



4. PRECODIFICADORES LINEALES DE BLOQUES CONVERGENTES ASINTÓTICAMENTE A LA MÍNIMA BER PARA ECUALIZACIÓN MMSE

4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección se proporcionará un diseño que alcanza asintóticamente la mínima tasa de error de bit, para el transmisor (precodificador) de un sistema de comunicaciones basado en la transmisión de bloques de información y emplea en recepción, ecualización que minimiza el error cuadrático medio y detección inconexa de símbolos.

Para esquemas generales de transmisión por bloques, se requiere una decisión continua en todo el bloque, esta tarea requiere un gran número de operaciones que crece exponencialmente con el tamaño de bloque. Sin embargo para sistemas como OFDM y DMT, en los que se transmiten bloques de datos de una manera característica de modo que la interferencia entre los bloques recibidos puede ser eliminada, las detecciones pueden ser desacopladas linealmente (símbolo a símbolo) con lo que resulta un receptor mucho menos complejo. Por tanto nos basaremos en dichas técnicas, para la consecución de este interesante resultado en nuestro sistema de comunicaciones.

El abordaje del diseño se hará en dos etapas de optimización, primero la cota más baja de BER será minimizada y seguidamente se mostrará como el precodificador alcanza ésta.

Trabajos previos han tendido a diseños del precodificador que focalizan en la minimización del error cuadrático medio a la salida del ecualizador, bajo la suposición de perfecto conocimiento del estado del canal en el transmisor. Aunque estos diseños obtienen el mínimo MSE, no necesariamente alcanzan la mínima probabilidad de error de bit.

Como se ha mostrado en el diseño llevado a cabo en secciones anteriores del precodificador lineal MBER para ecualización ZF, a moderadas y altas relaciones señal ruido, la ganancia de los precodificadores MBER puede ser del orden de varios decibelios sobre los estándares MMSE y OFDM.

Dado que la ecualización que minimiza el error cuadrático medio es a menudo preferida sobre la cero forzada, en los siguientes apartados se derivará una expresión cerrada para el precodificador lineal asintótico a la probabilidad mínima de error de bit, en sistemas de transmisión por bloques que emplean ecualización MMSE. De forma análoga a lo comentado en el párrafo anterior, se mostrará que ganancias similares en la SNR son obtenidas en este caso y por último llevaremos a cabo una comparativa



entre los sistemas diseñados que logran la minimizar la BER con diferentes ecualizadores en recepción.

4.2. TRANSMISIÓN POR BLOQUES

Consideraremos el mismo sistema de transmisión por bloques que se muestra en la **Figura 3.1**. Si recordamos en tal sistema, el n -ésimo bloque de M símbolos de información, $\mathbf{s}(n)$, es precodificado linealmente con una matriz \mathbf{F}_0 de dimensiones $P \times M$ para construir un bloque de $P \geq M$ símbolos, véase (3.3), que es transmitido en serie a través del canal.

Aquí se harán idénticas suposiciones en lo que respecta al canal, es decir, se asumirá cuasi-estático durante la transmisión de un bloque de datos y de respuesta impulsiva finita de longitud $L + 1$.

El receptor procesa linealmente el bloque de P muestras recibidas, $\mathbf{y}(n)$, con la matriz de ecualización \mathbf{G}_0 de dimensiones $M \times P$, para obtener la estimación, (3.5), del bloque de símbolos enviados. Posteriormente los elementos estimados son pasados a través de un detector escalar de símbolo a símbolo para conformar el bloque detectado $\hat{\mathbf{s}}_q(n)$.

La efectividad del esquema de detección bloque a bloque depende de la eliminación de la interferencia entre bloques (IBI). Tal y como se expuso al principio de este proyecto, existen dos estándares de transmisión capaces de eliminar la IBI de manera independiente al canal, relleno de ceros y prefijo cíclico, que imponen estructuras particulares a las matrices \mathbf{F}_0 y \mathbf{G}_0 , véanse (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13).

En ambos casos, ZP y CP, los grados de libertad restantes proporcionados por las matrices \mathbf{F} y \mathbf{G} no estructuradas, se convertirán en nuestras variables de diseño. Usando la notación precedente y eliminando el índice de bloque, obtenemos la siguiente expresión unificada para el vector de símbolos ecualizados en ambos esquemas de transmisión

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{GHFs} + \mathbf{Gv} \quad (4.1)$$

donde \mathbf{v} es el vector que contiene los elementos apropiados de la secuencia de ruido aditivo, $\tilde{\mathbf{v}}(n)$, en la **Figura 3.1**. Para el caso ZP, \mathbf{H} es la matriz Toeplitz de dimensiones $P \times (P-L)$ construida según (3.15) y \mathbf{v} es de longitud P ; mientras que para el caso CP \mathbf{H} es la matriz circulante de dimensiones $(P-L) \times (P-L)$ estructurada según (3.16) y \mathbf{v} es de longitud $P-L$.

A lo largo de esta sección, consideraremos aplicaciones en las cuales tanto el transmisor como el receptor disponen de una perfecta información acerca del canal.



Para facilitar la exposición, inicialmente consideraremos esquemas en los que los datos a transmitir son símbolos 4-QAM equiprobables, generados de forma independiente y de energía unidad, $E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\} = \mathbf{I}$, pero después extenderemos el resultado a constelaciones cuadradas QAM de mayor orden. También asumiremos que el vector de ruido recibido $\tilde{\mathbf{v}}(n)$ es estacionario, de media cero, blanco, circular simétrico y Gaussiano de covarianza $E\{\tilde{\mathbf{v}}(n+n_0)\tilde{\mathbf{v}}^*(n)\} = \mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}}(n_0)$. Por lo tanto, el elemento (i, j) de $\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^H\}$ es $\mathbf{r}_{\tilde{\mathbf{v}}}(i-j)$ y la matriz de covarianza queda $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^H\} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Para el escenario descrito el ecualizador MMSE viene dado por

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{MMSE}} = \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H (\sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H)^{-1} \quad (4.2)$$

Por simplicidad rotacional, denominaremos $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{MMSE}}$ en las restantes partes de este capítulo.

Este ecualizador interviene en (4.1) en el producto $\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}$ que tiene algunas propiedades especiales que nos ayudarán en la derivación del precodificador asintótico a la mínima probabilidad de error de bit. En particular,

P1. $\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F} = \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H (\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{F}$ que es Hermética simétrica

P2. $(\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F})(\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F})^H + \mathbf{G}\mathbf{R}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{G}^H = \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}$, [26]

P3. $0 \leq [\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}]_{mm} \leq 1$ para todo $m \in [1, M]$, donde $[\cdot]_{ij}$ denota en elemento (i, j) de una matriz. Esta propiedad se derivará en el Apéndice B.

4.3. PROBABILIDAD DE ERROR DE BIT MEDIA

Mediante detección por umbral aplicada independientemente a la parte real e imaginaria de cada elemento del vector de señal recibido $\hat{\mathbf{S}}$, en la **Figura 3.1**, la señal detectada puede ser escrita como

$$\hat{\mathbf{s}}_q = \text{sgn}(\text{Re}(\hat{\mathbf{s}})) + j \text{sgn}(\text{Im}(\hat{\mathbf{s}})), \quad (4.3)$$

Donde $\text{Re}(\cdot)$ e $\text{Im}(\cdot)$ toman la parte real e imaginaria de un vector complejo, respectivamente, y $\text{sgn}(\cdot)$ cuantiza los elementos en el vector de señal para que valgan ± 1 .

Análogamente al caso ZF, la tasa de probabilidad de error P_e , se define como la probabilidad media de recibir un bit erróneo en $\hat{\mathbf{s}}_q$. Por lo tanto, podemos escribir que



$$P_e = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M (P_{e,r,m} + P_{e,i,m}) \quad (4.4)$$

donde $P_{e,r,m}$ y $P_{e,i,m}$ representan la probabilidad de error en la parte real e imaginaria del elemento m -ésimo del vector de señal detectado, respectivamente. Debe hacerse notar que (4.1) puede ser expresado en la forma

$$\hat{\mathbf{s}} = \text{Diag}(\mathbf{GHF})\mathbf{s} + (\mathbf{GHF} - \text{Diag}(\mathbf{GHF}))\mathbf{s} + \mathbf{Gv} \quad (4.5)$$

para que así los términos de señal deseada, la interferencia intersimbólica y ruido sean distinguidos.

En la expresión (4.5), $\text{Diag}(\mathbf{GHF})$ es una matriz $M \times M$, con los elementos diagonales de \mathbf{GHF} en su propia diagonal y ceros en el resto de elementos. Si denotamos mediante $[\cdot]_m$ el elemento m -ésimo de un vector y reescribimos (4.5) para dicho elemento tendremos

$$[\hat{\mathbf{s}}]_m = [\mathbf{GHF}]_{mm} [\mathbf{s}]_m + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq m}}^M [\mathbf{GHF}]_{m\ell} [\mathbf{s}]_\ell + [\mathbf{Gv}]_m \quad (4.6)$$

Como ambas componentes de ruido e ISI en (4.6) tienen distribuciones que son simétricas respecto a los ejes real e imaginario del plano complejo y por tanto tienen media cero, el detector óptimo para cada elemento es el estándar que emplea decisión por umbral para señalización 4-QAM, [14].

Para determinar la probabilidad de error para este detector, podemos observar que $[\mathbf{Gv}]_m$ tiene una distribución gaussiana ya que \mathbf{v} es discontinuamente gaussiano y que la componente de interferencia intersimbólica en (4.6) puede tomar hasta 4^{M-1} valores discretos. Estos valores, que denotaremos como z_j , pueden ser calculados sustituyendo la j -ésima permutación de los símbolos interferentes en el término de ISI de (4.6).

De hecho, aplicando procedimientos estándares para el cálculo de la probabilidad de error para detección símbolo a símbolo, 4-QAM de energía unidad en este caso, en presencia de ISI, véase [14]. Para el modelo en (4.6), tenemos que la probabilidad de error para el m -ésimo elemento es

$$P_{e,m} = \frac{1}{4^{M-1}} \sum_{j=1}^{4^{M-1}} P_{e,m|z_j} = \frac{1}{4^M} \sum_{j=1}^{4^{M-1}} \text{erfc} \left(\frac{[\mathbf{GHF}]_{mm} - \sqrt{2} \text{Re}(z_j)}{\sqrt{2} [\mathbf{GR}_{vv} \mathbf{G}^H]_{mm}} \right) + \text{erfc} \left(\frac{[\mathbf{GHF}]_{mm} - \sqrt{2} \text{Im}(z_j)}{\sqrt{2} [\mathbf{GR}_{vv} \mathbf{G}^H]_{mm}} \right) \quad (4.7)$$



donde se ha tenido en cuenta que

$$P_{e,m} = \frac{1}{2}(P_{e,r,m} + P_{e,i,m}) \quad (4.8)$$

$$\text{y } \text{erfc}(\zeta) \triangleq (2/\sqrt{\pi}) \int_{\zeta}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Desafortunadamente, el número de términos en el sumatorio (4.7) es exponencial con M , por tanto, las probabilidades $P_{e,r,m}$ y $P_{e,i,m}$ requieren para su cálculo exacto una carga computacional que involucra una suma de aproximadamente 4^{M-1} valores que los otros elementos de \mathbf{S} pueden tomar y que rápidamente se convierte en inaceptable conforme crece el tamaño de bloque.

Un método estándar para reducir la complejidad de evaluar la expresión analítica exacta para la BER en un sistema con ISI es determinar un modelo estadístico simple aproximado para la ISI en (4.5).

Para hacer eso, podemos recurrir a la equivalencia algebraica entre la transmisión por bloques para un único usuario y una clase de sistemas transmisión síncrona multiusuario. En particular, la interferencia intersimbólica en (4.5) es algebraicamente equivalente a la interferencia de acceso múltiple (MAI) en el escenario multiusuario.

Transformando los resultados de [16,17], sobre la distribución MAI a la salida de un detector lineal MMSE multiusuario a la situación marcada por (4.5), puede ser observado que para un canal aleatorio elegido $\mathbf{h}(\mathbf{k})$ de orden L y un precodificador aleatorio \mathbf{F} de dimensiones $(P-L) \times M$, la distribución de la ISI en cada elemento de $\hat{\mathbf{s}}$ en (4.5) converge casi seguramente a una distribución Gaussiana compleja circular conforme el tamaño de bloque, M , crece. Por lo tanto, cada componente de $\hat{\mathbf{s}}$ en (4.5) puede ser (casi seguramente) aproximado por una variable aleatoria Gaussiana y la exactitud de esta aproximación mejora conforme M se incrementa.

Si denotamos mediante $[\cdot]_{\ell m}$ el elemento (ℓ, m) de una matriz y tenemos en cuenta la notación establecida previamente, entonces la parte real e imaginaria de $\hat{\mathbf{s}}$ se pueden aproximar como

$$[\text{Re}(\hat{\mathbf{s}})]_m \approx \mathbf{x}_{r,m} \sim N\left([\mathbf{GHF}]_{mm} [\text{Re}(\mathbf{s})]_m, \sqrt{[\mathbf{C}]_{mm}}\right), \quad (4.9)$$

$$[\text{Im}(\hat{\mathbf{s}})]_m \approx \mathbf{x}_{i,m} \sim N\left([\mathbf{GHF}]_{mm} [\text{Im}(\mathbf{s})]_m, \sqrt{[\mathbf{C}]_{mm}}\right), \quad (4.10)$$

por lo tanto, la ecuación (4.6) puede ser aproximada por

$$[\hat{\mathbf{s}}]_m = [\mathbf{GHF}]_{mm} [\mathbf{s}]_m + \mathbf{w}_m \quad (4.11)$$



donde \mathbf{w}_m es una variable aleatoria Gaussiana compleja (circular) de media cero con partes imaginaria y real independientes de varianza $[\mathbf{C}]_{mm}$, y matriz de covarianza \mathbf{C} que satisface

$$2\mathbf{C} = (\text{Re}(\mathbf{GHF}) - \text{Diag}(\mathbf{GHF})) \times (\text{Re}(\mathbf{GHF}) - \text{Diag}(\mathbf{GHF}))^T + (\text{Im}(\mathbf{GHF}))(\text{Im}(\mathbf{GHF}))^T + \sigma^2 \text{Re}(\mathbf{GG}^H). \quad (4.12)$$

Bajo el modelo aproximado (4.11) la detección por umbral de las partes imaginaria y real de $[\hat{\mathbf{s}}]_m$ es equivalente a la detección de un símbolo antipodal en presencia de ruido aditivo Gaussiano. Usando (4.9), (4.10) y procedimientos clásicos de cálculo de probabilidades [14] tenemos que la BER de las componentes real e imaginaria puede expresarse como

$$P_{e,r,m} = P_{e,i,m} \approx \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{[\mathbf{GHF}]_{mm}}{\sqrt{4[\mathbf{C}]_{mm}}} \right) \quad (4.13)$$

donde la aproximación converge conforme el tamaño de bloque aumenta.

Usando la propiedad P.2, puede demostrarse que

$$2[\mathbf{C}]_{mm} = [\mathbf{GHF}]_{mm} - ([\mathbf{GHF}]_{mm})^2 \quad (4.14)$$

y así la parte derecha de la expresión (4.13) queda

$$\frac{1}{2} \text{erfc} \left(\left(2 \left[(\text{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1} - \mathbf{I} \right]_{mm} \right)^{-1/2} \right). \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.4), la probabilidad de error media de bit puede ser escrita como

$$P_e \approx \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \text{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2 \left[(\text{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1} - \mathbf{I} \right]_{mm}}} \right) \quad (4.16)$$

donde comentario idéntico al realizado acerca de la aproximación en (4.13) debe realizarse.

4.4. DISEÑO DEL PRECODIFICADOR ASINTÓTICO HACÍA LA MÍNIMA BER

4.4.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Con la expresión asintótica para la BER dada por (4.16), nuestro objetivo es encontrar un precodificador que provea la mínima probabilidad de error, sujeto a un límite superior de la potencia media usada para transmitir los datos, p_0 . Matemáticamente el problema de diseño para ambos sistemas ZP y CP puede ser escrito como

$$\min_{\mathbf{F}} P_e \quad (4.17.a)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^H) \leq p_0 \quad (4.17.b)$$

Veremos después que la expresión (4.16) para la BER, es convexa respecto al término $[\mathbf{GHF}]_{mm}$ y por tanto que una solución globalmente óptima al problema (4.17) puede ser obtenida en dos fases, primero minimizando la cota más baja para la probabilidad de error y seguidamente mostrando como esta cota minimizada puede ser alcanzada. Por simplicidad en la exposición nos ceñiremos al caso $\mathbf{P} = \mathbf{L} = \mathbf{M}$.

4.4.2. CONVEXIDAD Y COTA INFERIOR MÁS PEQUEÑA DE LA BER

Para establecer la convexidad de (4.16), tomemos $f(x) = \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2(x^{-1}-1)}}\right)$.

La segunda derivada de $f(x)$ con respecto a x es

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^{-1}-1)^{-1}\right) \left(x^{-4}(x^{-1}-1)^{-7/2}\right) \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2 \quad (4.18)$$

De (4.18), puede observarse que si $0 \leq x \leq 1$, entonces $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$. En la

Figura 4.1 se ha representado (4.18) en el rango de interés para nuestro estudio, Aplicando este resultado a la expresión (4.16) para la BER, se puede concluir que $P_{e,m}$ (4.8) es una función convexa de $[\mathbf{GHF}]_{mm}$ ya que por la propiedad P3 se verifica que $0 \leq [\mathbf{GHF}]_{mm} \leq 1 \quad \forall m \in [1, M]$.

Usando esta observación, la cota más baja para la BER, $P_{e,LB}$ puede obtenerse mediante la aplicación de la desigualdad de Jensen que establece que si

$f(x)$ es convexa entonces $(1/M) \sum_{m=1}^M f(x_m) \geq f\left((1/M) \sum_{m=1}^M x_m\right)$ y la igualdad se establece si y solo si $x_1 = x_2 = \dots = x_M$. Así,

$$\begin{aligned}
 P_e &\geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left(\left[(\operatorname{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1} - \mathbf{I} \right]_{mm} \right)^{-1/2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\left(\frac{2}{M} \left(\operatorname{tr} \left((\operatorname{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1} \right) - M \right) \right)^{-1/2} \right) \triangleq P_{e, \text{LB}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde la igualdad se mantiene si y solo si $[\mathbf{GHF}]_{mm}$ son iguales para toda $m \in [1, M]$

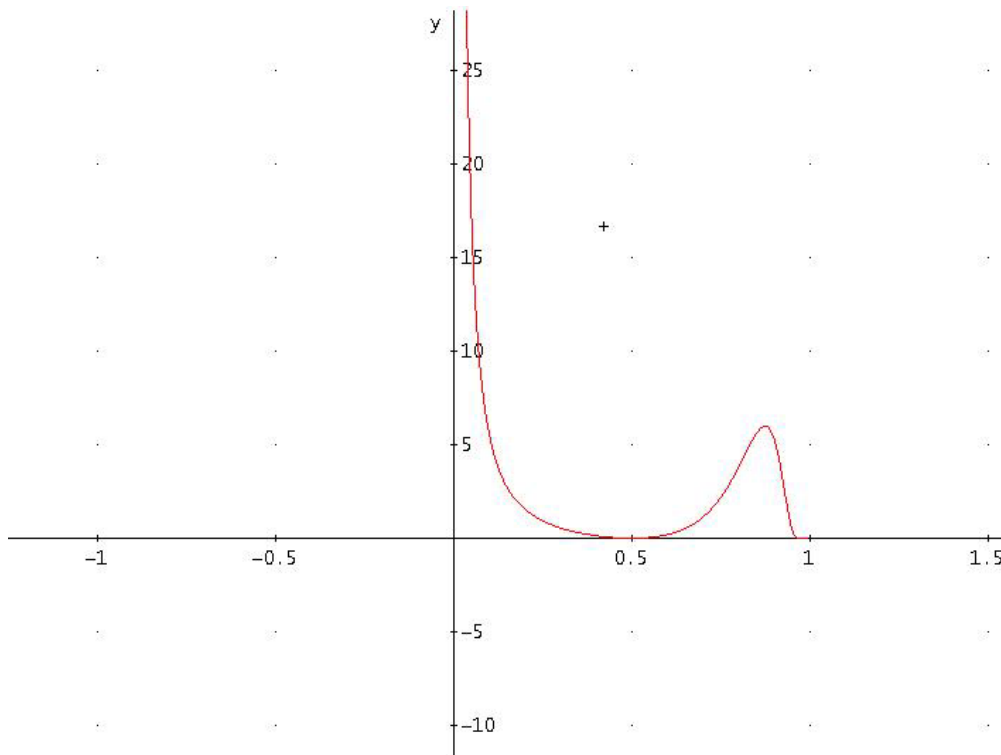


Figura 4.1: Representación de $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ en el rango de interés $0 \leq x \leq 1$.

4.4.3. SOLUCIÓN PARA EL PRECODIFICADOR ÓPTIMO

Como la expresión asintótica de la BER es convexa en $[\mathbf{GHF}]_{mm}$ toda solución localmente óptima a (4.17) es globalmente óptima. Además, la cota mínima en P_e expresada en (4.19) puede ser alcanzada solamente si los elementos de \mathbf{GHF} son idénticos. Para resolver (4.17) en la región se minimizará inicialmente $P_{e, \text{LB}}$ sujeto a la restricción de potencia media transmitida (4.17.b); para posteriormente mostrar que se alcanza la cota mínima obtenida previamente.



4.4.4. MINIMIZACIÓN DE LA COTA INFERIOR DE LA BER

Como $\text{erfc}(\cdot)$ es una función monótona decreciente, minimizar la cota inferior $P_{e, \text{LB}}$, es equivalente a la minimización de $\text{tr}((\text{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1})$. Por conveniencia, parametrizaremos $\mathbf{F} = \mathbf{V}\Phi\mathbf{U}^H$ en términos de su descomposición en valores singulares donde \mathbf{V} y \mathbf{U} son matrices unitarias de dimensiones $P-L=M$ y M respectivamente. También escribiremos $(\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}$ mediante su descomposición en autovalores y autovectores como $\mathbf{W}\Lambda\mathbf{W}^H$, donde las columnas de \mathbf{W} están ordenadas de manera que λ_{ii} , los elementos diagonales de Λ , se encuentran en orden descendente.

Con las parametrizaciones efectuadas en el párrafo anterior puede demostrarse que

$$\mathbf{GHF} = \mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H \quad (4.20)$$

donde $\Gamma = (\sigma^2\Phi^{-1}\mathbf{V}_1\Lambda\mathbf{V}_1^H\Phi^{-1} + \mathbf{I})^{-1}$ y $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}^H\mathbf{W}$ se han obtenido aplicando la propiedad P1.

El problema de diseño expresado en (4.17) en la región en la que P_e es convexa puede escribirse como

$$\min_{\mathbf{V}, \Phi, \mathbf{U}} \text{tr}((\text{Diag}(\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H))^{-1}) \quad (4.21.a)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\Phi^2) \leq p_0 \quad (4.21.b)$$

Al contrario de lo ocurrido en el caso ZF, el problema expresado en (4.21) es posible de resolver directamente debido a que no aparece una tercera restricción (4.21.c) de convexidad en el caso que nos ocupa; no ocurrirá así generalmente en el caso de señalizaciones QAM cuadradas de orden superior como se verá en las observaciones más adelante.

Para facilitar la resolución, tomaremos $\Gamma = \mathbf{X}\tilde{\Gamma}\mathbf{X}^H$, que no es más que la descomposición en autovalores y vectores de la matriz Γ . Modificando el lema 1, expuesto en la sección correspondiente al diseño del precodificador MBER con ecuación ZF, para el caso que nos ocupa, puede verse que para una Γ fija,

$$\max_{\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}} \min_m [\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H]_{mm} = \text{tr}(\Gamma)/M \quad (4.22)$$



Por otra parte, el máximo en (4.22) puede ser alcanzado mediante la elección $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{X}^H$, donde la matriz \mathbf{D} es la matriz DFT normalizada de dimensiones $M \times M$. (Los resultados continúan siendo válidos si se sustituye \mathbf{D} por \mathbf{D}^H , la correspondiente matriz DFT inversa normalizada).

Para continuar con la derivación de la solución para el precodificador, observamos que como la restricción de potencia transmitida no depende de la matriz \mathbf{U} , para un Γ fija, podemos encontrar una matriz óptima \mathbf{U} para el problema (4.21), que denotaremos por $\mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma}$, resolviendo

$$\min_{\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}} \text{tr}\left(\left(\text{Diag}(\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H)\right)^{-1}\right). \quad (4.23)$$

Como Γ es definida positiva, podemos aplicar la desigualdad de la media aritmético-geométrica [11] para escribir que

$$\text{tr}\left(\left(\text{Diag}(\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H)\right)^{-1}\right) \geq \frac{M}{\left(\prod_{m=1}^M [\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H]_{mm}\right)^{1/M}}. \quad (4.24)$$

Aplicando de nuevo la desigualdad de la media aritmético-geométrica tenemos que

$$\left(\prod_{m=1}^M [\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H]_{mm}\right)^{1/M} \leq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H]_{mm} \quad (4.25)$$

y así

$$\text{tr}\left(\left(\text{Diag}(\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H)\right)^{-1}\right) \geq M^2/\text{tr}(\Gamma). \quad (4.26)$$

Las desigualdades en (4.24) y (4.25) y por tanto la resultante en (4.26) alcanzan la igualdad si los elementos diagonales de $\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^H$ son todos iguales.

Si definimos ahora $\mathbf{U}_1 = \mathbf{D}\mathbf{X}^H$, donde como anteriormente $\Gamma = \mathbf{X}\tilde{\Gamma}\mathbf{X}^H$, es la descomposición en autovalores y vectores de la matriz Γ , entonces $\mathbf{U}_1\Gamma\mathbf{U}_1^H = \mathbf{D}\tilde{\Gamma}\mathbf{D}^H$, lo que implica que $[\mathbf{U}_1\Gamma\mathbf{U}_1^H]_{mm} = \text{tr}(\tilde{\Gamma})/M$, porque la magnitud de cada elemento de \mathbf{D} es $1/\sqrt{M}$. Por lo tanto $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$ alcanza la mínima cota en (4.26); es decir,

$$\text{tr}\left(\left(\text{Diag}(\mathbf{U}_1\Gamma\mathbf{U}_1^H)\right)^{-1}\right) = M^2/\text{tr}(\Gamma) \quad (4.27)$$



Así, para una matriz Γ fija, (i.e., fijadas Φ y \mathbf{V}), una elección óptima para \mathbf{U} en (4.23) es

$$\mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma} = \mathbf{U}_1 = \mathbf{D}\mathbf{X}^H. \quad (4.28)$$

Ahora que ya hemos encontrado la matriz óptima \mathbf{U} , lo que resta por hacer es hallar las matrices Φ y \mathbf{V} que resuelven

$$\min_{\Phi, \mathbf{V}} \text{tr} \left(\left(\text{Diag}(\mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma} \Gamma \mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma}^H) \right)^{-1} \right) \quad (4.29.a)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\Phi^2) \leq \rho_0 \quad (4.29.b)$$

Como $\left(\left[\mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma} \Gamma \mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma}^H \right]_{mm} \right)^{-1} = M/\text{tr}(\Gamma)$, minimizar (4.29.a) es equivalente a maximizar $\text{tr}(\Gamma)$, esto es, al revés, equivalente a minimizar $-\text{tr}(\Gamma)$. Reformulando el problema tenemos que

$$\min_{\Phi, \mathbf{V}} -\text{tr}(\Gamma) \quad (4.30)$$

$$\text{Sujeto a } \text{tr}(\Phi^2) \leq \rho_0$$

El error cuadrático medio (MSE) de los símbolos ecualizados, $E \left\{ \sum_{m=1}^M \left([\hat{\mathbf{s}}]_m - [\mathbf{s}]_m \right)^2 \right\}$, viene dado por (véase Apéndice C)

$$\text{MSE} = \text{tr} \left((\mathbf{GHF} - \mathbf{I})(\mathbf{GHF} - \mathbf{I})^H + \sigma^2 \mathbf{GG}^H \right). \quad (4.31)$$

Usando las propiedades P1 y P2, además de ciertas de éstas características de la función traza puede demostrarse que $\text{MSE} = \text{tr}(\mathbf{I} - \Gamma^H)$ y por lo tanto minimizar $-\text{tr}(\Gamma)$ es equivalente a minimizar el error cuadrático medio, véase Apéndice C. Así las matrices Φ y \mathbf{V} que resuelven (4.29) son aquellas que también minimizan el MSE de los símbolos ecualizados.

Antes de que explotemos el resultado anterior, enfatizaremos en que $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{W} \Lambda \mathbf{W}$ denota la descomposición en autovalores y vectores de $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$ con los elementos diagonales de la matriz Λ ordenados descendientemente.



Entonces la solución al problema (4.29) viene dado por [19,20,23],

$$\mathbf{V}_{\text{MMSE}} = \mathbf{W} \quad (4.32.a)$$

$$[\Phi_{\text{MMSE}}]_{mm} = \left(\frac{\rho_0 + \sigma^2 \text{tr}(\Lambda)}{\text{tr}(\Lambda^{1/2})} \sqrt{\lambda_{mm}} - \sigma^2 \lambda_{mm} \right)^{1/2} \quad (4.32.b)$$

Sustituyendo en la parametrización de \mathbf{F} , las expresiones (4.28) y (4.32) entonces un precodificador que minimiza la cota inferior de la probabilidad de error es

$$\mathbf{F}_{\text{min,LB}} = \mathbf{W} \Phi_{\text{MMSE}} \mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma} \quad (4.33)$$

donde $\mathbf{U}_{\text{opt},\Gamma} = \mathbf{D}$ ya que en este caso $\mathbf{P} - \mathbf{L} = \mathbf{M}$ y Γ es diagonal.

Una importante propiedad de $\mathbf{F}_{\text{min,LB}}$ es que los elementos diagonales del producto (4.20) resultantes son idénticos con lo que no solo minimiza la cota inferior de la probabilidad de error sino que también la alcanza, como se comentó en discusiones previas. De lo cual podemos concluir que un precodificador que logra y minimiza (asintóticamente) la BER es

$$\mathbf{F}_{\text{MBER}} = \mathbf{W} \Phi_{\text{MMSE}} \mathbf{D} \quad (4.34)$$

Para comparar, el conjunto de todos los precodificadores MMSE son de la forma [19]

$$\mathbf{F}_{\text{MMSE}} = \mathbf{W} \Phi_{\text{MMSE}} \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.35)$$

donde $\tilde{\mathbf{U}}$ es una matriz arbitraria. Si analizamos las expresiones (4.34) y (4.35), queda claro que nuestro precodificador para mínima BER, es un tipo de precodificador que minimiza el error cuadrático medio, que ha sido diseñado mediante la elección de un tipo especial de matriz unitaria.

4.4.5. PRECODIFICADORES MBER PARA SISTEMAS CP

Como se indicó en el apartado 4.2, la interferencia intersimbólica puede ser eliminada con los esquemas de transmisión relleno de ceros (ZP) y prefijo cíclico (CP). Construyendo la matriz del canal \mathbf{H} de forma diferente, el bloque de símbolos de datos a la salida para ambos esquemas puede ser descrito por (4.1). En los esquemas CP, como la matriz \mathbf{H} es circulante, la expresión para el precodificador MBER puede ser simplificada. Para sistemas CP, tenemos que



$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{cp} = \mathbf{D}^H \Delta \mathbf{D} \quad (4.36)$$

donde \mathbf{D} es la matriz DFT normalizada cuadrada de orden M y Δ es una matriz diagonal de dimensiones $M \times M$, cuyo elemento diagonal i – ésimo es

$$[\Delta]_{ii} = H \left(e^{j2\pi(i-1)/M} \right) = \sum_n h(n) e^{j2\pi(i-1)n/M}. \quad (4.37)$$

Como el precodificador MBER propuesto en (4.34) es también aplicable para sistemas CP, teniendo en cuenta (4.36) podemos escribir que

$$\mathbf{F}_{CP-MBER} = \mathbf{D}^H \mathbf{P}^T \Phi_{MMSE} \mathbf{D} \quad (4.38)$$

donde \mathbf{P} es la matriz de permutación que ordena los elementos diagonales de $(\Delta^H \Delta)^{-1}$ descendientemente por conveniencia del esquema de descarte de canales y la correspondiente Δ en (4.32.b) es $\mathbf{P}^T (\Delta^H \Delta)^{-1} \mathbf{P}$.

Como se indica en (4.38), el precodificador CP-MBER tiene una estructura similar al estándar DMT, excepto que la matriz diagonal reparto de potencia del esquema multitono discreto es sustituida por la matriz MMSE reparto de potencia característica multiplicada a su derecha por la matriz DFT.

4.4.6. OBSERVACIONES

Se deben hacer notar las siguientes observaciones acerca del precodificador asintótico hacia la mínima BER

1. El precodificador MBER es un caso especial de precodificador que minimiza el error cuadrático medio en el receptor, en el que la matriz unitaria libre $\tilde{\mathbf{U}}$, se ha elegido de forma que elemento (m, i) de dicha matriz satisfaga que $|\tilde{u}_{m,i}|^2 = 1/M$, para todo $m, i \in [1, M]$. Sin embargo un precodificador MMSE no lo es necesariamente MBER.
2. La óptima elección de $\tilde{\mathbf{U}}$ combina linealmente los subcanales de tal forma que la relación señal a interferencia y ruido (SINR's) en cada uno de éstos es igual y por consiguiente se logra alcanzar la cota inferior minimizada de la BER. La combinación lineal incrementa la ganancia aparente de los subcanales con baja ganancia a expensas de reducir la de los que la poseen elevada. Haciendo esto, la matriz óptima $\mathbf{U}_{opt,\Gamma}$ también introduce interferencia inter-subcanal, el resultado neto de este



efecto de balanceo es que se consigue llegar al límite inferior minimizado de la BER para ecualización MMSE lineal y detección escalar discontinua.

3. Para comparar el rendimiento del precodificador MBER para ecualización MMSE con el obtenido por el MBER para ecualización ZF, teniendo en cuenta (3.44), (3.46) y asumiendo que los tamaños de bloques de transmisión son para ambos esquemas iguales, entonces la diferencia entre las SINR's optimizadas correspondientes a los subcanales para estas dos técnicas de ecualización es, [24]

$$\text{SINR}_{\text{MMSE}} - \text{SINR}_{\text{ZF}} = \frac{M(\text{tr}(\Lambda)) - (\text{tr}(\Lambda^{1/2}))^2}{2(\text{tr}(\Lambda^{1/2}))^2} \quad (4.39)$$

Usando la desigualdad de Cauchy [21, p. 53], puede demostrarse que $\text{SINR}_{\text{MMSE}} - \text{SINR}_{\text{ZF}} \geq 0$. Como $\text{erfc}(\cdot)$ es monótona decreciente con respecto a la SINR, esto implica que precodificador MBER para ecualización MMSE provee una probabilidad de error de bit menor que el diseño análogo para ecualización ZF. Esto quedará patente en la sección de resultados, donde se compararán las gráficas de las simulaciones de ambos esquemas.

4. Comparando los precodificadores MBER para transmisión con prefijo cíclico con aquellos que emplean cero forzado, encontramos que los precodificadores ZF son más complicados de implementar, ya que requieren el cálculo de los autovectores para cada diferente canal. Por el contrario, los autovectores para transmisión CP son simplemente las columnas de la matriz IDFT normalizada, independientes de los coeficientes del canal. Sin embargo, los esquemas ZP tienen la ventaja de que garantiza la recuperación de símbolos, debido a que por la naturaleza de la matriz del canal \mathbf{H} posee rango completo y a esto hay que sumarle que no se consume potencia en la transmisión de los símbolos redundantes del prefijo cíclico. Aunque en el desarrollo de este proyecto no se ha tenido en cuenta por su mínima relevancia, la potencia media transmitida por los esquemas CP es proporcional a $p_0(1 + L/(P - L))$, debido a la necesidad de transmitir el prefijo.
5. La derivación de la BER en la sección 4.3, se basa en la señalización 4-QAM. Sin embargo, este trabajo puede hacerse extensible a sistemas que transmite señales pertenecientes a constelaciones QAM cuadradas de orden superior. Aquí, brevemente se expondrá dicha extensión. Usando los resultados en [25], para transmisión escalar sobre canales con ruido aditivo blanco Gaussiano y la aproximación Gaussiana realizada sobre la ISI en (4.11), la probabilidad de error de bit de nuestro sistema de transmisión de bloques con señalización \mathbf{K} -aria QAM cuadrada puede ser aproximada de cerca por



$$P_e \approx \frac{1}{M} \sum_m \left(\alpha_1 \operatorname{erfc} \left(\left(\beta_1 \left[(\operatorname{Diag}(\mathbf{GHF}))^{-1} - \mathbf{I} \right]_{mm} \right)^{-1/2} \right) + \alpha_2 \operatorname{erfc} \left(\left(\beta_2 \left[(\operatorname{Diag}(\mathbf{GHF}))^1 - \mathbf{I} \right]_{mm} \right)^{-1/2} \right) \right), \quad (4.40)$$

donde $\alpha_1 = (\sqrt{K} - 1) / (\sqrt{K} \log_2 \sqrt{K})$, $\alpha_2 = (\sqrt{K} - 2) / (\sqrt{K} \log_2 \sqrt{K})$,
 $\beta_1 = 2(K - 1)/3$ y $\beta_2 = \beta_1/9$.

Analizando la segunda derivada de (4.40) con respecto a $[\mathbf{GHF}]_{mm}$ puede verse que es convexa si todos los elementos diagonales del producto matricial \mathbf{GHF} , satisfacen una de las siguientes condiciones:

$$[\mathbf{GHF}]_{mm} \leq \frac{5\beta_1 - 2 - \sqrt{9\beta_1^2 - 20\beta_1 + 4}}{8\beta_1} \triangleq \mathbf{c}_1 \quad (4.41)$$

$$[\mathbf{GHF}]_{mm} \geq \frac{5\beta_1 - 2 + \sqrt{9\beta_1^2 - 20\beta_1 + 4}}{8\beta_1} \triangleq \mathbf{c}_2 \quad (4.42)$$

Los sistemas que satisfacen (4.42) son de gran interés porque derivan en SINR's umbrales medias-altas y por lo tanto en razonables BER's.

Para aplicar a (4.40) los procedimientos para la obtención del precodificador MBER debemos añadir al problema (4.30), la restricción de convexidad (4.42) para asegurar que la cota inferior que se va a minimizar continúa siendo una cota inferior válida. Aunque esta restricción adicional puede parecer que hace el problema imposible de resolver, una solución analítica puede obtenerse usando las técnicas similares a las que han sido empleadas en la derivación del precodificador MBER para ecuación ZF. De hecho puede demostrarse, véase Apéndice D, que para SNR's que satisfacen

$$\rho \geq \frac{1}{P} \left(\frac{(\operatorname{tr}(\Lambda^{1/2}))^2}{(1 - \mathbf{c}_2)M} - \operatorname{tr}(\Lambda) \right) \triangleq \rho_c \quad (4.43)$$

el precodificador MBER para la constelación 4-QAM en (4.34) es válido para señalización K -aria QAM cuadrada.

4.4.7. ESQUEMA DE DESCARTE DE SUBCANALES

Como hemos visto arriba, el precodificador para mínima BER diseñado es válido para constelaciones K -arias QAM cuadradas, si la SNR satisface $\rho \geq \rho_c$.



Este umbral para la relación señal ruido es función solamente de la respuesta impulsiva del canal y del tamaño de bloque, M ; y puede ser calculado sin necesidad de computar el precodificador para mínima BER. El umbral garantiza que cota inferior a minimizar es válida, es decir, que la expresión para la probabilidad de error en (4.40) se encuentra en su región convexa y los elementos de Φ_{MMSE} son no negativos.

En los casos en que $\rho \leq \rho_c$, en sistemas en los que la potencia de transmisión no puede ser incrementada y por último esquemas en los que el producto $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ no tiene rango completo (puede darse el caso en CP), podemos reducir tal umbral cerrando algunos de los subcanales con más baja ganancia, disminuyendo así el tamaño de bloque y repartiendo la potencia transmitida en los canales supervivientes.

Una vez que el umbral ha sido suficientemente rebajado, podemos obtener una expresión para el sistema reducido usando un algoritmo similar al usado en una de las secciones para el caso ZF previas, que pasamos a describir

1. Tomemos $\bar{M} = M$ y $\bar{\Lambda} = \Lambda$.
2. Determinar el tamaño de bloque reducido \bar{M} : Calcular $\bar{\rho}_c$ usando (4.37) con M y Λ sustituidas por \bar{M} y $\bar{\Lambda}$, respectivamente. Mientras $\rho < \bar{\rho}_c$, disminuir \bar{M} en 1 y poner los primeros elementos diagonales no nulos de $\bar{\Lambda}$ a cero.
3. Construir Φ_{MMSE} usando (4.32b) reemplazando Λ por $\bar{\Lambda}$ y la matriz $\bar{\mathbf{W}}$ con las \bar{M} últimas columnas de \mathbf{W} .
4. El precodificador para mínima BER para el sistema reducido se puede expresar entonces como

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{MBER}} = \bar{\mathbf{W}} \bar{\Phi}_{\text{MMSE}} \bar{\mathbf{D}} \quad (4.44)$$

donde $\bar{\mathbf{D}}$ es la matriz DFT normalizada cuadrada de orden \bar{M} (o la matriz IDFT).

4.5. RESULTADOS

En esta sección, compararemos las probabilidades de error de bit teórica y simulada del precodificador MBER propuesto y varios esquemas de transmisión ZP y CP existentes, para ecuación MMSE.

Consideraremos sistemas que emplean señalización 4-QAM, por tanto el precodificador MBER será válido en todo el rango de SNR's, sobre canales de distinta naturaleza, el primero con una calidad media de su respuesta en frecuencia (idéntica a la obtenida en el segundo ejemplo de ecuación ZF, para establecer una



confrontación) y otros de carácter aleatorio con desvanecimiento Rayleigh. Por otra parte, la potencia de transmisión, ρ_0 , se fijará a 1 por conveniencia.

Por último, compararemos las curvas de probabilidad correspondientes a los diseños propuestos en este proyecto para los precodificadores MBER en los casos de ecualización cero forzado y mínimo error cuadrático medio.

4.5.1. EJEMPLO 1: CANAL CON CALIDAD MEDIA DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Vamos a evaluar distintos precodificadores a diferentes relaciones señal ruido sobre un canal FIR de tercer orden con ceros en $\{ 0.7, 0.5\exp(j2\pi 0.256)$ y $0.3\exp(j2\pi 0.141) \}$. La magnitud de la respuesta en frecuencia se puede contemplar en la **Figura 4.2**. Los parámetros de las simulaciones llevadas a cabo serán:

- Tamaño de bloque $M = 32$
- Tamaño de bloque final transmitido $P = 35$

En la **Figura 4.3**, se ha comparado el rendimiento teórico y simulado en términos de probabilidad de error de bit, del precodificador ZP para mínima BER diseñado, con los conseguidos por ciertos precodificadores que emplean la técnica de transmisión de relleno de ceros, como son: el precodificador MMSE con matriz unitaria de libertad identidad, el precodificador identidad con rellenos de ceros denotado por ZP-TDMA y el diseño ZP-OFDM; en todos los casos se ha empleado ecualización MMSE en recepción. Las curvas de probabilidad se han representado frente a la SNR de bloque definida como $\rho \triangleq \rho_0 / (P\sigma^2)$.

Análogamente, en la **Figura 4.4**, se han representado las gráficas correspondientes a los diseños, MBER-CP propuesto, MMSE-I y el convencional OFDM; esquemas todos, que se valen del prefijo cíclico en transmisión.

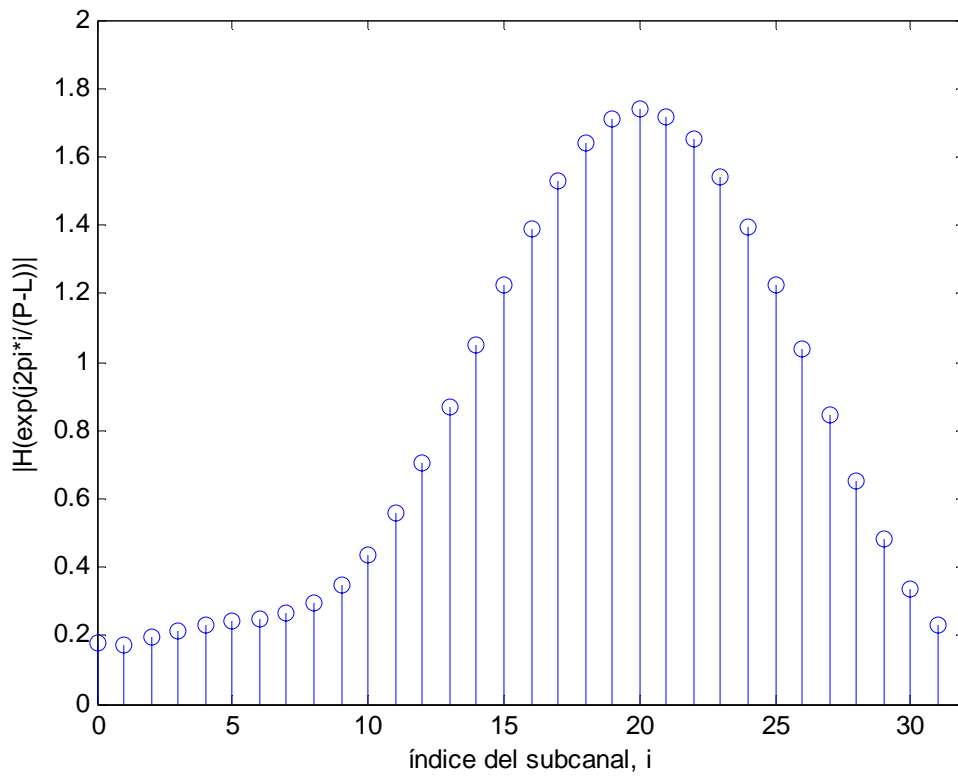


Figura 4.2: Respuesta en frecuencia del canal en Ejemplo 1.

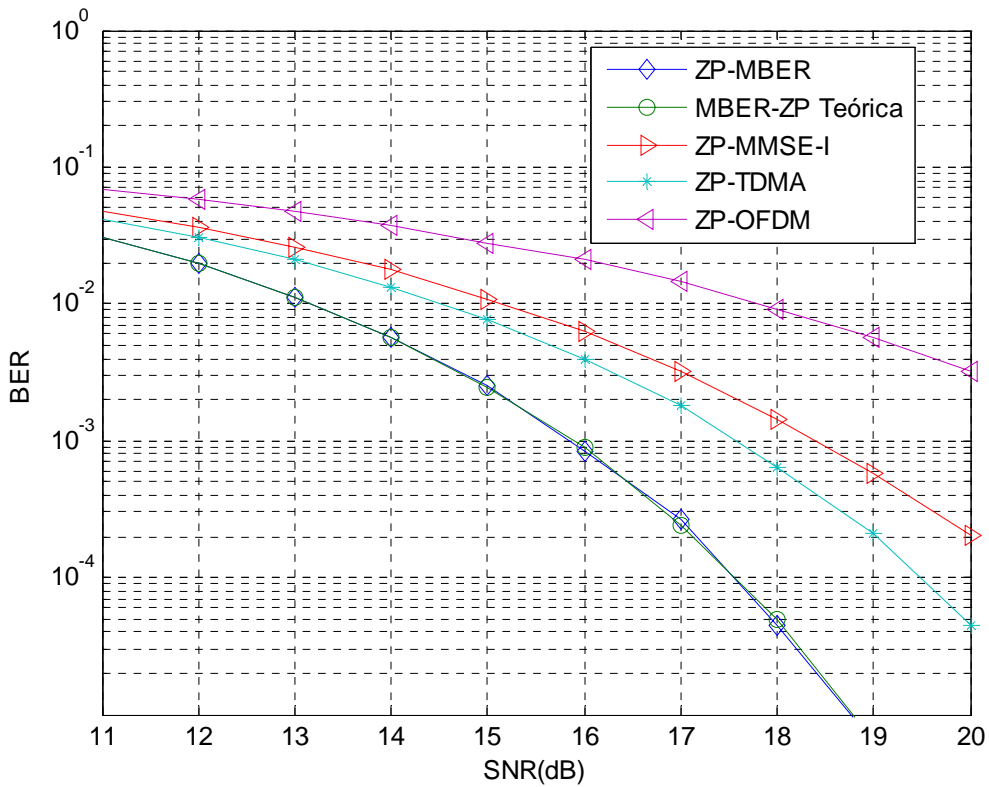


Figura 4.3: BER frente SNR de bloque, para precodificadores ZP y ecuación MMSE

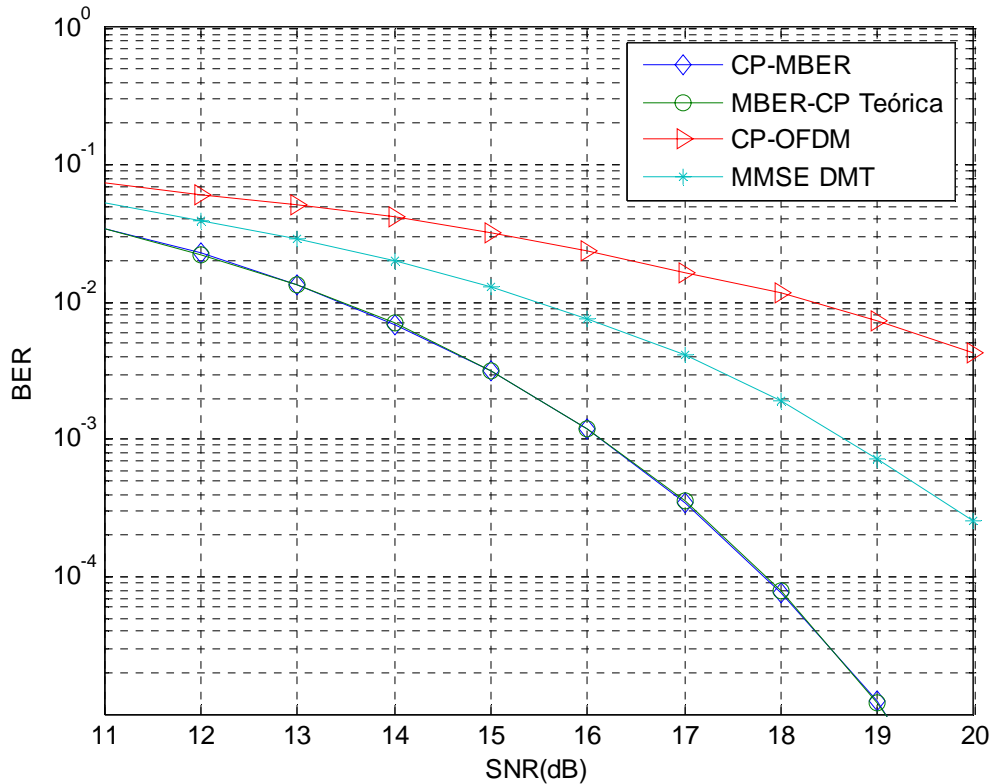


Figura 4.4: BER frente SNR de bloque, para precodificadores CP y ecuación MMSE

En general, cuando los tamaños de bloque son iguales, el diseño expuesto para el precodificador MBER en el caso ZP es ligeramente mejor que su homólogo CP. Además, en realidad a esto habría que sumar una cierta mejora en el rendimiento de los esquemas ZP frente a los CP, ya que en nuestra definición de SNR se ha omitido la fracción de potencia usada para transmitir el prefijo cíclico.

Como se puede deducir del análisis de las **Figuras 4.3 y 4.4**, la solución al precodificador que minimiza la BER derivada a lo largo de esta sección, consigue su objetivo eficazmente, ya que la curva de probabilidad mínima teórica y la arrojada por la simulación del esquema MBER se encuentran prácticamente solapadas. Además se puede observar como consigue una no despreciable ganancia en SNR frente a los esquemas clásicos confrontados.

Por último, en la **Figura 4.5**, se puede observar el resultado de la simulación del sistema mejorado empleando descarte de subcanales y ecuación MMSE de forma análoga a como se expuso anteriormente para el caso ZF.

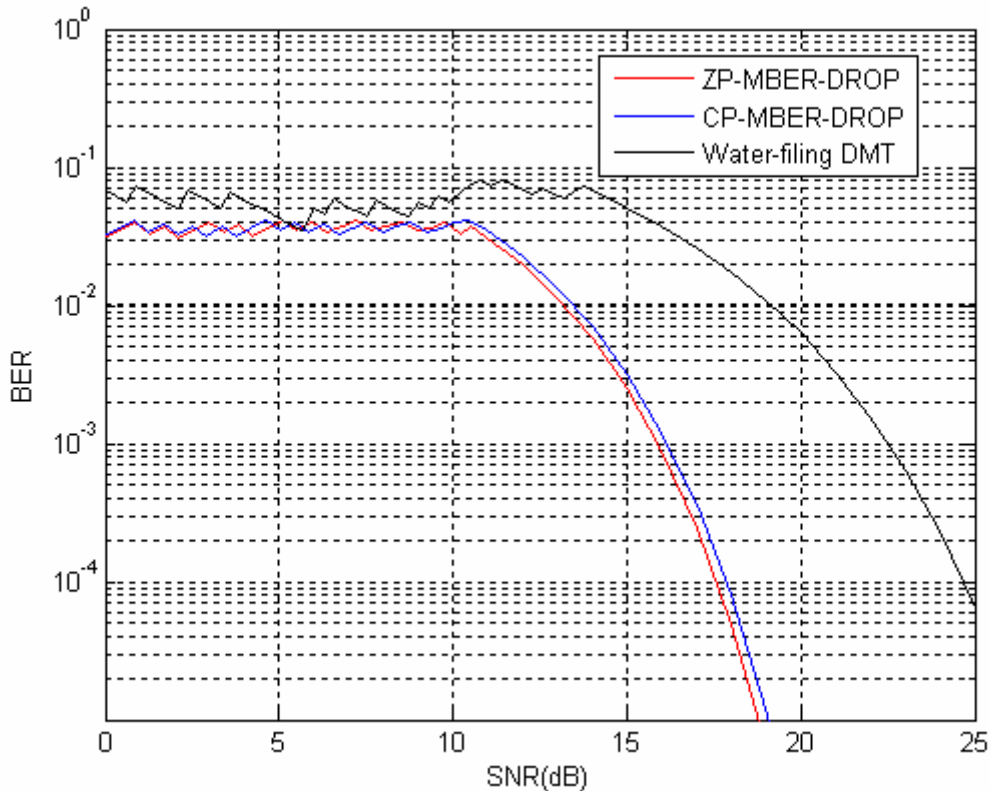


Figura 4.5: BER frente SNR de bloque, para precodificadores ZP, CP y DMT con esquema de descarte de subcanales y ecuación MMSE.

4.5.2. EJEMPLO 2: CANAL ALEATORIO SELECTIVO EN FRECUENCIA CON DESVANECIMIENTO RAYLEIGH

Evaluaremos ahora la BER media sobre 500 realizaciones de un canal selectivo en frecuencia con desvanecimiento Rayleigh lento de orden $L + 1$, con ruido aditivo blanco Gaussiano de varianza σ^2 . Para cada realización, del canal tanto el transmisor como el receptor tendrán conocimiento exacto de la respuesta impulsiva. Los coeficientes del canal serán variables aleatorias Gaussianas complejas, circulares-simétricas, de media cero e independientes.

Consideraremos dos perfiles de retraso. Uno plano, en el cual la varianza de cada coeficiente del canal es $1/(L + 1)$, y otro decadente en el que la varianza del ℓ -ésimo coeficiente es $\beta 2^{-\ell}$ para $0 \leq \ell \leq L$ y donde $\beta = 2^L / (2^{L+1} - 1)$ se ha escogido de tal forma que la suma de las varianzas de los coeficientes en ambos perfiles es uno, independientemente de la longitud del canal.

Para ambos esquemas de transmisión, ZP y CP, compararemos el funcionamiento del precodificador MBER formulado con el estándar MMSE-I, dos esquemas independientes del canal denominados precodificadores ZP y CP de matriz



identidad y el clásico OFDM. Para el caso $P=L=M$ que nos ocupa los precodificadores identidad toman la forma $F = \alpha I_M$ y los OFDM $F = \alpha D_M^H I_M$ donde $\alpha = \sqrt{p_0/M}$.

En las **Figuras 4.6 y 4.7**, se han representado las curvas de la BER de estos esquemas ZP y CP respectivamente, para el perfil plano en retraso y los parámetros $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.

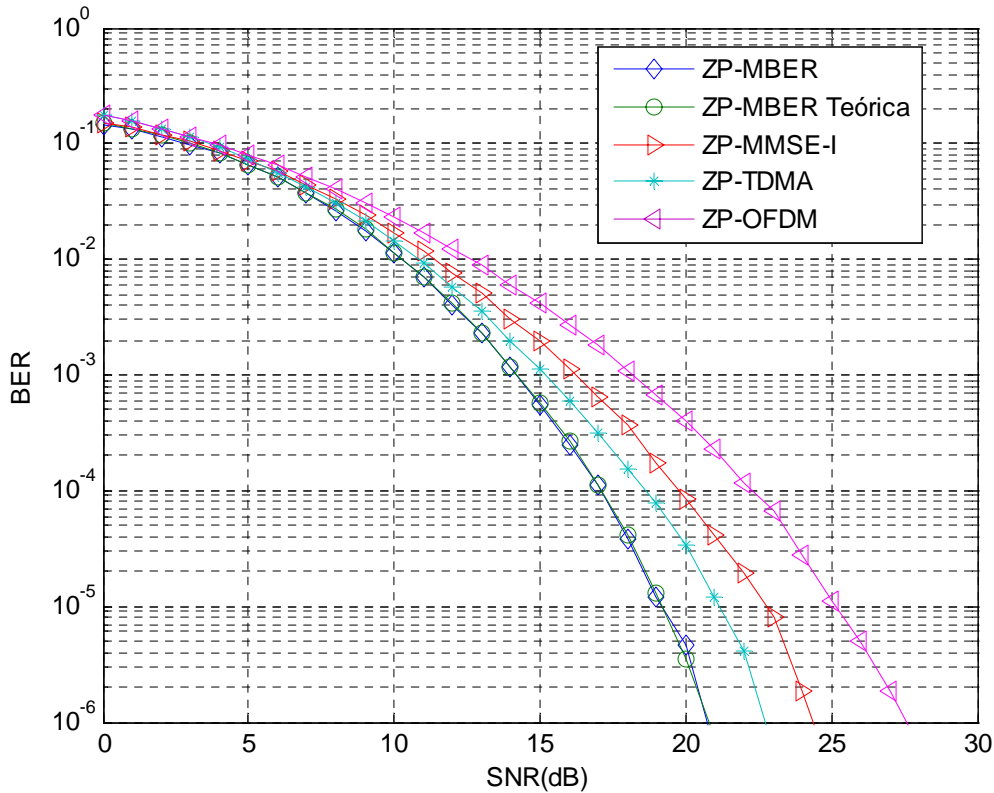


Figura 4.6: Curvas BER teórica y simuladas para los precodificadores ZP en el perfil plano en retraso y $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.

Parámetros			SNR requerida, dB								
L	M	P	Relleno de ceros				Prefijo cíclico				
			MBER	MMSE	I	OFDM	MBER	MMSE	I	OFDM	OFDM-S
4	16	20	16,9	19,4	18,2	22,7	19,5	27,3	21,2	36,7	—
4	14	20	14,7	16,0	17,5	21,7	16,1	17,9	18,8	35,8	21,2
4	32	36	18,0	21,4	19,5	26,1	19,3	26,7	20,9	36,9	—
4	30	36	16,4	18,4	19,2	25,6	17,3	19,8	19,8	36,9	24,0
8	32	40	15,9	19,3	17,4	23,8	18,2	26,6	19,7	36,8	—
8	30	40	14,5	16,5	17,0	23,5	16,0	18,7	18,5	36,2	23,1

Tabla 4.1: SNR's requeridas para alcanzar una BER=10⁻⁴ bajo el perfil plano en retraso

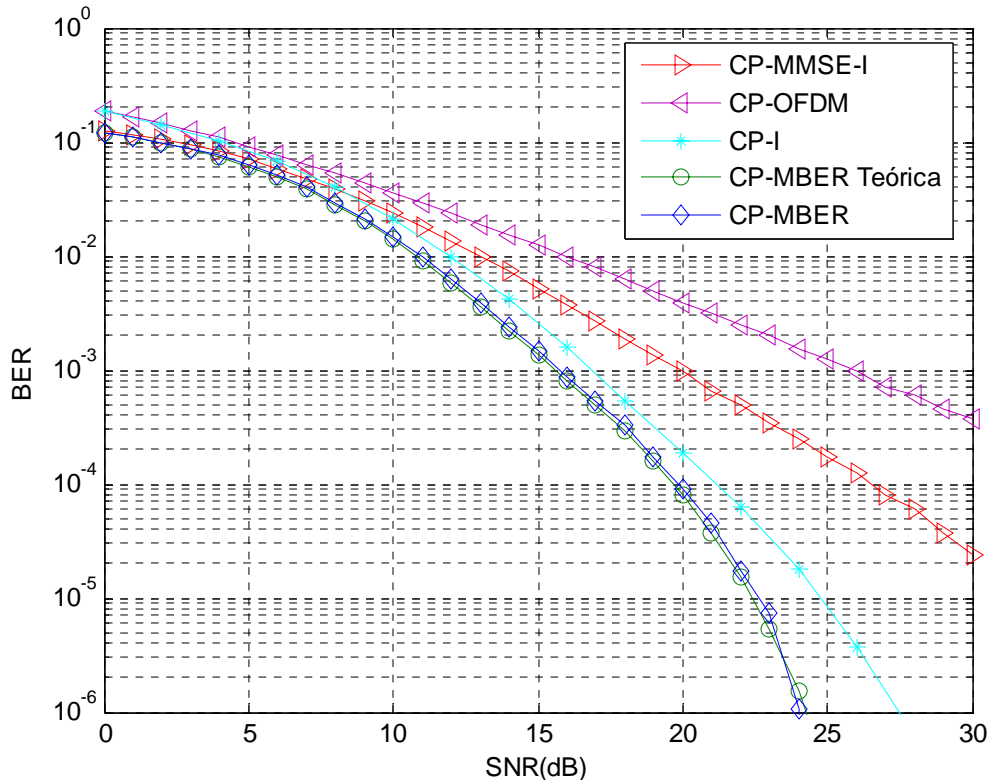


Figura 4.7: Curvas BER teórica y simuladas para los precodificadores CP en el perfil plano en retraso y $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.

Como se puede observar en la **Tabla 4.1**, para una BER de 10^{-4} las ganancias en SNR de los precodificadores ZP y CP-MBER sobre los correspondientes esquemas MMSE son de aproximadamente 2.5 y 7.8 dB, respectivamente. Las ganancias en la relación señal ruido sobre los esquemas OFDM son de aproximadamente 5.8 dB y 17 dB, respectivamente, y aquellas sobre los precodificadores identidad de alrededor de 1.3 dB y 1.7 dB correspondientemente. Las formas generales de las curvas de probabilidad en las **Figuras 4.6 y 4.7**, y las ganancias en SNR resultantes, son bastante típicas para el caso $M=P-L$ [24]. Para ilustrar este hecho, se han añadido en las filas impares de la **Tabla 4.1**, las SNR's de bloque requeridas para obtener una BER de 10^{-4} para otros escenarios en los que $M=P-L$. En las filas pares, se han incluido otros ejemplos análogos en los que $M < P-L$ y por tanto, aunque la tasa de datos es menor, el rendimiento es sustancialmente mejor que en el caso donde se establece la igualdad; también podemos observar que los esquemas MBER continúan proporcionando las mejores cifras cuando $M < P-L$.

El pobre rendimiento del esquema CP-OFDM es debido a su sensibilidad a canales con ceros en la rejilla DFT, es decir, a casos en los que la matriz del canal H no tiene rango completo, y a que el modelo de canal con desvanecimiento que nos ocupa es propenso a generar canales que tienen ceros en el círculo unidad.

En la **Tabla 4.2** se exponen los resultados para canales con desvanecimiento Rayleigh y perfil decadente en retraso con los mismos parámetros de simulación que en la **Tabla 4.1**. Los precodificadores MBER formulados siguen acaparando el mejor



rendimiento, si bien este disminuye respecto al caso de perfil plano en retraso como era de esperar. En las **Figuras 4.8 y 4.9**, se han representado las curvas de la BER de los esquemas ZP y CP respectivamente, para el perfil decadente en retraso y los parámetros $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.

Parámetros			SNR requerida, dB								
L	M	P	Relleno de ceros				Prefijo cíclico				
			MBER	MMSE	I	OFDM	MBER	MMSE	I	OFDM	OFDM-S
4	16	20	21,3	24,1	22,5	27,8	23,5	30,3	24,9	38,3	—
4	14	20	19,1	20,1	21,8	27,2	20,3	21,8	22,8	37,8	24,8
4	32	36	22,3	26,5	23,6	31,4	23,5	29,9	24,8	38,2	—
4	30	36	20,7	22,6	23,3	31,1	21,5	23,9	24,0	37,7	27,8
8	32	40	21,9	25,0	23,0	29,8	23,3	29,4	24,5	38,5	—
8	30	40	20,5	22,0	22,7	29,6	21,7	23,6	23,7	37,9	27,7

Tabla 4.2: SNR's requeridas para alcanzar una BER de 10^{-4} bajo el perfil decadente en retraso

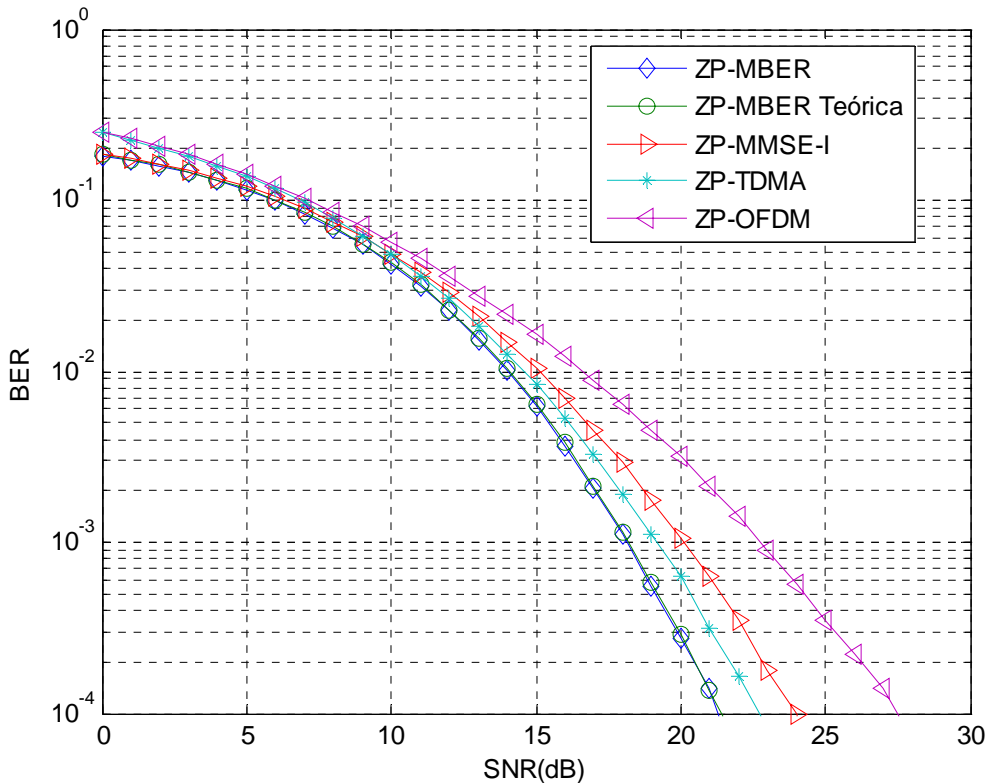


Figura 4.8: Curvas BER teórica y simuladas para los precodificadores ZP en el perfil decadente en retraso y $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.

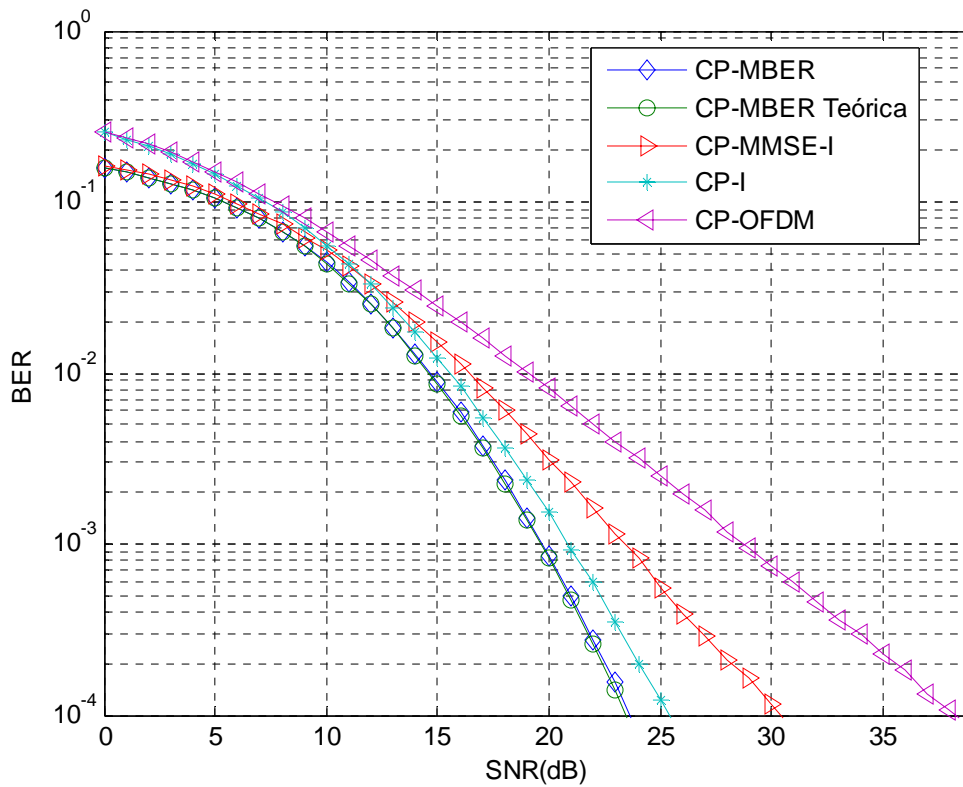


Figura 4.9: Curvas BER teórica y simuladas para los precodificadores CP en el perfil decadente en retraso y $(L, M, P) = (4, 16, 20)$.