Anexo 2.

DESCOMPOSICIÓN RQ

Una rotación de Givens en 3D es una rotación en uno de los tres ejes coordenados. Las tres rotaciones de Givens son

$$Q_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad Q_Y = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \qquad Q_Z = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $c = \cos(\theta)$ y $s = \sin(\theta)$ para algún ángulo θ.

Multiplicar una matriz A por la derecha por (por ejemplo) Q_z tiene el efecto de dejar la última columna de A invariante, y reemplazar las dos primeras columnas por una combinación lineal de las originales. El ángulo θ se puede elegir de modo que cualquier elemento de las dos primeras columnas se convierta en cero.

Por ejemplo, para convertir el elemento A_{21} a cero, se necesita resolver la ecuación $ca_{21} + sa_{22} = 0$. La solución a esto es $c = -a_{22} \big/ \left(a^2_{22} + a^2_{21}\right)^{1/2}$ y $s = a_{21} \big/ \left(a^2_{22} + a^2_{21}\right)^{1/2}$. Se requiere que $c^2 + s^2 = 1$ puesto que $c = \cos(\theta)$ y $s = \sin(\theta)$, y los valores de c y s dados satisfacen esta condición.

La estrategia del algoritmo RQ es eliminar la parte inferior de la matriz de entrada mediante multiplicaciones por las rotaciones de Givens. Considérese la descomposición de una matriz A 3×3 como $A = RQ$ donde R es una matriz triangular superior y Q una matriz de rotación. Esto se puede llevar a cabo en tres pasos. Cada paso consiste en la multiplicación por la derecha por una rotación de Givens para eliminar el elemento elegido de A.

La secuencia de multiplicaciones se puede elegir de modo que no se alteren los elementos que ya han sido convertidos a cero. Una posible implementación de la descomposición RQ es la siguiente:

(i) Multiplicar por Q_x de modo que A_{32} se haga cero.

(ii) Multiplicar por Q_Y de modo que A_{31} se haga cero. Esta multiplicación no cambia la segunda columna de A por lo que A_{32} se mantiene a cero.

(iii) Multiplicar por Q_Z de modo que A_{21} se haga cero. Las primeras dos columnas se reemplazan por una combinación lineal de ellas. Por lo tanto, A_{31} y A_{32} continúan siendo cero.

Como resultado de estas operaciones encontramos que $AQ_xQ_YQ_Z = R$ donde R es triangular superior. En consecuencia, $A = RQ_Z{}^TQ_Y{}^TQ_X{}^T$ y por tanto, $A = RQ$ donde $Q = Q_Z{}^TQ_Y{}^TQ_X{}^T$ es una rotación. Además, los ángulos θ_x, θ_Y y θ_Z proporcionan una parametrización de la rotación de los tres ángulos de Euler, conocidos con los términos ingleses roll, pitch y yaw.