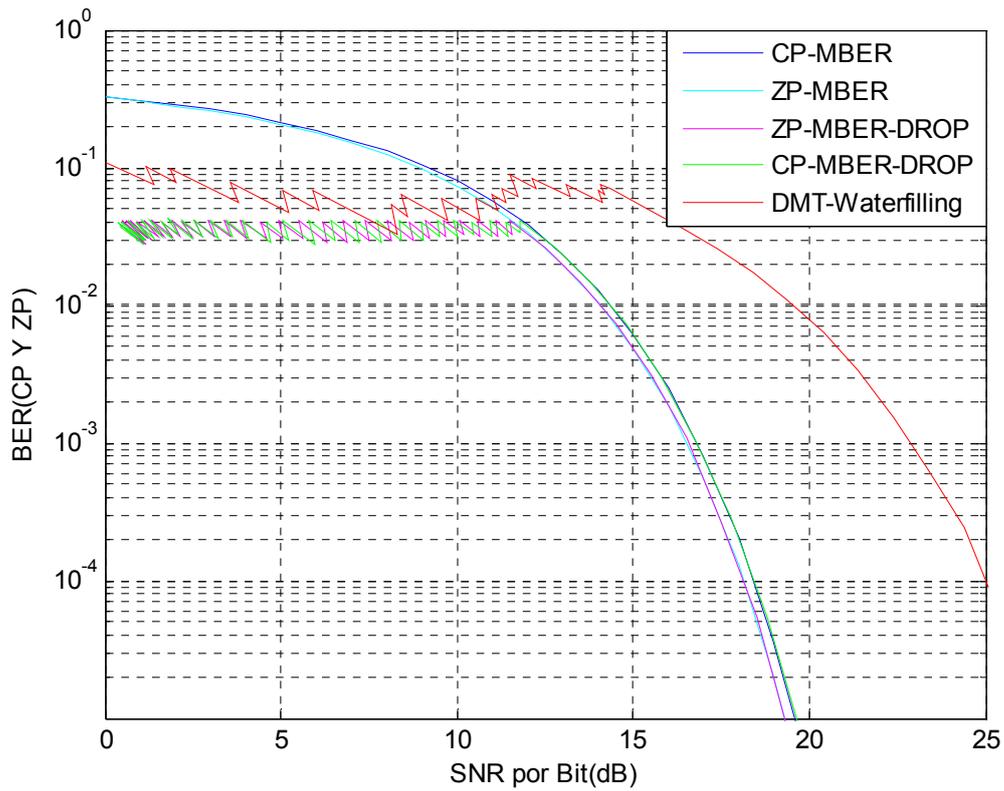


Figura 3.12 (b): Curvas BER frente a la SNR media por bit de los precodificadores CP-MBER y ZP-MBER con descarte de subcanales y precodificador DMT dotado de water-filling resultantes en el Ejemplo 2.

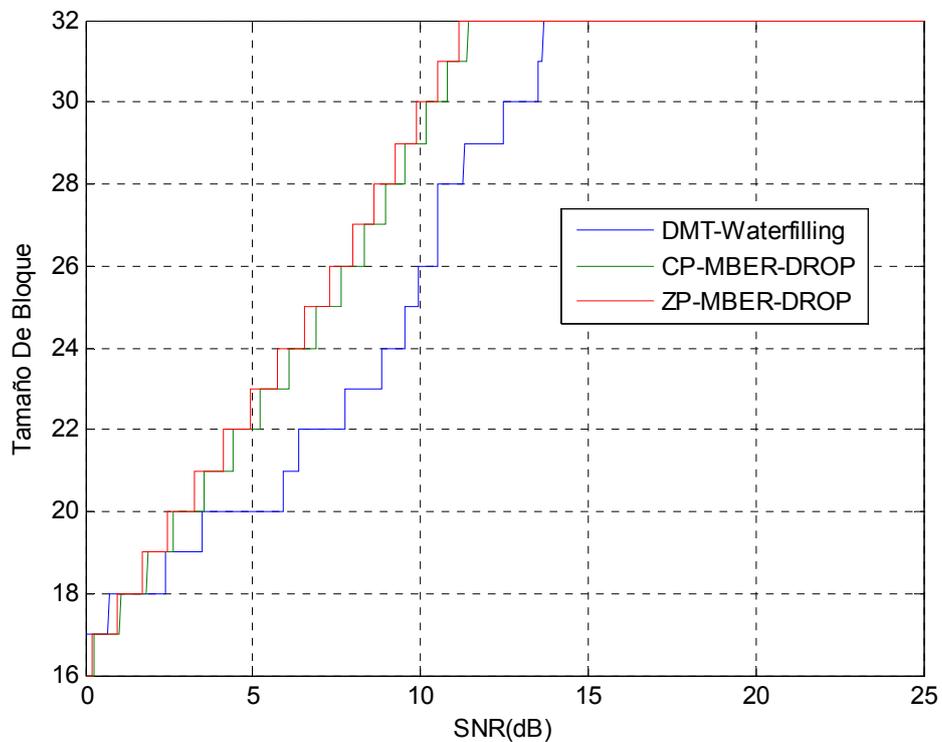


Figura 3.13: Tamaños de bloque generados por los precodificadores ZP-MBER-DROP, CP-MBER-DROP y DMT water-filling en el Ejemplo 1.



Por último, destacar que los precodificadores MBER son los diseños exclusivos que minimizan \mathbf{GG}^H y además logran que los elementos diagonales de tal producto matricial sean iguales, como se puede observar en la **Figura 3.14**.

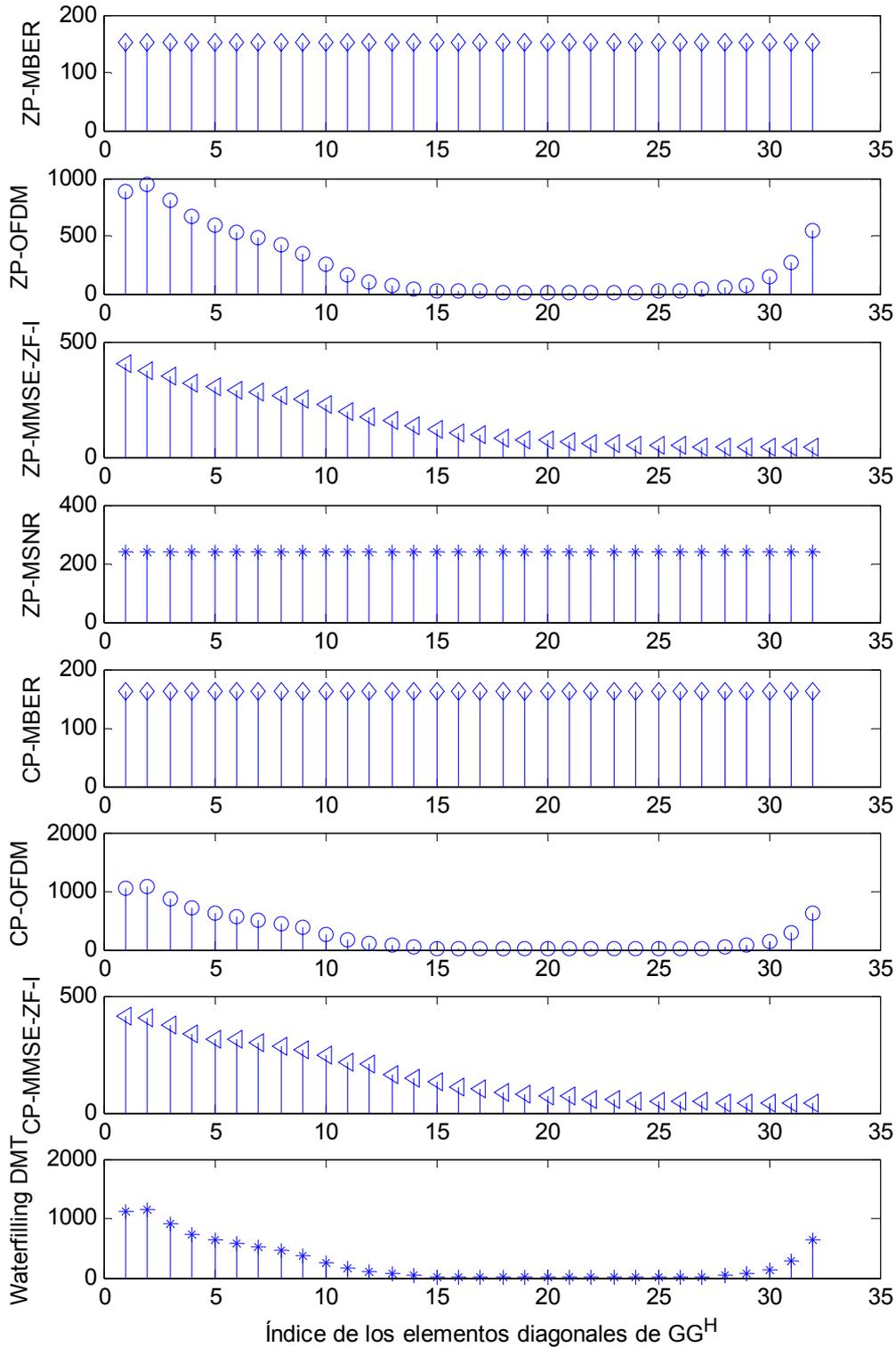


Figura 3.14: Elementos diagonales de \mathbf{GG}^H en los esquemas CP y ZP en Ejemplo 2

3.5.3. EJEMPLO 3: CANAL CON RESPUESTA EN FRECUENCIA POBRE

En este ejemplo, se examina el funcionamiento de varios Transmisores-Receptores lineales cuando se transmiten bloques de datos sobre un canal con las siguientes características

- Coeficientes $\{-0.3826 + 0.0657i, 0.4417 - 0.3856i, 0.1379 - 0.0742i, 0.0206 + 0.6340i, -0.1720 - 0.2213i\}$.
- Orden $L = 4$.

Los parámetros empleados en las simulaciones en relación a los bloques de información son

- Longitud de bloque de datos original $M = 32$.
- Tamaño de bloque final a transmitir $P = 36$.

La magnitud de la DFT de $P-L = 32$ puntos la respuesta impulsiva del canal se muestra en la **Figura 3.15**.

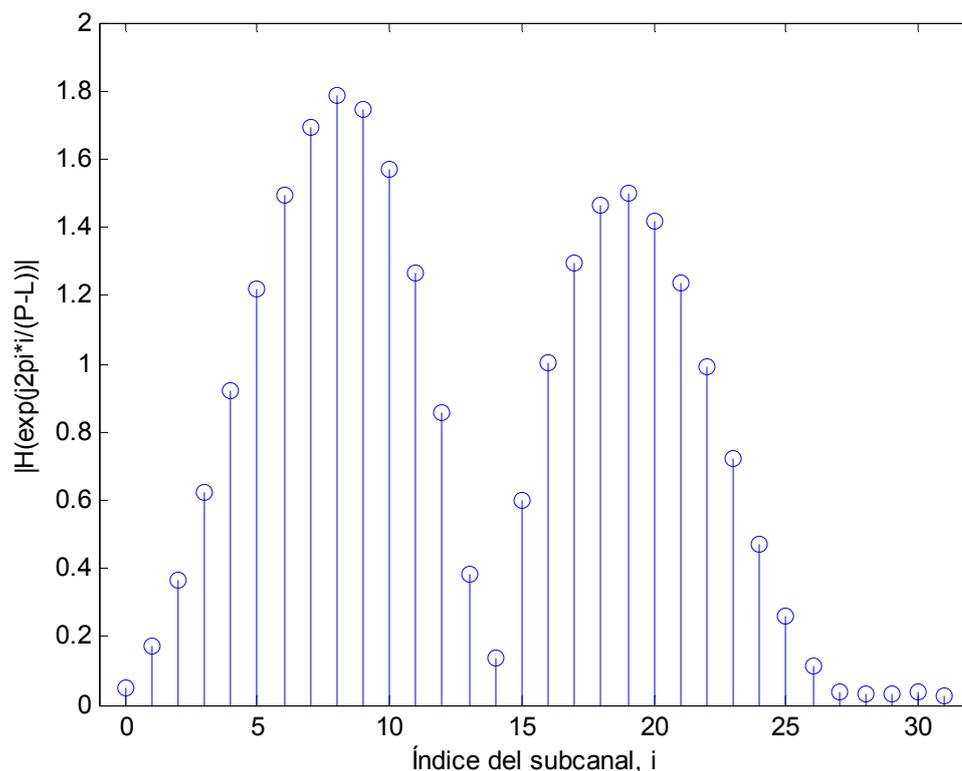


Figura 3.15: Respuesta en frecuencia del canal en Ejemplo 3.

Como se puede observar para este tercer ejemplo se ha generado un canal que presenta subcanales con respuesta en frecuencia prácticamente nula, el objetivo



de tal elección es analizar el comportamiento de los distintos precodificadores sobre este tipo de canales nefastos para la comunicación.

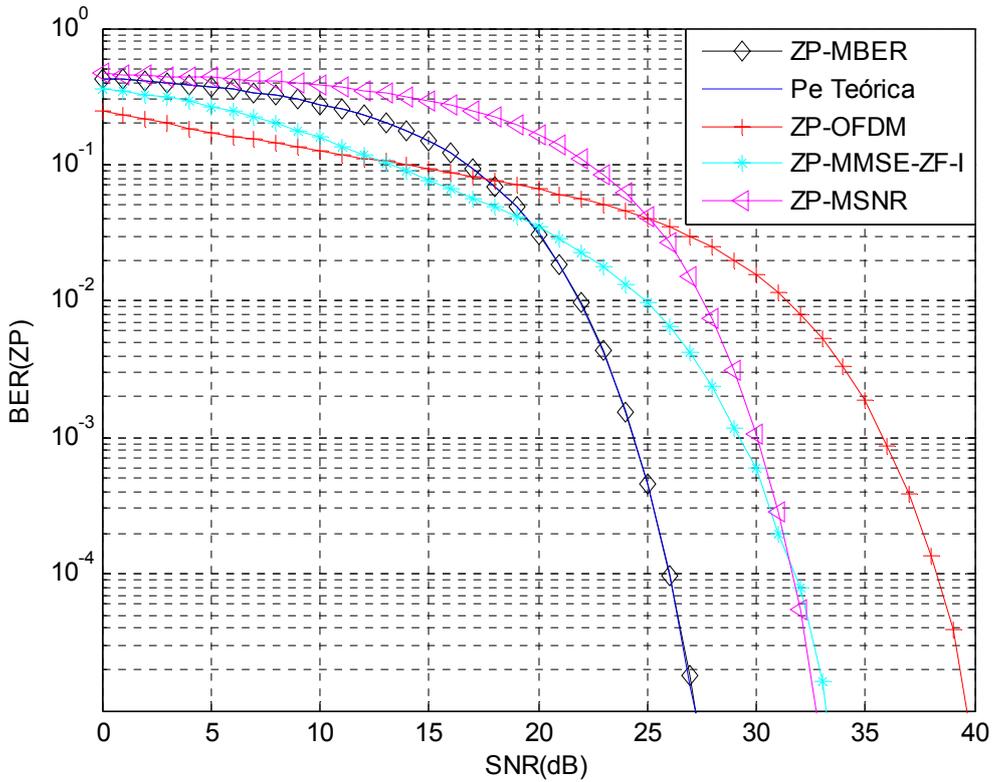


Figura 3.16: Curvas BER de precodificadores ZP en Ejemplo 3.

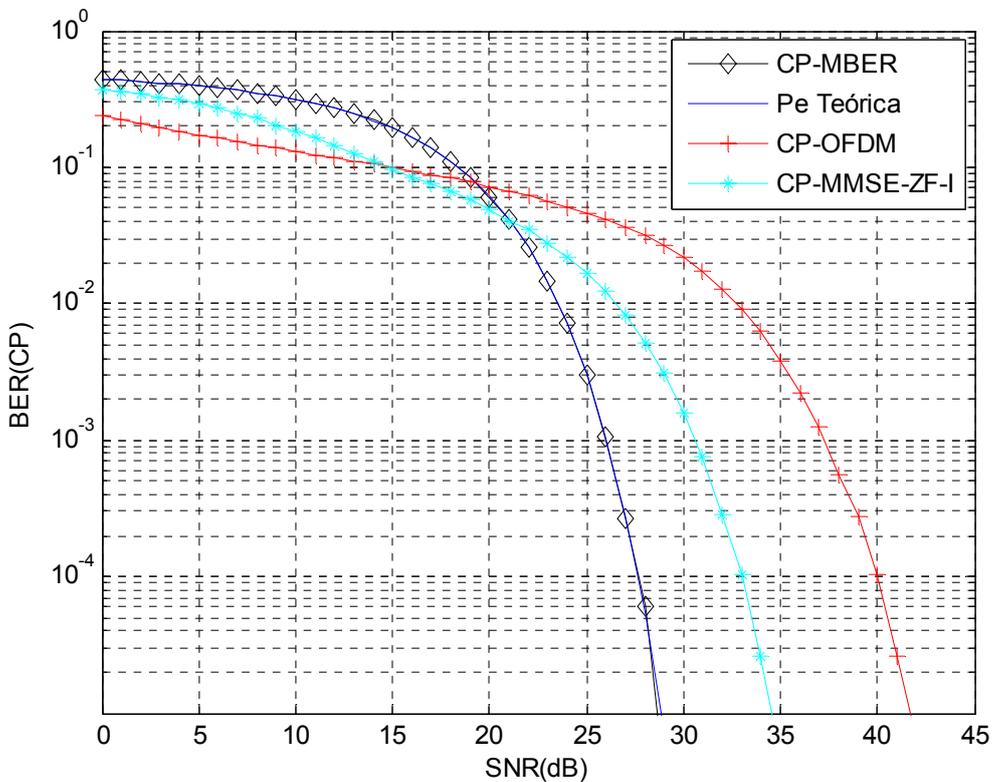


Figura 3.17: Curvas BER de precodificadores CP en Ejemplo 3.

En las **Figuras 3.16 y 3.17** se han representado las gráficas de la BER arrojadas por las simulaciones para los diferentes sistemas ZP y CP, respectivamente. Se puede apreciar como los sistemas ZP-MBER y CP-MBER ofrecen mejor rendimiento por encima de su correspondiente SNR umbral, $\rho_{c,zp} = 19.3708$ dB y $\rho_{c,cp} = 21.0019$ dB.

Sin embargo por debajo de los límites anteriores, los sistemas OFDM clásico y MMSE con matriz unitaria identidad logran una probabilidad de error algo menor, y por tanto ser más robustos frente al tipo de canales que nos ocupa.

La conclusión cambia si en la comparativa incluimos los sistemas basados en descarte de canales, tanto los ZP y CP MBER-DROP como DMT-Waterfilling, pues éstos consiguen mantener la probabilidad de error entorno a un nivel medio muy por debajo que los restantes esquemas para el rango de relación señal ruido que va desde los 0 dB a las SNR umbral determinadas anteriormente, véase **Figura 3.18**. Por encima de este nivel los precodificadores MBER-DROP no suprimen canales y consiguen la misma curva característica que los MBER, por tanto queda suficientemente justificado que los sistemas que mejor se adaptan a canales con respuesta en frecuencia pobre son los que hemos diseñado y denominado MBER-DROP, en este proyecto.

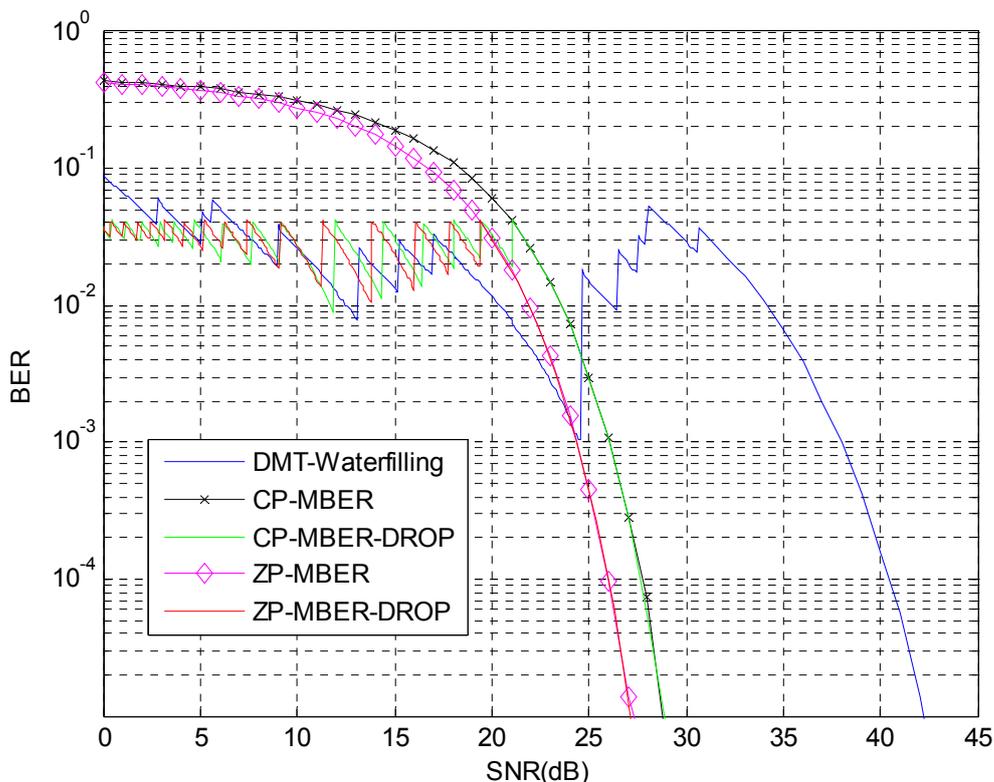


Figura 3.18 : Curvas BER frente a la SNR de bloque de los precodificadores CP-MBER y ZP-MBER con descarte de subcanales y precodificador DMT dotado de water-filling resultantes en el Ejemplo 3.

3.5.4. EJEMPLO 4: CANALES GENERADOS ALEATORIAMENTE

En los ejemplos 1, 2 y 3, se ha examinado la BER de varios precodificadores cuando se transmiten bloques de datos sobre canales con buena, media y baja calidad en frecuencia, respectivamente. En este último ejemplo se analizará los resultados de probabilidad de error media de algunos precodificadores sobre una clase de canales generados aleatoriamente.

Los coeficientes complejos de los canales se han generado independientemente mediante una distribución circular Gaussiana de media cero con varianza unitaria por dimensión. Cada realización correspondiente a un canal, se ha normalizado posteriormente para que la respuesta impulsiva asociada tenga norma cuadrática igual a la unidad.

Los canales generados han sido de orden $L = 4$.

Los parámetros empleados en las simulaciones en relación a los bloques de información son

- Longitud de bloque de datos original $M = 16$.
- Tamaño de bloque final a transmitir $P = M + L = 20$.

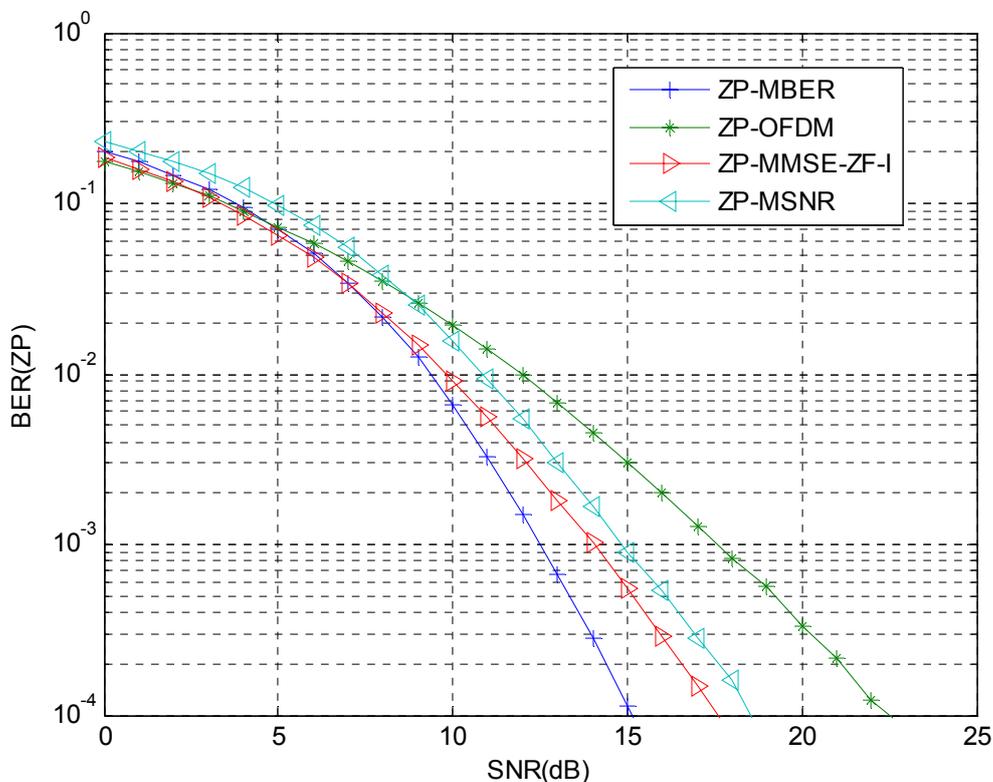


Figura 3.19: BER media frente a la SNR (de bloque) de los precodificadores ZP sobre los canales aleatorios generados en el Ejemplo 4.

Las curvas de probabilidad de error media, correspondientes a varios precodificadores ZP, que se han obtenido mediante simulaciones sobre 1000 realizaciones del tipo de canales expuesto anteriormente, pueden ser vistas en la **Figura 3.19**.

Análogamente, las gráficas de BER media resultantes para algunos de los esquemas CP se muestran en la **Figura 3.20**, y por último aquellas asociadas a los diseños MBER con descarte de canales se han representado en la **Figura 3.21**.

Del análisis de dichas curvas, se desprende que las tendencias establecidas en los tres ejemplos previos pueden ser hechas extensibles al caso aleatorio. Además, las ganancias en la relación señal ruido de nuestros diseños MBER continúan siendo significantes. Por ejemplo, de la **Figura 3.19**, puede notarse que a una BER igual a 10^{-3} la ganancia en la SNR del precodificador ZP-MBER sin supresión de subcanales, sobre el ZP-MMSE-ZF-I es alrededor de 2 dB; y de la **Figura 3.20**, la ganancia de SNR correspondiente a nuestro diseño CP-MBER sin descarte de canales, sobre el normal CP-OFDM es de entorno 7.5 dB.

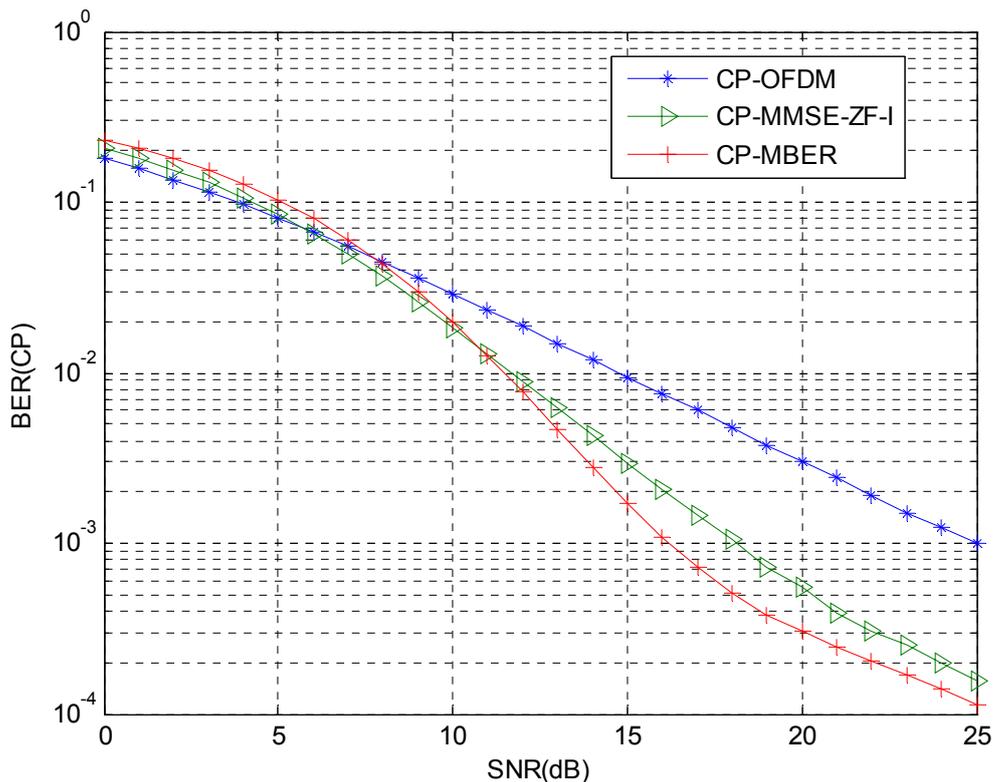


Figura 3.20: BER media frente a la SNR (de bloque) de los precodificadores CP sobre los canales aleatorios generados en el Ejemplo 4.

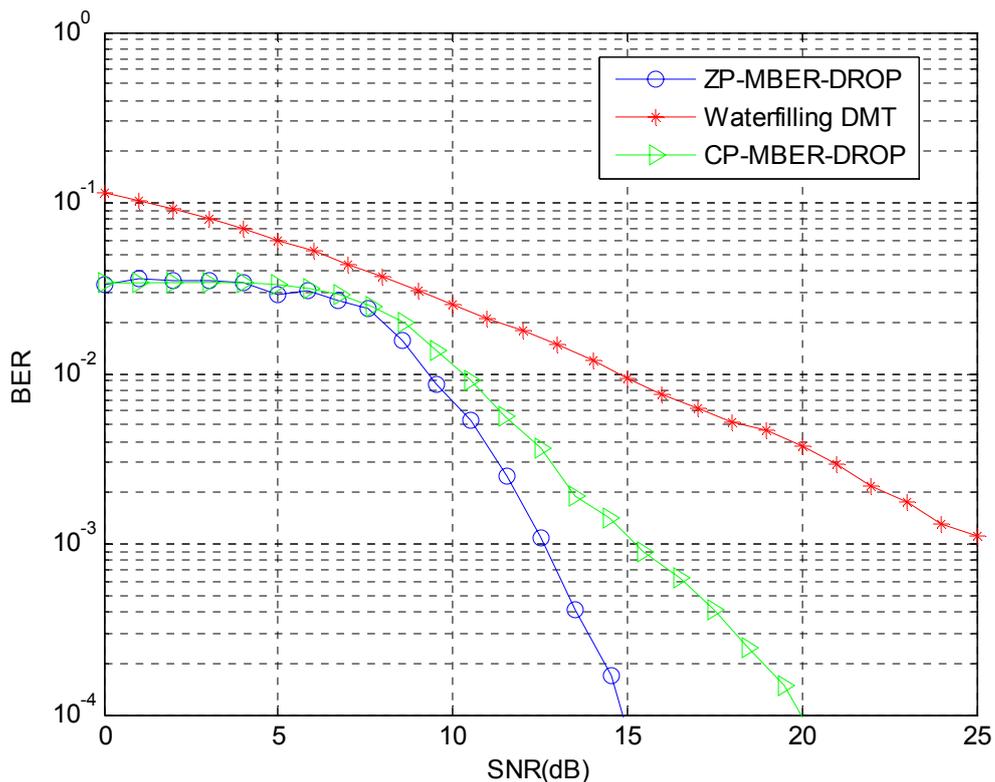


Figura 3.21: BER media frente a la SNR (de bloque) para los precodificadores con descarte de subcanales sobre los canales aleatorios generados en el Ejemplo 4.