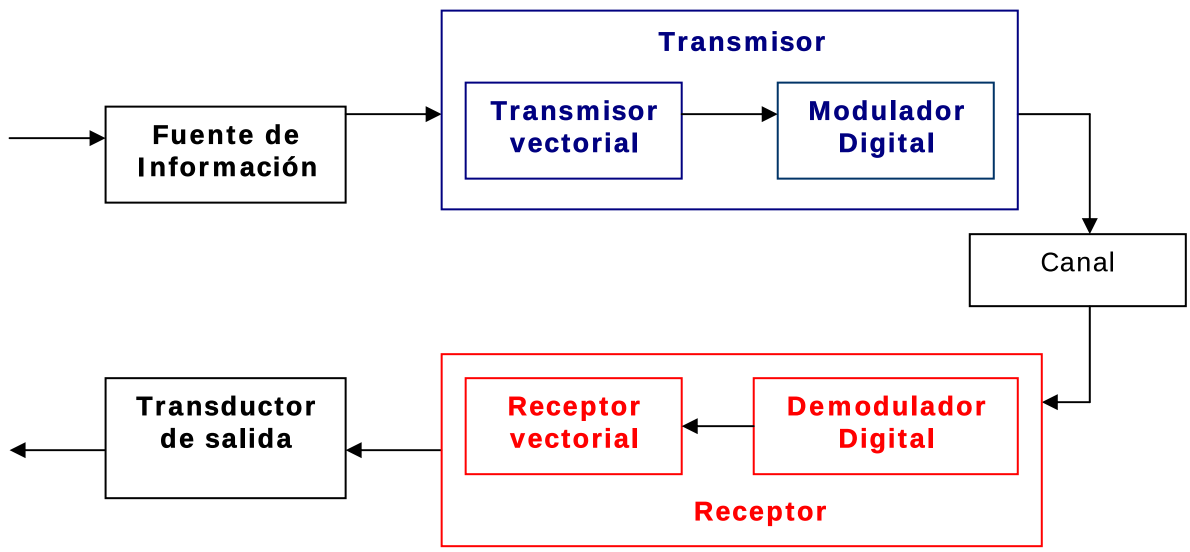
Capítulo 4: Transmisión Digital Banda Base

1. Objetivos

En este capítulo consideraremos algunas técnicas de modulación y demodulación en banda base para la transmisión de información de información digital a través de un canal con ruido blanco y gaussiano. Empezaremos con modulación de pulsos binarios y después se introducirán métodos de modulación no binarios. Describiremos receptores óptimos para estas señales y evaluaremos el resultado en términos de probabilidad de error.

2. Modelo de un Sistema de Comunicación Digital

El modelo de un sistema de Comunicación Digital es el siguiente:



- **Fuente de Información:**

  - Emite un símbolo m_i cada *T* segundos
  - Hay M posibles símbolos, con probabilidad $p(m_i)$, conocida como probabilidad a priori.(Variable aleatoria discreta).
  - Este bloque encaja con un procedimiento Banda Base: Mapea la secuencia de bits en una secuencia de símbolos. $Rb = \frac{\log_2 M}{T}$

- **Transmisor Vectorial**
  - Mapea cada símbolo en un pulso único que se denota con un vector $\vec{S}_i$.
- **Modulador vectorial**
  - Genera a su salida una señal real $S_i(t)$ de duración T distinta para cada símbolo m_i. Cada símbolo se corresponde con una forma de onda única $S_i(t)$. Hay M señales diferentes.
  - La naturaleza de $S_i(t)$ depende del canal de transmisión (el canal de transmisión puede ser paso de banda o banda base, si es paso de banda necesitaremos trasladar la señal con una portadora).
- **Canal**
  - Suponemos un canal AWGN
  - El canal tiene ruido aditivo, este ruido es blanco, gaussiano, de media cero y con una densidad espectral de potencia (PSD) $N_0/2$ W/rad.

$$r(t) = S_i(t) + n(t)$$

- **Demodulador Vectorial**
  - La función del demodulador vectorial consiste en convertir la señal recibida $r(t)$ en un vector $\vec{r}$, que denominamos vector de observación.
- **Receptor vectorial**
  - Decide a partir del vector de observación $\vec{r}$, del conjunto de señales $\{S_i(t)\}$ y de las probabilidades a priori p_i, que símbolo de los M posibles se han transmitido. Como resultado, se propone que ha sido $\hat{m}_i$

3. Transmisión Digital Banda-Base

3.1. Introducción

En este apartado, consideraremos que la transmisión de la información digital se realiza a través de canales en banda base. En este caso la información se transmite directamente a través del canal sin el uso de portadoras sinusoidales.

3.2. Transmisión de una señal binaria

3.2.1. Señales Ortogonales

El planteamiento del problema seria el siguiente:

- Fuente de Información: En un sistema de comunicación binaria, los datos consisten en una secuencia de 0's y 1's, con lo cual:

$$\begin{aligned} m_o &= 0 \\ m_1 &= 1 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

- El transmisor mapea cada símbolo en dos formas de ondas, $S_0(t)$ y $S_1(t)$. Estas formas de onda son pulsos ortogonales de duración T y con la misma energía E.

- En el canal a través del cual la señal se transmite, es un canal AWGN, el ruido que añade lo denotamos como $n(t)$, que es una muestra de un proceso blanco gaussiano de media cero y densidad espectral $N_0/2$ W/rad.

- El receptor tiene que determinar cuando un 0 o un 1 fueron transmitidos observando la señal recibida r(t). El receptor se diseña para minimizar la probabilidad de error. Se le llama receptor óptimo. Tal y como se ve en el capítulo cuatro de teoría, el receptor optimo para un canal AWGN consiste en dos bloques. El primero es el demodulador de correlación o demodulador de filtros acoplados y el segundo es el detector. Particularizando para el problema:

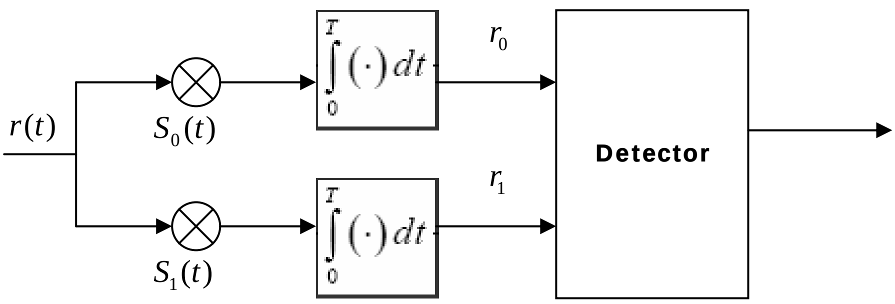


Figura 4.2. Demodulador de correlación para una señal binaria

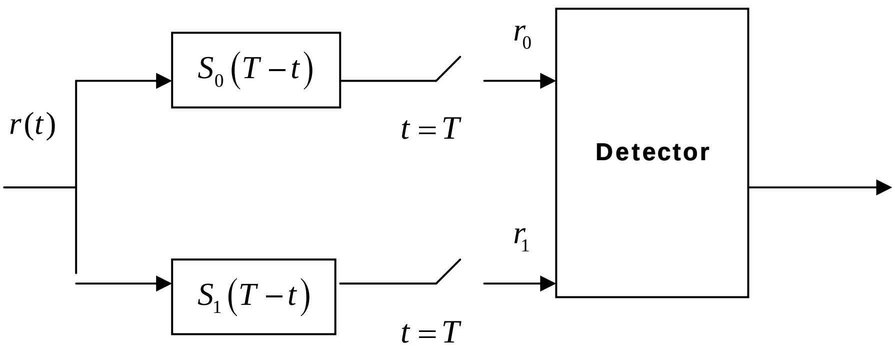


Figura 4.3. Demodulador de filtros acopalados para una señal binaria

Se puede comprobar que, que si el símbolo transmitido es un 0:

$$\begin{aligned} r_0 &= E + n_o \\ r_1 &= n_1 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Y si el símbolo transmitido es un 1:

$$\begin{aligned} r_0 &= n_o \\ r_1 &= E + n_1 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Donde:

$$n_o = \int_0^T s_0(t)n(t)dt$$

$$n_1 = \int_0^T s_1(t)n(t)dt \tag{4.3.4}$$

Cuyos valores esperados y varianza son los siguientes:

$$E[n_0] = \int_0^{T_b} S_o(t)E\left[n(t)\right]dt = 0$$

$$E[n_1] = \int_0^{T_b} S_1(t)E\left[n(t)\right]dt = 0 \tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = E(n_i^2) &= \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} S_i(t)S_i(\tau)E\left[n(t)n(\tau)\right]dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^{T_b} S_i(t)S_i(\tau)\delta(t-\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^{T_b} S_i^2(t)dt = \boxed{\frac{EN_0}{2}} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

De (4.3.5) podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[n_0] = 0 \Rightarrow E\left(r_0 / m_o Tx \right) = E \qquad & \boxed{E\left(r_0 / m_1 Tx \right) = 0} \\ E[n_1] = 0 \Rightarrow E\left(r_1 / m_o Tx \right) = 0 \qquad & \boxed{E\left(r_1 / m_1 Tx \right) = E} \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

El detector compara r_0 y r_1 , decide si fue transmitido un 0 si $r_0 > r_1$ y lo contrario (un 1 fue transmitido) si $r_1 > r_0$. La probabilidad de error, supuestos que los símbolos son equiprobables seria:

$$\boxed{P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR}\right)} \tag{4.3.8}$$

Ejercicio 4.1.

Enunciado

Usar la simulación de Monte Carlo, vista en la práctica 2 para estimar y dibujar la probabilidad de error frente a la SNR para una transmisión binaria que emplea demodulador de correlación o de filtros acoplados. El modelo del sistema se muestra en la siguiente figura:

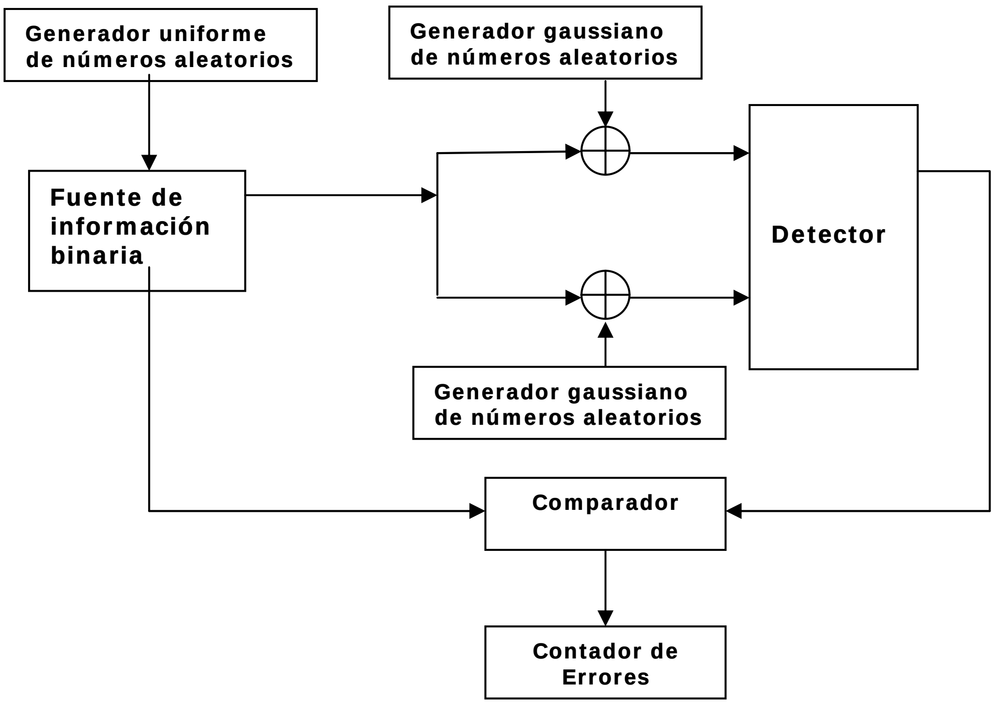


Figura 4.4. Modelo de Simulación para el ejercicio 4.1

Comenzaremos generando una secuencia binaria de 0's y 1's que son equiprobables y estadísticamente independientes, para ello usaremos un generador de números aleatorios uniforme entre 0 y 1; si el número generado es menor que 0.5 se considerara la transmisión de un 0; por el contrario si el número generado es mayor o igual que 0.5 se considerará que se ha transmitido un 1.

Si transmitimos un 0, $r_0=E+n_0$ y $r_1=n_1$; por el contrario si transmitimos un 1 $r_0=n_0$ y $r_1=E+n_1$. Donde n_o y n_1 son la salida de un generador de variables aleatorias gaussianas de media 0 y varianza $\sigma^2 = EN_o/2$

El detector compara r_0 y r_1 y decide el símbolo trasmitido. El comparador compara el símbolo transmitido con el símbolo estimado, si son distintos incrementará el contador de errores.

Resultado

```
% Script para el ejercicio 4.1
clear all;
SNRdb1=0:1:12;
SNRdb2=0:0.1:12;
for i=1:length(SNRdb1)
  simulada(i)=tx_bin1(SNRdb1(i));
end;
for i=1:length(SNRdb2)
    SNR=10^(SNRdb2(i)/10);
    teorica(i)=(1/2)*erfc(sqrt(SNR)/sqrt(2));
end;
semilogy(SNRdb1,simulada,'g+');
hold on;
semilogy(SNRdb2,teorica);
hold off;
xlabel('10*log(E/No)');
ylabel('Pe');
```

```
function p=tx_bin1(snr_db)
E=1;
SNR=10^(snr_db/10);
sigma=E/sqrt(2*SNR);

for i=1:N,
  aux=rand(1,1);
  if (aux<0.5),
    fuente(i)=0;
  else
    fuente(i)=1;
end;

error=0;
for i=1:N,
  if (fuente(i)==0),
    r0=E+(sigma*randn(1,1));
    r1=(sigma*randn(1,1));
  else
    r0= sigma*randn(1,1);
    r1=E+(sigma*randn(1,1));
  end;

  if (r0>r1),
    estimado=0;
  else
    estimado=1;
  end;
  if (estimado~=fuente(i)),
    error=error+1;
  end;
end;
p=error/N;
```

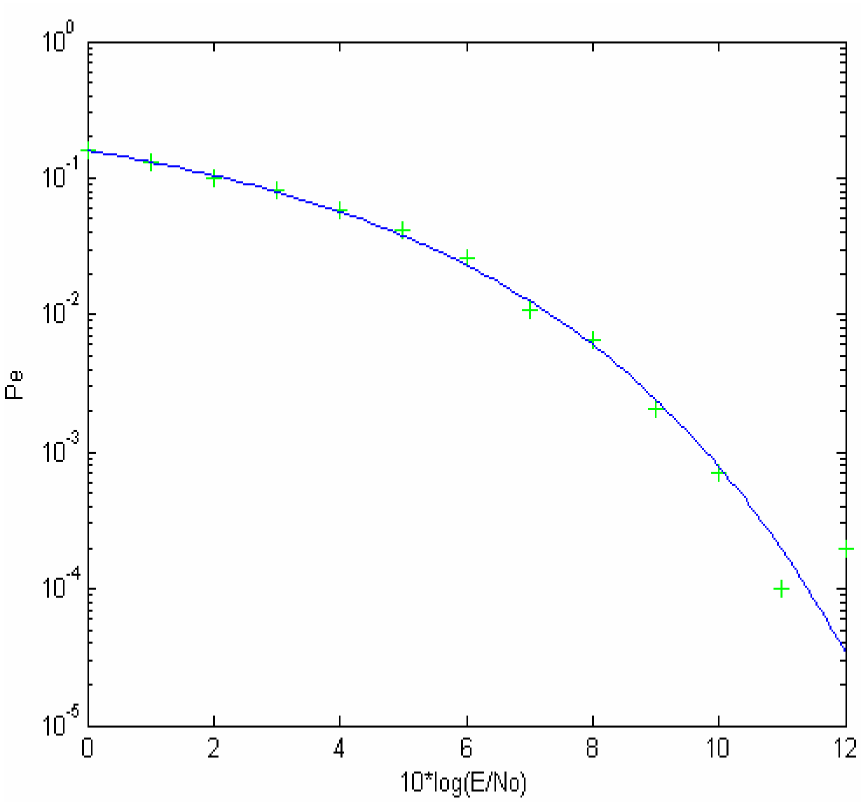


Figura 4.5. Probabilidad de Error vs SNR con simulación Monte carlo Comparada con la Probabilidad de error teórica

3.2.2. Señales Antipodales

Dos formas de señal se llaman antipodales si una de ellas es la negativa de la otra.

De esta forma, suponemos que:

$$S_0(t) = g(t)$$
$$S_1(t) = -g(t) \tag{4.3.9}$$

El espacio de señal es monodimensional, con lo cual el esquema de demodulación seria el siguiente.

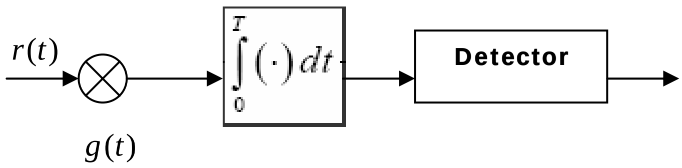


Figura 4.6. Demodulación de señal binaria antipodal usando correladores

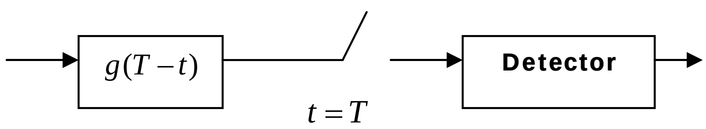


Figura 4.7. Demodulación de señal binaria antipodal usando usando filtros acoplados

A la entrada del detector tanto usando un correlador como un filtro acoplado, tenemos lo siguiente:

$$r = \int_0^T g(t) r(t) dt \tag{4.3.10}$$

siendo $r(t) = \pm g(t) + n(t)$

Llamando $n = \int_0^T n(t) g(t) dt$ (4.3.11)

$r = E + n$ Si el símbolo emitido es un 0

$r = -E + n$ Si el símbolo emitido es un 1 (4.3.12)

Si calculamos el valor esperado de n y la varianza, obtenemos los siguientes resultados:

$$\boxed{\begin{array}{l} E[n] = 0 \\ \sigma^2 = E[n^2] = \dfrac{N_0 E}{2} \end{array}} \tag{4.3.13}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} E\left(r/m_o Tx \right) = E & \\ & \sigma^2 = \dfrac{N_0 E}{2} \\ E\left(r/m_1 Tx \right) = -E & \end{array}} \tag{4.3.14}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} f\left(r/m_o Tx \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-E)^2/2\sigma^2} \\ f\left(r/m_1 Tx \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r+E)^2/2\sigma^2} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

El detector recibe r, decide que fue transmitido un 0 si $r > 0$ y lo contrario (un 1 fue transmitido) si $r < 0$. La probabilidad de error, supuestos que los símbolos son equiprobables seria:

$$\boxed{P_e = P(r<0) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) = Q\left(\sqrt{2SNR} \right)} \tag{4.3.16}$$

Ejercicio 4.2.

Usar la Modulación de Monte Carlo, vista en la práctica 2 para estimar y dibujar la probabilidad de error de un sistema de comunicación binario antipodal. El modelo del sistema está ilustrado en la Figura 4.8.

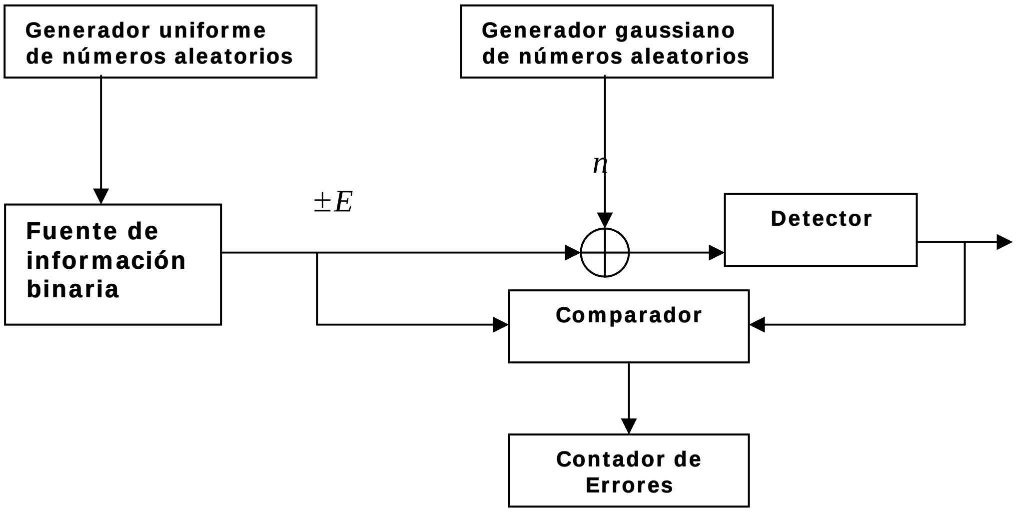


Figura 4.8. Modelo se un sistema de Comunicación Binario empleando señales antipodales

```
SNRdb1=0:1:11;
SNRdb2=0:0.1:10;
for i=1:length(SNRdb1),
  simulada(i)=tx_bin2(SNRdb1(i));
end;

for i=1:length(SNRdb2),
  SNR=exp(SNRdb2(i)*log(10)/10);
  teorica(i)=(1/2)*erfc(sqrt(2*SNR)/sqrt(2));

end;
semilogy(SNRdb1,simulada,'r*');
hold on;
semilogy(SNRdb2,teorica);
hold off;
xlabel('10*log(E/No)');
ylabel('Pe');
```

```
function p=tx_bin2(snr_db)

E=1;
SNR=10^(snr_db/10);
sigma=E/sqrt(2*SNR);

N=10000;
for i=1:N,
   aux=rand(1,1);
   if (aux<0.5),
      fuente(i)=0;
   else
      fuente(i)=1;
   end
end;

error=0;
for i=1:N,
   if (fuente(i)==0),
      r=-E+(sigma*randn(1,1));
   else
      r=E+(sigma*randn(1,1));
 end;
   if (r<0),
      estimado=0;
   else
      estimado=1;
   end;
   if (estimado~=fuente(i))
      error=error+1;
   end;
end;
p=error/N;
```

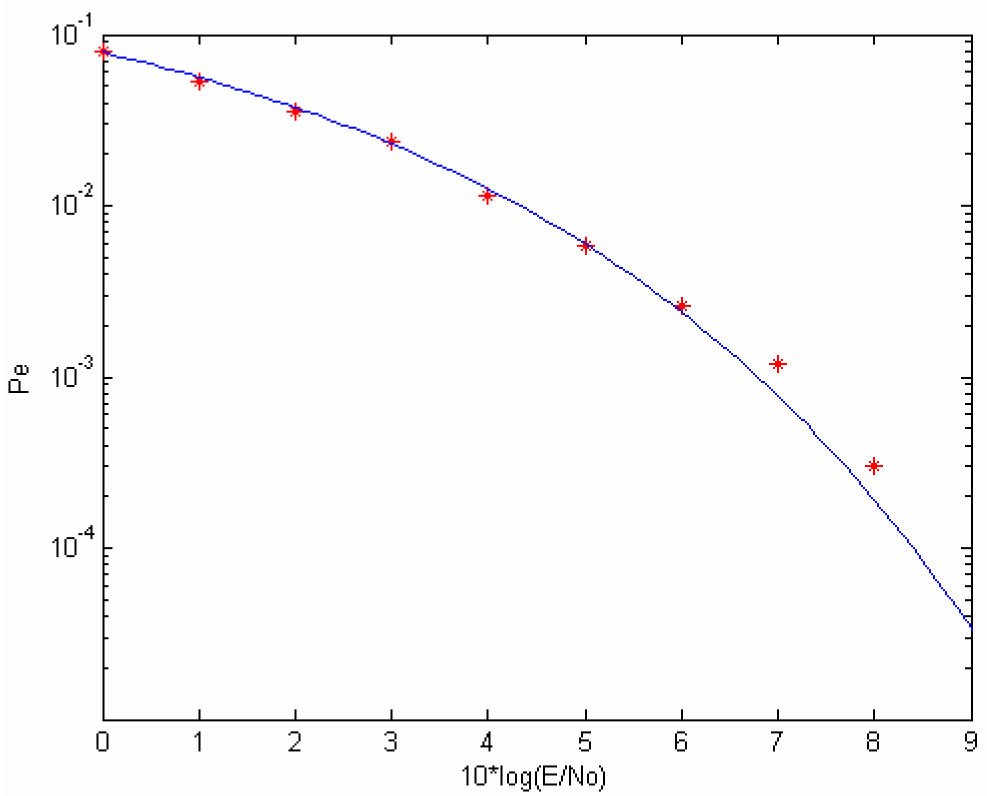


Figura 4.9. Probabilidad de Error vs SNR con simulación Monte carlo Comparada con la Probabilidad de error teórica (Señales antipodales)

3.2.3. Señales On-Off

Una secuencia de información binaria puede ser también transmitida usando señales on-off. Para transmitir un 0, no se transmite ninguna señal en el intervalo de duración T. Para transmitir un 1, se transmite un pulso $g(t)$. Consecuentemente la señal recibida se puede representar:

$$r(t) = n(t) \qquad \text{Si se transmite un 0}$$
$$r(t) = g(t) + n(t) \qquad \text{Si se transmite un 1} \qquad (4.3.17)$$

La entrada al detector se expresa:

$$r = n \qquad \text{Si se transmite un 0.}$$
$$r = n + E \qquad \text{Si se transmite un 1.} \qquad (4.3.18)$$

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria r son:

$$E\left(r/_{m_0 Tx} \right) = 0 \qquad f\left(r/_{m_0 Tx} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-r^2/2\sigma^2}$$
$$E\left(r/_{m_1 Tx} \right) = E \;\Rightarrow \qquad \qquad (4.3.19)$$
$$\sigma^2 = EN_0/2 \qquad f\left(r/_{m_1 Tx} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(r-E)^2/2\sigma^2}$$

El detector recibe r, decide que fue transmitido un 0 si $r < \gamma_{opt}$ y lo contrario (un 1 fue transmitido) si $r > \gamma_{opt}$. Se puede demostrar que para este caso $\gamma_{opt} = E/2$. La probabilidad de error, supuestos que los símbolos son equiprobables seria:

$$\boxed{P_e = P(r < \gamma_{opt}) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{SNR}{2}}\right)} \qquad (4.3.20)$$

Ejercicio 4.3.

Enunciado

Usar la Modulación de Monte Carlo, vista en la práctica 2 para estimar y dibujar la probabilidad de error de un sistema de comunicación binario que utiliza señales on-off. El modelo del sistema está ilustrado en la Figura 4.10, es el mismo que el empleado para señales antipodales.

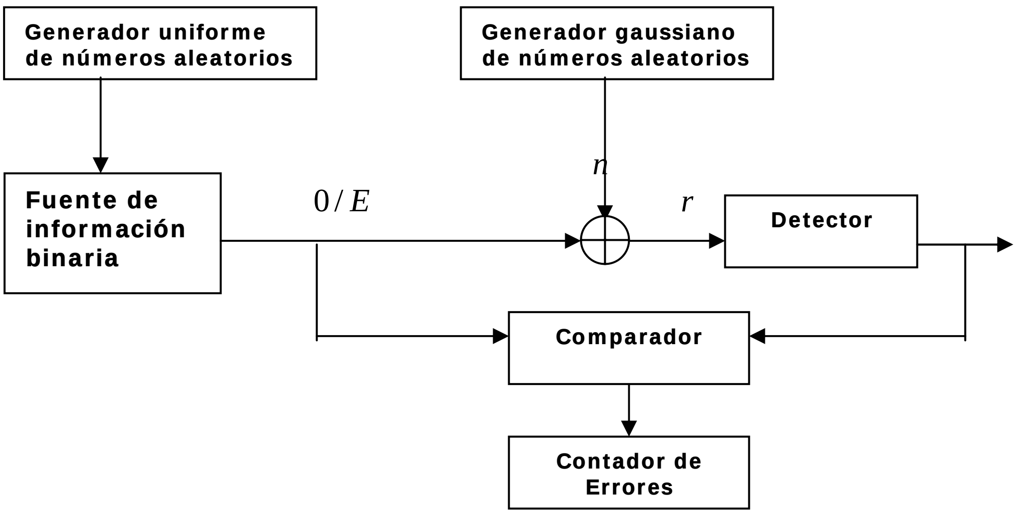


Figura 4.10. Modelo se un sistema de Comunicación Binario empleando señales on-pff

Resultado

```
SNRdb1=0:1:15;
SNRdb2=0:0.1:15;
for i=1:length(SNRdb1),
  simulada(i)=tx_bin3(SNRdb1(i));
end;

for i=1:length(SNRdb2),
  SNR=exp(SNRdb2(i)*log(10)/10);
  teorica(i)=(1/2)*erfc(sqrt(SNR/2)/sqrt(2));

end;
semilogy(SNRdb1,simulada,'r*');
hold on;
semilogy(SNRdb2,teorica);
hold off;
xlabel('10*log(E/No)');
ylabel('Pe');
```

```
function p=tx_bin3(snr_db)

E=1;
gopt=E/2;
SNR=10^(snr_db/10);
sigma=E/sqrt(2*SNR);
N=10000;
for i=1:N,
   aux=rand(1,1);
   if (aux<0.5),
      fuente(i)=0;
   else
      fuente(i)=1;
   end
end;
error=0;
for i=1:N,
   if (fuente(i)==0),
      r=sigma*randn(1,1);
   else
      r=E+(sigma*randn(1,1));
   end;

   if (r<gopt),
      estimado=0;
   else
      estimado=1;
   end;
   if (estimado~=fuente(i)),
      error=error+1;
   end;
end;
p=error/N;
```

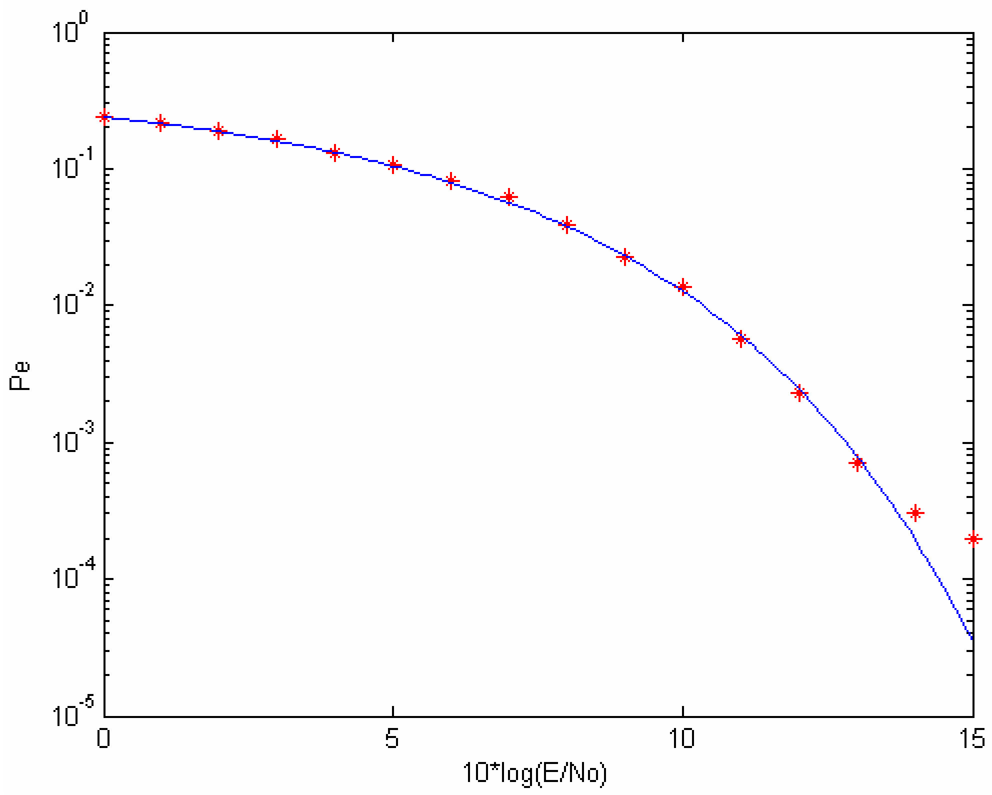


Figura 4.11. Probabilidad de Error vs SNR con simulación Monte carlo Comparada con la Probabilidad de error teórica (Señales on-off)

3.3. Transmisión de una señal con múltiples niveles de amplitud

En el apartado anterior, tratamos la información digital usando formas de ondas binarias. En este apartado, usaremos formas de señal que toman múltiples niveles de amplitud. Debido a esto, podemos transmitir múltiples bits por señal.

3.3.1. Transmisión por Amplitud de Pulsos (PAM)

En general, las M señales en banda base de la familia tienen la siguiente forma:

$$S_i(t) = A_i g(t) \qquad i = 1,...,M \qquad 0 \le t \le T \tag{4.3.21}$$

Dónde { $A_i, i = 1,..,M$ } representa el conjunto de los M niveles de amplitud, correspondiendo a los M cada uno de ellos a los M posibles símbolos formados por bloques de k bits ($M = 2^K$), $g(t)$ representa un pulso básico de forma arbitraria, de duración menor o igual a T y de energía E_g . La asignación de los niveles de amplitud, se hace cumpliendo dos reglas:

1. Que estén igualmente espaciados, si llamamos $2A$ a la separación entre dos símbolos adyacentes:

$$A_i = A_1 + (i-1)2A = A_1 + (i-1)d \qquad i = 1,\ldots,M \qquad (4.3.22)$$

2. Minimicen la energía media transmitida:

$$A_1 = -A(M-1) \qquad (4.3.23)$$

$$A_i = A(2i - M - 1) \qquad i = 1,\ldots,M \qquad (4.3.24)$$

$$E_{av} = \frac{A^2(M^2-1)E_g}{3} \qquad (4.3.25)$$

Las señales PAM tienen una energía dada por: $E_i = A_i^2 E_g$ (4.3.26)

El espacio de señal tendrá una única dimensión: $\phi(t) = \dfrac{Si(t)}{\sqrt{E_i}} = \dfrac{g(t)}{\sqrt{E_g}}$. (4.3.27)

Las coordenadas del vector de señal vendrán dadas por: $S_i = A_i\sqrt{E_g}$ (4.3.28)

Las constelaciones para los casos M=2, M=4 y M=8 se muestran en la figura 4.12. Las señales PAM digitales también se denominan ASK.

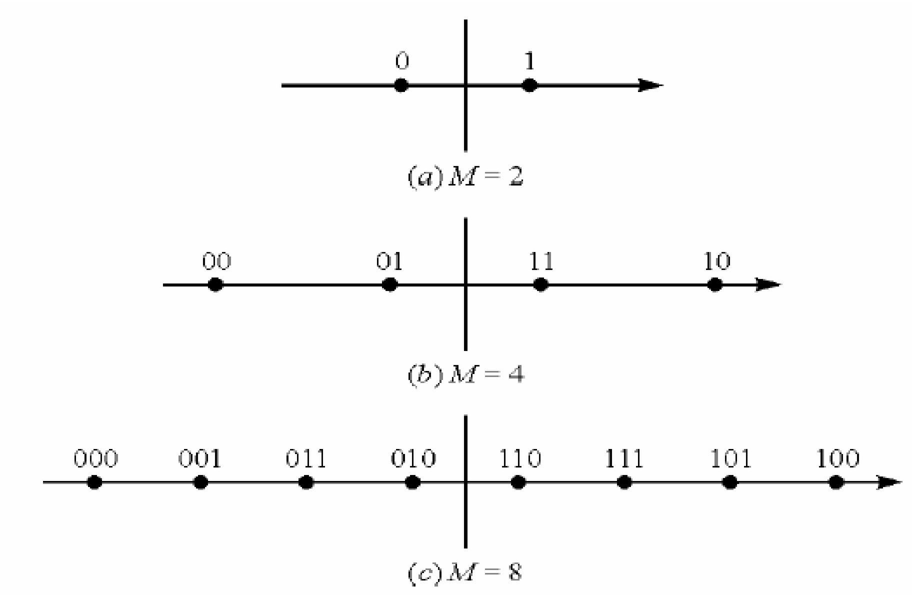


Figura 4.12. Constelación PAM

El receptor que minimiza la probabilidad de error se implementa haciendo pasar la señal a través de un correlador de señal o de un filtro acoplado seguido de un detector de amplitud.

La señal de salida a la salida del correlador o del filtro acoplado, se puede expresar como:

$$r = \int_0^T r(t)g(t)dt = \int_0^T A_i g^2(t)dt + \int_0^T g(t)n(t)dt = A_i E_g + n \qquad (4.3.29)$$

$$E[r] = A_i E_g$$
$$\sigma^2 = \frac{E_g N_0}{2} \qquad (4.3.30)$$

Si suponemos que todos los símbolos son equiprobables, los umbrales de decisión estarán situados en los puntos intermedios de las coordenadas de las señales. Si suponemos que el símbolo transmitido no pertenece a los extremos, tal y como se ve en teoría, la probabilidad de error viene dada por:

$$P_e = 2Q\left[A\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right] \qquad (4.3.31)$$

Si el símbolo transmitido pertenece a los extremos: $P_e = Q\left[A\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right]$ (4.3.32)

Por lo tanto la probabilidad de error de símbolo viene dada por:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M}Q\left[\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right] = \boxed{\frac{2(M-1)}{M}Q\sqrt{\frac{(6\log_2 M)E_{avb}}{(M^2-1)N_0}}} \qquad (4.3.33)$$

Donde: $SNR\_b = \frac{E_{avb}}{N_0} = \frac{E_{av}/\log_2 M}{N_0} = \left\langle \begin{matrix} E_{av} = \frac{d^2(M^2-1)}{12} \\ \sigma^2 = \frac{EN_0}{2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{d^2(M^2-1)E}{6\log_2 M\sigma^2}$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{d^2(M^2-1)E^2}{6(\log_2 M)SNR}}} \qquad (4.3.34)$$

Ejercicio 4.4.

Enunciado

Usar la Modulación de Monte Carlo, vista en la práctica 2 para estimar y dibujar la probabilidad de error de un sistema de comunicación M-ario que utiliza señales PAM en banda base, suponiendo los símbolos equiprobables. El modelo del sistema está ilustrado en la Figura 4.13, es el mismo que el empleado para señales antipodales.

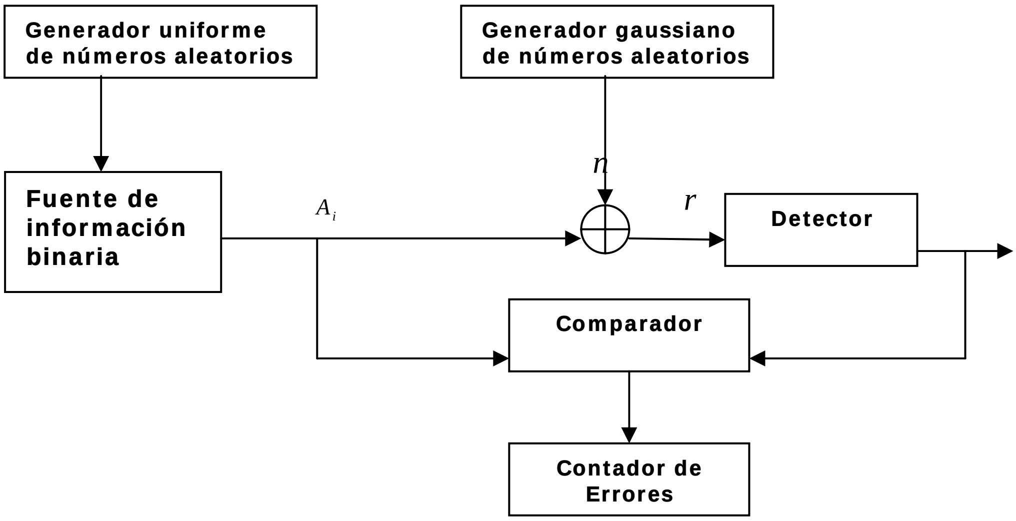


Figura 4.13. Modelo se un sistema de Comunicación Binario empleando señales antipodales

Dibujar la Probabilidad de Error frente a $10\log\left(\frac{E_{avb}}{N_0}\right)$ *para M=2, M=8 y M=16.*

Resultado

```
snr_db1=0:1:25;
snr_db2=0:0.1:25;
M=16;
M_8=8;
M_2=2;
for i=1:length(snr_db1)
    simulada_16(i)=pam(snr_db1(i),M);
    simulada_8(i)=pam(snr_db1(i),M_8);
    simulada_2(i)=pam(snr_db1(i),M_2);
end;
echo on;
for i=1:length(snr_db2)
    snr=10^(snr_db2(i)/10);
    teorica_16(i)=(2*(M-1)/M)*Q(sqrt((6*log2(M)/(M^2-
1))*snr));
    teorica_8(i)=(2*(M_8-1)/M_8)*Q(sqrt((6*log2(M_8)/(M_8^2-
1))*snr));
    teorica_2(i)=(2*(M_2-1)/M_2)*Q(sqrt((6*log2(M_2)/(M_2^2-
1))*snr));
end;

semilogy(snr_db1,simulada_16,'*',snr_db2,teorica_16,'b');
hold on;
semilogy(snr_db1,simulada_8,'r*',snr_db2,teorica_8,'r');
semilogy(snr_db1,simulada_2,'g*',snr_db2,teorica_2,'g');
xlabel('10log(Eavb/No)');
ylabel('Pe');
legend('M=16','','M=8','','M=2','');
axis([0 25 0.00000001 1]);
hold off;
```

```
function [p]=pam(snr_db,M)
%Uso p=pam(snr_db,M)
%     devuelve la probabilidad de error de un sistema M-ario
que
%     utiliza señales PAM banda base dada una relación señal a
%     a ruido por bit: snr_db

d=1;
SNR=10^(snr_db/10);
sigma=sqrt(((d^2)*(M^2-1))/(6*log2(M)*SNR));
N=10000;

%Generación del simbolo (1,..,M)
for i=1:N,
    aux=rand(1,1);
    fuente(i)=floor(M*aux);
end;

%Vector con los umbrales de decisión
level0=-(M-2)*d;
for i=1:M-1,
    levels(i)=level0+((i-1)*2*d);
end;

%Vector con los posibles símbolos
for i=1:M,
    estim(i)=((i-1)*d);
end;

error=0;
for i=1:N
    r1=((2*fuente(i)-M+1)*d);
    aleatorio=sigma*randn(1,1);
    r=r1+aleatorio;
    %detector
    for j=1:M-1
        if(r<levels(1))
            estimado=estim(1);
        elseif(r>levels(M-1))
            estimado=estim(M);
        elseif(r>levels(j) & r<levels(j+1))
            estimado=estim(j+1);
        end;

    end;
    if(estimado~=fuente(i))
        error=error+1;
    end;
end;
p=error/N;  %Probabilidad de error
```

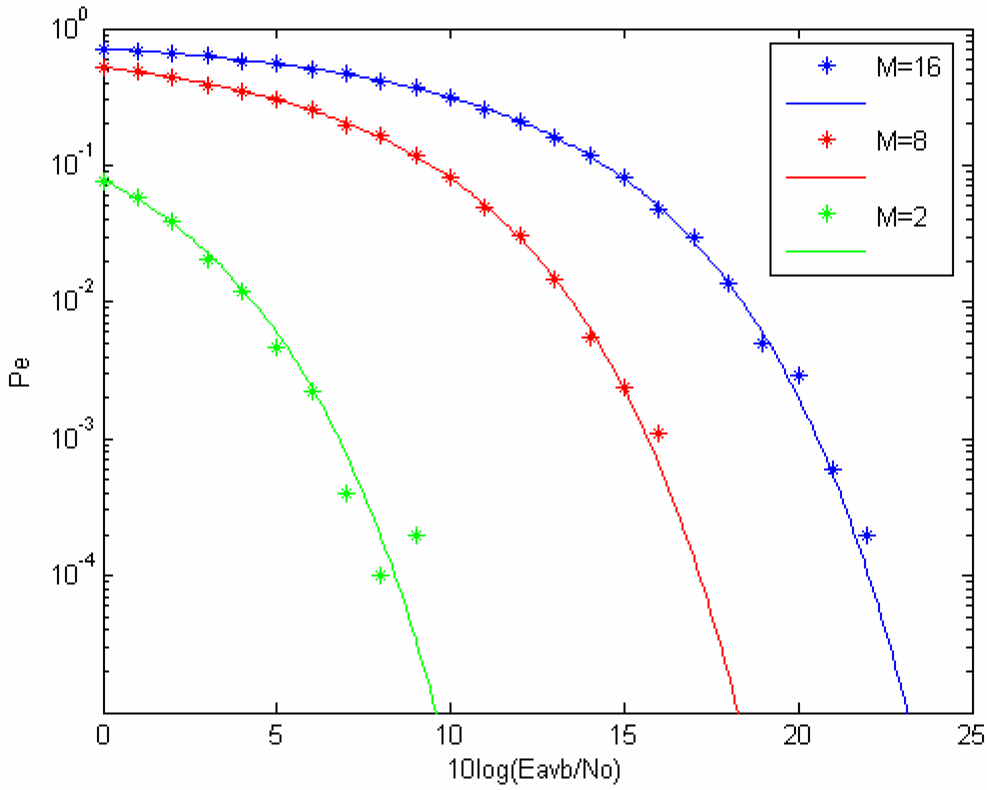


Figura 4.14. Probabilidad de Error vs SNR_bit con simulación Monte carlo comparada con la Probabilidad de error teórica utilizando sistema M-ario con señales PAM banda base para M=16, M=8 y M=2

3.3.2. Señales Multidimensionales Ortogonales

En esta sección consideraremos la construcción de $M = 2^k$ formas de onda $S_i(t)$, para
$i = 0,1,...,M-1$, que cumplan las propiedades de (a) cada una de ellas ortogonales a todas y (b) con la misma energía. Estas dos propiedades puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int_0^T S_i(t)S_k(t)dt = E\delta_{ik} \qquad i,k = 0,1,...,M-1 \tag{4.3.35}$$

dónde δ_{ik} se define de la siguiente forma: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$ (4.3.36)

La forma más simple de construir M señales ortogonales con la misma energía en el intervalo $(0,T)$ es subdividir el intervalo en M subintervalos con la misma longitud e igual a T/M y asignar una señal a cada subintervalo. Todas las señales construidas tendrán la misma energía, dada por:

$$E = \int_0^T S_i^2(t)dt = \frac{A^2T}{M} \qquad i = 0,1,...,M-1 \tag{4.3.37}$$

Asumiremos que estas señales ortogonales son usadas para transmitir para transmitir información a través de un canal AWGN. Consecuentemente la señal transmitida $S_i(t)$, en el receptor tendremos la señal:

$$r(t) = S_i(t) + n(t) \qquad 0 \le t \le T \qquad i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{4.3.38}$$

donde $n(t)$ es una función muestra de un proceso blanco gaussiano con densidad espectral $N_0/2$ W/rad. El receptor observa la señal $r(t)$ y decide cual de las M señales es fue transmitida.

El receptor que minimiza la probabilidad de error hace pasar primero $r(t)$ a través de un bloque de M correladores o M filtros acoplados, en paralelo. Consideraremos el caso de los M correladores, como se muestra en la figura 4.15.

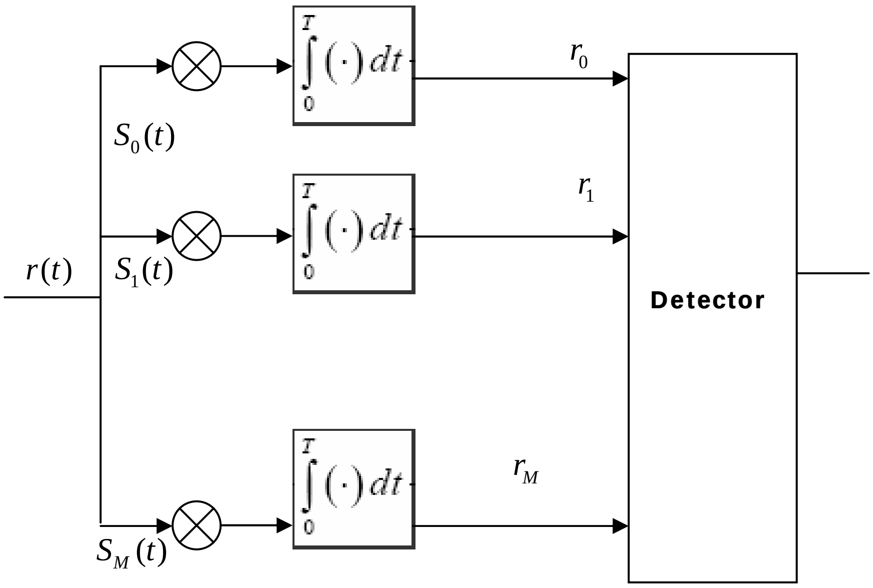


Figura 4.15. Receptor optimo par señales multidimensionales ortogonales.

La señales a la entrada del detector serán:

Si $S_j(t)$ es transmitida : $$\begin{cases} r_i = n_i & i \neq j \\ r_j = n_j + E & i = j \end{cases} \tag{4.3.39}$$

$$SNR_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{E}{(\log_2 M)N_0} = \frac{E^2}{2(\log_2 M)\sigma} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{E^2}{2(\log_2 M)SNR_b}} \tag{4.3.40}$$

Se puede comprobar que la probabilidad de error por símbolo viene dada por:

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1-[1-Q(y)]^{M-1}\right\} e^{-\left(y-\sqrt{2E/N_0}\right)^2 / 2} dy$$

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k-1} P_M \qquad (4.3.41)$$

Para generar teóricamente la probabilidad de error de bit frente a la relación señal a ruido, utilizamos el siguiente script:

```
k=log2(M);
tolerance=1e-7;
minus_inf=-20;
plus_inf=20;
snr_db=snr_o:paso:snr_f
for i=1:length(snr_db)
snr(i)=10^(snr_db(i)/10);
   Pb=(2^(k-1))/2^k-1)*
quadl('bdt_int',minus_inf,plus_inf,tolerance,[],snr,M);
end;
```

```
function [y] = bdt_int(x,snr_per_bit,M)
% [y]=bdt_int(x,snr_per_bit,M)
%           BDT_INT  is used to compute the integrand needed
in the
%           computation of the error probability of
orthogonal signals

N=length(x);
for i=1:N,
   y(i)=(1/sqrt(2*pi))*(1-(1-Q(x(i)))^(M-1))*exp(-(x(i)-
sqrt(2*log2(M)*snr_per_bit))^2/2);
end;
```

Ejercicio 4.5.

Enunciado

Usar la Modulación de Monte Carlo, vista en la práctica 2 para estimar y dibujar la probabilidad de error de un sistema de comunicación M-ario que utiliza señales Multidimensionales Ortogonales en banda base, suponiendo los símbolos equiprobables..

Dibujar la Probabilidad de Error frente a $10\log\left(E_{avb}/N_0\right)$ *para M=2, M=8 y M=16*

Resultado

```
function [p]=ortogonal(snr_db,M)
%Uso: p=ortogonal(snr_db,M)
%     devuelve la probabilidad de error usando la simulación de
%     Montecarlo
%     para un sistema M-ario con una relacion señal a ruido por
%     bit dada por snr_db
E=1;
SNR=10^(snr_db/10);
sigma=sqrt(E^2/(2*log2(M)*SNR));
N=10000;
R=log2(M);


for j=0:M-1
    code(j+1,1)=(j*1);
end
codea=de2bi(code,R,'left-msb');
[fila,columna]=size(codea);

for i=1:N
    aux=rand(1,1);
    simbolo(i)=floor(M*aux);
    for j=1:columna
        fuente(i,j)=codea((simbolo(i)+1),j);
    end;
end;

error=0;
for i=1:N
    for j=1:M
        r(j)=sigma*randn(1,1);
        if((j-1)==simbolo(i))
            r(j)=r(j)+E;
        end;
    end;
    max_r=max(r(:));
    posicion=strfind(r,max_r);
    for j=1:columna
        decision(1,j)=codea(posicion,j);
    end
    for j=1:columna
    echo on;
        if(fuente(i,j)==decision(j))
            error=error;
        else
            error=error+1;
        end;
    end;
end;
p=error/(R*N);
```

```
%ejercicio4_5.m Script en Matlab que realiza la representacion de
la
%probabilidad de error de bit frenta a 10*log(Eb/No) para un
sistema M-ario
%multidimensional ortogonal

tolerance=1e-7;
minus_inf=-20;
plus_inf=20;
snr_db1=0:1:15;
snr_db2=0:0.001:15;
M_2=2;
M_4=4;
M_16=16;
%Probabilidad de error teorica
for i=1:length(snr_db1)
   SNR(i)=10^(snr_db1(i)/10);
teorica_2(i)=(2/3)*quadl('bdt_int',minus_inf,plus_inf,tolerance,[]
,SNR(i),M_2);
teorica_4(i)=(2/3)*quadl('bdt_int',minus_inf,plus_inf,tolerance,[]
,SNR(i),M_4);
teorica_16(i)=(2/3)*quadl('bdt_int',minus_inf,plus_inf,tolerance,[
],SNR(i),M_16);
   K_2=log2(M_2);
   K_4=log2(M_4);
   K_16=log2(M_16);
   teoricac_2(i)=exp((-K_2*(SNR(i)-(2*log(2)))/2));
   teoricac_4(i)=exp((-K_4*(SNR(i)-(2*log(2)))/2));
   teoricac_16(i)=exp((-K_16*(SNR(i)-(2*log(2)))/2));
end
%probabilidad de error simulada
for i=1:length(snr_db1)
   simulada_2(i) = ortogonal(snr_db1(i),M_2);
   simulada_4(i) = ortogonal(snr_db1(i),M_4);
   simulada_16(i) = ortogonal(snr_db1(i),M_16);
end;
figure(1);
semilogy(snr_db1,simulada_2,'g*',snr_db1,teorica_2,'g');
hold on;
semilogy(snr_db1,simulada_4,'r*',snr_db1,teorica_4,'r');
semilogy(snr_db1,simulada_16,'b*',snr_db1,teorica_16,'b');
legend('M=2','','M=4','','M=16','');
xlabel('10log(Eb/No)');
ylabel('Pe');
axis([0 15 1e-10 1]);
grid on;
figure(2);
semilogy(snr_db1,simulada_2,'g*',snr_db1,teoricac_2,'g');
hold on;
semilogy(snr_db1,simulada_4,'r*',snr_db1,teoricac_4,'r');
semilogy(snr_db1,simulada_16,'b*',snr_db1,teoricac_16,'b');
legend('M=2','','M=4','','M=16','');
xlabel('10log(Eb/No)');
ylabel('Pe');
title('Usamos la cota de error');
grid on;
hold off;
```

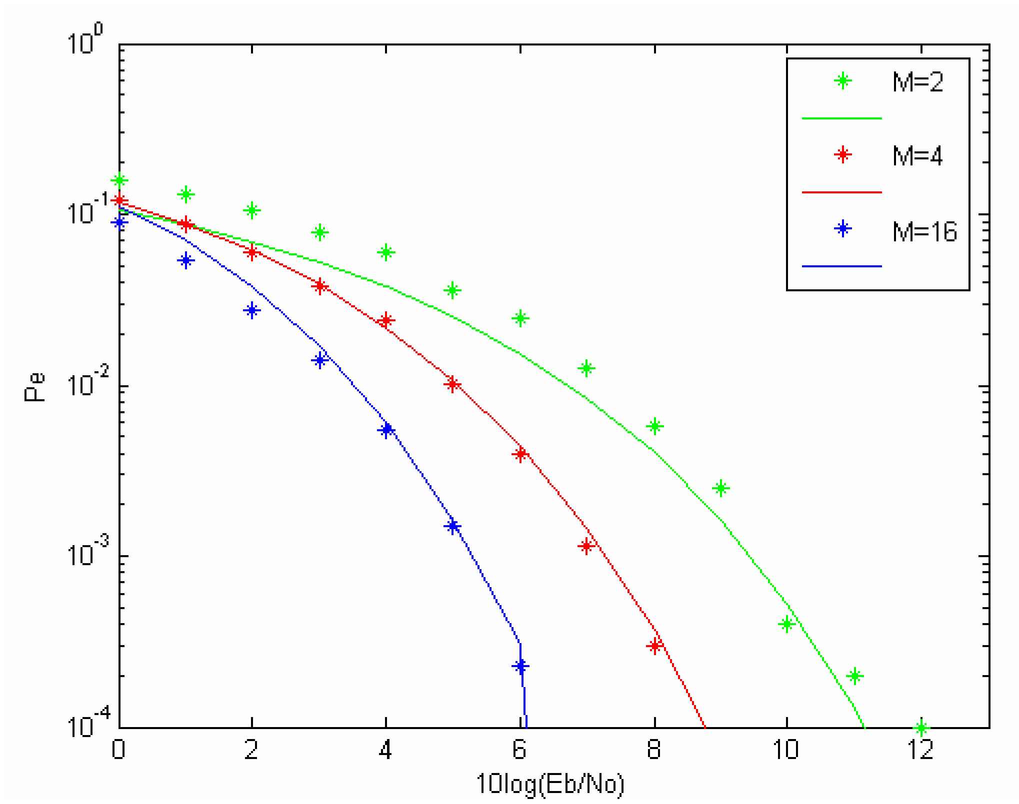


Figura 4.16. Probabilidad de Error vs SNR_bit con simulación Monte carlo comparada con la Probabilidad de error teórica utilizando sistema M-ario con señales Multidimensionales ortogonales banda base para M=16, M=8 y M=2

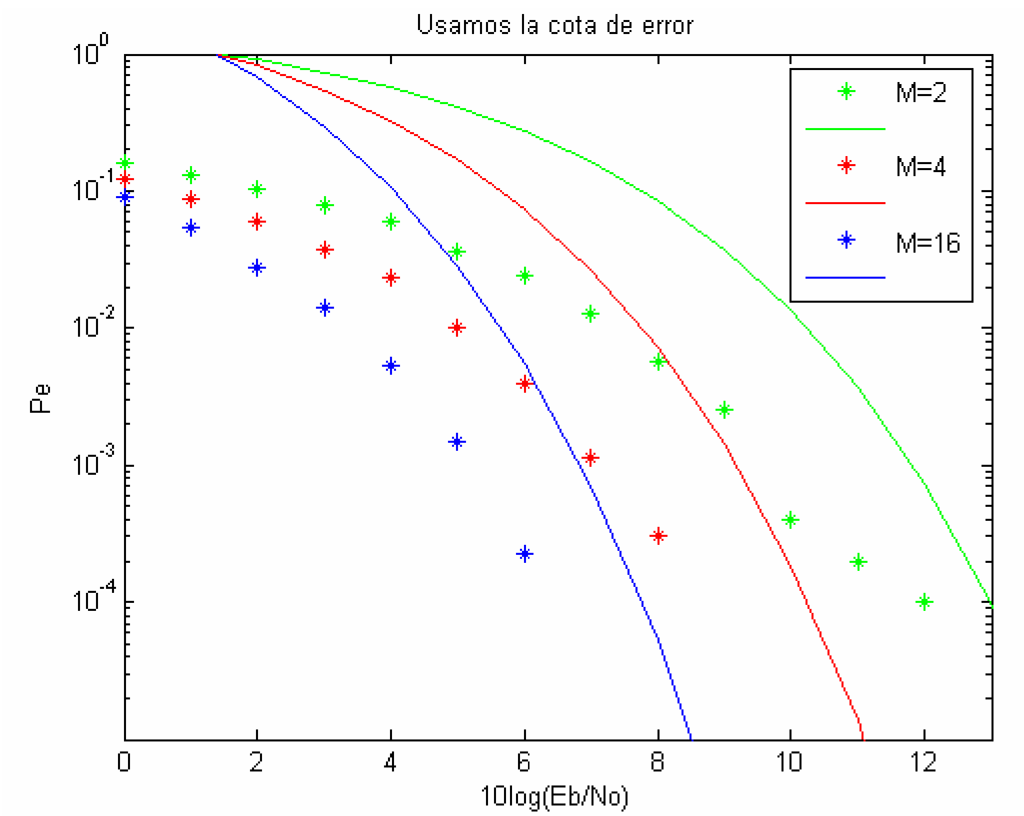


Figura 4.17. Probabilidad de Error vs SNR_bit con simulación Monte carlo comparada con la Probabilidad de error teórica (Usando la Cota de Unión) utilizando sistema M-ario con señales Multidimensionales ortogonales banda base para M=16, M=8 y M=2

4. Conclusiones

4.1. Comparación de las distintas Modulaciones Binarias

Cuando comparamos la probabilidad de error para señales antipodales con las señales ortogonales, observamos, que para una misma energía de señal transmitida E, las señales antipodales resultan tener mejor resultado. Por otra parte, se puede decir que las señales antipodales rinden lo mismo (es decir, dan la misma probabilidad de error) usando la mitad de la energía transmitida que en las señales ortogonales. Con lo cual, las señales antipodales son 3 dB más eficientes que las señales ortogonales.

Observamos que la representación de la tasa de error con señales on-off no es tan buena como con señales antipodales. Parece ser 6 dB peor que con señales antipodales y 3 veces peor que con señales ortogonales. Sin embargo la energía media transmitida para señales on-off es 3 dB menor que para las señales ortogonales y antipodales. Consecuentemente, esta diferencia es un hecho cuando comparamos el comportamiento con los otros tipos de señal.

4.2. Comparación de las distintas Modulaciones M-arias

En la figura 4.14 se muestra la probabilidad de error de símbolo frente a la relación señal a ruido medida en decibelios para una modulación por amplitud de pulsos. En ella podemos observar como para mantener la misma probabilidad de error debemos incrementar la relación señal a ruido (en aproximadamente 4dB) cada vez que se duplica M.

Ocurre lo contrario para el caso de modulaciones ortogonales, si observamos la figura 4.16 en la que se muestra la probabilidad de error de símbolo frente a la relación señal a ruido medida en decibelios para el caso de una modulación ortogonal. Se observa que manteniendo una misma relación señal a ruido podemos reducir la probabilidad de error incrementando M.