

CAPÍTULO 2

Moduladores Sigma-Delta

Índice del capítulo

1. ¿Por qué Sigma-Delta?.....	2
2. Principios de funcionamiento.....	4
3. Parámetros Generales.....	9



1. ¿Por qué Sigma-Delta?

Un convertidor analógico-digital (ADC) es un circuito electrónico que transforma una señal continua en el tiempo y en la amplitud (señal analógica), en otra señal, discreta en el tiempo, cuya amplitud está cuantificada y codificada, generalmente, mediante un código binario de N bits. Este proceso se realiza fundamentalmente a través de dos operaciones: muestreo y cuantización.

El muestreo consiste en tomar datos de la señal de entrada y mantenerlos durante un cierto periodo de tiempo.

Debido al número finito de niveles de cuantización, este proceso (cuantización), genera errores, por eso, la resolución del convertidor puede mejorar si se incrementa el número de niveles de cuantización.

Por todo esto, la frecuencia de muestreo y el número de bits de precisión en amplitud, determinan el funcionamiento del convertidor. La frecuencia de muestreo limita el ancho de banda de la señal de entrada, mientras que la discretización en amplitud provoca el llamado ruido de cuantización. De esta forma, el comportamiento del ADC está determinado por su frecuencia de muestreo (velocidad del ADC) y el número de bits de precisión en amplitud (resolución del ADC). Existe un compromiso entre la velocidad y la resolución en los ADC.

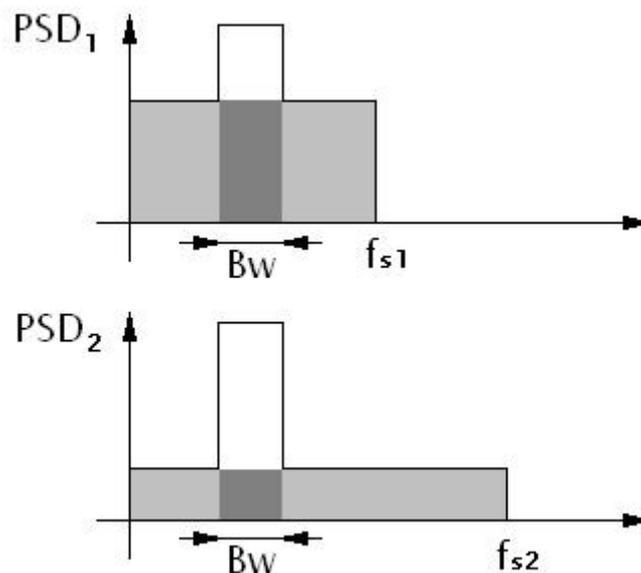


Fig. 2.1: Reducción de la potencia del ruido en la banda de interés por efecto del sobremuestreo.

El número de bits efectivos en un ADC se puede incrementar utilizando técnicas de sobremuestreo, es decir, muestreando a una frecuencia mayor que la de *Nyquist*. Al muestrear a una frecuencia $f_{s2} > f_{s1}$ la densidad espectral de potencia disminuye porque el



ruido de cuantización se reparte sobre un ancho de banda mayor (**Fig. 2.1**). Por esto, el sobremuestreo provoca una disminución de la potencia del ruido integrada dentro de la banda de interés, B_w .

La idea de muestrear a una velocidad mayor que la necesaria se basa en que es posible intercambiar posteriormente velocidad (muestras/seg) por resolución (número de bits).

Si al sobremuestreo se le añade una cierta realimentación del error de cuantización, se puede mejorar aún más la resolución del ADC.

Los motivos que nos llevan hacia técnicas de modulación $\Sigma\Delta$ son los siguientes:

- ♦ Como se mencionó en el capítulo anterior, la modulación $\Sigma\Delta$ permite conseguir resoluciones muy altas utilizando circuitos analógicos (amplificadores operacionales, comparadores, ...) de prestaciones modestas, perfectamente realizables en tecnologías CMOS.
- ♦ La modulación $\Sigma\Delta$ es especialmente adecuada para aplicaciones de media-baja velocidad debido a que el sobremuestreo aumenta, en mayor o menor medida, la frecuencia de trabajo del circuito con respecto a la de la señal a digitalizar. La adquisición de señales cardíacas en marcapasos implantables puede englobarse dentro de las aplicaciones de muy baja velocidad (la banda de frecuencias de interés va desde 0 a 250 Hz). Utilizar moduladores $\Sigma\Delta$ para la conversión A/D de este tipo de señales permite maximizar la resolución optimizando el consumo.

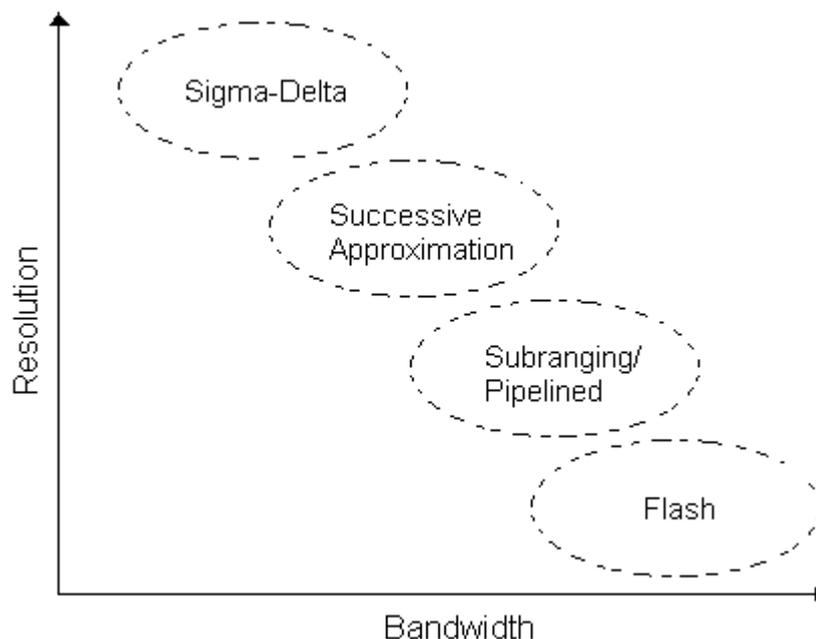


Fig. 2.2: Diagrama resolución-frecuencia.



- ◆ Normalmente, el modulador $\Sigma\Delta$ se diseña siguiendo una estructura de capacidades conmutadas. Los integradores SC son adecuados para el diseño en baja tensión debido principalmente a la posibilidad de escoger de forma independiente la tensión de modo común a la entrada y a la salida del amplificador operacional. Además, posee la ventaja de tener un buen control de las relaciones entre capacidades con un error menor del 1% (lo cual asegura un error muy bajo en el valor de los coeficientes del modulador).

2. Principios de funcionamiento.

El diagrama de bloques de un ADC basado en modulador $\Sigma\Delta$ puede verse en **Fig. 2.3**.

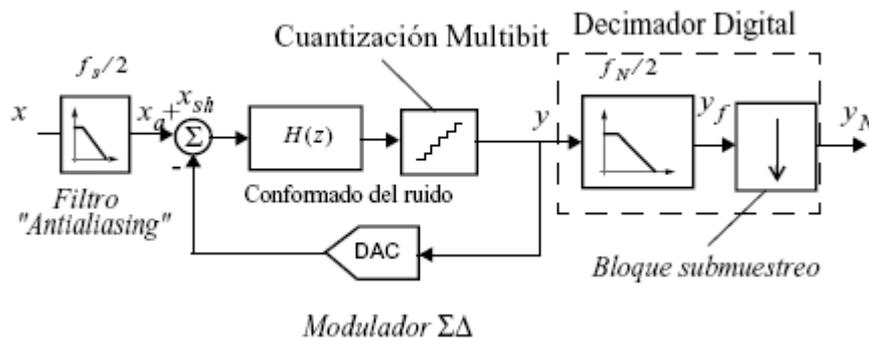


Fig. 2.3: Diagrama de bloques de un ADC basado en modulador $\Sigma\Delta$.

El convertidor está compuesto de los siguientes elementos:

Un **filtro anti-aliasing**¹ que suprime las componentes espectrales por encima de la mitad de la frecuencia de muestreo de la señal de entrada. En el apartado anterior se omitió una de las ventajas del uso de moduladores $\Sigma\Delta$ para el diseño de ADCs y que afecta a este elemento del convertidor. Debido al sobremuestreo, el espaciamiento en frecuencia entre las copias del espectro de la señal de entrada es mayor (ver **Fig. 2.4**), de forma que las especificaciones sobre este filtro se relajan y es suficiente con usar un filtro pasivo de primer orden.

Un **decimador**² es un bloque digital encargado de realizar dos operaciones. Primero un filtro digital se encarga de eliminar el ruido de cuantización que ha quedado fuera de la banda de la señal tras su paso por el modulador $\Sigma\Delta$. En segundo lugar, el bloque de submuestreo reduce la frecuencia de muestreo a la frecuencia de Nyquist de la señal original.

1 El diseño del filtro anti-aliasing está fuera de los objetivos del proyecto.

2 El diseño del decimador está fuera de los objetivos de este proyecto.



El **modulador** $\Sigma\Delta$ consta de un filtro cuya salida es muestreada y cuantizada por un convertidor analógico-digital (normalmente de un solo bit, es decir, un comparador) que introduce un error de cuantización. Este error es la diferencia entre la señal analógica de entrada y la salida cuantizada. La señal digital de salida se resta de la analógica de entrada mediante un bucle de realimentación y a través de un convertidor digital-analógico (ver **Fig. 2.6**). Esta realimentación negativa de la señal y su error tras la cuantización, junto con el efecto de disminución de la densidad espectral de potencia provocado por el sobremuestreo, son los mecanismos que utiliza la técnica de modulación $\Sigma\Delta$ para reducir la potencia del ruido de cuantización en la banda de señal.

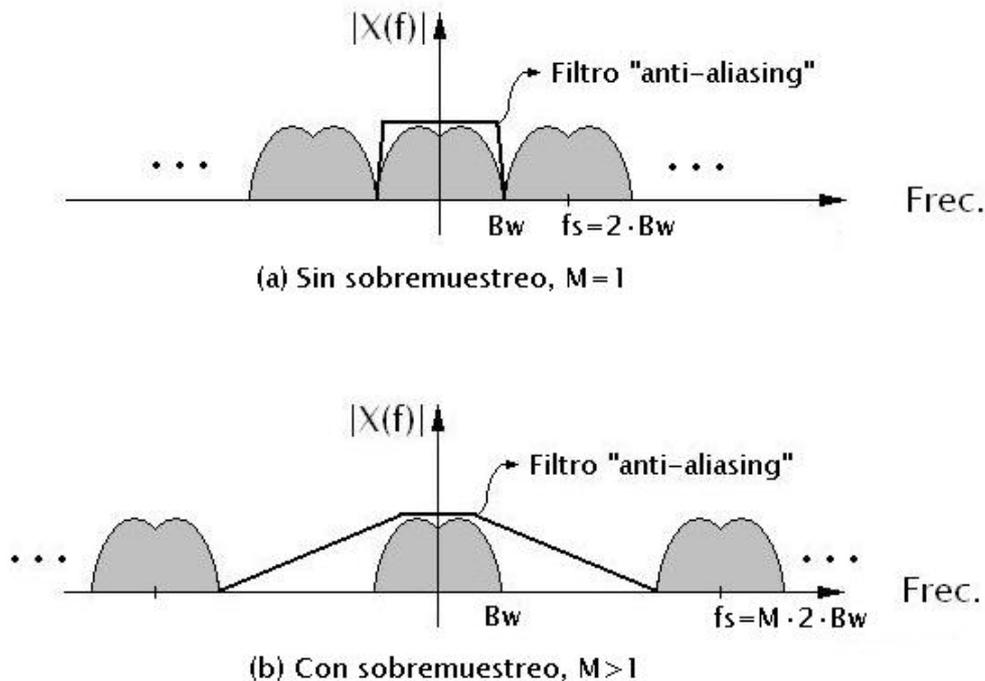


Fig. 2.4: Suavización de las especificaciones sobre el filtro anti-aliasing debido al sobremuestreo.

El diagrama de bloques que se muestra en **Fig. 2.5** puede servir de ejemplo muy ilustrativo, en el dominio temporal, de como se ve afectado el ruido de cuantización por el filtrado y el sobremuestreo. Puede verse como a la señal cuantizada se le resta la señal analógica dando como resultado el error de cuantización $e_Q(n)$. Esta señal de error es procesada a través del filtro $H(z)$ de orden L . Según el valor del orden L , la señal a la salida del filtro ($e_{QHP}(n)$) es la siguiente:

$L = 1$	$e_{QHP}(n) = e_Q(n) - e_Q(n-1)$
$L = 2$	$e_{QHP}(n) = e_Q(n) + e_Q(n-2) - 2e_Q(n-1)$
...	...



Debido al sobremuestreo, las muestras sucesivas del error de cuantización se parecen mucho unas a otras ya que la señal de entrada casi no sufre variación entre una muestra y la siguiente, al ser su frecuencia mucho menor. Así que tras el filtrado, el error de cuantización resultante es mucho menor que el obtenido originalmente. Este efecto se ve incrementado al aumentar el orden del filtro, L . El orden del filtro, L , es el que determina el orden del modulador.

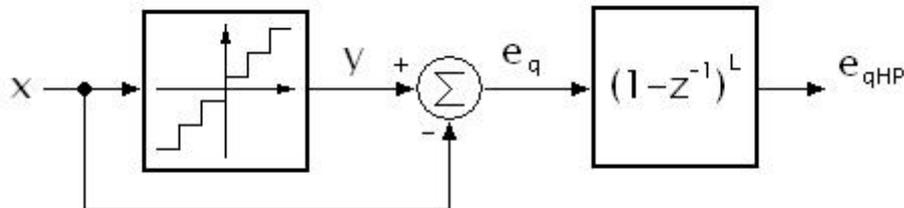


Fig. 2.5: Esquema de cuantización y filtrado del error.

De esta manera, la reducción de la potencia del error de cuantización en la banda de interés en un modulador $\Sigma\Delta$, se realiza a través de dos mecanismos: **sobremuestreo** y **filtrado**. A este filtrado se le llama conformación de ruido (en inglés, *noise shaping*).

Como ya se ha mencionado, el sobremuestreo significa que la señal de entrada analógica es muestreada con una frecuencia mucho más elevada de la mínima requerida, que es la frecuencia de Nyquist. La relación de sobremuestreo se define como:

$$M = OSR = \frac{f_s}{f_N} = \frac{f_s}{2f_b} \quad [2.1]$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo, f_N es la frecuencia de Nyquist y f_b es el ancho de banda de la señal.

El cuantizador de un bit genera una cadena de bits con niveles $\pm\Delta/2$, donde Δ es el tamaño del intervalo de cuantización. El error de cuantización tiene una fuerte dependencia de la señal de entrada. Sin embargo, si la entrada cambia aleatoriamente entre muestras, en cantidades comparables o más grandes que el espaciado de los niveles sin provocar saturación, entonces el error no está correlado entre muestras y tiene igual probabilidad de caer en cualquier lado del rango $\pm\Delta/2$, por lo que podría modelarse mediante una variable aleatoria uniforme en ese rango. Además, se asume que el error de cuantización tiene un espectro de ruido blanco, aunque éste no sea el caso en sistemas reales. El valor cuadrático del ruido de cuantización está dado por la expresión:



$$e^2_{rms} = \frac{\Delta^2}{12} \quad [2.2]$$

Cuando una señal cuantizada es muestreada a la frecuencia f_s , toda su potencia cae dentro de la banda de frecuencias $0 \leq f \leq f_s/2$. Entonces, la densidad espectral del error de cuantización es:

$$E(f) = \frac{e^2_{rms}}{f_s/2} = \frac{\Delta^2}{6f_s} \quad [2.3]$$

El ruido de cuantización total dentro de la banda es:

$$N_q = \int_0^{f_b} E(f)df = \frac{e^2_{rms}}{OSR} \quad [2.4]$$

Según esto la potencia del ruido de cuantización integrada dentro de un ancho de banda fijo, el ancho de banda de la señal f_b , disminuye si la frecuencia de muestreo aumenta, es decir, se reduce con el aumento del sobremuestreo.

La conformación de ruido implica el filtrado del error de cuantización a través del filtro del bucle. Como resultado, la potencia del error de cuantización se reduce en la banda de frecuencia de interés, mientras que se incrementa fuera de ella.

Debido a la reducción del error de cuantización, es posible obtener una salida digital de alta resolución usando un cuantizador de baja resolución; normalmente es suficiente emplear un cuantizador de un bit con dos niveles de salida¹.

El cuantizador es un circuito fuertemente no lineal. Para realizar un análisis sencillo, es necesario obtener un modelo lineal del sistema, como se muestra en **Fig. 2.6**.

El convertidor A/D ha sido reemplazado por un sumador y el ruido de cuantización $E_Q(z)$ añadido es independiente de la entrada del modulador $X(z)$. Ahora, el modulador de **Fig. 2.6** es un sistema de 2 entradas y 1 salida, donde la salida $Y(z)$ se puede escribir en términos de las dos entradas $X(z)$ y $E_Q(z)$, como:

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} X(z) + \frac{1}{1+H(z)} E_Q(z) = STF(z)X(z) + NTF(z)E_Q(z) \quad [2.5]$$

¹ Existen moduladores $\Sigma\Delta$ multibit que intentan aumentar la resolución utilizando cuantizadores de mas de un bit. Esto introduce problemas debido a los errores de no linealidad de los DAC de mas de un bit.



donde:

- ♦ $X(z)$, $E_Q(z)$ e $Y(z)$, son la señal de entrada, el ruido de cuantización y la señal de salida en el dominio Z .
- ♦ $STF(z)$ ¹ es la función de transferencia de la señal.
- ♦ $NTF(z)$ ² es la función de transferencia del ruido.

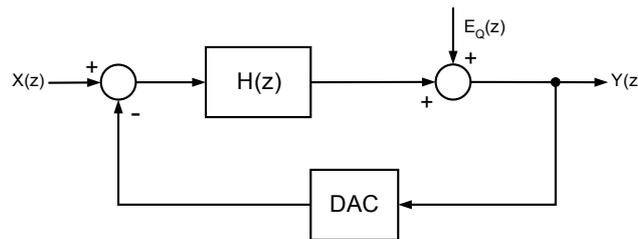


Fig. 2.6: Modelo lineal de un modificador $\Sigma\Delta$ de un solo lazo.

El objetivo del *noise shaping* es reducir la potencia del ruido de cuantización en la banda de la señal, transmitiendo a la salida la señal de entrada. Se puede observar que, para frecuencias donde el filtro $H(z)$ tiene una ganancia elevada ($H(z) \gg 1$), la función $STF(z)$ tiene un valor cercano a la unidad, mientras que $NTF(z)$ tiende a cero. De esta forma, el modificador atenúa el ruido de cuantización y no afecta a la señal de entrada y de salida. Este es el principio de conformación de ruido o *noise shaping*.

Como las señales a digitalizar son de baja frecuencia, el modificador $\Sigma\Delta$ se quiere diseñar debe ser paso de baja. así que el filtro $H(z)$ debe tener ganancia elevada para baja frecuencia. Las funciones $STF(z)$ y $NTF(z)$ deben tendrán entonces la forma mostrada en **Fig. 2.7**.

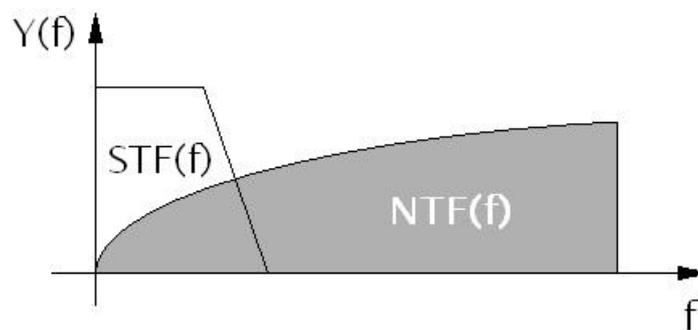


Fig. 2.7: *Noise shaping* en un modificador $\Sigma\Delta$ paso de baja.

El bloque más simple que cumple esta característica ($H(z) \rightarrow \infty$ para $z \rightarrow 1$), es un

1 Del inglés *Signal Transfer Function*.

2 Del inglés *Noise Transfer Function*.



integrador cuya función de transferencia en el dominio z viene dada por:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad [2.6]$$

Este apartado está enfocado hacia el estudio del modulador porque es el bloque que produce los principales errores que puede degradar el funcionamiento de todo el convertidor.

3. Parámetros Generales.

Los ADC de *Nyquist*¹ normalmente se caracterizan utilizando las desviaciones del ADC real respecto de un ADC ideal, usando parámetros que determinan el comportamiento estático, tales como el *offset*, error de ganancia, no linealidad diferencial, etc.

Para describir los ADC basados en moduladores $\Sigma\Delta$, además de dichos errores estáticos, se utilizan otro tipo de parámetros que reflejan el comportamiento dinámico y que se describen en este apartado.

Relación Señal/Ruido (SNR).

Se define como la potencia a la salida a la frecuencia de una señal de entrada sinusoidal dividida entre la potencia del ruido a la salida contenido en la banda de la señal. Tiene en cuenta tanto el ruido de cuantización como el ruido generado por el circuito, pero se excluye la potencia de los armónicos de la señal.

Normalmente, la SNR se incrementa linealmente con la potencia de la señal de entrada hasta sobrecargar el cuantizador momento en el cual se produce una rápida caída.

Relación Señal/Distorsión (SDR).

Relación entre la potencia de la señal de salida a la frecuencia de la entrada sinusoidal y la suma de la potencia de la señal de salida a la frecuencia de los armónicos de la señal de entrada.

Relación Señal/Ruido + Distorsión (SNDR).

Relación entre la potencia de la señal de salida y la suma de la potencia del ruido total más la de los armónicos de la señal.

¹ Son aquellos que no usan técnicas de sobremuestreo.



Normalmente, la SNDR y la SNR coinciden cuando la potencia de la señal de entrada es baja. Cuando la potencia de la señal de entrada crece, la SNDR cae antes que la SNR debido a que los armónicos ganan en importancia cuando se incrementa la potencia de las señales de entrada.

Fondo de Ruido.

Se define como la potencia de una entrada sinusoidal con amplitud tal que resulte imposible distinguirla del ruido y la distorsión a la salida, es decir, que produzca una SNDR = 0dB.

Nivel de sobrecarga.

Potencia de una entrada sinusoidal cuya amplitud produce una caída de 3dB en la SNDR respecto de su valor máximo.

Rango Dinámico (DR).

Relación entre el nivel de sobrecarga y el fondo de ruido. El rango dinámico se mide normalmente en decibelios (dB), y representa la resolución del modulador. La conversión de dB a resolución en bits efectivos se produce a través de la expresión:

$$DR(bits) = \frac{DR(dB) - 1.76}{6.02} \quad [2.7]$$

Amplitud a fondo de escala.

Se define como la máxima amplitud posible a la salida del DAC¹. En un cuantizador de 1 bit, la amplitud de plena escala es $\Delta/2$. Normalmente, la entrada a plena escala es aquella cuya magnitud iguala el valor máximo de la salida del DAC.

En el estudio de moduladores $\Sigma\Delta$, cuando se habla de potencia de señal de entrada en dB, esta potencia siempre está referida a la potencia que tendría una senoide con una amplitud igual a la de plena escala. De esta forma, una potencia de entrada de 0dB se corresponde con una señal sinusoidal de amplitud $\Delta/2$.

Distorsión armónica (HD_x).

Relación entre la potencia de la señal y la potencia del x^{th} armónico. Normalmente, la distorsión referida al segundo y tercer armónico se indica como HD₂ y HD₃, que son los más importantes.

¹ Digital to Analog Converter

**Rango dinámico libre de espúreos (SFDR).**

Relación entre la máxima amplitud de señal y la mayor componente de la distorsión.

Producto de intermodulación de tercer orden (IM₃).

Introduciendo dos tonos a frecuencias f_1 y f_2 , el IM₃ se define como la relación entre la potencia de entrada y la potencia de la componente de distorsión a la frecuencia $2f_1 - f_2$ ó $2f_2 - f_1$.

Punto de intersección de tercer orden (IP₃).

Potencia de la señal de entrada para la cual la potencia de IM₃ iguala a la potencia de la señal de entrada.

Algunos de estos parámetros aparecen reflejados en **Fig. 2.7**.

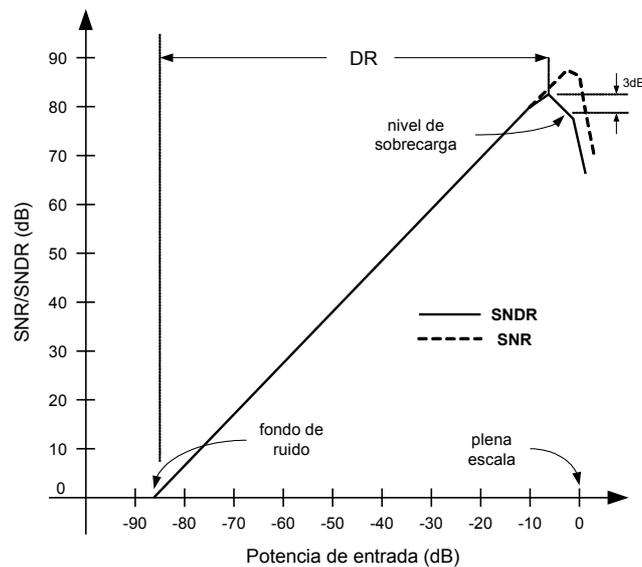


Fig. 2.7: Parámetros típicos en los moduladores $\Sigma\Delta$.