

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

PROYECTO FIN DE CARRERA:

**Modelado y simulación de un sistema
péndulo-muelle.**

Presentado por D. Rafael González Martos
para la obtención del título de Ingeniero Industrial.

Directores del proyecto:

Dr. D. Emilio Freire Macías

Dr. D. Jorge Galán Vioque

Sevilla, Julio 2001

Mientras realizaba este proyecto, mi desconocimiento acerca de determinados temas precipitó en algunos momentos un caso grave de bloqueo mental. Debo por tanto expresar mi gratitud a quienes me concedieron su tiempo y experiencia y me ayudaron a seguir adelante: a mi director de proyecto, Emilio Freire Macías, por su continuo apoyo al buen desarrollo del mismo; a mi codirector Jorge Galán Vioque, por su dedicación y disponibilidad; al profesor Francisco Javier Muñoz Almaraz, por compartir conmigo sus inagotables conocimientos y experiencia acerca del sistema operativo UNIX; al profesor Fernando Fernández Sánchez, por la aportación desinteresada de su programa para realizar secciones de Poincaré y a todas aquellas personas que en una u otra medida han contribuido al desarrollo de este proyecto.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Sistemas autoparamétricos.	1
1.2	Modelo del sistema dinámico péndulo-muelle.	2
1.3	Objetivo del proyecto.	3
2	Ecuaciones del movimiento del sistema péndulo-muelle.	5
2.1	Estudio cinemático del sistema.	5
2.2	Energía cinética y potencial.	6
2.3	Cálculo del Hamiltoniano	7
2.4	Ecuaciones de Hamilton	8
2.5	Adimensionalización de las ecuaciones del movimiento	8
2.5.1	Variables adimensionales	9
2.5.2	Relaciones adimensionales entre los parámetros del sistema	9
2.5.3	Adimensionalización de las ecuaciones.	10
2.5.4	Recapitulación	13
2.6	Comprobación de las ecuaciones adimensionales	14
2.7	Expresión del Hamiltoniano en función de las variables adimensionales	15
2.8	Consideraciones sobre la energía	16
2.9	Propiedades del sistema de ecuaciones diferenciales.	16
3	Linealización de las ecuaciones del sistema péndulo-muelle.	19
3.1	Cálculo de los puntos de equilibrio.	19
3.2	Linealización en torno a la posición de equilibrio inferior.	20
3.2.1	Cálculo de los autovalores.	21
3.2.2	Cálculo de los autovectores.	23
3.3	Linealización en torno a la posición de equilibrio superior.	25
3.3.1	Cálculo de los autovalores.	26
3.3.2	Cálculo de los autovectores.	27
4	Estudio de los parámetros que intervienen en el sistema.	29
4.1	Estudio de las frecuencias naturales obtenidas de la linealización.	29
4.2	Búsqueda de resonancias.	29
4.3	Valores de los parámetros λ y ϵ	32

5	Estudio de las órbitas periódicas para $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.5$.	35
5.1	Continuación numérica de órbitas periódicas.	36
5.1.1	Detección de la bifurcación de Hopf.	36
5.1.2	Continuación de la bifurcación de Hopf.	39
5.1.3	Continuación de la bifurcación BP obtenida en la rama “modo1”.	46
5.1.4	Detección de la bifurcación de duplicación de periodo de la rama “m1r1”.	48
5.1.5	Continuación de la bifurcación PD detectada en la rama “m1r1”.	53
5.1.6	Continuación de la bifurcación PD de la rama “m1r2”.	57
5.1.7	Continuación de la bifurcación PD de la rama “modo1”.	60
5.1.8	Detección y continuación de la rama de órbitas periódicas inestables que emana de la bifurcación PD de la rama “modo1”.	65
5.1.9	Continuación de la bifurcación PD de la rama “m1s1”.	70
5.1.10	Continuación de la bifurcación BP de la rama “m1s2”.	74
5.1.11	Continuación del segundo modo normal.	77
5.1.12	Continuación de la bifurcación BP de la rama “modo2”.	82
5.1.13	Detección de la bifurcación PD de la rama “m2”.	83
5.1.14	Continuación de la bifurcación PD de la rama “m2”.	87
5.1.15	Continuación de la bifurcación PD de la rama “m2r1”.	91
5.2	Secciones de Poincaré.	94
6	Estudio de las órbitas periódicas para $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.05$.	97
6.1	Continuación numérica.	99
6.1.1	Detección de la bifurcación de Hopf.	99
6.1.2	Continuación de la rama “modo2”.	100
6.1.3	Continuación de la bifurcación BP de la rama “modo2”.	104
6.1.4	Continuación de la bifurcación PD de la rama “m2”.	108
6.2	Secciones de Poincaré.	112
7	Conclusiones.	117
A	Programa AUTO	119
A.1	Fichero <i>pm.c</i>	119
B	Secciones de Poincaré.	123
B.1	Condición para la sección de Poincaré.	123
	Bibliografía	125

Capítulo 1

Introducción

El péndulo es uno de los más antiguos objetos de investigación científica. Desde que Galileo Galilei observara en 1581 que, para pequeñas amplitudes, el péndulo describía un movimiento isócrono, han sido muchos los estudios acerca de este elemento.

El movimiento del péndulo es un problema resuelto; se conoce la solución analítica de la ecuación diferencial que rige su movimiento, en función de integrales elípticas. Análogamente ocurre con el problema de la masa suspendida de un muelle. La ecuación diferencial para este caso es perfectamente integrable, resultando como solución la vibración armónica. Sin embargo, el sistema resultante de la combinación de péndulo y muelle presenta como característica la no integrabilidad. Tiene un comportamiento complejo e impredecible al ser muy sensible a cambios en las condiciones iniciales, si bien podemos estudiarlo cualitativamente.

1.1 Sistemas autoparamétricos.

Una de las características más interesantes de algunos sistemas péndulo-muelle de dos grados de libertad, es lo que se conoce como “resonancia autoparamétrica”. Un sistema autoparamétrico es definido por [13] como un sistema vibrante que consiste en, al menos, dos subsistemas. El subsistema primario está generalmente vibrando; puede ser forzado externamente, autoexcitado, paramétricamente excitado o una combinación de ellos. El subsistema secundario suele estar unido al primario de manera no lineal, pero de forma que el secundario pueda estar en reposo mientras el primario está vibrando. Este estado se suele llamar solución semitrivial o solución vibratoria y sirve de partida para obtener otro tipo de soluciones más complejas.

La resonancia autoparamétrica es un fenómeno ubicuo pero generalmente indeseable en la ingeniería que sin embargo puede tener interés en determinadas aplicaciones. Se produce cuando se transfiere energía de un modo de vibración a otro. Esta situación se presenta por ejemplo en barcos situados longitudinalmente a las olas. La energía de excitación de las olas contribuye al movimiento de balance del barco y puede provocar el vuelco.

Una situación similar ocurre en aviones en los que los motores están colgados de las

alas mediante suspensiones elásticas. Las vibraciones verticales de las alas pueden bajo ciertas condiciones iniciar un movimiento vibratorio en los motores, el efecto de saturación puede provocar que estas vibraciones se vuelvan violentas y produzcan la rotura de las suspensiones elásticas.

En algunas ocasiones el efecto de la resonancia paramétrica puede resultar útil, tal es el caso de algunos sistemas mecánicos externamente excitados donde para limitar la amplitud de la vibración se suele añadir a los mismos un subsistema secundario, por ejemplo un péndulo, teniendo como efecto inmediato la transferencia de energía del sistema mecánico principal al subsistema, disminuyendo así la amplitud de la vibración.

Un claro precedente del sistema dinámico objeto de este proyecto, es el caso del péndulo invertido, estudiado en 1908 por Andrew Stephenson. Éste demostró que es posible mantener un péndulo rígido establemente en su posición invertida haciendo vibrar su pivote arriba y abajo a alta frecuencia. Stephenson demostró que la posición invertida era estable si:

$$\omega > \frac{\sqrt{2gl}}{a}$$

Estudios posteriores, véase [1], han demostrado que es posible estabilizar el péndulo invertido con frecuencias menores y amplitudes mayores, apareciendo así, lo que se conoce como regiones de estabilidad del péndulo invertido.

El sistema dinámico estudiado en este proyecto, está inspirado en el clásico problema de control que realiza un malabarista en el circo, cuando trata de mantener una vara en posición invertida realizando movimientos horizontales con la mano hacia delante y hacia atrás. En este caso el malabarista realiza un control en posición y velocidad, acotando el movimiento de la vara a un intervalo cercano al punto de equilibrio superior.

1.2 Modelo del sistema dinámico péndulo-muelle.

Para este proyecto se ha elegido un sistema dinámico formado por un péndulo y un muelle sometido a la acción de la gravedad; se considera el caso autoexcitado en el que el muelle vibra horizontalmente mientras que el péndulo puede girar alrededor de su punto de suspensión que está en uno de los extremos del muelle. La energía que se introduce al sistema es en forma de condiciones iniciales desplazando el muelle o el péndulo de su posición de equilibrio.

En la figura (1.1) puede verse un esquema del sistema péndulo-muelle modelado. Se trata de un muelle horizontal de constante “ k ” y de longitud natural “ L_1 ”. El desplazamiento respecto de su longitud natural viene determinado por la coordenada generalizada “ q_1 ” y en el extremo del muelle hay una masa de valor “ m_1 ” que sólo puede moverse horizontalmente. Sujeta a la masa “ m_1 ”, hay una barra sin masa y de longitud “ L_2 ” en cuyo extremo opuesto hay otra masa de valor “ m_2 ”. Estas dos masas constituyen el péndulo, y el ángulo que mide el giro respecto de la vertical viene dado por la coordenada generalizada “ q_2 ”.

El sistema péndulo-muelle que se va a analizar se separa de los sistemas autoparamétricos en el sentido de que no tiene una solución semitrivial de la que se pueda partir para analizar otros movimientos más complejos. Es decir, no existe una solución en la que el subsistema primario esté vibrando y el secundario no. Solamente hay una situación en la que el sistema se aproxima al caso autoparamétrico, es el caso en el que el péndulo está alineado con el muelle en la posición horizontal; más tarde se verá que esta situación sólo se alcanza en un caso límite, ya que el efecto de la gravedad impide que el péndulo se mantenga estático en esta posición.

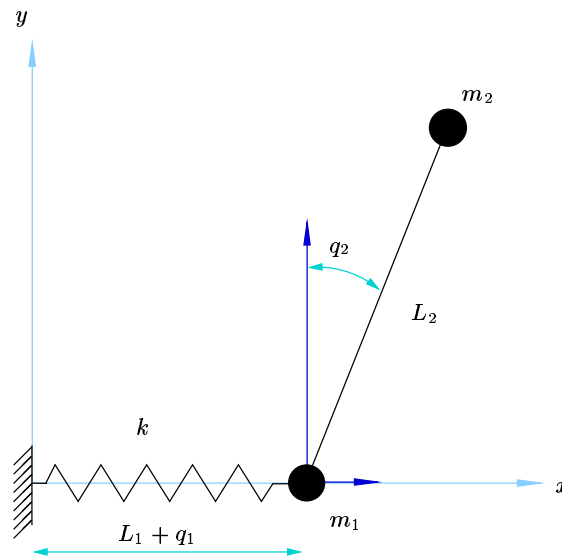


Figura 1.1: Sistema péndulo-muelle.

1.3 Objetivo del proyecto.

El objetivo del proyecto es estudiar las distintas ramas de órbitas periódicas estables que tiene el sistema dinámico y por tanto, conseguir movimientos estables del sistema péndulo-muelle en los que el muelle esté vibrando y el péndulo describiendo movimientos acotados en el espacio de las configuraciones.

Capítulo 2

Ecuaciones del movimiento del sistema péndulo-muelle.

Se ha elegido la formulación hamiltoniana para la determinación de las ecuaciones del movimiento, frente a las leyes de Newton o la formulación de Lagrange, no sólo por la ventaja numérica que supone integrar ecuaciones diferenciales de primer orden, sino también por la información adicional que nos proporciona la función Hamiltoniana, ya que en un sistema autónomo como el que aquí se trata, dicha función permanece constante a lo largo de una trayectoria cualquiera. Esto permite que podamos estudiar un problema de orden cuatro, como un problema de orden tres ya que se conoce una constante del movimiento.

2.1 Estudio cinemático del sistema.

El vector de posición de la masa m_1 , así como su velocidad y el módulo de la misma al cuadrado vienen dados por las expresiones siguientes:

$$\vec{r}_{m_1} = \begin{Bmatrix} L_1 + q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}_{m_1} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad |\dot{\vec{r}}_{m_1}|^2 = \dot{q}_1^2$$

Análogamente para la masa m_2 se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{m_2} &= \begin{Bmatrix} L_1 + q_1 + L_2 \sin q_2 \\ L_2 \cos q_2 \end{Bmatrix} \\ \dot{\vec{r}}_{m_2} &= \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 + L_2 \cos q_2 \dot{q}_2 \\ -L_2 \sin q_2 \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \\ |\dot{\vec{r}}_{m_2}|^2 &= \dot{q}_1^2 + 2 L_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

2.2 Energía cinética y potencial.

Las energías cinéticas de las dos masas del sistema vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} T_{m_1} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 \\ T_{m_2} &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 + 2 L_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + L_2^2 \dot{q}_2^2) \end{aligned}$$

La energía potencial del sistema viene dada por la energía potencial elástica del muelle y por la gravitacional de las dos masas, cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} V_{m_1} &= 0 \\ V_{m_2} &= m_2 g L_2 \cos q_2 \\ V_k &= \frac{1}{2} k q_1^2 \end{aligned}$$

La energía cinética y potencial del sistema viene dada por las siguientes expresiones:

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + 2 m_2 L_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2] \quad (2.1)$$

$$U = m_2 g L_2 \cos q_2 + \frac{1}{2} k q_1^2 \quad (2.2)$$

Observando la forma cuadrática dada por la expresión (2.1), se puede expresar la energía cinética en forma matricial de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{q}}^t$$

Donde $\dot{\mathbf{q}}$ es un vector cuyas componentes son las velocidades generalizadas $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$, y donde la matriz $\mathbf{Q}$ y su inversa tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 L_2 \cos q_2 \\ m_2 L_2 \cos q_2 & m_2 L_2^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} m_2 L_2^2 & -m_2 L_2 \cos q_2 \\ -m_2 L_2 \cos q_2 & m_1 + m_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Siendo Δ el determinante de la matriz $\mathbf{Q}$ y cuya expresión es:

$$\Delta = m_1 m_2 L_2^2 + m_2^2 L_2^2 \sin^2 q_2 \quad (2.4)$$

La identificación de la forma cuadrática dada por la energía cinética simplifica enormemente el cálculo del Hamiltoniano. En la siguiente sección se vera con todo detalle el cálculo, pero la idea que subyace es separar la parte que depende de las coordenadas generalizadas de la parte que depende de las velocidades generalizadas.

2.3 Cálculo del Hamiltoniano

El Hamiltoniano puede expresarse en función de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 , de los momentos generalizados p_1 y p_2 y de la energía cinética y potencial del sistema T y U de la siguiente manera:

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

Siendo $L(q_i, \dot{q}_i)$ la función Lagrangiana cuyo valor es:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$

Conviene puntualizar en este momento que, en un caso más general, tanto la función Hamiltoniana como la Lagrangiana dependerían también del tiempo, sin embargo, al tratarse de un sistema autónomo no se ha considerado esta dependencia de forma explícita en el desarrollo teórico. Recordando las expresiones de la energía cinética y potencial:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2) \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ U &= U(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Los momentos generalizados vienen dados por la expresión siguiente:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión del Hamiltoniano se tiene:

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &= \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) = (p_1 \quad p_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - T + U = \\ &= (p_1 \quad p_2) \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (p_1 \quad p_2) (\mathbf{Q}^{-1})^t \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U \end{aligned}$$

Como la matriz $\mathbf{Q}^{-1}$ es simétrica su traspuesta coincide con ella misma, es decir, $(\mathbf{Q}^{-1})^t = \mathbf{Q}^{-1}$, con lo que el Hamiltoniano queda de la siguiente manera:

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2} (p_1 \quad p_2) \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U \quad (2.5)$$

Tanto la matriz $\mathbf{Q}$ como la expresión de la energía potencial, dependen exclusivamente de las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 . Sustituyendo ahora la matriz $\mathbf{Q}^{-1}$ en la expresión (2.5) del Hamiltoniano queda:

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2\Delta} (p_1 \quad p_2) \begin{pmatrix} m_2 L_2^2 & -m_2 L_2 \cos q_2 \\ -m_2 L_2 \cos q_2 & m_1 + m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U \quad (2.6)$$

Desarrollando la expresión (2.6) se llega a la forma definitiva del Hamiltoniano que viene dada por la siguiente expresion:

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2\Delta} (m_2 L_2^2 p_1^2 - 2 m_2 L_2 \cos q_2 p_1 p_2 + (m_1 + m_2) p_2^2) + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g L_2 \cos q_2 \quad (2.7)$$

Donde: $\Delta = m_1 m_2 L_2^2 + m_2^2 L_2^2 \sin^2 q_2$

2.4 Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones del movimiento vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.8) la expresión del Hamiltoniano dada por (2.7) y operando se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{L_2 p_1 - \cos q_2 p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) L_2} \\ \dot{q}_2 &= \frac{-m_2 L_2 \cos q_2 p_1 + (m_1 + m_2) p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) m_2 L_2^2} \\ \dot{p}_1 &= -k q_1 \\ \dot{p}_2 &= \frac{\sin q_2 \cos q_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2)^2 L_2^2} (m_2 L_2^2 p_1^2 - 2 m_2 L_2 \cos q_2 p_1 p_2 + (m_1 + m_2) p_2^2) - \\ &\quad - \frac{\sin q_2 p_1 p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) L_2} + m_2 g L_2 \sin q_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.5 Adimensionalización de las ecuaciones del movimiento

En el sistema dinámico (2.9) de dos grados de libertad que se está analizando, intervienen seis parámetros: m_1 , m_2 , L_1 , L_2 , k y g . Sin embargo, no todos ellos influyen en el problema por si mismos de manera independiente, sino que lo hacen formando parte de algún grupo funcional. Al aplicar la técnica de la adimensionalización se consigue que los parámetros aparezcan en las ecuaciones formando grupos, reduciendo así el número de parámetros significativos del problema.

2.5.1 Variables adimensionales

Las variables adimensionales se definen a partir de las variables dimensionales, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{q_1}{a} \\ Q_2 &= \frac{q_2}{b} \\ P_1 &= \frac{p_1}{c} \\ P_2 &= \frac{p_2}{d} \\ \tau &= \frac{t}{t_0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.5.2 Relaciones adimensionales entre los parámetros del sistema

Antes de sustituir las variables adimensionales (2.10) en las ecuaciones del movimiento (2.9), conviene definir una serie de relaciones adimensionales entre los parámetros del sistema.

- λ : este parámetro adimensional expresa una relación entre las masas del sistema de la forma siguiente:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Esta relación de masas permite acotar claramente los valores del parámetro λ :

$$0 < \lambda < 1$$

- Cuando $\lambda = 0$, la masa m_2 es nula y por tanto lo que se tiene es un sistema masa-muelle de un grado de libertad.
- Cuando $\lambda = 1$, la masa m_1 es nula y lo que se tiene entonces es un problema mal definido.

Esta relación permite además simplificar un término que aparece frecuentemente en el denominador de las ecuaciones:

$$m_1 + m_2 \sin^2 q_2 = (m_1 + m_2) \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 q_2\right) = (m_1 + m_2) (1 - \lambda \cos^2 q_2)$$

- ω_m : este término representa la frecuencia natural de un sistema masa-muelle siendo la constante del muelle " k " y la masa " $m_1 + m_2$ ".

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

- ω_p : este término representa la frecuencia natural de un péndulo con una masa colgada al final de dicho péndulo de valor " m_2 ".

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L_2}}$$

Estos dos últimos parámetros no se manifestaran en las fórmulas explícitamente, lo harán de forma acoplada, ya que ni tenemos un péndulo sólo, ni un sistema masa-muelle aislado, sino una combinación de ambos. En realidad estos dos últimos parámetros han sido definidos para simplificar en alguna medida las relaciones paramétricas que aparecerán más tarde.

2.5.3 Adimensionalización de las ecuaciones.

A continuación se sustituyen las variables adimensionales (2.10) en cada una de las ecuaciones (2.9) y operando se llega a:

Primera ecuación

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{L_2 p_1 - \cos q_2 p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) L_2} \\ \frac{a}{t_0} \frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{L_2 c P_1 - \cos Q_2 d P_2}{(m_1 + m_2)(1 - \lambda \cos^2 Q_2) L_2} \\ \frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{1}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \left(\frac{t_0 c}{a(m_1 + m_2)} P_1 - \frac{t_0 d}{a(m_1 + m_2) L_2} P_2 \cos Q_2 \right)\end{aligned}$$

Si se impone como condición que los dos grupos dimensionales valgan la unidad, se obtiene una primera ecuación adimensional. Como se tienen cinco parámetros para adimensionalizar las variables a , b , c , d y t_0 se podrán imponer cinco condiciones del tipo de la anterior, para adimensionalizar las ecuaciones, los restantes grupos dimensionales valdrán la unidad sin necesidad de imponerlo como condición, bastará con utilizar las relaciones anteriores y operar. En realidad ya se ha utilizado una condición sin haberla indicado explícitamente, y que es $b = 1$, por otra parte lógico, ya que la variable q_2 , es una variable angular. En resumen, se obtiene:

$$\boxed{\frac{dQ_1}{d\tau} = \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2}} \quad (2.11)$$

$$\frac{t_0 c}{a(m_1 + m_2)} = 1 \quad (2.12)$$

$$\frac{t_0 d}{a(m_1 + m_2) L_2} = 1 \quad (2.13)$$

Segunda ecuación

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= \frac{-m_2 L_2 \cos q_2 p_1 + (m_1 + m_2) p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) m_2 L_2^2} \\ \frac{1}{t_0} \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{1}{(m_1 + m_2)(1 - \lambda \cos^2 Q_2)} \left(-\frac{m_2 L_2 c}{m_2 L_2^2} P_1 \cos Q_2 + \frac{(m_1 + m_2) d}{m_2 L_2^2} P_2 \right) \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{1}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \left(-\frac{t_0 c}{(m_1 + m_2) L_2} P_1 \cos Q_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{t_0 d}{(m_1 + m_2) L_2^2} P_2 \right)\end{aligned}$$

Observando las relaciones dimensionales (2.12) y (2.13) y sin más que realizar un simple despeje de variables se llega a:

$$\frac{t_0 c}{(m_1 + m_2)} = a$$

$$\frac{t_0 d}{(m_1 + m_2) L_2^2} = \frac{a}{L_2}$$

Sustituyendo las relaciones dimensionales anteriores en la última ecuación se obtiene:

$$\frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{1}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \left(-\frac{a}{L_2} P_1 \cos Q_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{a}{L_2} P_2 \right)$$

$$\frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{1}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \frac{a}{L_2} \left(-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda} \right)$$

Se obtiene la segunda ecuación y una cuarta relación dimensional:

$$\boxed{\frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2}} \quad (2.14)$$

$$\frac{a}{L_2} = 1 \quad (2.15)$$

Tercera ecuación

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -k a q_1 \\ \frac{c}{t_0} \frac{dP_1}{d\tau} &= -k a Q_1 \\ \frac{dP_1}{d\tau} &= -\frac{k a t_0}{c} Q_1 \end{aligned}$$

Se obtiene la tercera ecuación y la quinta relación dimensional:

$$\boxed{\frac{dP_1}{d\tau} = -Q_1} \quad (2.16)$$

$$\frac{k a t_0}{c} = 1 \quad (2.17)$$

Cuarta ecuación

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 &= -\frac{\sin q_2 p_1 p_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2) L_2} + \\ &+ \frac{\sin q_2 \cos q_2}{(m_1 + m_2 \sin^2 q_2)^2 L_2^2} (m_2 L_2^2 p_1^2 - 2 m_2 L_2 \cos q_2 p_1 p_2 + (m_1 + m_2) p_2^2) + \\ &+ m_2 g L_2 \sin q_2 \\ \frac{dP_2}{d\tau} &= -\frac{d t_0 c}{d (m_1 + m_2) L_2} \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \\ &+ \frac{m_2 t_0}{d (m_1 + m_2)^2 L_2^2} \frac{\sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(L_2^2 c^2 P_1^2 - 2 L_2 c d \cos Q_2 P_1 P_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} d^2 P_2^2 \right) + \\ &+ \frac{m_2 g L_2 t_0}{d} \sin Q_2 \end{aligned}$$

Observando las relaciones dimensionales (2.12) y (2.13) se ve que entre ellas existe la relación:

$$c = \frac{d}{L_2}$$

Haciendo uso de esta relación en el paréntesis de la última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{d\tau} = & -\frac{t_0 c}{(m_1 + m_2) L_2} \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \\ & + \frac{m_2 t_0}{d (m_1 + m_2)^2 L_2^2} \frac{\sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} d^2 \left(P_1^2 - 2 \cos Q_2 P_1 P_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} P_2^2 \right) + \\ & + \frac{m_2 g L_2 t_0}{d} \sin Q_2 \end{aligned}$$

Utilizando la relación λ que existe entre las masas:

$$\begin{aligned} \frac{dP_2}{d\tau} = & -\frac{t_0 c}{(m_1 + m_2) L_2} \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \\ & + \frac{t_0 d}{(m_1 + m_2) L_2^2} \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 \cos Q_2 P_1 P_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) + \\ & + \frac{m_2 g L_2 t_0}{d} \sin Q_2 \end{aligned}$$

Utilizando la relación (2.15), es decir $a = L_2$, junto con las relaciones (2.12) y (2.13), se observa que los dos primeros grupos dimensionales son iguales a la unidad:

$$\begin{aligned} \frac{t_0 c}{(m_1 + m_2) L_2} &= \frac{t_0 c}{(m_1 + m_2) a} = 1 \\ \frac{t_0 d}{(m_1 + m_2) L_2^2} &= \frac{t_0 d}{(m_1 + m_2) a L_2} = 1 \end{aligned}$$

El tercer grupo dimensional se transforma, usando la relación (2.17), de la siguiente manera:

$$\frac{m_2 g L_2 t_0}{d} = \frac{m_2 g}{k L_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(m_1 + m_2) g}{k L_2} = \lambda \epsilon^2$$

Siendo λ y ϵ :

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) g}{k L_2}}$$

Por tanto la cuarta ecuación queda de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dP_2}{d\tau} = & -\frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \\ & + \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) + \\ & + \lambda \epsilon^2 \sin Q_2 \end{aligned}} \quad (2.18)$$

2.5.4 Recapitulación

Los coeficientes de adimensionalización quedan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} a &= L_2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Despejando de la relación (2.12) y sustituyendo en la relación (2.17) se tiene:

$$\frac{t_0 c}{a (m_1 + m_2)} = 1 \implies c = \frac{(m_1 + m_2) L_2}{t_0}$$

$$\frac{k a t_0}{c} = 1 \implies \frac{k L_2 t_0}{c} = 1 \implies \frac{k L_2 t_0}{\frac{(m_1 + m_2) L_2}{t_0}} = 1 \implies t_0 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

Sin más que sustituir en las relaciones (2.12), (2.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} c &= k L_2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \frac{k L_2}{\omega_m} \\ d &= k L_2^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \frac{k L_2^2}{\omega_m} \\ t_0 &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \frac{1}{\omega_m} \end{aligned}$$

Las variables adimensionales quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_1 &= L_2 Q_1 \\ q_2 &= Q_2 \\ p_1 &= \frac{k L_2}{\omega_m} P_1 \\ p_2 &= \frac{k L_2^2}{\omega_m} P_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Los seis parámetros de los que consta el sistema, m_1 , m_2 , L_1 , L_2 , k y g , se manifiestan tras la adimensionalización en forma de dos grupos dimensionales:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} & \lambda &\in (0, 1) \\ \epsilon &= \frac{\omega_p}{\omega_m} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) g}{k L_2}} & \epsilon &\in [0, \infty) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Las cuatro ecuaciones quedan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\
 \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\
 \frac{dP_1}{d\tau} &= -Q_1 \\
 \frac{dP_2}{d\tau} &= \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) - \\
 &\quad - \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \lambda \epsilon^2 \sin Q_2
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.6 Comprobación de las ecuaciones adimensionales

Para comprobar las ecuaciones adimensionales, se sustituyen los cambios de variables (2.19) en la expresión del Hamiltoniano y se deducen de nuevo las ecuaciones diferenciales del movimiento.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{m_2 L_2^2 p_1^2 - 2 m_2 L_2 p_1 p_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) p_2^2}{2 m_2 L_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2 q_2)} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k q_1^2 + m_2 g L_2 \cos q_2 \\
 H &= \frac{m_2 L_2^2 \frac{k^2 L_2^2}{\omega_m^2} P_1^2 - 2 m_2 L_2 \frac{k^2 L_2^3}{\omega_m^2} P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_2} m_2 \frac{k^2 L_2^4}{\omega_m^2} P_2^2}{2 m_2 L_2^2 (m_1 + m_2) (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k L_2^2 Q_1^2 + m_2 g L_2 \cos Q_2 \\
 H &= \frac{m_2 L_2^4 k^2}{2 \omega_m^2 m_2 L_2^2 (m_1 + m_2) (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k L_2^2 Q_1^2 + m_2 g L_2 \cos Q_2 \\
 H &= k L_2^2 \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + k L_2^2 \frac{1}{2} Q_1^2 + k L_2^2 \frac{m_2 g}{k L_2} \cos Q_2
 \end{aligned}$$

Se puede adimensionalizar el Hamiltoniano, si se divide toda la expresión anterior entre el término $k L_2^2$.

$$\hat{H} = \frac{H}{k L_2^2} = \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \frac{1}{2} Q_1^2 + \lambda \epsilon^2 \cos Q_2 \tag{2.22}$$

A continuación se van a deducir de nuevo las ecuaciones de Hamilton, pero esta vez se partirá del Hamiltoniano adimensional, para lo cual habrá que usar una versión

adimensional de la formulación Hamiltoniana.

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \Rightarrow \frac{L_2}{t_0} \frac{dQ_1}{d\tau} = \frac{k L_2^2}{k L_2 / \omega_m} \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_1} \Rightarrow \frac{dQ_1}{d\tau} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_1} \\
\dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \Rightarrow \frac{1}{t_0} \frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{k L_2^2}{k L_2^2 / \omega_m} \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_2} \Rightarrow \frac{dQ_2}{d\tau} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_2} \\
\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow \frac{k L_2}{\omega_m t_0} \frac{dP_1}{d\tau} = -\frac{k L_2^2}{L_2} \frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_1} \Rightarrow \frac{dP_1}{d\tau} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_1} \\
\dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \Rightarrow \frac{k L_2^2}{\omega_m t_0} \frac{dP_2}{d\tau} = -k L_2^2 \frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_2} \Rightarrow \frac{dP_2}{d\tau} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_2}
\end{aligned}$$

Sin más que sustituir el Hamiltoniano adimensional en la nueva versión de las ecuaciones de Hamilton, se obtienen las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_1} = \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\
\frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_2} = \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\
\frac{dP_1}{d\tau} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_1} = -Q_1 \\
\frac{dP_2}{d\tau} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_2} = \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) - \\
&\quad - \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \lambda \epsilon^2 \sin Q_2
\end{aligned}$$

2.7 Expresión del Hamiltoniano en función de las variables adimensionales

Se puede escribir una expresión del Hamiltoniano en función de las variables adimensionales actuando de manera inversa, es decir, partiendo de las ecuaciones diferenciales (2.21) e integrándolas para obtener el Hamiltoniano. Haciéndolo así, se obtiene la expresión (2.22) del Hamiltoniano definida, salvo una constante. Esta constante se puede determinar, eligiendo un origen para el Hamiltoniano, este origen se toma por comodidad en el equilibrio inferior. El valor del Hamiltoniano en la posición inferior es:

$$\hat{H}(Q_1 = 0, Q_2 = \pi, P_1 = 0, P_2 = 0) = -\lambda \epsilon^2$$

Sumándole a la expresión del Hamiltoniano dada por (2.22) la cantidad " $\lambda \epsilon^2$ " logramos que se anule en la posición inferior. La expresión definitiva queda como:

$$\hat{H} = \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \frac{1}{2} Q_1^2 + \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) \quad (2.23)$$

Evidentemente las expresiones de las ecuaciones diferenciales que se deducen de esta expresión del Hamiltoniano son las mismas que las que se deducen de la expresión (2.22), ya que la adición de una constante no altera la forma de dichas ecuaciones.

2.8 Consideraciones sobre la energía

El nivel de energía, o lo que es lo mismo, el valor del Hamiltoniano, permanece constante a lo largo de una trayectoria. Si se tiene el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

Se puede calcular la variación de $H(\mathbf{x}(t))$ con el tiempo mientras evoluciona por una trayectoria, de la siguiente manera:

$$\frac{dH(\mathbf{x}(t))}{dt} = \nabla H \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$$

De la formulación Hamiltoniana se tenía:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \end{pmatrix} = J \cdot \nabla H$$

Sustituyendo en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{dH(\mathbf{x}(t))}{dt} = \nabla H \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \nabla H \cdot J \cdot \nabla H = 0$$

Expresión que pone de manifiesto la constancia de la energía a lo largo de una trayectoria, algo lógico por otra parte, ya que se ha despreciado el efecto de la disipación en el modelo teórico desarrollado.

2.9 Propiedades del sistema de ecuaciones diferenciales.

Dado un sistema dinámico de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

Se dice que el sistema es **simétrico** si dada una simetría S , se cumple:

$$\mathbf{f}(S\mathbf{x}) = S\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Siendo S una matriz $n \times n$, tal que $S^2 = I$.

Si $\varphi(t)$ es solución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, se puede ver que $S\varphi(t)$ también es solución del sistema:

$$S\varphi(t) = \mathbf{h}(t) \implies \dot{\mathbf{h}}(t) = S\dot{\varphi}(t) = S\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(S\varphi(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{h}(t))$$

Una solución $\varphi(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, se dice que es **simétrica**, si se cumple:

$$S \varphi(t) = \varphi(t)$$

Una solución $\varphi(t)$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, se dice que tiene **simetría espacio-temporal** si se cumple que:

$$S \varphi(t) = \varphi(t + K)$$

Se dice que un sistema dinámico de la forma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ es **reversible** si dada R se cumple:

$$Rf(\mathbf{x}) = -f(R\mathbf{x})$$

o equivalentemente:

$$-f(\mathbf{x}) = Rf(R\mathbf{x})$$

Siendo R una matriz $n \times n$, tal que $R^2 = I$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (2.24), goza de estas dos propiedades fundamentales.

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\ \frac{dP_1}{d\tau} &= -Q_1 \\ \frac{dP_2}{d\tau} &= \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \lambda \epsilon^2 \sin Q_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

La función hamiltoniana (2.25) posee también estas dos propiedades.

$$\hat{H} = \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \frac{1}{2} Q_1^2 + \lambda \epsilon^2 \cos Q_2 \quad (2.25)$$

Efectivamente, goza de **simetría** ya que si se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} Q_1 &\rightarrow -Q_1 \\ Q_2 &\rightarrow 2\pi - Q_2 \\ P_1 &\rightarrow -P_1 \\ P_2 &\rightarrow -P_2 \end{aligned}$$

las ecuaciones no varían.

Goza también de reversibilidad llamada **natural** ya que si se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow -P_1 \\ P_2 &\rightarrow -P_2 \\ \tau &\rightarrow -\tau \end{aligned}$$

las ecuaciones tampoco varían.

La presencia de simetrías en las ecuaciones simplifica el estudio de las mismas y se puede aprovechar para clasificar las familias de soluciones y el comportamiento de las bifurcaciones.

Capítulo 3

Linealización de las ecuaciones del sistema péndulo-muelle.

En el capítulo anterior se calcularon las cuatro ecuaciones diferenciales, que determinan el movimiento del sistema péndulo-muelle que se está analizando. En este capítulo se linealizarán dichas ecuaciones en torno a sus puntos de equilibrio para tratar de extraerle al sistema toda la información que sea posible. Este capítulo se divide, por tanto, en dos partes bien diferenciadas, por un lado se calcularán los puntos de equilibrio del sistema y por otro se linealizará el sistema en torno a dichos puntos. Los equilibrios sirven como punto de partida para los métodos numéricos de continuación, y la información obtenida de la linealización sirve para obtener una idea aproximada del comportamiento del sistema cerca de dichos equilibrios.

3.1 Cálculo de los puntos de equilibrio.

Dado un sistema de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, los puntos de equilibrio cumplen:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

El equilibrio en el sistema que se está tratando viene dado por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{dQ_1}{d\tau} = 0 \\ \dot{Q}_2 &= \frac{dQ_2}{d\tau} = 0 \\ \dot{P}_1 &= \frac{dP_1}{d\tau} = 0 \\ \dot{P}_2 &= \frac{dP_2}{d\tau} = 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

A continuación se recuerda la relación que existía entre las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados y entre las variables dimensionales y adimensionales:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \frac{k L_2}{\omega_m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{t_0} \begin{pmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \mathbf{A} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Una vez recordada las relaciones anteriores, se puede aplicar la condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P_1 = P_2 = 0} \\ \dot{Q}_1 = 0 &\Rightarrow \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} = 0 \\ \dot{Q}_2 = 0 &\Rightarrow \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} = 0 \\ \dot{P}_1 = 0 &\Rightarrow -Q_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = 0} \\ \dot{P}_2 = 0 &\Rightarrow \lambda \epsilon^2 \sin Q_2 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_2 = 0 + n\pi}\end{aligned}$$

Existen por tanto dos puntos de equilibrio, uno con el péndulo en la posición inferior y el otro con el péndulo en la posición superior, en ambas posiciones el muelle se encuentra en reposo, es decir con $Q_1 = 0$. Ambas posiciones de equilibrio se representan en las figuras (3.2) y (3.1).

3.2 Linealización en torno a la posición de equilibrio inferior.

Linealizar las ecuaciones no es más que aplicar el teorema de Taylor en torno al punto o puntos deseados, en este caso en torno a:

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = \pi \quad P_1 = 0 \quad P_2 = 0$$

Para evitar linealizar en torno a un punto que no sea el "0" se va a hacer el cambio de variable siguiente:

$$Q_2 - \pi = -Q_2^* \quad \dot{Q}_2 = -\dot{Q}_2^*$$

Después de linealizar, las ecuaciones quedan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{1 - \lambda} P_1 + \frac{1}{1 - \lambda} P_2 \\ \dot{Q}_2^* &= -\frac{1}{1 - \lambda} P_1 - \frac{1}{\lambda(1 - \lambda)} P_2 \\ \dot{P}_1 &= -Q_1 \\ \dot{P}_2 &= \lambda \epsilon^2 Q_2^*\end{aligned} \tag{3.2}$$

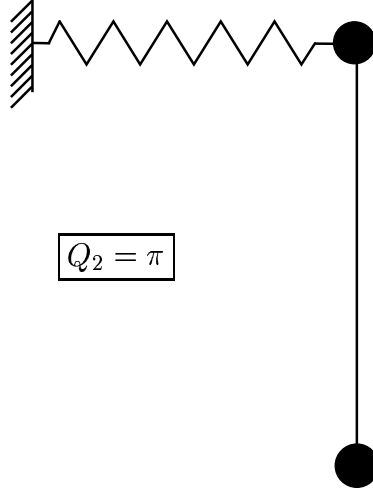


Figura 3.1: Posición de equilibrio inferior.

Que en forma matricial pueden expresarse:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2^* \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1-\lambda}{\lambda} & \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \epsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2^* \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Una vez linealizadas las ecuaciones, el siguiente paso será calcular los dos modos normales en la zona lineal, cerca del equilibrio inferior. Esto no consiste más que en realizar un simple cálculo de autovalores y autovectores que se detalla a continuación.

3.2.1 Cálculo de los autovalores.

La matriz jacobiana del sistema linealizado tiene la siguiente distribución por bloques:

$$\mathbf{J}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Sea Ω autovalor de $\mathbf{J}_d$ y sea $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ el autovector asociado, entonces:

$$\mathbf{J}_d \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{v} = \Omega\mathbf{u} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega\mathbf{v} \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{B}\mathbf{u} \implies \mathbf{A} \frac{1}{\Omega} \mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega\mathbf{u} \implies \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega^2\mathbf{u}$$

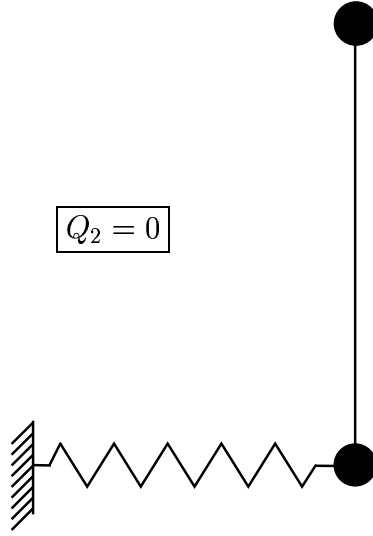


Figura 3.2: Posición de equilibrio superior.

Por tanto si Ω es autovalor de $\mathbf{J}_d$ entonces Ω^2 es autovalor de $\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & \frac{1}{1-\lambda} \\ \frac{-1}{1-\lambda} & \frac{-1}{\lambda(1-\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} & \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-\epsilon^2}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{AB} - \Omega^2 \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega^2 & \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el polinomio característico, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\ \Omega_2^2 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \end{aligned}$$

Se obtienen por tanto dos parejas de autovalores complejos conjugados, con parte real nula:

$$\begin{aligned} \Omega_1^\pm &= \pm i \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}}} \\ \Omega_2^\pm &= \pm i \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}}} \end{aligned}$$

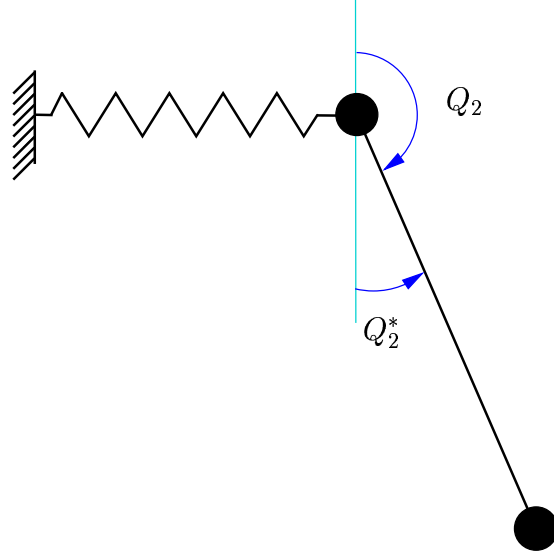


Figura 3.3: Cambio de variable para linealizar en torno a la posición de equilibrio inferior. Se realiza el cambio $Q_2^* = \pi - Q_2$.

El punto inferior de equilibrio es por tanto estable, aunque no asintóticamente estable, como corresponde a un sistema Hamiltoniano, y estará rodeado de soluciones periódicas con dos frecuencias $(|\Omega_1|, |\Omega_2|)$.

3.2.2 Cálculo de los autovectores.

Para el **primer modo** Ω_1 , se tiene:

$$(\mathbf{AB} - \Omega_1^2 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega_1^2 & \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2^* \end{pmatrix} = 0$$

Como las dos ecuaciones son linealmente dependientes, se despeja una cualquiera:

$$-\left(\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_1^2\right) Q_1 + \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} Q_2^* = 0 \Rightarrow Q_2^* = \frac{\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_1^2}{\frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda}} Q_1$$

Analizando la forma de la última ecuación obtenida, se puede obtener información sobre la forma de moverse del sistema, concretamente del primer modo.

A continuación se estudia el signo del coeficiente de la variable Q_1 ; el denominador

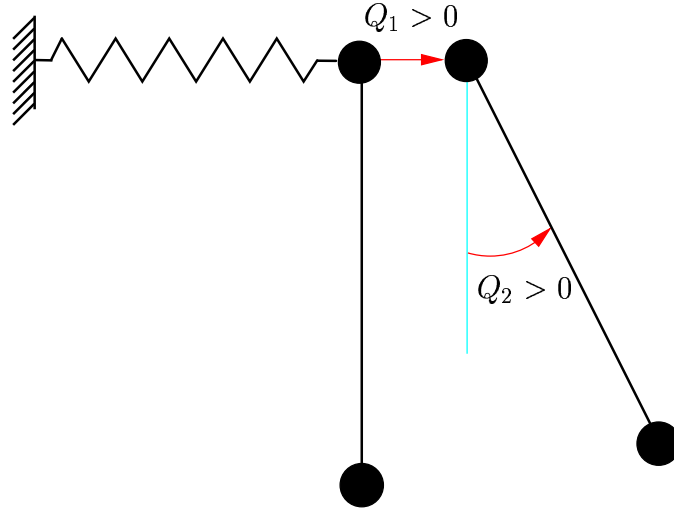


Figura 3.4: Primer modo normal.

siempre es positivo, luego sólo se tendrá en cuenta el numerador:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-\lambda} + \Omega_1^2 &= \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\lambda\epsilon^2}{(1-\lambda)^2}} > 0
 \end{aligned}$$

Como $\lambda < 1$, el coeficiente de Q_1 siempre es positivo y por tanto la variable angular y la lineal tienen el mismo signo.

En la figura (3.4) puede verse gráficamente la forma del primer modo.

Para el **segundo modo** Ω_2 , se tiene:

$$(\mathbf{AB} - \Omega_2^2 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega_2^2 & \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2^* \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Como las dos ecuaciones son linealmente dependientes, se despeja una cualquiera:

$$-\left(\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_2^2\right) Q_1 + \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} Q_2^* = 0 \Rightarrow Q_2^* = \frac{\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_2^2}{\frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda}} Q_1$$

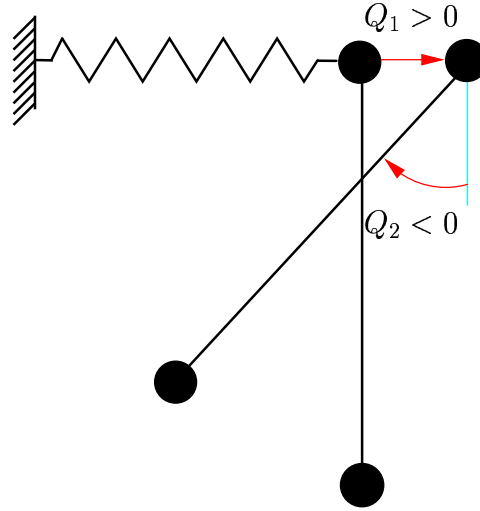


Figura 3.5: Segundo modo normal.

Nuevamente se va a analizar el signo del coeficiente de Q_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-\lambda} + \Omega_2^2 &= \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\lambda\epsilon^2}{(1-\lambda)^2}} < 0
 \end{aligned}$$

Al ser el coeficiente negativo, las dos magnitudes tienen signos diferentes. En la figura (3.5) se muestra la forma del segundo modo normal.

3.3 Linealización en torno a la posición de equilibrio superior.

Ahora se aplica el teorema de Taylor en torno al punto:

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad P_1 = 0 \quad P_2 = 0$$

Tras linealizar las ecuaciones quedan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= \frac{1}{1-\lambda} P_1 - \frac{1}{1-\lambda} P_2 \\
 \dot{Q}_2 &= -\frac{1}{1-\lambda} P_1 + \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} P_2 \\
 \dot{P}_1 &= -Q_1 \\
 \dot{P}_2 &= \lambda\epsilon^2 Q_2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Y en forma matricial quedan:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-1}{1-\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1-\lambda} & \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

A continuación se realiza el cálculo de autovalores y autovectores para determinar los modos normales.

3.3.1 Cálculo de los autovalores.

La matriz jacobiana del sistema linealizado tiene la siguiente distribución por bloques:

$$\mathbf{J}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Sea Ω autovalor de $\mathbf{J}_u$ y sea $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ el autovector asociado, entonces:

$$\mathbf{J}_u \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{v} = \Omega\mathbf{u} \\ \mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega\mathbf{v} \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\Omega}\mathbf{B}\mathbf{u} \implies \mathbf{A}\frac{1}{\Omega}\mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega\mathbf{u} \implies \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} = \Omega^2\mathbf{u}$$

Por tanto si Ω es autovalor de $\mathbf{J}_u$ entonces Ω^2 es autovalor de $\mathbf{A}\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & \frac{-1}{1-\lambda} \\ \frac{-1}{1-\lambda} & \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} & \frac{-\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}\mathbf{B} - \Omega^2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega^2 & \frac{-\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el polinomio característico, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= -\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\ \Omega_2^2 &= -\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \end{aligned}$$

Se obtienen por tanto una pareja de autovalores reales y una parejas de autovalores complejos conjugados, con parte real nula:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \pm \sqrt{-\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}}} \\ \Omega_2 &= \pm \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}}} i\end{aligned}$$

3.3.2 Cálculo de los autovectores.

Para el **primer modo** Ω_1 , se tiene:

$$(\mathbf{AB} - \Omega_1^2 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega_1^2 & \frac{-\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 0$$

Como las dos ecuaciones son linealmente dependientes, se despeja una cualquiera:

$$-\left(\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_1^2\right) Q_1 - \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{-\frac{1}{1-\lambda} - \Omega_1^2}{\frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda}} Q_1$$

Analizando el signo del coeficiente de Q_1 :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{1-\lambda} - \Omega_1^2 &= -\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\ &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\ &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\lambda\epsilon^2}{(1-\lambda)^2}} < 0\end{aligned}$$

El coeficiente que multiplica a Q_1 es negativo, eso quiere decir que el signo de Q_1 es contrario al signo de Q_2 .

Para el **segundo modo** Ω_2 , se tiene:

$$(\mathbf{AB} - \Omega_2^2 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-\lambda} - \Omega_2^2 & \frac{-\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} & \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} - \Omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 0$$

Como las dos ecuaciones son linealmente dependientes, se despeja una cualquiera:

$$-\left(\frac{1}{1-\lambda} + \Omega_2^2\right) Q_1 - \frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda} Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{-\frac{1}{1-\lambda} - \Omega_2^2}{\frac{\lambda\epsilon^2}{1-\lambda}} Q_1$$

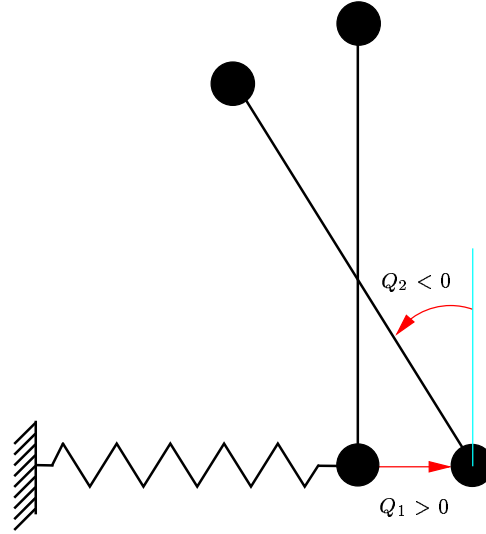


Figura 3.6: Modos normales en la posición superior.

Analizando el signo del coeficiente de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{1-\lambda} - \Omega_2^2 &= -\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1-\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\lambda\epsilon^2}{(1-\lambda)^2}} < 0
 \end{aligned}$$

El coeficiente que multiplica a Q_1 es negativo, esto quiere decir que el signo de Q_1 coincide con el signo de Q_2 , como en el primer modo.

Los dos modos son cualitativamente semejantes, sólo se diferencian en la amplitud de la batida. La forma cualitativa de moverse de ambos modos puede apreciarse en la figura (3.6).

Capítulo 4

Estudio de los parámetros que intervienen en el sistema.

Para poder utilizar las técnicas numéricas de análisis de sistemas dinámicos, como continuación o integración, hay que asignar unos valores concretos a los parámetros λ y ϵ . A lo largo de este capítulo se analizará la información obtenida de las frecuencias naturales lineales con el fin de asignar unos valores concretos a los mencionados parámetros, de tal forma que el comportamiento del sistema se ajuste lo mas posible al objetivo marcado por el proyecto, estabilizar el péndulo en la posición horizontal.

4.1 Estudio de las frecuencias naturales obtenidas de la linealización.

Se va a realizar un estudio de las frecuencias naturales obtenidas de la linealización en torno a la posición inferior. Para ello se va a representar en ejes coordenados los valores de las dos frecuencias, utilizando como parámetros los valores de λ y ϵ , obteniéndose así el mapa de frecuencias de la figura (4.1). Este tipo de representación sólo tiene sentido para las frecuencias obtenidas en la linealización en torno a la posición inferior, ya que en este punto las dos frecuencias Ω_1 y Ω_2 , son complejas.

$$\Omega_1^2 = -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \quad (4.1)$$

$$\Omega_2^2 = -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \quad (4.2)$$

En la posición superior, esta representación deja de tener sentido ya que un autovalor es complejo y el otro es real.

4.2 Búsqueda de resonancias.

Para determinar que par de valores de los parámetros van a ser utilizados para realizar los cálculos numéricos con ordenador, se van a buscar los puntos donde se den relaciones de resonancia. Los puntos de resonancia son interesantes porque en ellos se favorece el

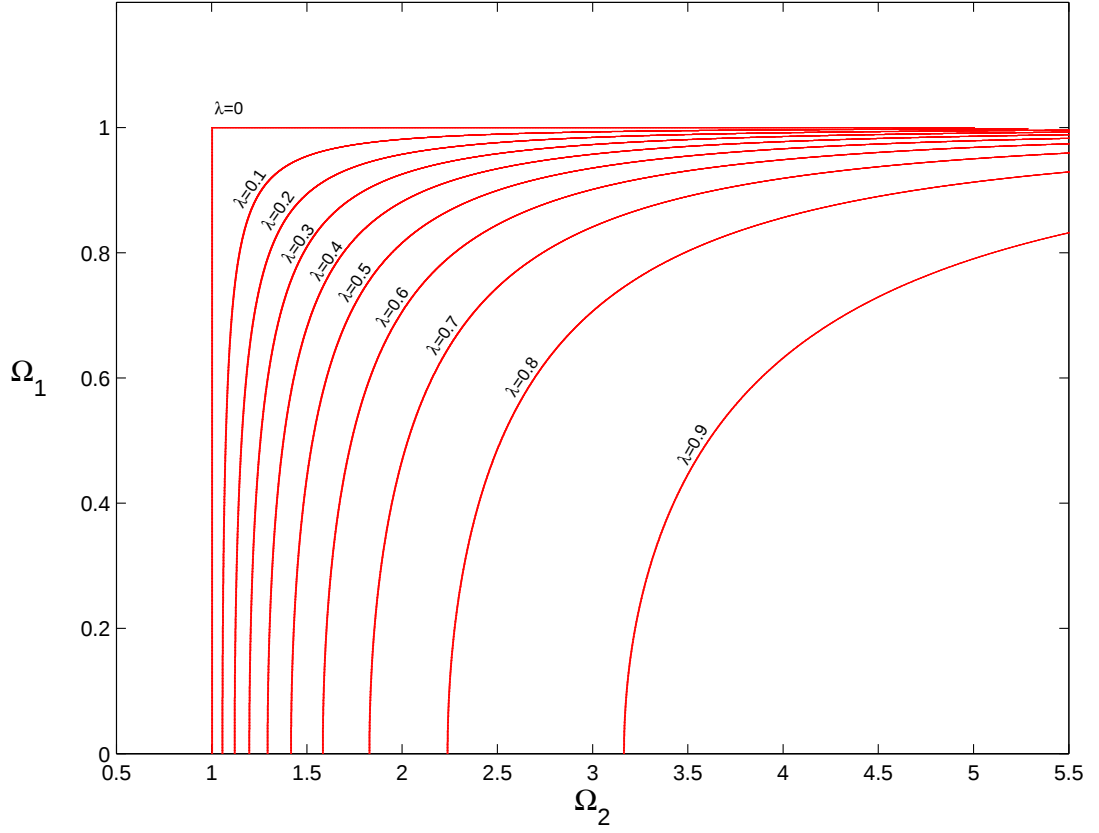


Figura 4.1: Mapa de las frecuencias naturales o autovalores de la linealización para distintos valores de λ , siendo ϵ la variable paramétrica.

intercambio de energía entre los dos modos normales. La idea es partir de un punto cercano a una resonancia y aprovechar este intercambio de energía para desestabilizar uno de los modos normales.

Estos puntos de resonancia vienen determinados por una relación entre los autovalores o frecuencias naturales del tipo:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n} \quad (4.3)$$

Siendo m y n números enteros tales que $m < n$.

Operando con la relación (4.3) se tiene:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n} \implies \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \alpha^2 \implies \Omega_1^2 = \alpha^2 \Omega_2^2$$

Sustituyendo las relaciones (4.1) y (4.2) en la relación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} &= -\alpha^2 \frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \alpha^2 \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
(1-\alpha^2) \frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} &= (1+\alpha^2) \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\
(1-\alpha^2)^2 \left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 &= (1+\alpha^2)^2 \left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - (1+\alpha^2)^2 \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} \\
[(1+\alpha^2)^2 - (1-\alpha^2)^2] \left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 &= (1+\alpha^2)^2 \frac{\epsilon^2}{1-\lambda} \\
\alpha^2 \frac{(1+\epsilon^2)^2}{1-\lambda} &= (1+\alpha^2)^2 \epsilon^2 \\
\lambda &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon\right)^2}{\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right)^2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo α por su valor original queda:

$$\lambda = 1 - \frac{\left(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon\right)^2}{\left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right)^2} \quad (4.4)$$

El objetivo de este proyecto se centra en el estudio de la resonancia 1:2 como primera resonancia alcanzable del sistema, ya que la resonancia 1:1 no se alcanza más que en un punto y sólo para el valor del parámetro $\lambda = 0$ que es un caso degenerado que no va a estudiarse.

Como puede verse en la figura (4.2), la recta de pendiente “1/2”, que determina la resonancia del mismo valor, corta a las curvas del mapa en dos puntos. A continuación van a determinarse los valores analíticos de estos dos puntos, así como el máximo valor del parámetro λ para el que existe resonancia 1:2.

Sustituyendo en la relación (4.4) los valores $m = 1$ y $n = 2$ se tiene:

$$\boxed{\lambda = 1 - \frac{4}{25} \left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\right)^2}$$

Y despejando ϵ como función de λ se tiene:

$$\boxed{\epsilon = \frac{5}{4} \sqrt{1-\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4} \sqrt{1-\lambda}\right)^2 - 1}}$$

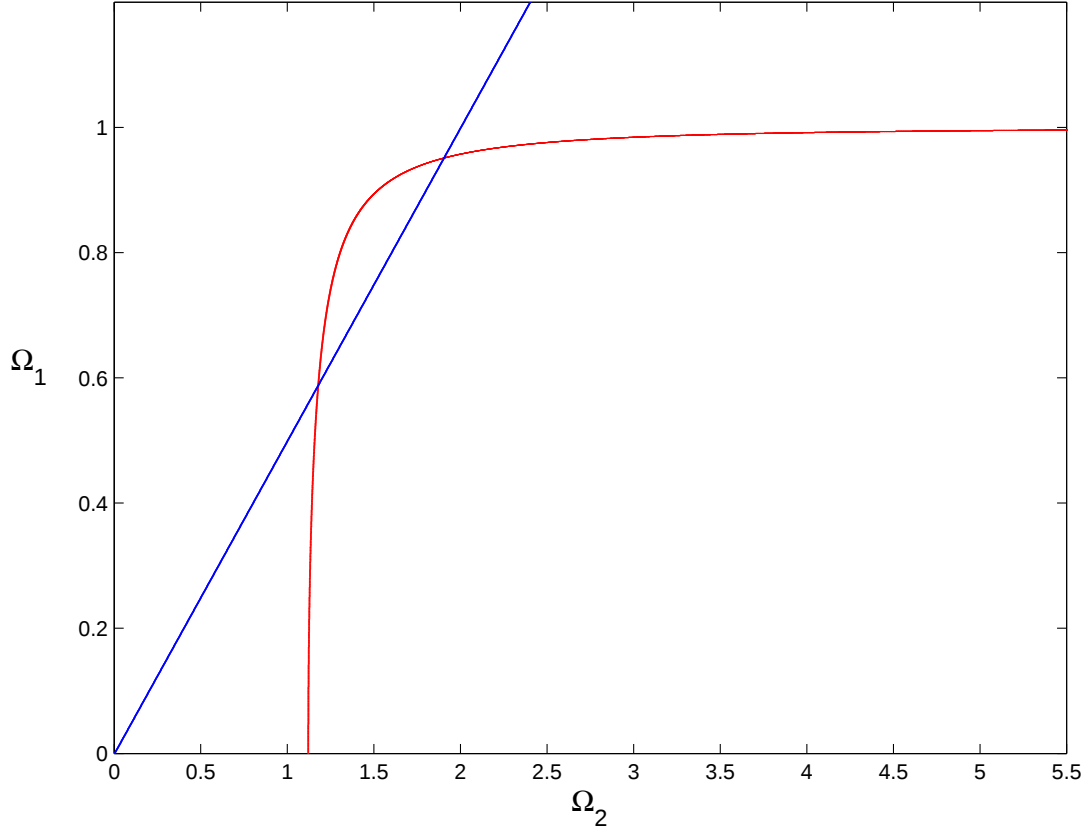


Figura 4.2: Esta figura muestra la intersección de una de las curvas del mapa de frecuencias con la recta de pendiente “1/2”. Los dos puntos de intersección determinan los valores de los parámetros para los que se dan relaciones de resonancia.

Como puede apreciarse al observar las ecuaciones, por cada valor de λ se obtienen dos valores de ϵ , por tanto, la condición para obtener el valor máximo de λ es que el término dentro de la raíz, en la última expresión, sea cero, que será cuando sólo se obtenga un valor de ϵ .

$$\left(\frac{5}{4}\sqrt{1-\lambda_{max}}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{9}{25}$$

Y el valor de ϵ correspondiente es:

$$\epsilon(\lambda_{max}) = 1$$

La curva de la figura (4.3) representa el par (λ, ϵ) para la relación de resonancia 1:2.

4.3 Valores de los parámetros λ y ϵ .

Para poder realizar los cálculos hay que elegir unos valores concretos de los parámetros del sistema λ y ϵ . Lo primero que se va a hacer es fijar la relación de masas, un valor

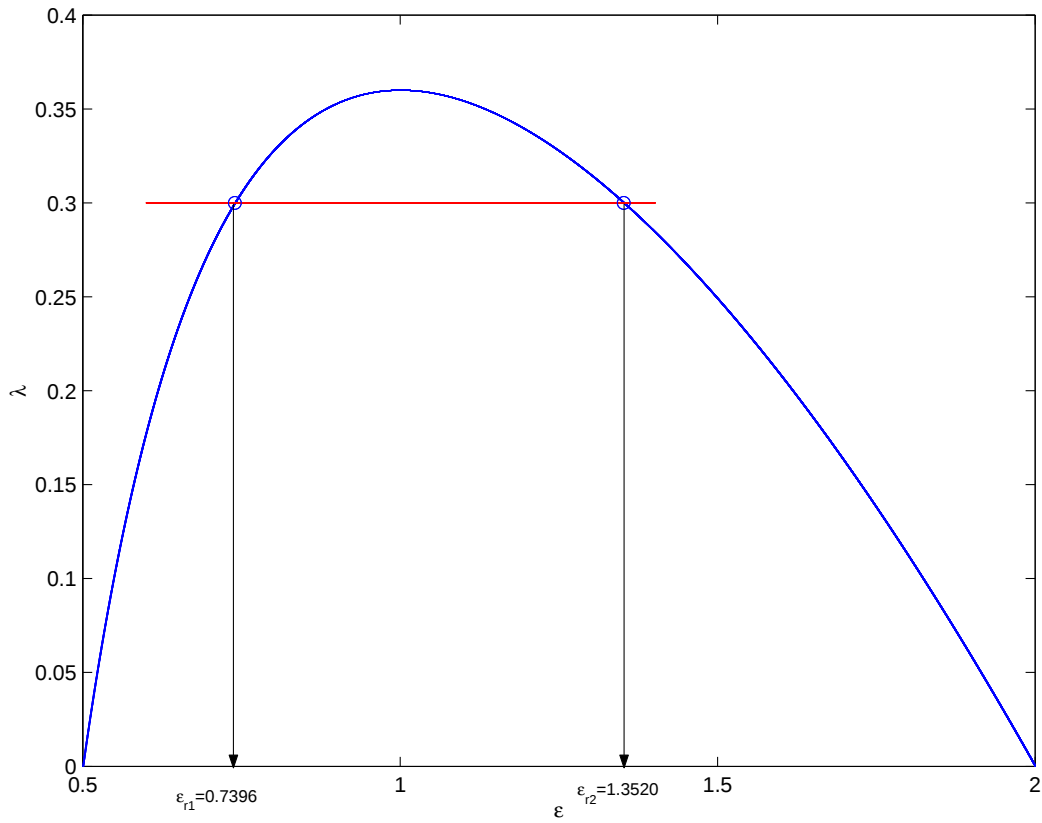


Figura 4.3: Gráfica que representa la relación que existe entre los dos parámetros del sistema λ y ϵ para la resonancia 1:2.

adecuado es:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0.3$$

Para este valor de λ se cumple que $m_2 < m_1$, es decir, la masa del muelle m_1 es mayor que la masa que cuelga del péndulo m_2 .

Fijada la relación de masas, existen dos valores de ϵ tales que los autovalores están en una relación de resonancia. Dichos valores son:

$$\begin{aligned}\epsilon_{r1} &= 0.7396 \\ \epsilon_{r2} &= 1.3520\end{aligned}$$

Para realizar continuación numérica nos situaremos antes y después de las resonancias, uno de los objetivos es explorar la dinámica del sistema Hamiltoniano y determinar como le afectan las variaciones del parámetro ϵ . Unos valores adecuados para realizar continuación son:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= 0.5 \\ \epsilon_2 &= 1 \\ \epsilon_3 &= 2\end{aligned}$$

Capítulo 5

Estudio de las órbitas periódicas para $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.5$.

Desde los trabajos de Poincaré se sabe que las órbitas periódicas, en general, no están aisladas en un sistema Hamiltoniano. Aparecen en forma de familias continuas en el espacio de las fases y pueden ser investigadas variando algún parámetro externo o lo que parece más natural el parámetro natural que es la energía, véase [10].

La continuación numérica es un método en contraste con la simulación numérica, que permite estudiar tanto las órbitas estables como las inestables. El software utilizado para tal fin es el programa “AUTO” que calcula los autovalores de los equilibrios o los multiplicadores característicos de las órbitas periódicas y evalúa unas funciones test para detectar cada tipo de bifurcación, para más información sobre continuación numérica puede consultarse [1, 2, 7].

Lo que se pretende en este proyecto, es realizar continuación variando el valor de la energía H . Sin embargo, generalmente ésta no aparece de forma explícita en las ecuaciones. Este problema puede resolverse perturbando el sistema con un término disipativo, controlado por un parámetro auxiliar, y considerando a la órbita periódica como el resultado de una bifurcación de Hopf en el valor que anula al parámetro añadido. Si se añade una perturbación de la forma $\beta \cdot \nabla H(q_i, p_i)$ ($\beta < 1$), en general se destruye el carácter hamiltoniano del problema. La perturbación actúa como un término disipativo de manera que para valores no nulos de β , destruimos las órbitas periódicas que existen en el caso hamiltoniano ($\beta = 0$). Con este término auxiliar, un equilibrio persiste para $\beta \neq 0$.

La mayor parte del capítulo está dedicado a la continuación de órbitas periódicas del sistema péndulo muelle que se está analizando; se irán exponiendo los diferentes resultados obtenidos, junto con algunos comentarios sobre como se introducen las órdenes en el programa.

En la última sección se presentan algunos resultados obtenidos realizando secciones de Poincaré.

5.1 Continuación numérica de órbitas periódicas.

Para realizar esta primera continuación se han elegido como valores para los parámetros $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.5$.

Para realizar los cálculos con AUTO partimos del fichero “*pm.c*” que contiene las ecuaciones del sistema dinámico. Una copia de este fichero se encuentra al final, en el apéndice A. Además de este fichero se necesitara el fichero de parámetros o constantes del programa AUTO, “*c.pm*”. Las siguientes modificaciones de los parámetros no se harán directamente sobre este fichero sino a través del nuevo modo de comandos que incorpora la versión 2000 de AUTO que el manual llama CLUI (Command Line User Interface) y que está basado en el lenguaje de programación Python.

Además de estos ficheros, se necesitan los ficheros de Python “*util.py*” y “*eigenvalue.py*”, que representan gráficamente los multiplicadores característicos de las órbitas periódicas y los autovalores de los equilibrios respectivamente.

5.1.1 Detección de la bifurcación de Hopf.

Se trata de encontrar una bifurcación de Hopf partiendo del equilibrio en la posición inferior. Para ello se utiliza un fichero de constantes de AUTO con los siguientes valores:

```

4 1 0 0          NDIM,IPS,IRS,ILP
4 2 0 1 3        NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
50 4 3 3 1 0 0 0 NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
300 -100 100.0 0.0 100.0 NMX,RLO,RL1,A0,A1
0 10 2 8 7 3 0    NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-06 1e-06 0.00001 EPSL,EPSU,EPSS
-0.01 0.000001 0.01 1 DS,DSMIN,DSMAX,IADS
1                NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
10 0.0
0                NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

Los parámetros más significativos son:

- **IPS=1** Para que continúe un equilibrio.
- **IRS=0** Para que lea las condiciones iniciales de la subrutina *stpnt* del fichero *pm.c*.
- **NICP=4** Número de parámetros del problema $(\lambda, \epsilon, H, \beta)$
- **ICP(I)** Lista con los parámetros ordenados, el primero de ellos, será el que se continúe. En este caso (2,0,1,3), primero $\text{Par}(2)=\beta$, parámetro de continuación, segundo $\text{Par}(0)=\lambda$, tercero $\text{Par}(1)=\epsilon$ y cuarto $\text{Par}(3)=H$.
- **ISP=3** Para que detecte la bifurcación de Hopf (HB).
- **NPR=0** Para que en el fichero de salida fort.8 sólo guarde la primera órbita, la última y las bifurcaciones que encuentre.

- **DS=-0.01** Es el paso de continuación, en este caso negativo, porque se parte de un valor de β mayor que cero, y por tanto habrá que continuar hacia atrás, en dirección al valor $\beta=0$ en concreto, $\beta=0.4$.

A continuación se arranca el modo CLUI de AUTO con la instrucción:

```
auto
```

Tras esperar unos segundo a que se inicialice se escriben las siguientes instrucciones, para importar los paquetes con utilidades que se van a utilizar:

```
from AUTOclui import *
from eigenvalue import *
from util import *
```

Para cargar en memoria los ficheros pm.c y c.pm:

```
ld('pm')
```

Para arrancar AUTO:

```
run()
```

La siguiente instrucción vuelca en una variable interna de Python, que se ha llamado "hopf", los autovalores del equilibrio, los representa gráficamente y los salva en un fichero *postscript*:

```
hopf=ev()
hopf.plotev()
hopf.psev()
```

Dicha representación gráfica se presenta en la figura (5.1), en ella se puede observar la evolución de los autovalores desde valores de $\beta > 0$ hasta valores de $\beta < 0$. Los dos autovalores tienen al principio, cuando $\beta > 0$ parte real positiva, a medida que β disminuye la parte real de ambos va disminuyendo y para β cero cruzan el eje real a la vez, en este punto AUTO detecta una bifurcación de Hopf. Después, para valores negativos del parámetro la parte real de ambos autovalores se hace cada vez más negativa. A continuación se salvan los ficheros de salida de AUTO, "fort.*" con la extensión "*.hopf". Es decir renombro los ficheros *fort.7*, *fort.8* y *fort.9* a *b.hopf*, *s.hopf* y *d.hopf* respectivamente.

```
sv('hopf')
```

Si se observa el fichero de diagnósticos *d.hopf* se pueden ver unas líneas como las que siguen:

```
1    40      BP   Function   7.142857E-01
1    40      Hopf Function -5.903178E-08
1    40      Eigenvalues:                               Stable:  4
1    40      Eigenvalue 1  -5.903178E-08 -4.790550E-01
1    40      Eigenvalue 2  -5.903178E-08  4.790550E-01
1    40      Eigenvalue 3  -8.627775E-08  1.247486E+00
1    40      Eigenvalue 4  -8.627775E-08 -1.247486E+00
==> Location of special point :  Convergence.      Stepsize =  3.999E-08
```

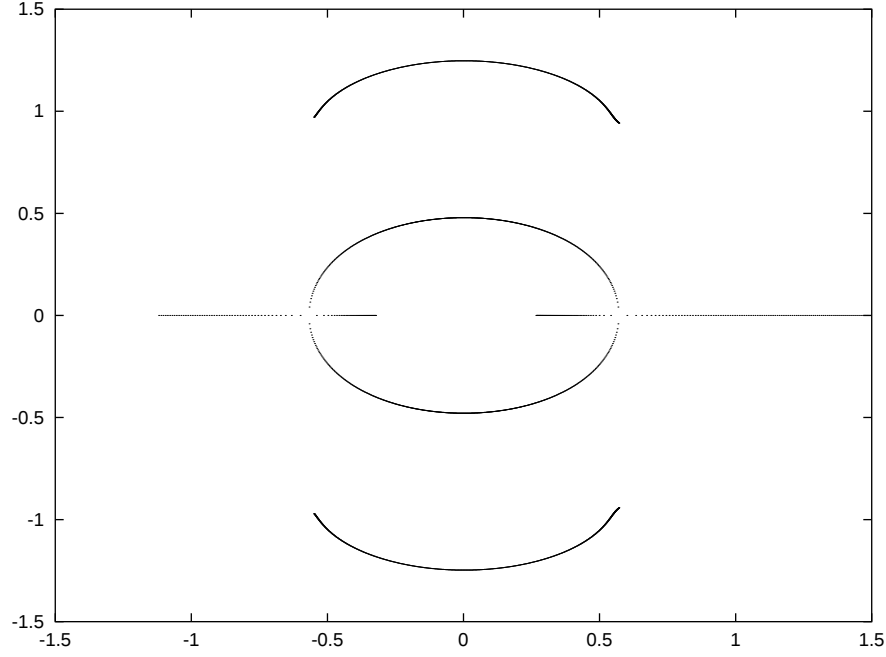


Figura 5.1: Evolución de los autovalores desde un valor $\beta > 0$ hasta otro valor $\beta < 0$, en el momento en el que el parámetro β se anula, aparece una bifurcación de Hopf.

En esta órbita, la número 40, AUTO detecta la bifurcación de Hopf, obsérvese como los autovalores tienen parte real nula, la parte imaginaria, por tanto debe coincidir con los autovalores linealizados que fueron analizados anteriormente; recordando las expresiones que se obtuvieron:

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} + \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}} \\ \Omega_2^2 &= -\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)} - \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon^2}{2(1-\lambda)}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{1-\lambda}}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Si se sustituyen los valores de los parámetros que se están utilizando para realizar la continuación $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.5$, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\Omega_1^\pm &= \pm 0.4791 i \\ \Omega_2^\pm &= \pm 1.2475 i\end{aligned}\quad (5.2)$$

Valores que se corresponden con los obtenidos con AUTO. Sin embargo la información que más se usa para continuar órbitas, es el periodo, que se calcula muy fácilmente:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{2\pi}{|\Omega_1|} = 13.1158 \\ T_2 &= \frac{2\pi}{|\Omega_2|} = 5.0367\end{aligned}\quad (5.3)$$

Como puede observarse el primer modo, es de una frecuencia más baja y por tanto más fácil de alcanzar que el segundo que es más alto, sin embargo, el segundo modo una vez que se alcanza es más rápido que el primero.

5.1.2 Continuación de la bifurcación de Hopf.

Se ejecuta AUTO partiendo de la bifurcación de Hopf detectada en el apartado anterior, para ello hay que realizar las siguientes modificaciones en las constantes que controlan al programa AUTO. Se carga el fichero de soluciones obtenido anteriormente, *s.hopf*, para continuar a partir de él.

```
ld(s='hopf')
```

Para que continúe órbitas periódicas en vez de equilibrios, se cambia el parámetro **IPS** a dos.

```
ch('IPS',2)
```

Para que continúe desde la etiqueta 2 del fichero *s.hopf* que es donde se encuentra la bifurcación de Hopf se cambia **IRS** a dos.

```
ch('IRS',2)
```

Ahora se van continuar órbitas periódicas en vez de equilibrios, se necesita un parámetro más, que es el periodo.

```
ch('NICP',5)
```

Para incluir el periodo dentro de la secuencia de variables.

```
ch('ICP',[2,10,0,1,3])
```

Para que detecte todas las bifurcaciones y muestre los multiplicadores característicos de las órbitas periódicas.

```
ch('ISP',2)
```

Para que guarde una órbita de cada 20 que calcule.

```
ch('NPR',20)
```

Ahora se disminuye el paso y se aumenta el número de órbitas que se computan, para conseguir que las representaciones gráficas de los multiplicadores tengan más nitidez, por tanto se van a continuar 750 órbitas con un paso inicial de 0.002 y un paso máximo de 0.002.

```
ch('DS',-0.002)
```

```
ch('DSMAX',0.002)
```

```
ch('DSMIN',1E-8)
```

```
ch('NMX',750)
```

Sólo resta correr el programa.

```
run()
```

Vemos que AUTO detecta un punto de ramificación “BR” para una órbita que tiene una energía $H = 0.0977232$, la órbita es la número 622 y está etiquetada con el número 78. Si además observamos el fichero que contiene el diagrama de bifurcación, “*fort.7*”, puede verse que de los dos modos posibles, AUTO continúa el primero, el que tiene $T_1 = 13.1158$, en otro apartado posterior forzaremos al programa a que continúe la rama correspondiente al otro modo normal.

Si se representan los multiplicadores característicos de esta rama de órbitas periódicas se obtiene la figura (5.2), en la que puede observarse como a partir del punto ‘BR’ las órbitas periódicas dejan de ser estables y la solución se ramifica, en el próximo apartado se continuará por esta nueva rama que emana de la “BP”. Se observa también como la solución experimenta una bifurcación de duplicación de periodo para $H = 0.0165299$ y que AUTO detecta en la órbita 248 y es etiquetada con el número 42.

En la figura (5.3) puede verse gráficamente como los multiplicadores característicos evolucionan desde una posición inicial sobre el círculo unidad con argumento ± 2.1751 hasta el punto “+1” donde AUTO detecta la “BP” pasando por el punto “-1” donde aparece la bifurcación de duplicación de periodo que no detecta el programa. A partir del punto “+1” dos autovalores permanecen en este punto (propiedad de los Hamiltonianos) y los otros dos evolucionan por caminos opuestos sobre el eje real, esta situación es indicadora de inestabilidad en las órbitas periódicas.

A continuación se salva la representación de los multiplicadores generada en la figura (5.2) y se copia a la carpeta “*images*”.

```
cm=cm()
cm.plot()
cm.ps()
shell('cp cm.ps images/cm2.ps')
```

Podemos sacar aún más información de la linealización del sistema aplicando el teorema del centro de Lyapunov, véase [3]. Este teorema dice que si se conocen los autovalores de un punto de equilibrio, puede obtenerse el valor de los multiplicadores característicos de la familia de órbitas periódicas que emana de ese punto de equilibrio. El sistema que se está analizando tiene cuatro autovalores en el equilibrio de valores, $\lambda_1 = +\Omega_1 i$, $\lambda_2 = -\Omega_1 i$, $\lambda_3 = +\Omega_2 i$ y $\lambda_4 = -\Omega_2 i$. Según el teorema de Lyapunov el valor de los multiplicadores que emanan del equilibrio es:

$$\exp\left(\frac{2\pi\lambda_i}{\Omega_j}\right)$$

Evaluando esta expresión se obtienen cuatro combinaciones posibles, cada una correspondiente a un multiplicador característico, como los autovalores son números complejos con parte real nula, los multiplicadores están situados sobre el círculo unidad, dos de ellos tienen argumento nulo, es decir, están en el punto “+1”, condición que cumple todo Hamiltoniano, pero los argumentos de los otros dos valen:

$$\arg\left(e^{\frac{2\pi 0.4791}{1.2475} i}\right) = 2.4891 \quad (5.4)$$

$$\arg\left(e^{\frac{2\pi 1.2475}{0.4791} i}\right) = -2.4891 \quad (5.5)$$

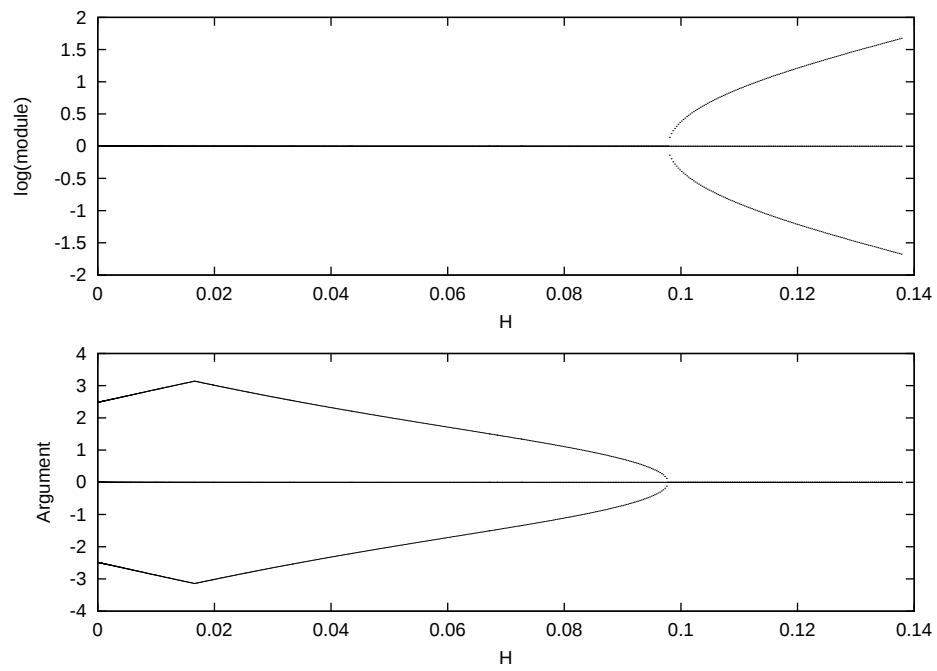


Figura 5.2: Evolución de los multiplicadores de Floquet a lo largo de la rama *modo1*, como se puede observar inicialmente la rama es estable y pierde su estabilidad para un valor de $H = 0.0977323$, obsérvese también la duplicación de periodo que aparece para $H = 0.0165299$.

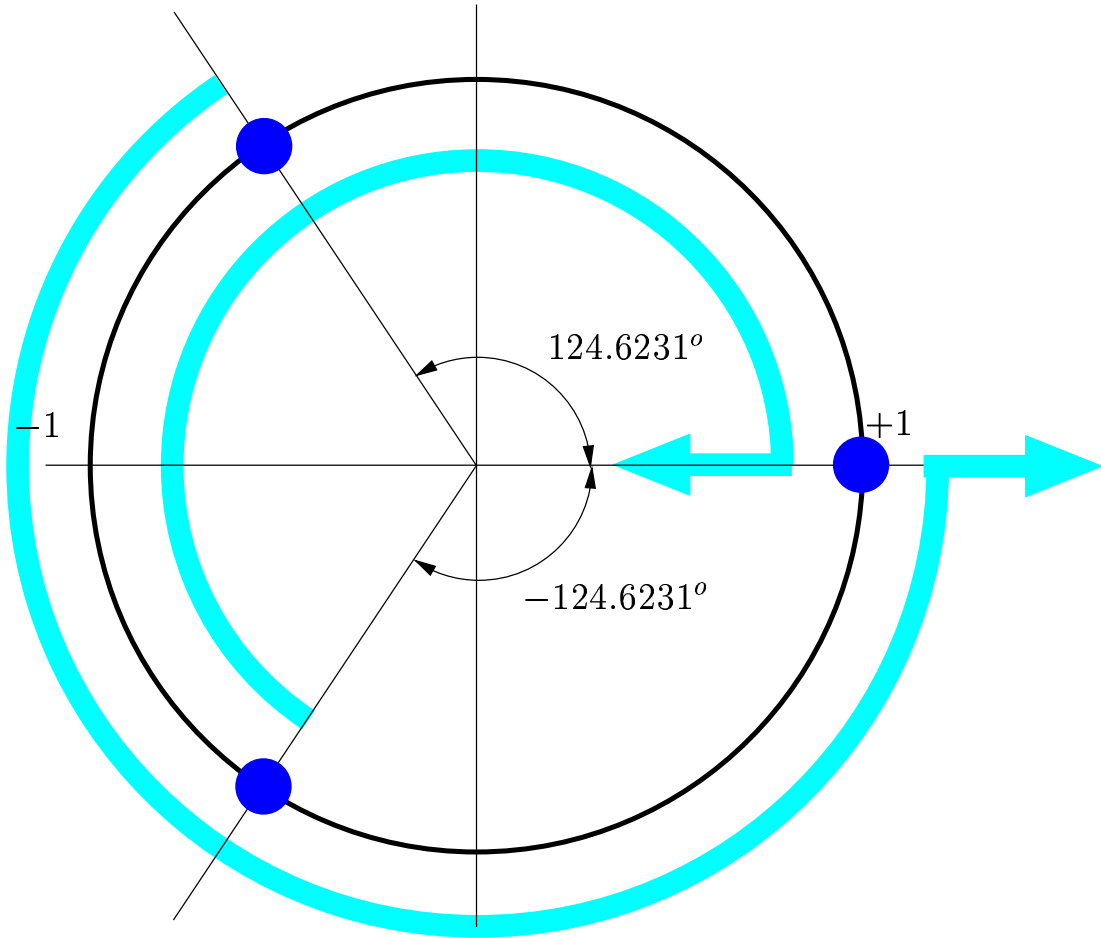


Figura 5.3: Evolución de los multiplicadores de Floquet a lo largo del círculo unidad, como puede observarse experimentan una bifurcación de duplicación de periodo antes de llegar al punto de ramificación “BP” en el cuádruple “+1”.

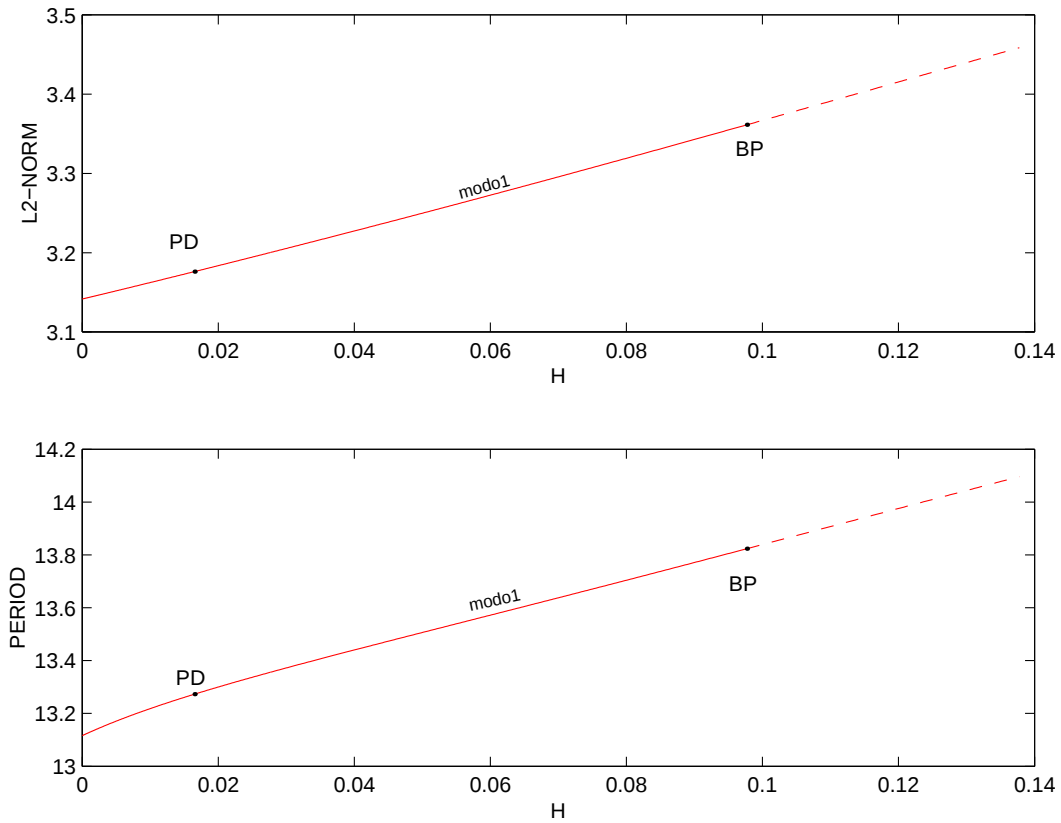


Figura 5.4: Rama de órbitas periódicas que emana del equilibrio, correspondientes al modo de frecuencia $\Omega_1 = 0.4791$ y periodo $T_1 = 13.1158$, AUTO etiqueta la bifurcación PD con el número 42 y la BP con el 78.

Como puede verse en la gráfica (5.2), los resultados obtenidos aplicando el teorema del centro de Lyapunov coinciden con los resultados obtenidos del programa “AUTO”. A continuación se renombran los ficheros “*fort.**” a “**.modo1*”.

```
sv('modo1')
```

Se generan a continuación unos ficheros que puedan ser leídos por Matlab, con los datos de los diagramas de bifurcación y las órbitas periódicas.

```
diagrama=dg('modo1')
diagrama.writeRawFilename('modo1.b')
shell('mv modo1.b ../Matlab')
```

El fichero *modo1.b* tiene ocho columnas de datos que en este caso particular son:

Par(2) L2 - Norm Max(1) Max(2) Period Par(0) Par(1) Par(3)

Utilizando Matlab, se genera la gráfica (5.4) que presente el módulo y el argumento frente a la energía H . A continuación se generan unas gráficas que representan la evolución de las variables en el espacio de fases a lo largo de un periodo, para dos

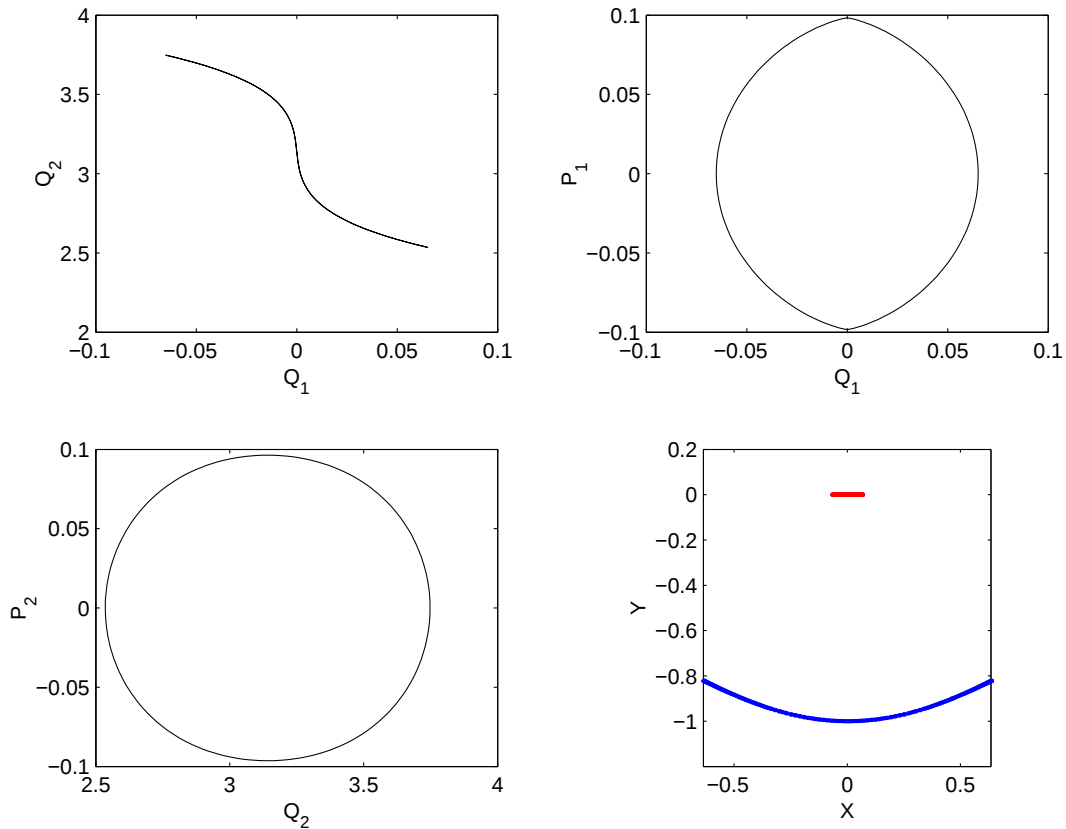


Figura 5.5: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 37 de la rama “*modo1*”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

órbitas, concretamente para la órbita número 37 y número 75. Para ello se debe generar a partir del fichero de soluciones “*s.modo1*” otros dos, con las soluciones de dichas órbitas y en un formato que pueda ser leído por Matlab. Para ello se introducen las siguientes instrucciones:

```

orbita=sl('modo1')
orbita[37].writeRawFilename('o37')
orbita[75].writeRawFilename('o75')

```

Los ficheros generados *modo1.o37* y *modo1.o75* están divididos en cinco columnas con la siguiente estructura.

t	Q_1	Q_2	P_1	P_2
-----	-------	-------	-------	-------

Muevo los ficheros generados a la carpeta de trabajo con Matlab.

```
shell('mv o* ../Matlab')
```

Y por último represento las gráficas (5.5) y (5.6), utilizando Matlab.

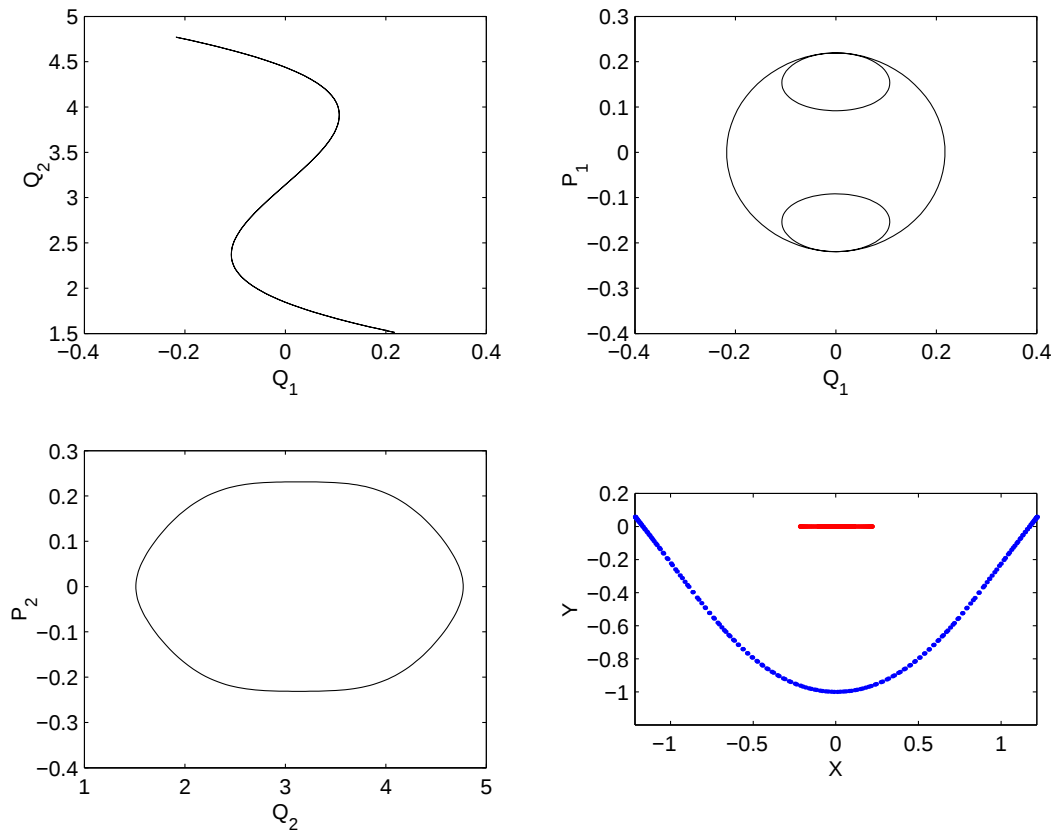


Figura 5.6: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 75 de la rama “modo1”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

5.1.3 Continuación de la bifurcación BP obtenida en la rama “modo1”.

El punto BP obtenido en la continuación de la rama “modo1” marca el comienzo de la inestabilidad en dicha rama, sin embargo se puede continuar por la rama que emana es este punto, se trata de una nueva familia de órbitas periódicas con unas nuevas características en su movimiento que vamos a analizar por continuación numérica con AUTO. El punto BP de la rama “modo1” corresponde a la órbita 622, etiquetada con un el número 78. Para continuar este punto, tenemos que hacer las siguientes modificaciones en las constantes de funcionamiento del programa AUTO. Cargar el fichero de soluciones de la rama “modo1”.

```
ld(s='modo1')
```

Cambiamos la etiqueta de la órbita de partida.

```
ch('IRS',78)
```

Para que continúe por la nueva rama.

```
ch('ISW',-1)
```

Cambiamos el número de órbitas a continuar.

```
ch('NMX',300)
```

Para que guarde en el fichero de soluciones una órbita de cada veinte.

```
ch('NPR',20)
```

Para que corra el programa.

```
run()
```

Tras correr AUTO, se representa los multiplicadores de Floquet en la figura (5.7).

```
from util import *
cm=cm()
cm.plot()
cm.ps()
shell('cp cm.ps images/cmr1.ps')
```

Se importa de nuevo el fichero *util* porque al parecer el modo CLUI de AUTO tiene cierta inestabilidad y borra de memoria el contenido de dicho fichero; sólo con importarlo de nuevo se soluciona el problema. Una vez obtenido el fichero se guarda en formato postscript en la carpeta “*images*”. Como puede observarse en la figura (5.7) la solución experimenta una bifurcación de duplicación de periodo, que no detecta AUTO, el siguiente paso será detectar esta bifurcación de periodo para ver en que punto las soluciones de esta rama dejan de ser estables y después continuar por la nueva rama. Antes de seguir salvamos los ficheros de soluciones de la rama recién computada.

```
sv('m1r1')
```

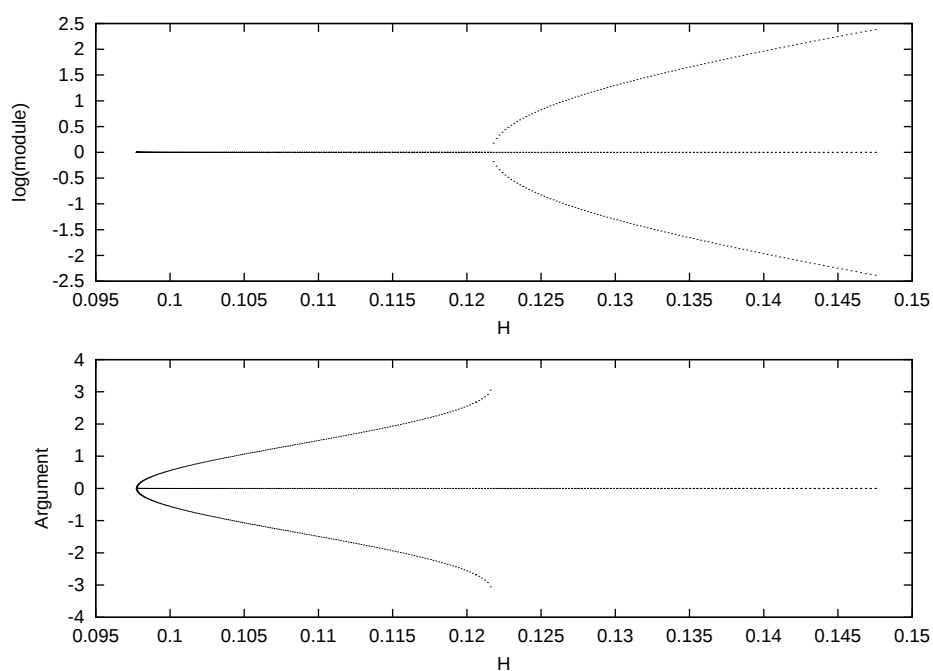


Figura 5.7: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama que emana de la bifurcación BP de la rama principal “*mod01*”, como puede observarse las órbitas periódicas son estables al principio hasta que la solución experimenta una bifurcación de duplicación de periodo. Después la solución deja de ser estable.

5.1.4 Detección de la bifurcación de duplicación de periodo de la rama “m1r1”.

A continuación se va a realizar un proceso indirecto para que “AUTO” detecte la duplicación de periodo. Este proceso consta de varios pasos que se enumeran a continuación:

1. Hay que arrancar de la bifurcación “BP” de la rama principal “modo1”.
2. Ejecutar AUTO para encontrar una órbita periódica muy cercana a dicha bifurcación “BP”.
3. Se duplica esta órbita, se recorre dos veces.
4. Se vuelve a arrancar AUTO pero esta vez partiendo de la órbita duplicada.

AUTO detectará la bifurcación de duplicación de periodo, “PD” en adelante, como una “BP” ya que al recorrerse dos veces la órbita, sus cuatro multiplicadores característicos van a parar al punto “+1”.

Cargamos el fichero de soluciones “*s.modol*” para arrancar del punto “HB”.

```
ld(s='modo1')
```

Cargamos la etiqueta del punto a continuar(HB):

```
ch('IRS',78)
```

Como se va a continuar por la rama “m1r1” y no por la “modo1”:

```
ch('ISW',-1)
```

Se continúan sólo dos órbitas, la de inicio y otra más:

```
ch('NMX',2)
```

Para que no guarde órbitas intermedias:

```
ch('NPR',0)
run()
```

Los ficheros generados, se guardan con la extensión “*.tmp”.

```
sv('tmp')
```

Ya estoy en disposición de doblar la órbita, esto se hace con la instrucción:

```
dobla()
```

La órbita doblada la guarda con la extensión “*.tmp”, y la órbita sin doblar con la extensión “*.tmp~”. Se carga el fichero de soluciones y se corre el programa, cambiando la etiqueta de arranque a “1”, ya que la función para doblar la órbita, resetea el contador de etiquetas a dicho valor.

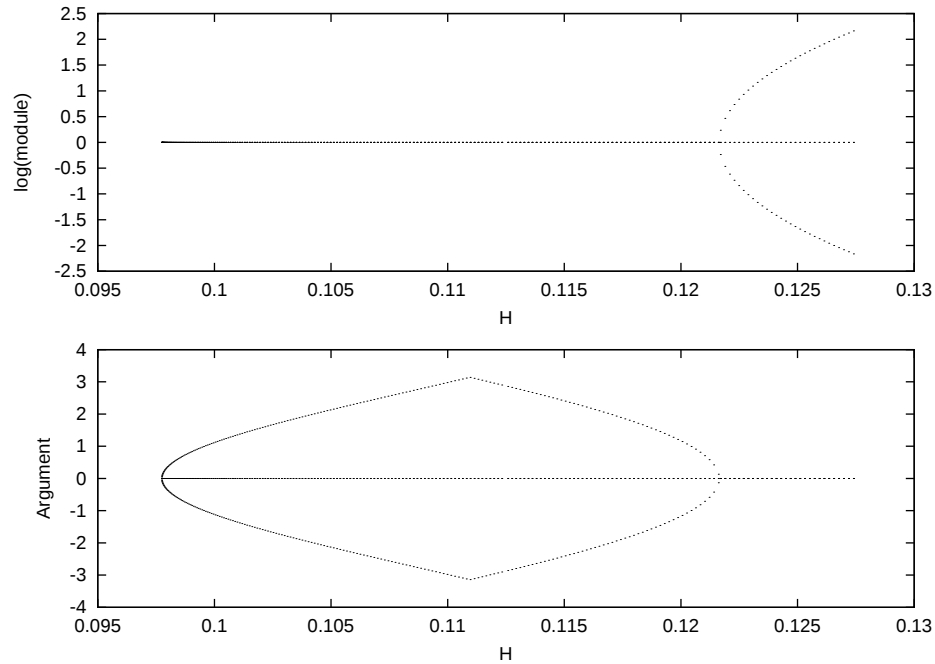


Figura 5.8: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “*m1r1*” al duplicar el periodo de sus órbitas. La BP que detecta, es en realidad una PD en la rama sin duplicar.

```
ld(s='dat')
ch('IRS',1)
ch('NMX',220)
ch('ISW',1)
ch('NPR',10)
ch('DS',0.002)
run()
sv('m1r1.dup')
```

Ahora AUTO detecta una BP a la que le asigna la etiqueta número “22”, esta BP es en realidad una PD en la rama sin duplicar. En la figura (5.8), que muestra los multiplicadores de la rama duplicada, puede verse como para el valor de H en el que antes se observaba una PD ahora se observa una BP. En la figura (5.9) puede observarse el diagrama de bifurcaciones de todas las ramas que se llevan hasta el momento, en particular puede verse la situación de la duplicación de periodo recién detectada. A continuación se representan en las figuras (5.10) y (5.11) las órbitas números “90” y “104” de la rama “*m1r1*”, sin duplicar, observese también la pérdida de simetría en el movimiento del sistema, obviamente existirá otra familia de órbitas periódicas que sea simétrica a la representada en las imágenes.

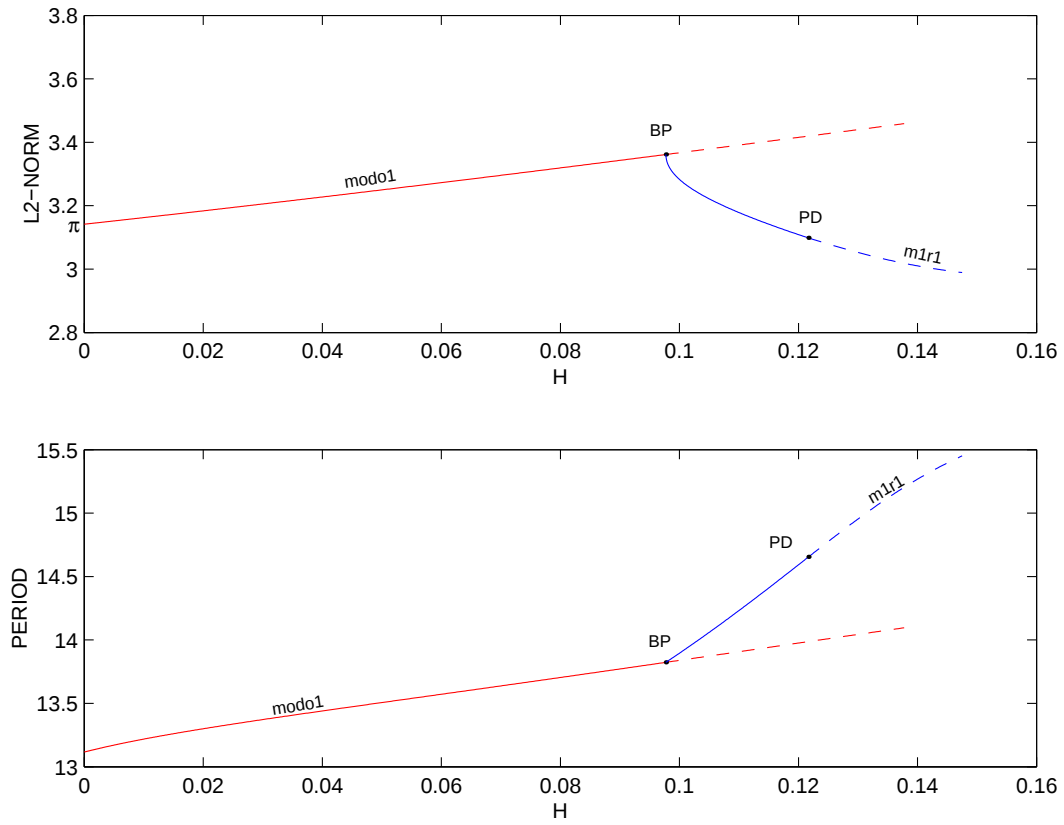


Figura 5.9: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación BP de la rama “modo1”.

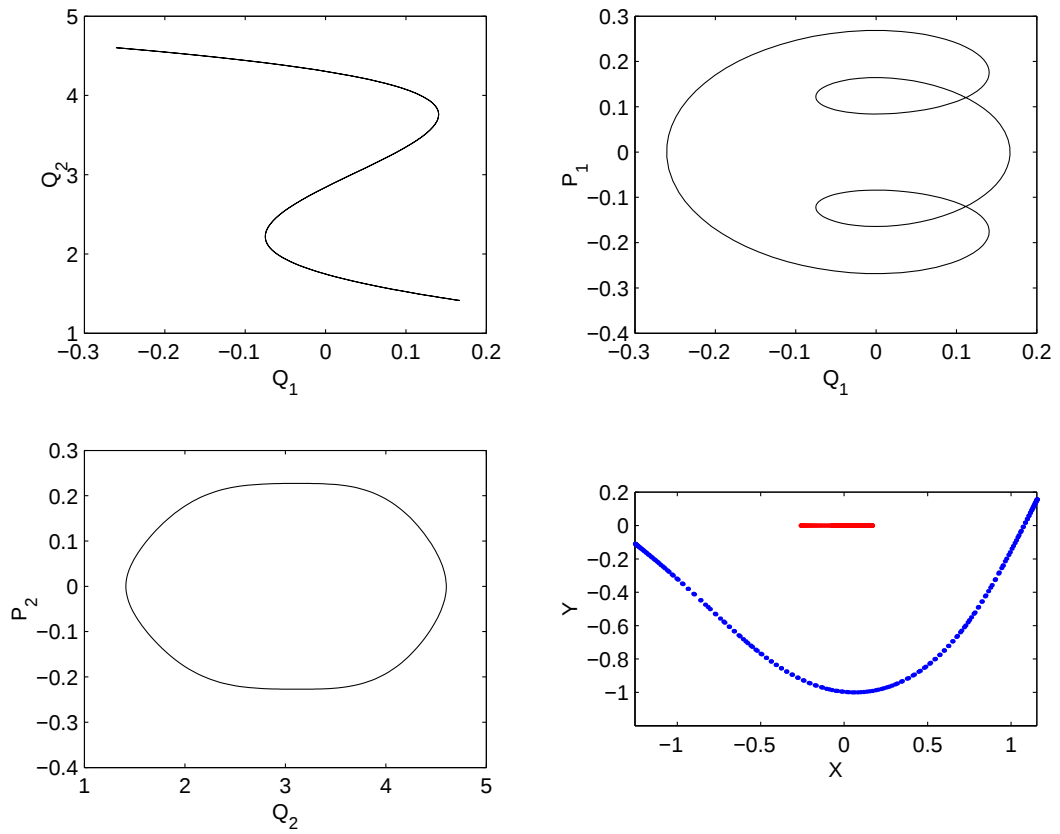


Figura 5.10: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 90 de la rama “ $m1r1$ ”. Obsérvese la pérdida de simetría de la órbita periódica. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

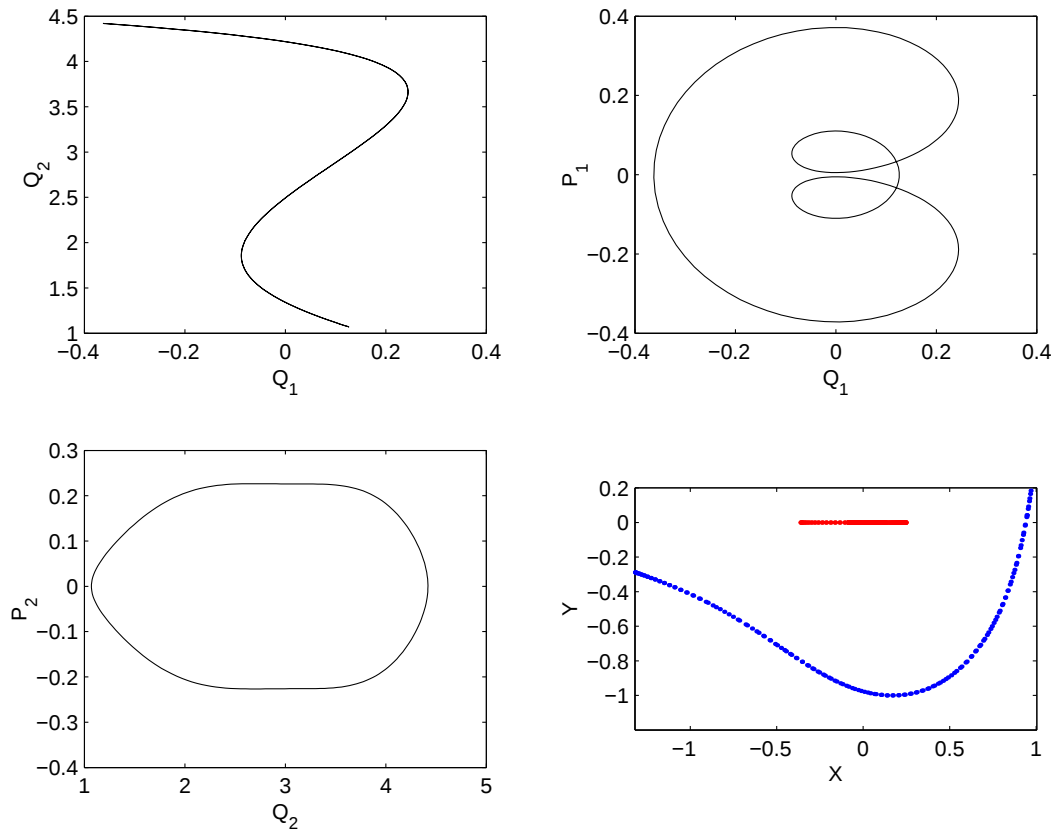


Figura 5.11: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 104 de la rama “ $m1r1$ ”. Obsérvese la pérdida de simetría de la órbita periódica. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

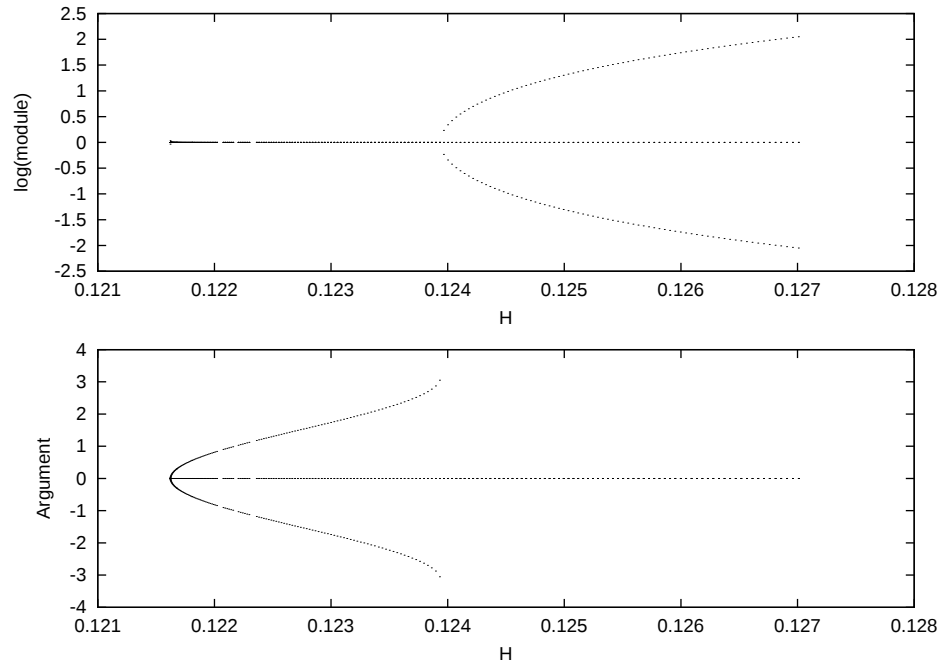


Figura 5.12: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m1r2$ ”. Obsérvese la bifurcación de duplicación que aparece.

5.1.5 Continuación de la bifurcación PD detectada en la rama “ $m1r1$ ”.

No se puede continuar la bifurcación de duplicación de periodo (PD) de la rama “ $m1r1$ ” directamente, ya que en el fichero “ $b.m1r1$ ” no aparece ninguna etiqueta que marque el punto donde esta dicha bifurcación, en cambio si que podemos continuar por la bifurcación BP detectada en la rama “ $m1r1.dup$ ”.

Primero se carga el fichero de soluciones para que continúe desde la etiqueta número “22”.

```
ld(s='m1r1.dup')
ch('IRS',22)
ch('NMX',200)
ch('ISW',-1)
ch('NPR',10)
ch('DS',-0.0005)
ch('DSMAX',0.0005)
run()
```

Guardamos la rama con el nombre “ $m1r2$ ”, en la figura (5.12) se representan los multiplicadores característicos de las órbitas de esta rama, como puede observarse, aparece de nuevo una bifurcación de duplicación de periodo. Para detectar esta bifurcación de duplicación de periodo, hay que proceder como en el caso anterior, continuar hasta una órbita cercana al punto del que se parte, en este caso el punto BP de la rama duplicada, doblar esta órbita que se ha continuado y por último recorrer la nueva rama, las

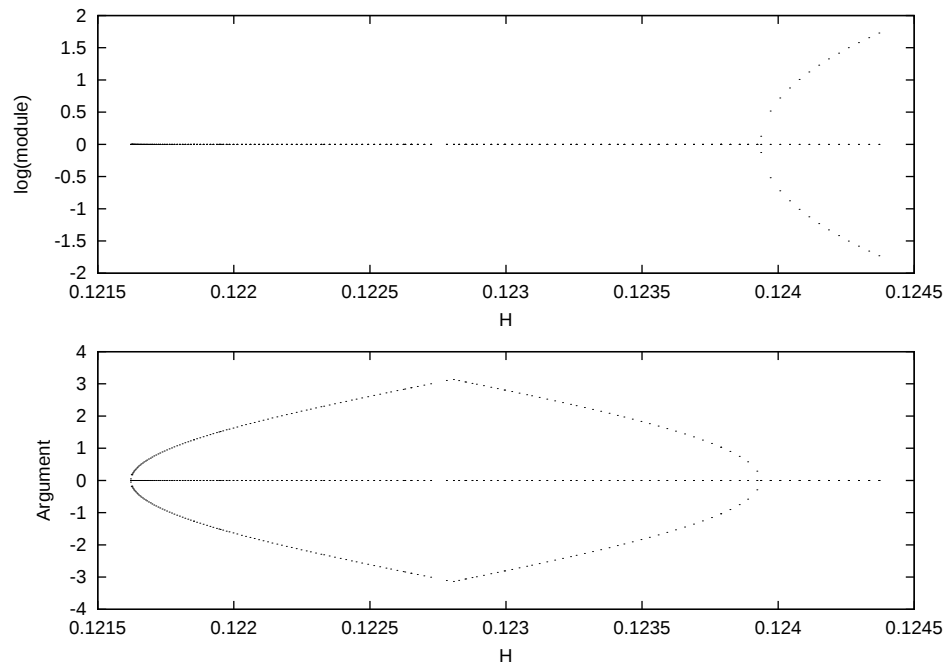


Figura 5.13: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “*m1r2.dup*”.

bifurcaciones del tipo PD se manifestaran como bifurcaciones del tipo BP.

```
ch('NMX',2)
ch('NPR',0)
run()
sv('tmp')
dobla()
ld(s='tmp')
ch('NMX',150)
ch('NPR',10)
run()
```

Auto detecta una BP y la etiqueta con el número “22”. En la figura (5.13) que muestra los multiplicadores de Floquet puede verse como en efecto lo que antes era una bifurcación de duplicación de periodo (PD), ahora es un punto de ramificación (BP). Una vez detectado el punto donde se duplica el periodo, se representa el diagrama de bifurcaciones de periodo en la figura (5.14). La figura (5.15) representa la órbita “10” de la rama “*m1r2*”.

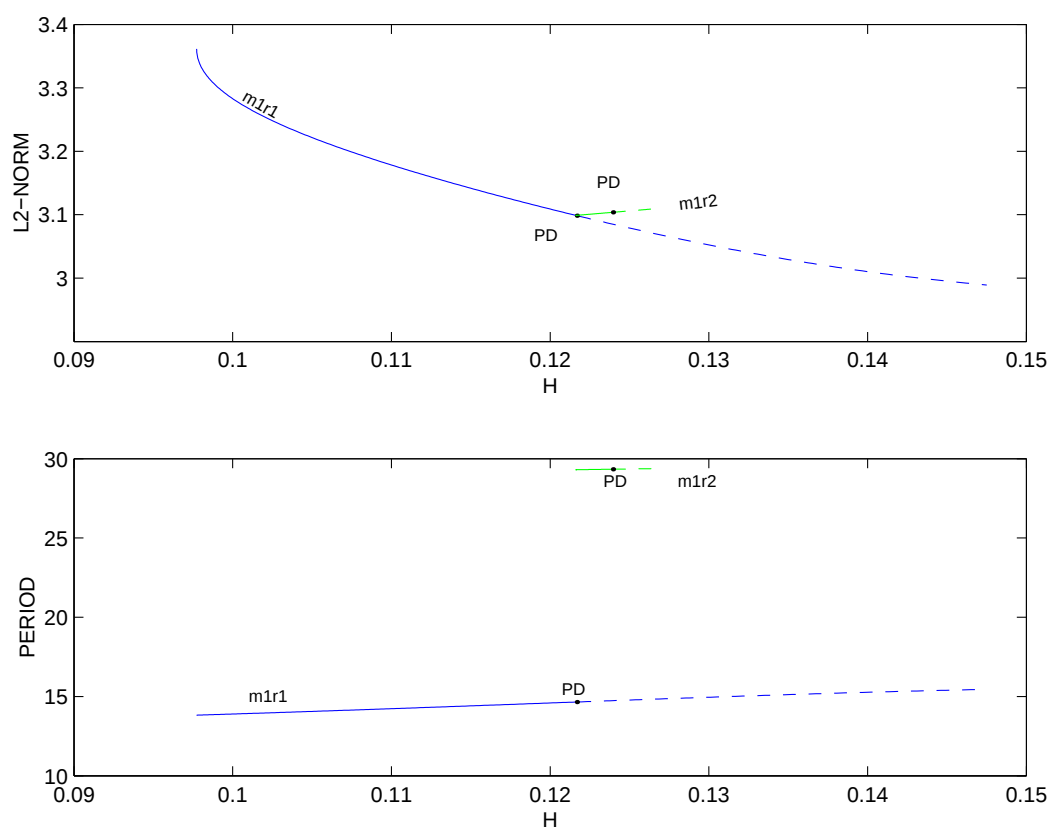


Figura 5.14: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m1r1$ ”.

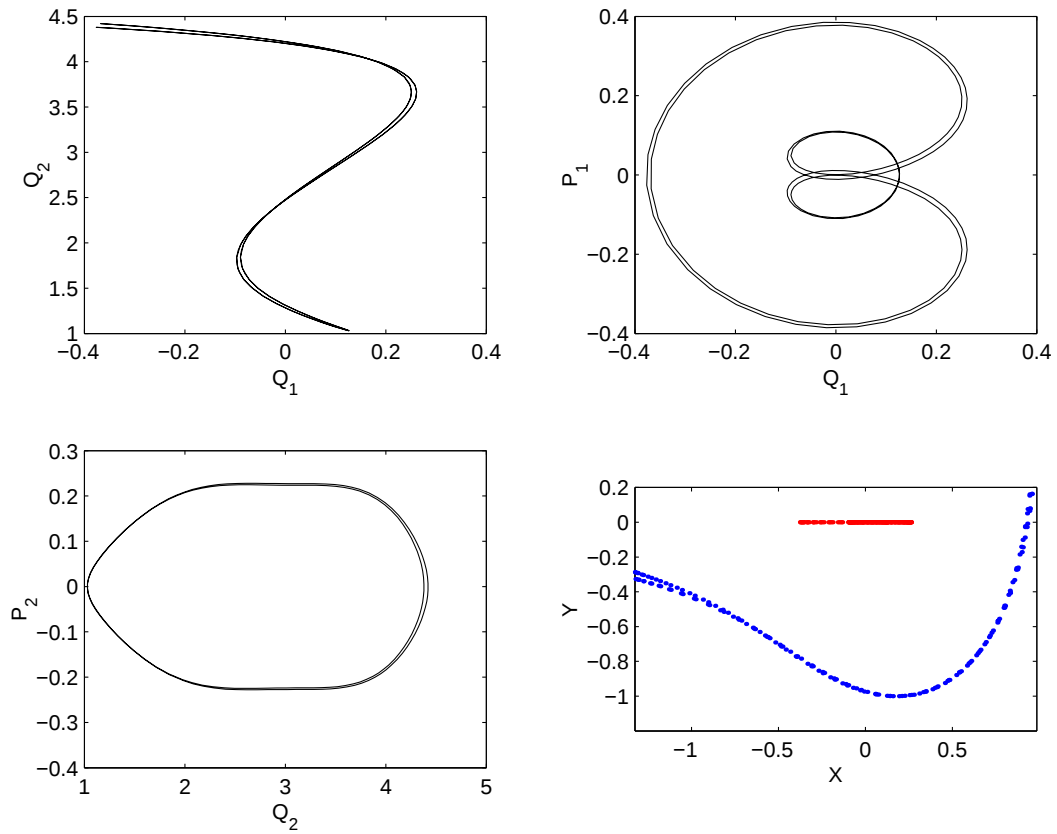


Figura 5.15: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 10 de la rama “ $m1r2$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

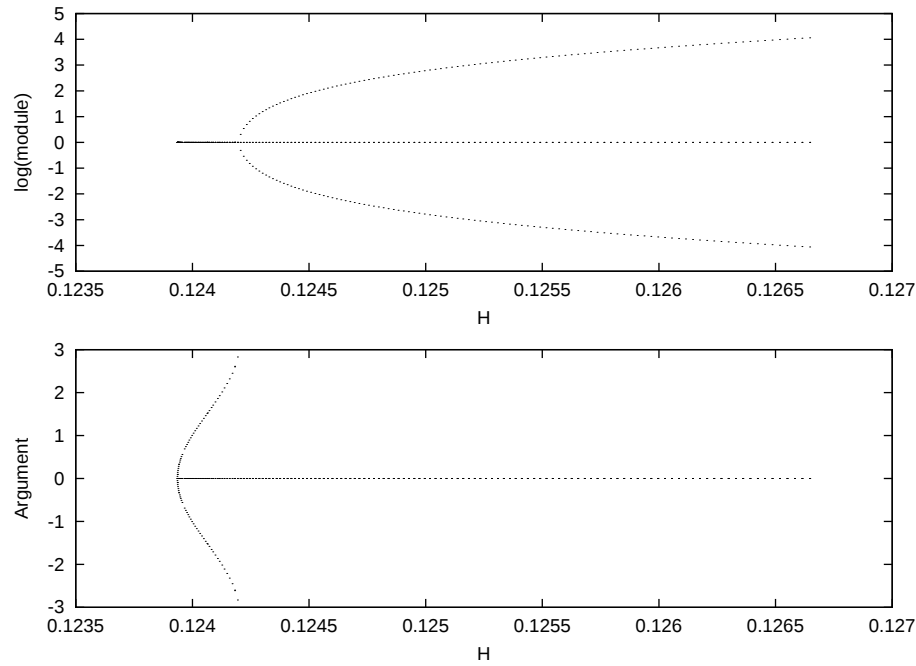


Figura 5.16: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m1r3$ ”.

5.1.6 Continuación de la bifurcación PD de la rama “ $m1r2$ ”.

Para continuar esta rama hay que partir del punto PD de la rama “ $m1r2$ ” o lo que es lo mismo, del punto BP de la rama “ $m1r2.dup$ ” que es la misma rama, pero con las órbitas duplicadas. Tras proceder de idéntica manera a los casos anteriores, se puede observar como en la nueva rama también experimenta una bifurcación de duplicación de periodo. En la figura (5.16) puede verse la evolución de los multiplicadores característicos, como puede observarse, los intervalos de energía en los que la órbita es estable, son cada vez menores, la órbita entra en una cascada de duplicaciones de periodo que constituyen una ruta directa al caos. Abandonamos por tanto la continuación de esta rama, en la sección siguiente se retrocede hasta la bifurcación de duplicación de periodo que apareció en la rama “ $modo1$ ”. En la figura (5.17) puede verse una parte ampliada del diagrama de bifurcación correspondiente a la rama “ $m1r3$ ”. Y en la figura (5.18) puede verse la órbita “41” de dicha rama.

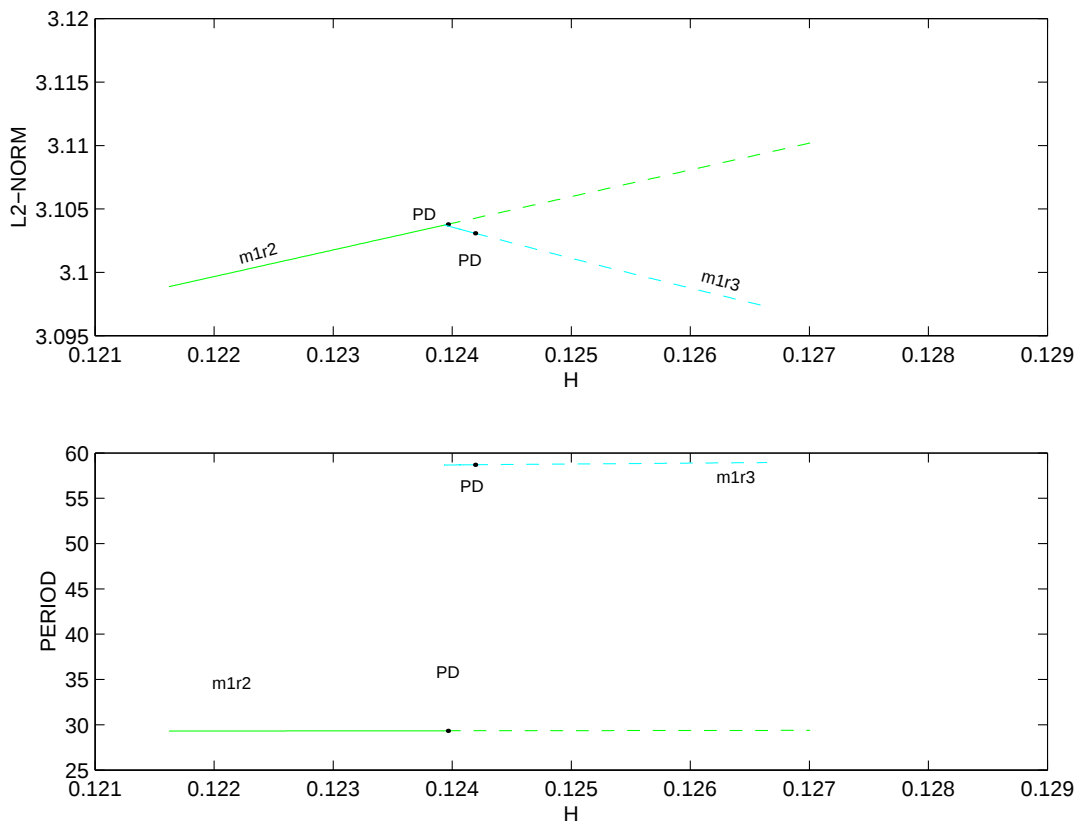


Figura 5.17: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m1r2$ ”.

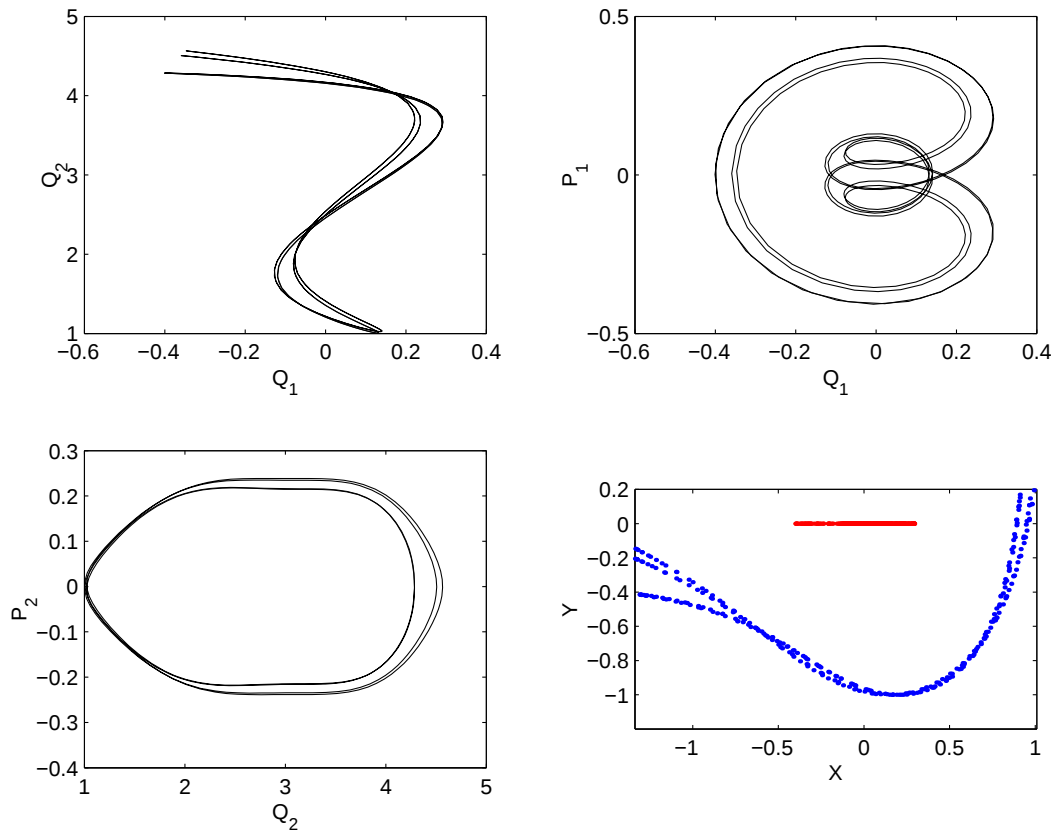


Figura 5.18: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 41 de la rama “ $m1r3$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

5.1.7 Continuación de la bifurcación PD de la rama “*modo1*”.

Para continuar por este nuevo punto sólo hay que introducir los siguientes comandos.
Cargar el fichero de soluciones de la rama a continuar.

```
ld(s='modo1')
```

Cambiar el parámetro “ISW” para que cambie de rama.

```
ch('ISW',-1)
```

Cargar la etiqueta correspondiente al punto PD.

```
ch('IRS',42)
```

Para que guarde en el fichero de soluciones una órbita de cada diez.

```
ch('NPR',10)
```

Para que compute “900” órbitas.

```
ch('NMX',900)
```

Se cambia el paso inicial y máximo.

```
ch('DS',-.001)
```

```
ch('DSMAX',.001)
```

Como se va a continuar por un punto donde el periodo es el doble, se duplica el número de puntos que utiliza para guardar la órbita.

```
ch('NTST',100)
```

```
run()
```

En la figura (5.19) puede verse la evolución de los multiplicadores característicos, puede observarse como esta rama también experimenta una bifurcación de duplicación de periodo. La figura (5.20) muestra la rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD que hay en la rama “*modo1*”. En las figuras (5.21) y (5.22) se representan las órbitas “130” y “178” de la rama que se está continuando.

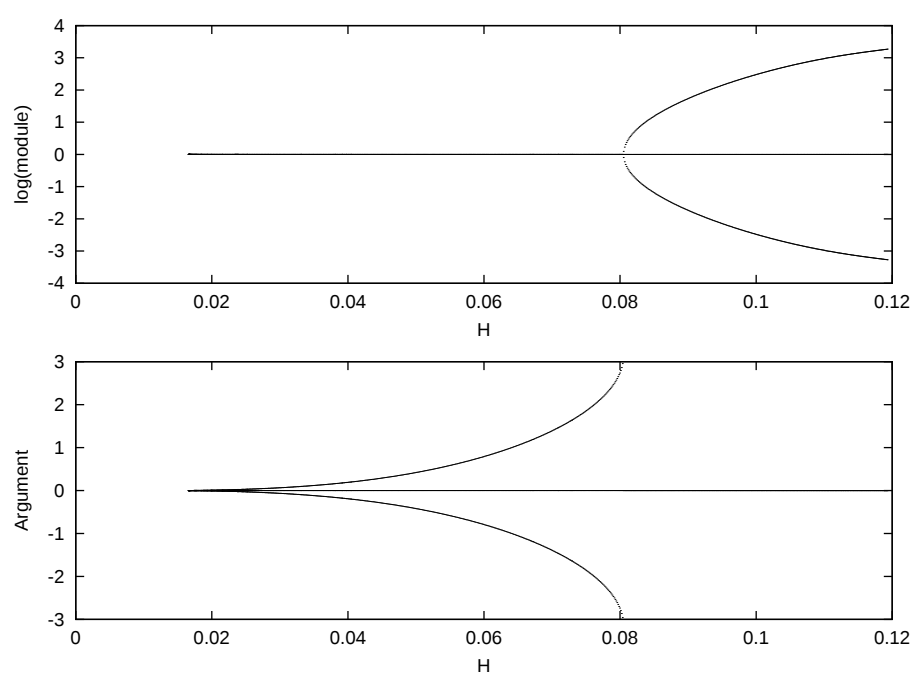


Figura 5.19: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m1s1$ ”.

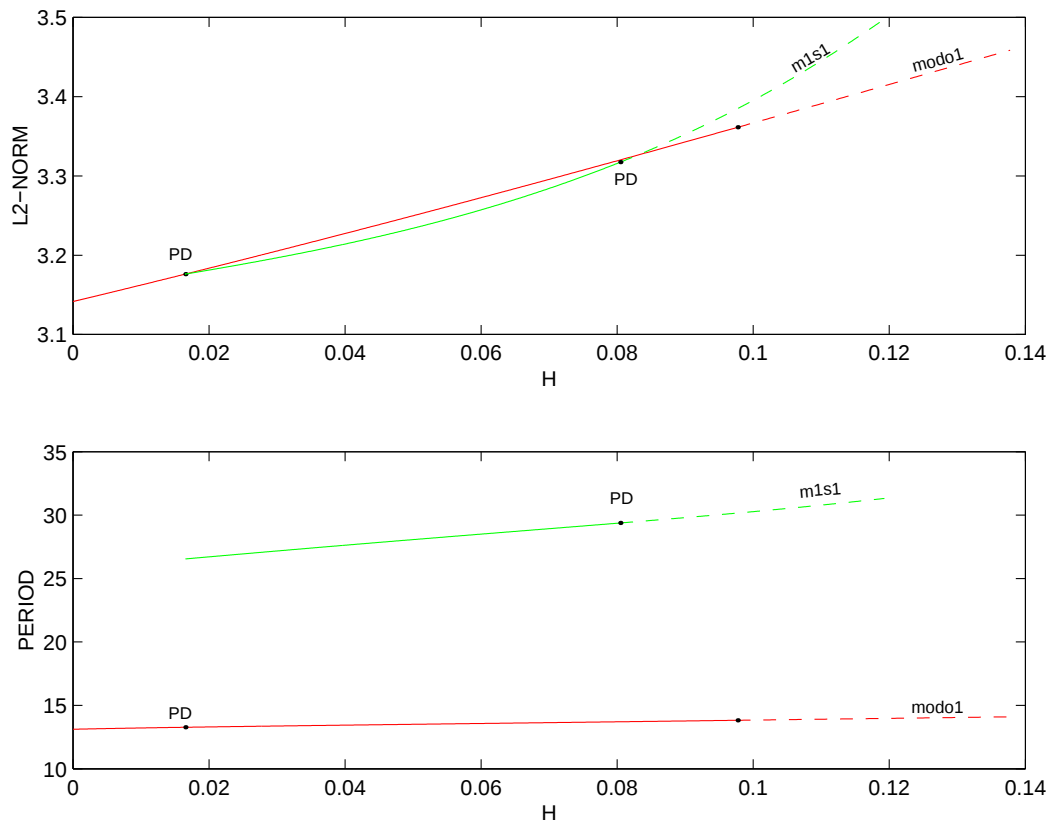


Figura 5.20: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “*modo1*”.

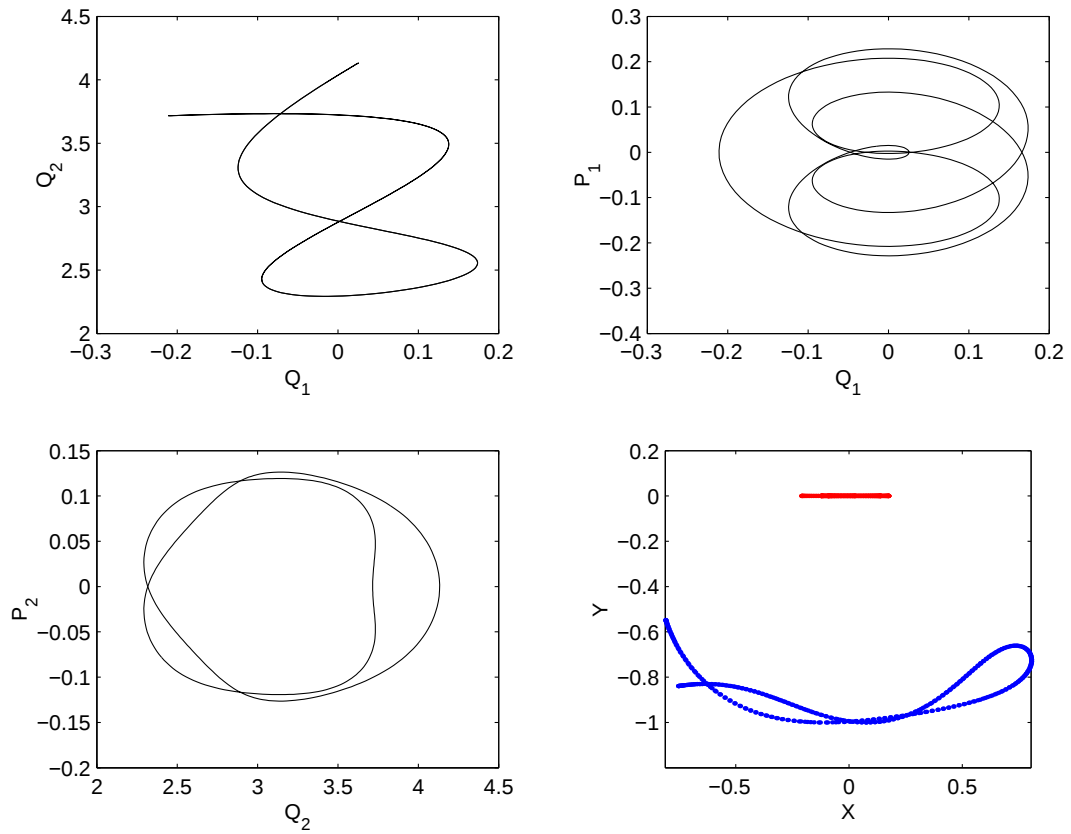


Figura 5.21: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 130 de la rama “*m1s1*”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

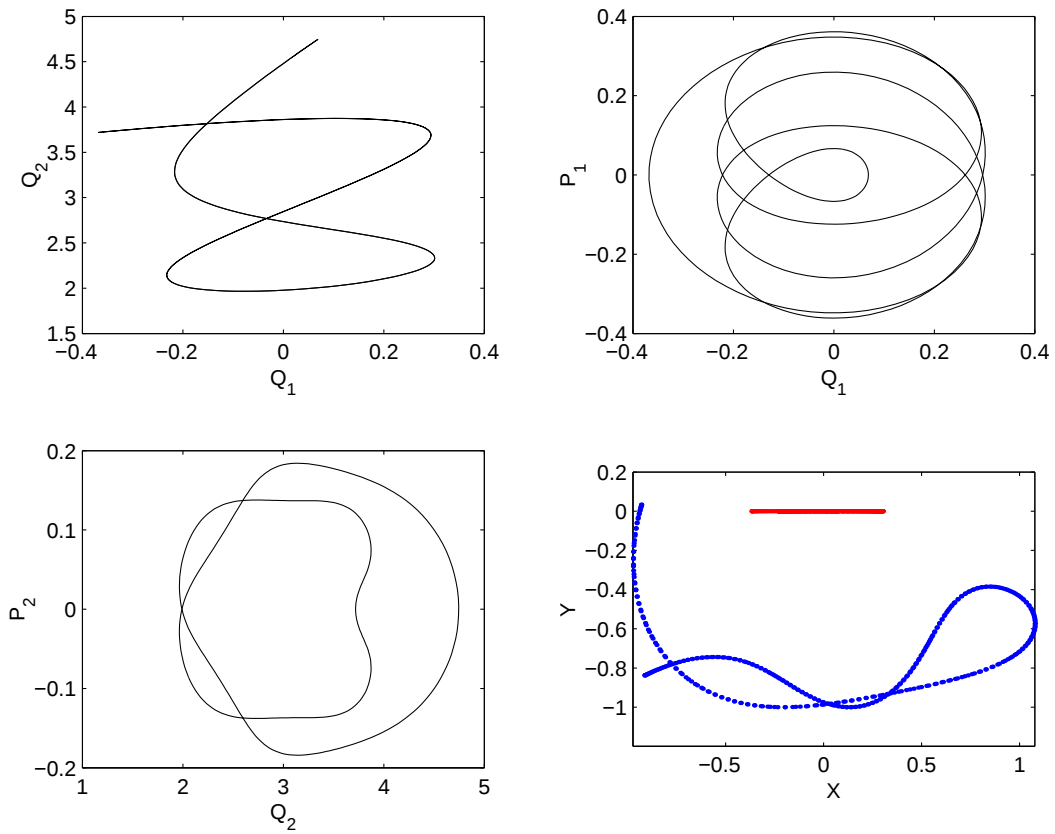


Figura 5.22: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 178 de la rama “*m1s1*”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

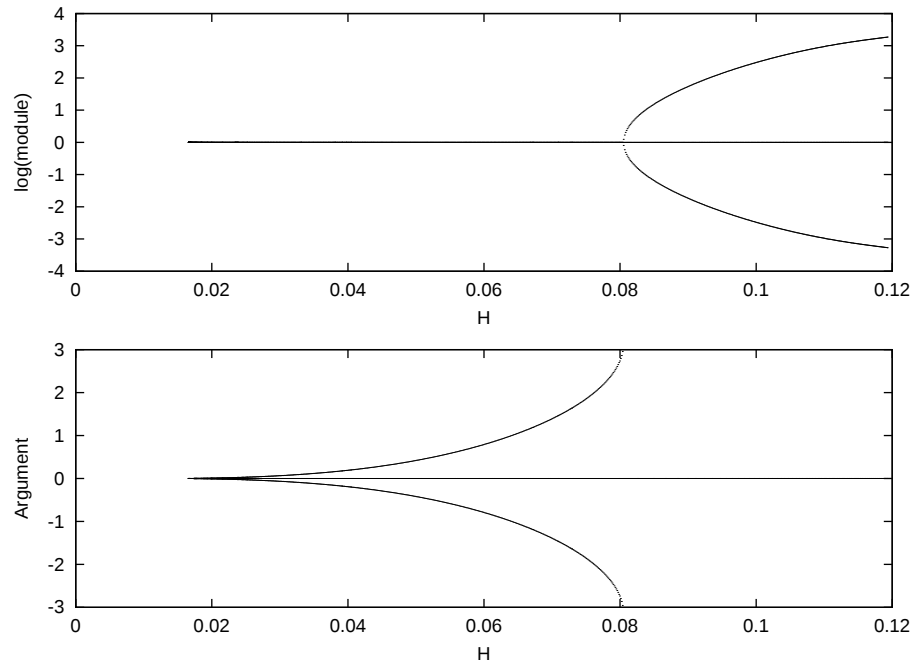


Figura 5.23: Evolución de los multiplicadores característicos a lo largo de la rama de órbitas periódicas inestable que emana de la bifurcación PD de la rama *modo1*.

5.1.8 Detección y continuación de la rama de órbitas periódicas inestables que emana de la bifurcación PD de la rama “*modo1*”.

La teoría dice que cuando una órbita periódica experimenta una bifurcación de duplicación de periodo con “passing¹”, son dos las ramas que emanan de la bifurcación de duplicación de periodo, una estable y la otra inestable. La figura (5.23) muestra la evolución de los multiplicadores característicos de esta rama inestable, puede verse como divergen cada vez más. La gráfica (5.24) muestra el diagrama de bifurcaciones y las gráficas (5.25), (5.26) y (5.27) muestran tres órbitas periódicas de esta rama. Obsérvese como la trayectoria descrita por la masa al final del péndulo es una órbita cerrada.

¹El término “passing” se aplica cuando los multiplicadores característicos llegan al punto “-1” y continúan por el círculo unidad en vez de abrirse y continuar por el eje real, en cuyo caso se llamaría “splitting”.

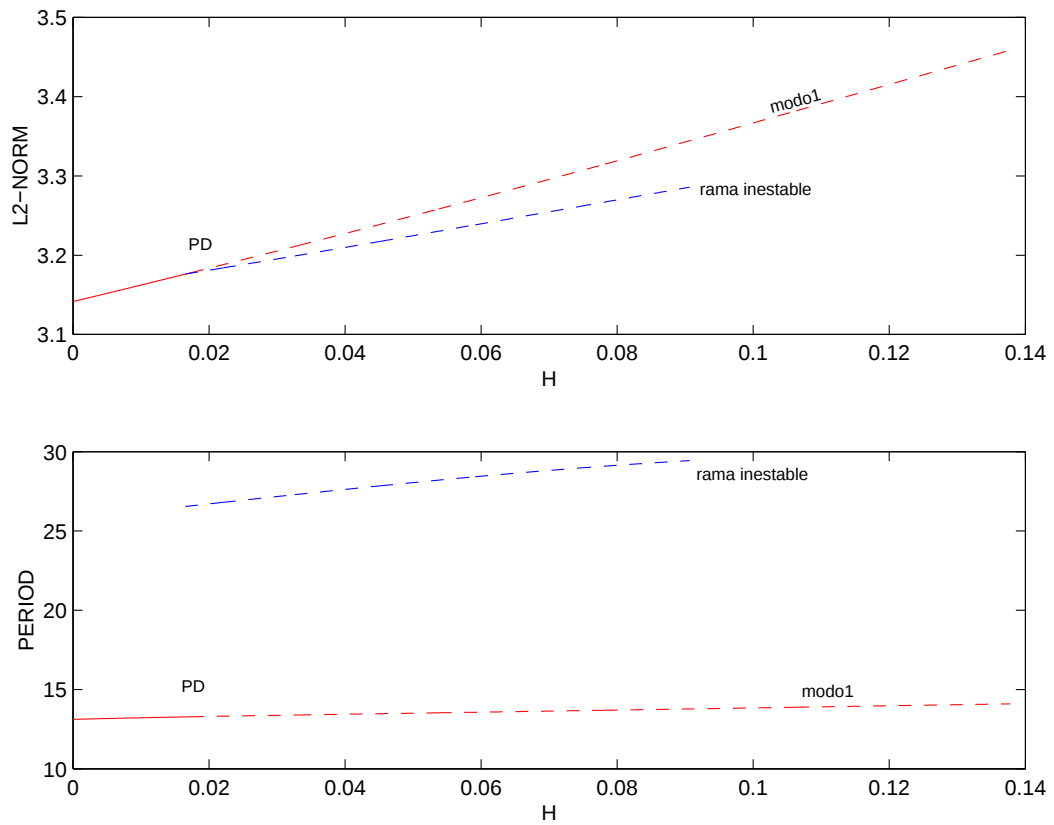


Figura 5.24: Rama de órbitas periódicas inestables que emana de la bifurcación PD de la rama “modo1”.

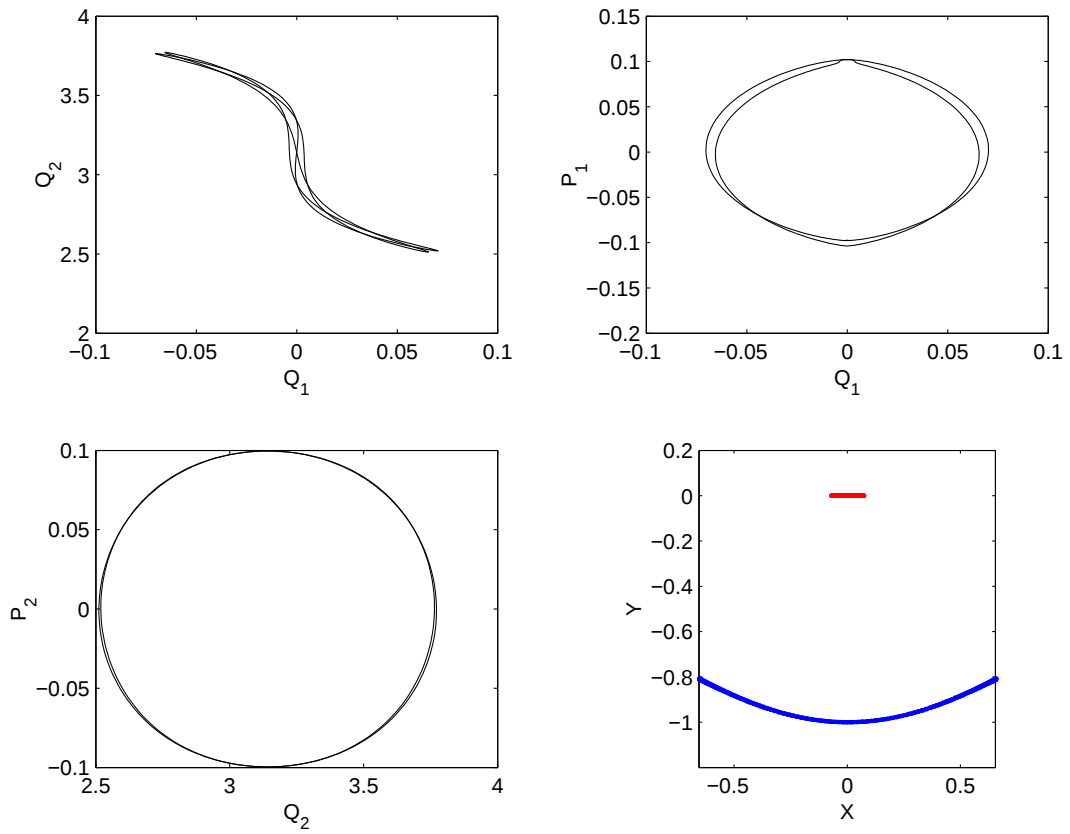


Figura 5.25: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita periódica inestable 211 de la rama inestable que emana de la bifurcación PD de la rama *modo1*. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

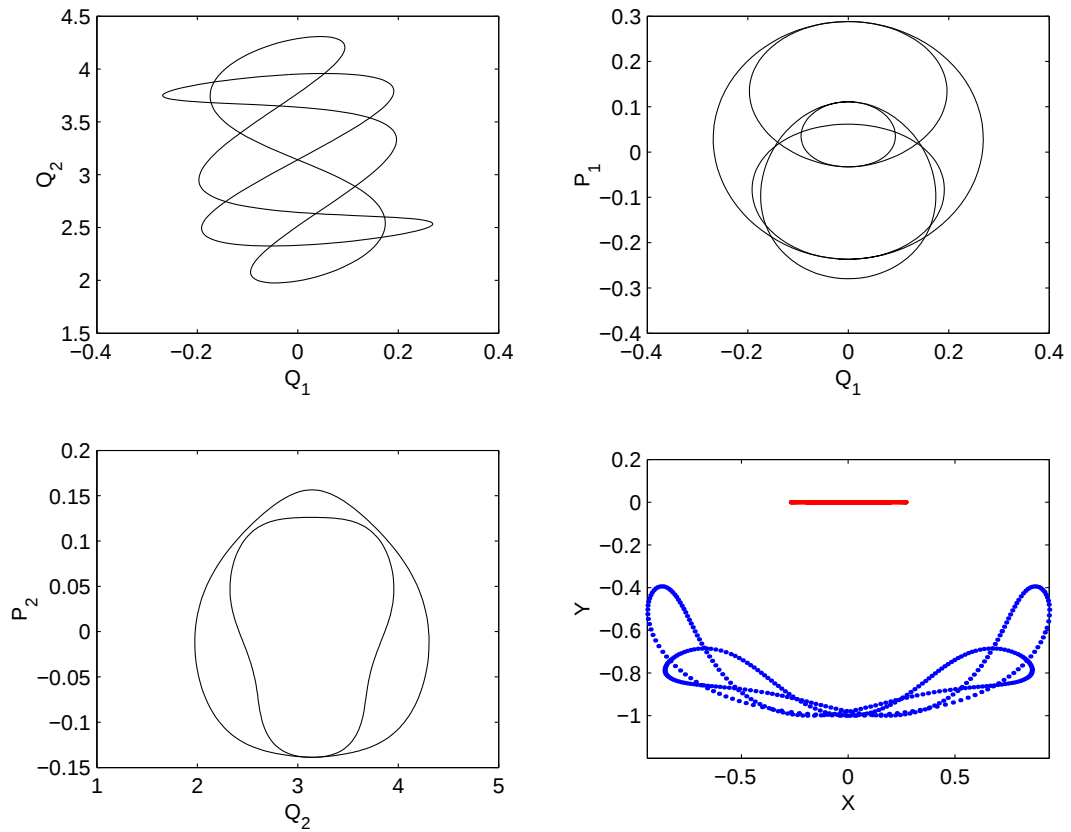


Figura 5.26: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita periódica inestable 245 de la rama inestable que emana de la bifurcación PD de la rama *modo1*. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

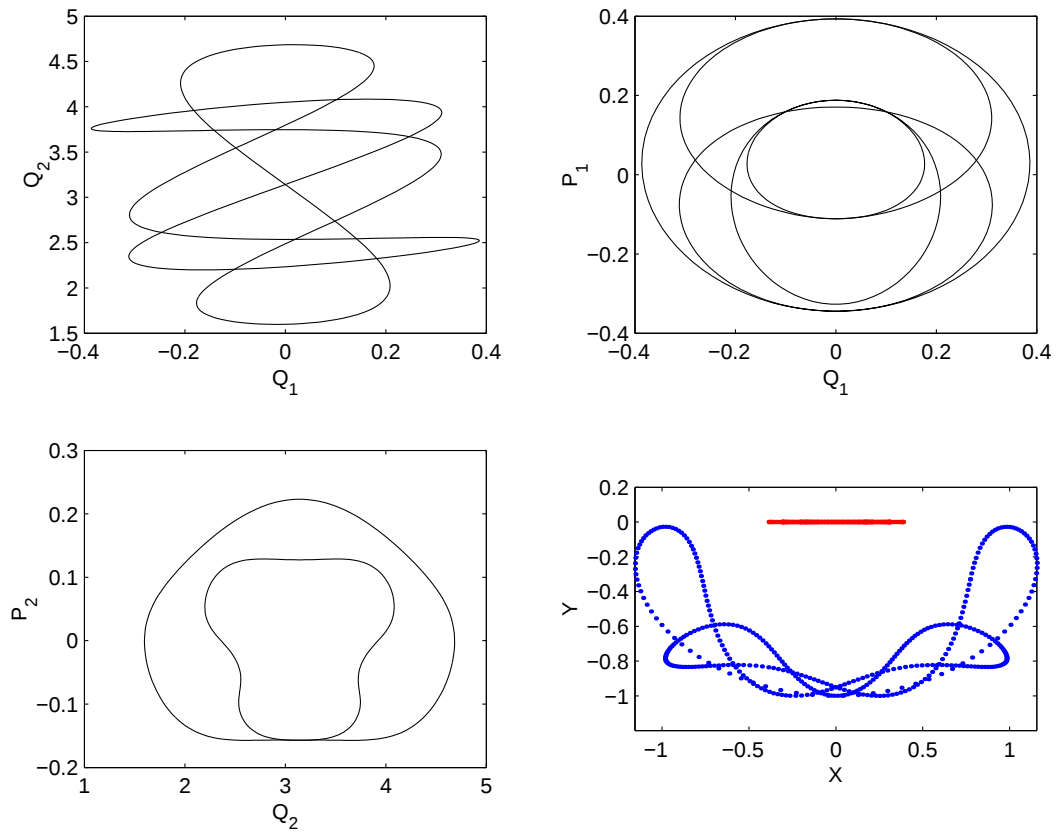


Figura 5.27: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita periódica inestable 270 de la rama inestable que emana de la bifurcación PD de la rama *modo1*. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

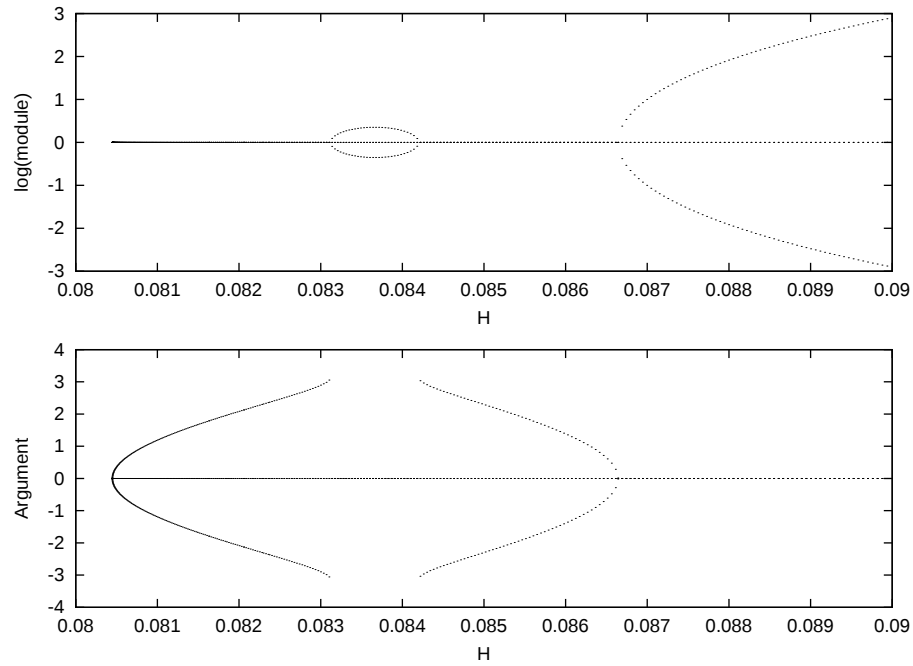


Figura 5.28: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m1s2$ ”.

5.1.9 Continuación de la bifurcación PD de la rama “ $m1s1$ ”.

Se parte de la bifurcación PD de la rama “ $m1s1$ ” y se continúa por la rama “ $m1s2$ ”. Las gráficas (5.28), (5.29), (5.30) y (5.31), muestran los multiplicadores característicos, el diagrama de bifurcaciones y dos órbitas periódicas. La solución experimenta de nuevo una bifurcación de duplicación de periodo.

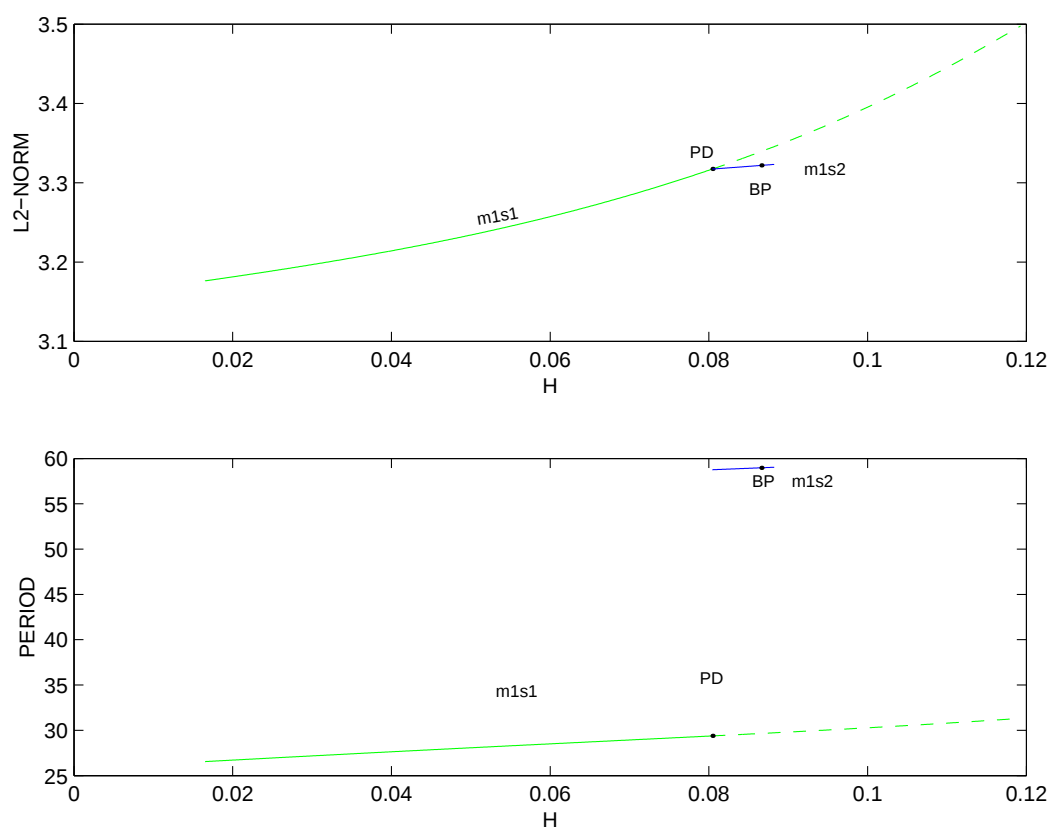


Figura 5.29: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m1s1$ ”.

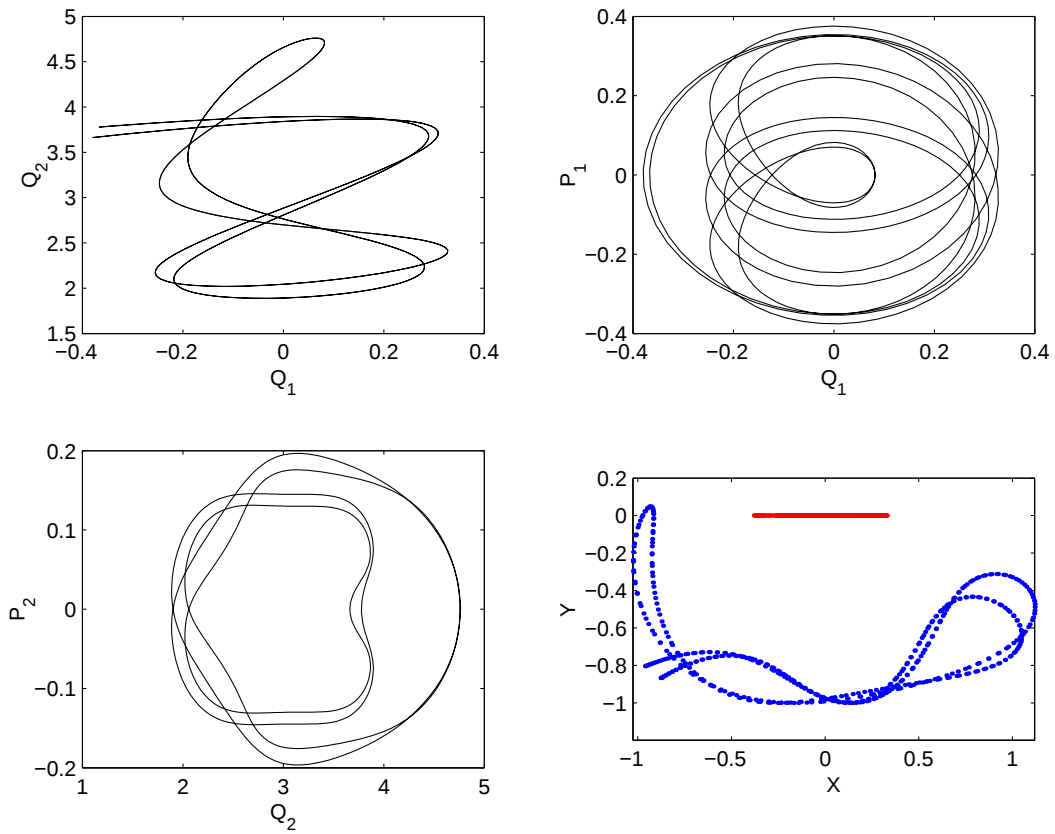


Figura 5.30: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 137 de la rama “ $m1s2$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

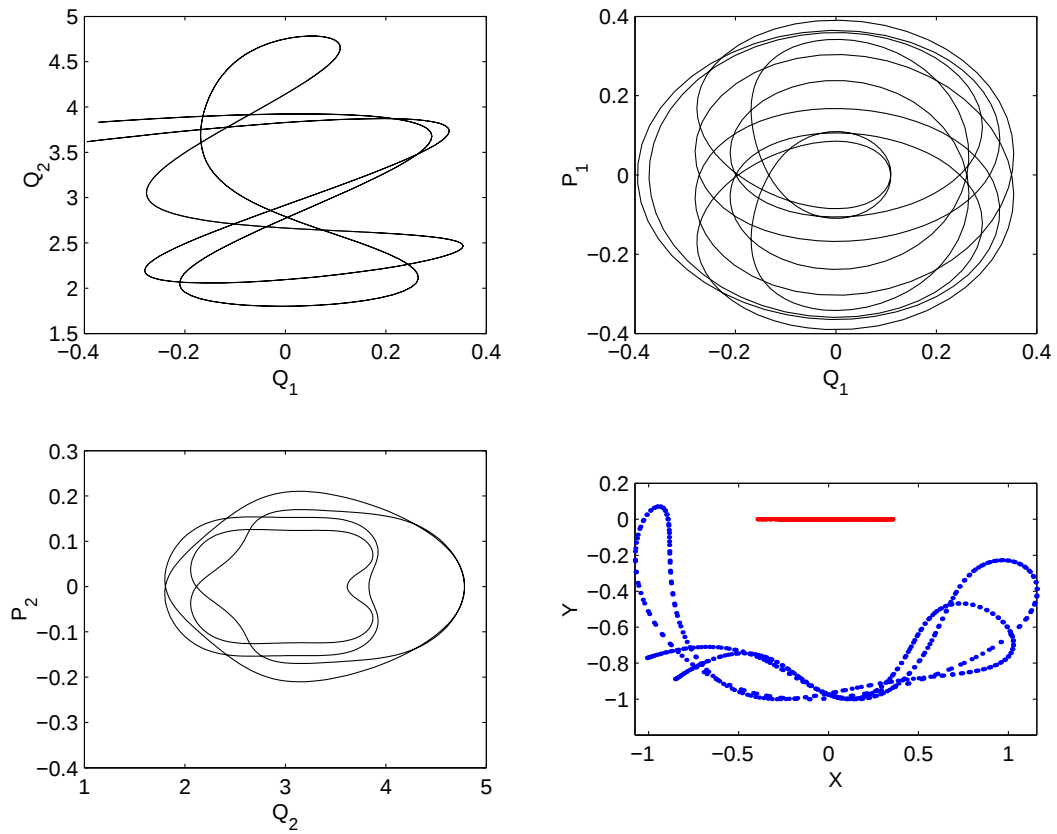


Figura 5.31: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 144 de la rama “ $m1s2$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

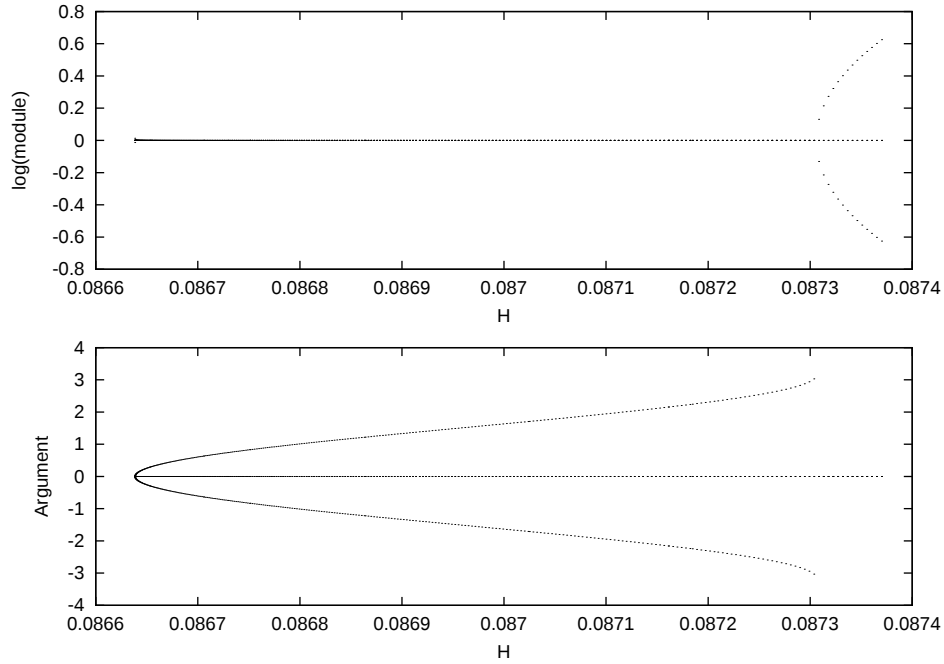


Figura 5.32: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m1s3$ ”.

5.1.10 Continuación de la bifurcación BP de la rama “ $m1s2$ ”.

Se parte de la bifurcación PD de la rama “ $m1s2$ ” y se continúa por la rama “ $m1s3$ ”, pero esta vez la solución experimenta una bifurcación BP.

Las gráficas (5.32), (5.33) y (5.34), muestran los multiplicadores característicos, el diagrama de bifurcaciones y una órbita periódica.

La rama que se está computando, entra en una cascada de duplicaciones de periodo que no sólo conducen el sistema al caos sino que impide que podamos continuar una rama más, debido a la aparición de errores numéricos. Por tanto, en este punto se abandona la continuación de esta rama, en el siguiente apartado, se tratará de continuar el otro modo normal el que se ha llamado “ $modo2$ ”.

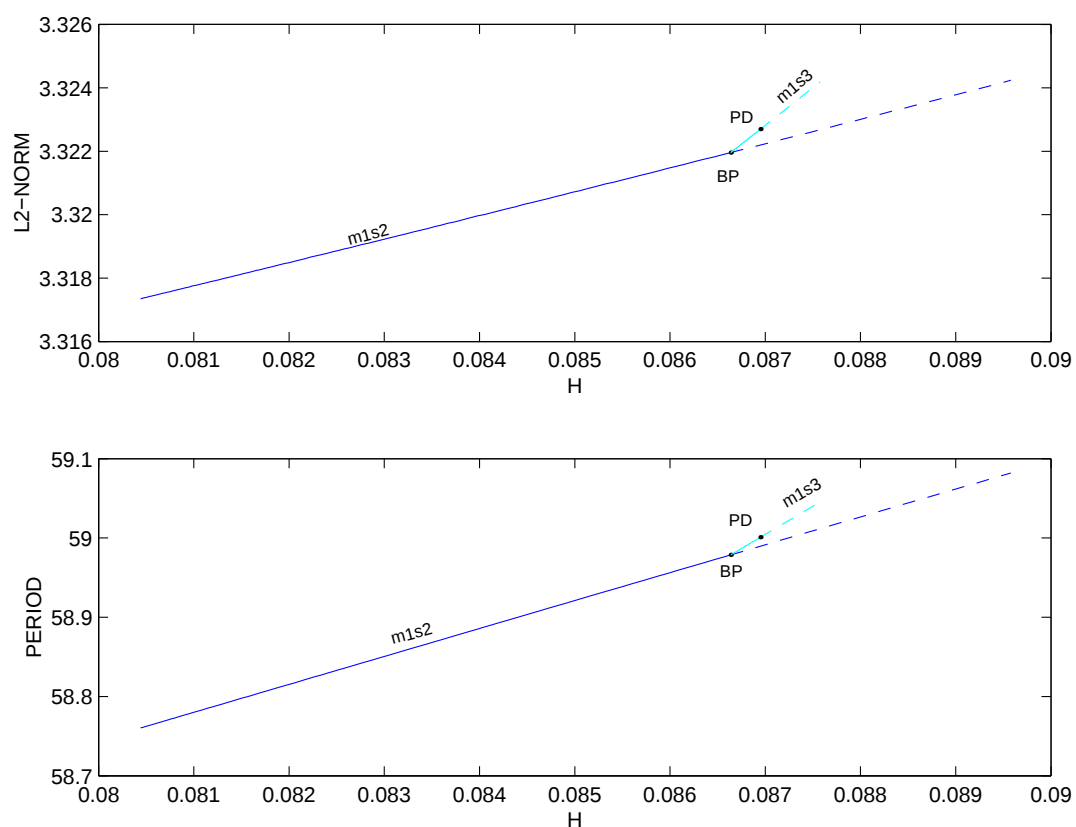


Figura 5.33: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m1s2$ ”.

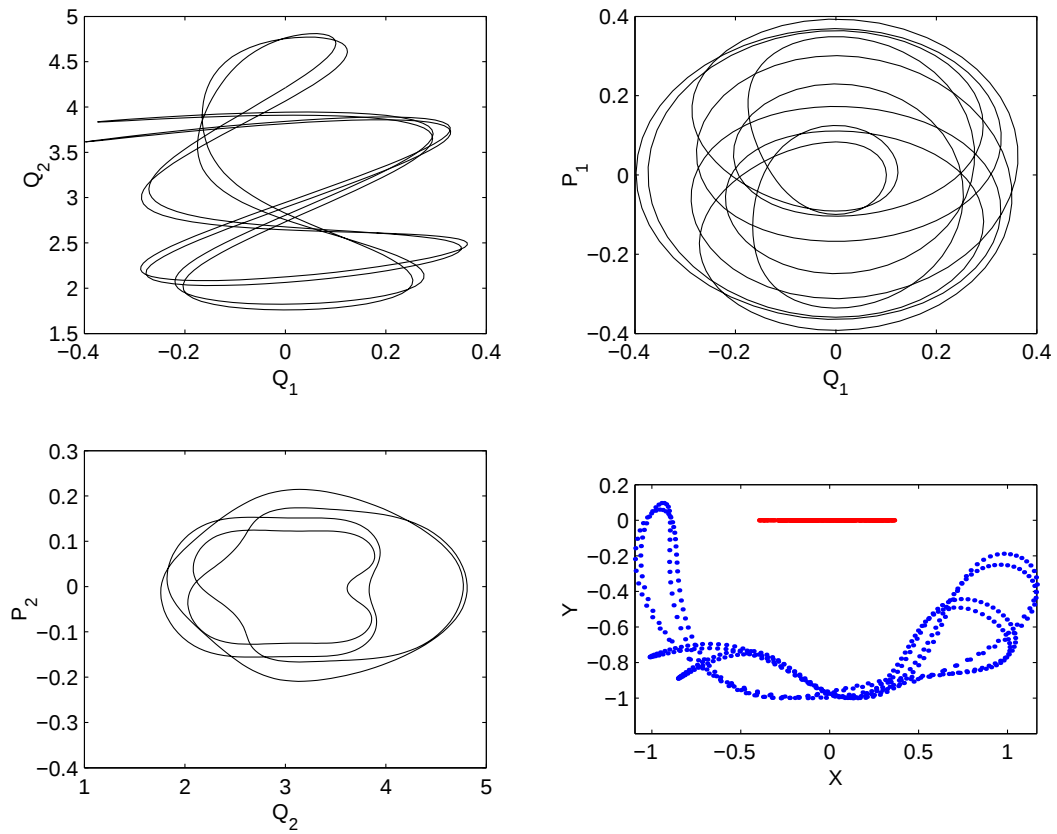


Figura 5.34: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 240 de la rama “ $m1s3$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

5.1.11 Continuación del segundo modo normal.

Al continuar la bifurcación de Hopf, AUTO ha seguido uno de los dos modos normales, el objetivo de este capítulo, es forzar al programa a que continúe el otro modo normal. Para realizar este proceso, lo primero que hay que hacer es continuar hasta una órbita cercana a la bifurcación de Hopf, de manera análoga a como se hace para doblar una órbita y detectar una bifurcación de duplicación de periodo.

```
ld(s='hopf')
ch('IPS',2)
ch('IRS',2)
ch('NPR',0)
ch('DS',-.002)
ch('DSMAX',.002)
ch('NMX',2)
run()
```

Lo siguiente es editar el fichero de soluciones “*fort.8*” y modificar el periodo de la única órbita que aparece, concretamente se trata de sustituir el valor “13.1158” por “5.0367”. Como cerca del equilibrio las dos ramas correspondientes a los dos modos normales están muy cerca, ya que parten del mismo punto, AUTO continúa por la rama de periodo que se le indica en el fichero de soluciones “*fort.8*”.

Una vez hecho esto sólo queda continuar desde esta nueva órbita modificada, para ello hay que hacer los siguientes cambios en las constantes de AUTO.

```
ch('IRS',4)
ch('ISW',-1)
ch('NPR',10)
ch('NMX',400)
ch('DS',.002)
ch('DSMAX',.002)
run()
```

Salvamos los ficheros con la extensión “*modo2*”.

```
sv('modo2')
```

El programa detecta un punto de ramificación BP, en la órbita con etiqueta número “51”, figura (5.35) muestra los multiplicadores característicos de esta rama de órbitas periódicas. Antes de continuar se salvan los ficheros con la extensión “**.modo2*”.

```
sv('modo2')
```

En la figura (5.36) se muestra el diagrama de bifurcaciones, y en las figuras (5.37) y (5.38) aparecen las órbitas números “10” y “50”.

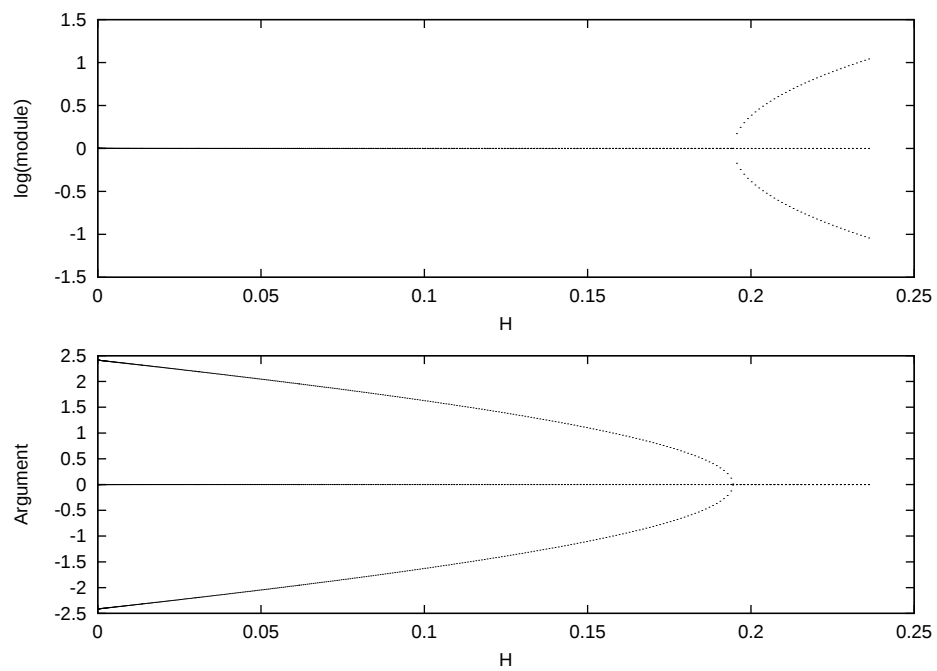


Figura 5.35: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “modo2”.

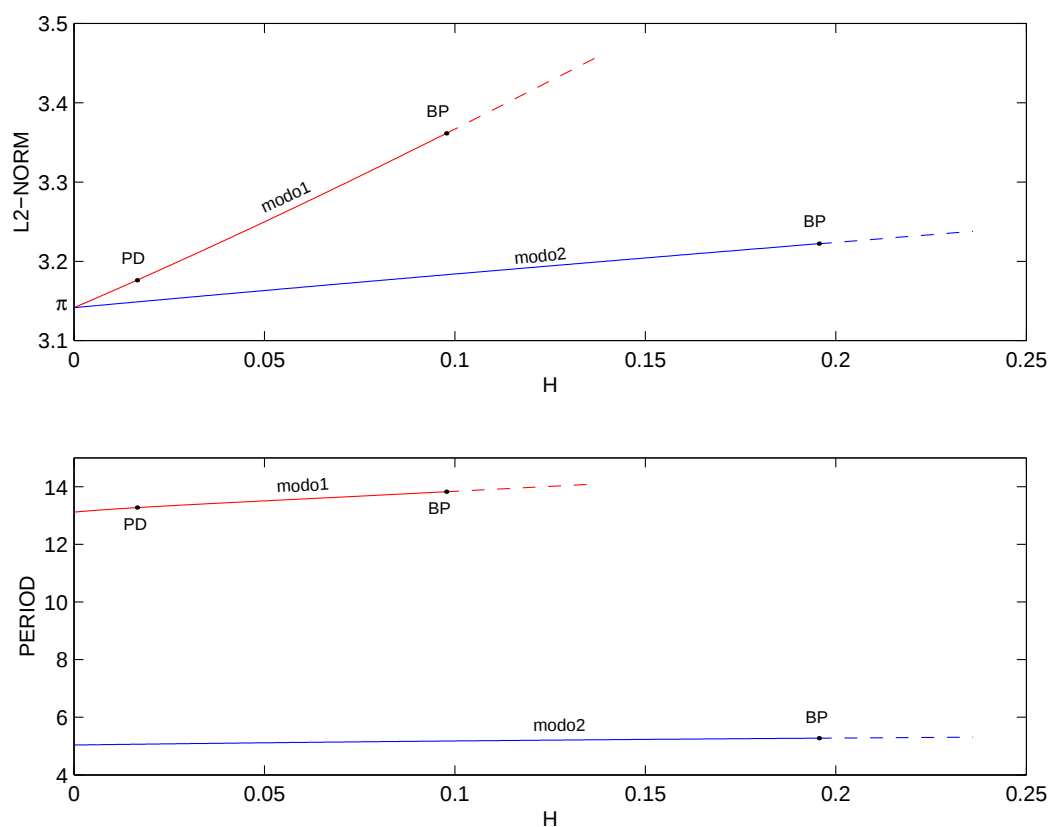


Figura 5.36: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación de Hopf, correspondientes al segundo modo normal.

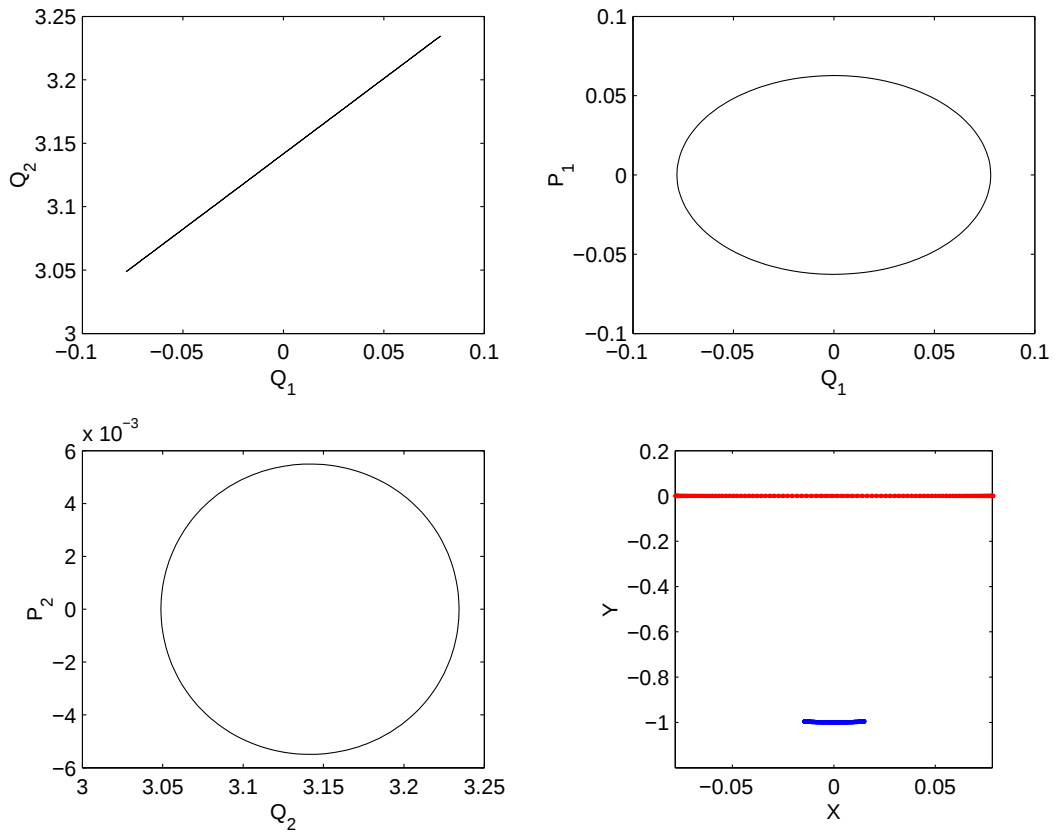


Figura 5.37: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 10 de la rama “modo2”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

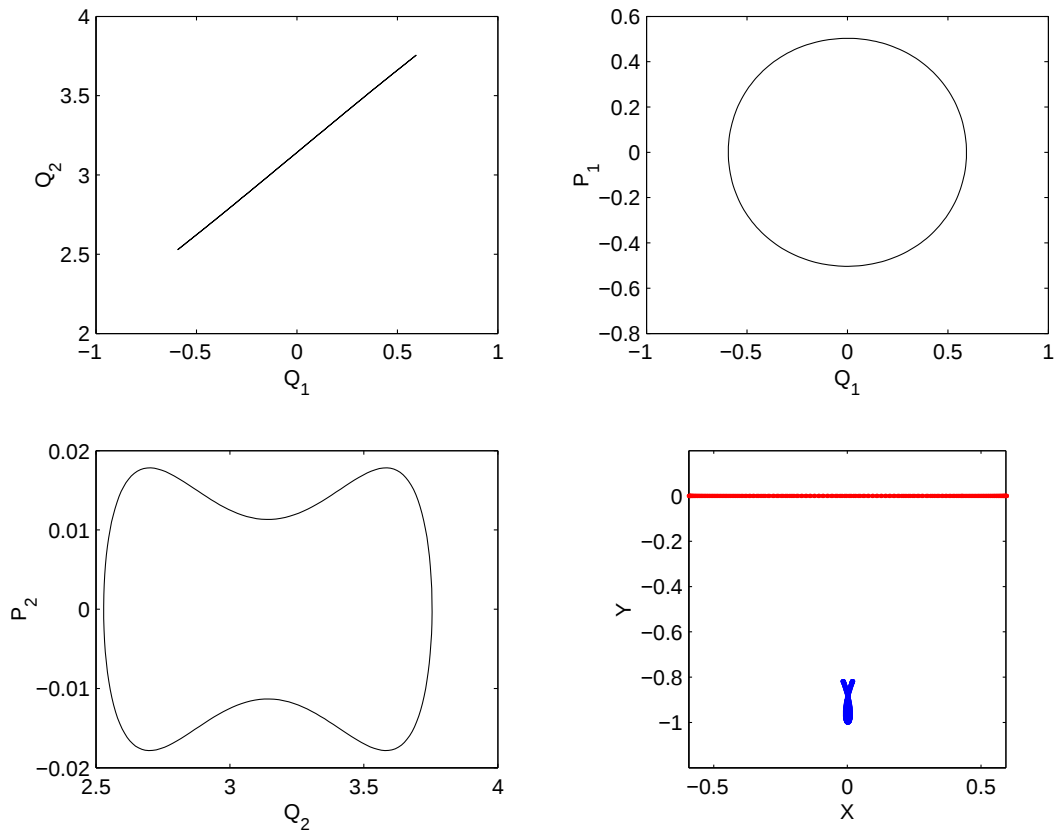


Figura 5.38: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 50 de la rama “modo2”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

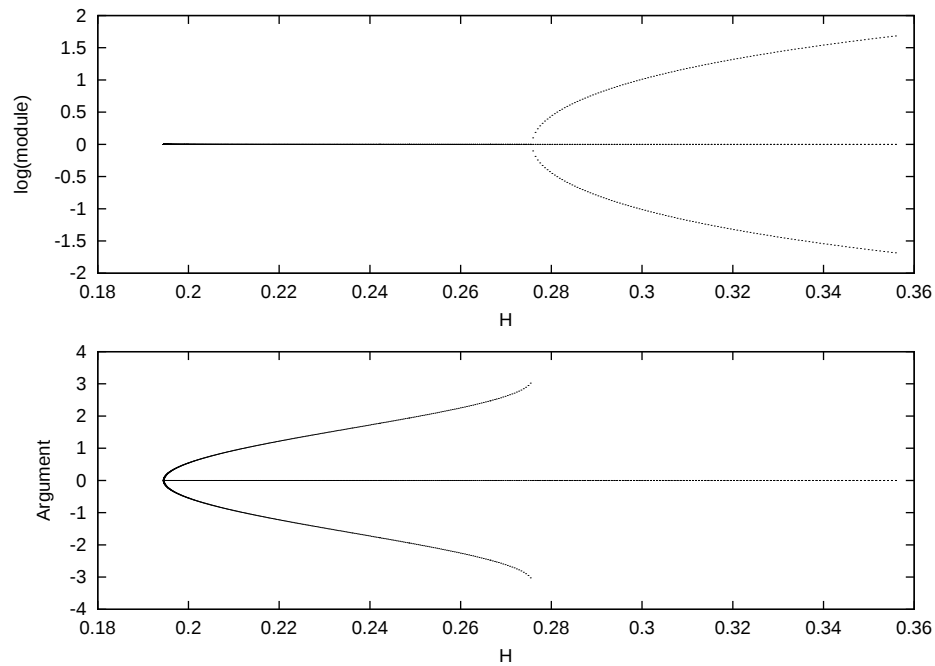


Figura 5.39: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m2$ ”.

5.1.12 Continuación de la bifurcación BP de la rama “ $modo2$ ”.

La bifurcación que se quiere continuar ha sido etiquetada por el programa con el número “51”, para continuar por ella hay que hacer los siguientes cambios en las constantes de AUTO.

```
ld(s='modo2')
ch('IRS',51)
ch('ISW',-1)
ch('NPR',10)
ch('NMX',500)
ch('DS',-.002)
ch('DSMAX',.002)
run()
```

Salvamos los ficheros con la extensión “ $m2$ ”.

```
sv('m2')
```

La figura (5.39) muestra los multiplicadores característicos de esta rama de órbitas periódicas.

El siguiente paso será detectar la bifurcación de duplicación de periodo que AUTO no ha conseguido detectar.

5.1.13 Detección de la bifurcación PD de la rama “ m_2 ”.

Para detectar la bifurcación PD se procede de manera análoga a los casos anteriores:

```
ch('NMX',2)
ch('NPR',0)
ch('ISW',-1)
run()
sv('tmp')
dobla()
ld(s='tmp')
ch('IRS',1)
ch('ISW',1)
ch('NPR',10)
ch('NMX',500)
ch('DS',-.002)
ch('DSMAX',.002)
run()
sv('m2.dup')
```

Cuando se continúa esta rama, AUTO detecta una bifurcación BP que se corresponde con la bifurcación PD que andábamos buscando y que es etiquetada con el número “60”.

La figura (5.40) muestra el diagrama de bifurcación de esta rama, y en las figuras (5.41) y (5.42) aparecen dos órbitas periódicas estables de esta rama, concretamente las número “70” y “120”. Obsérvese como la solución ha perdido la simetría ya que el péndulo oscila solamente a un lado del plano (X, Y) . Continuando por esta rama posiblemente podamos llegar a estabilizar el péndulo.

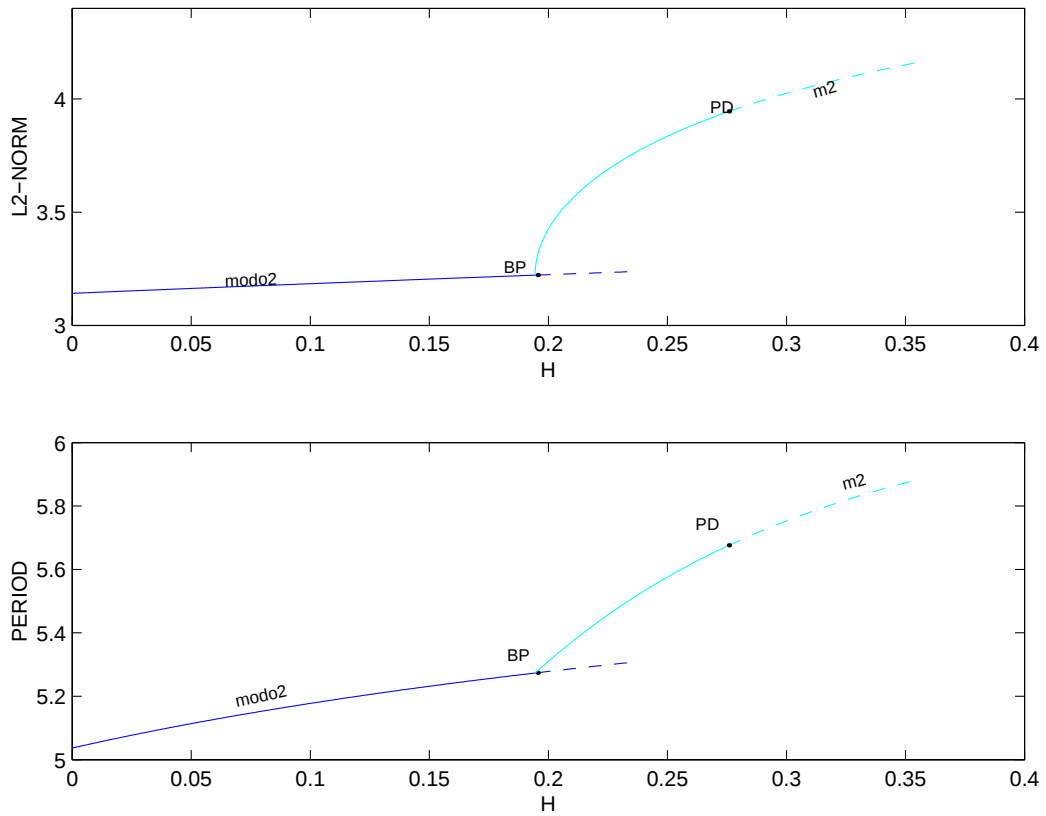


Figura 5.40: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación BP de la rama “modo2”.

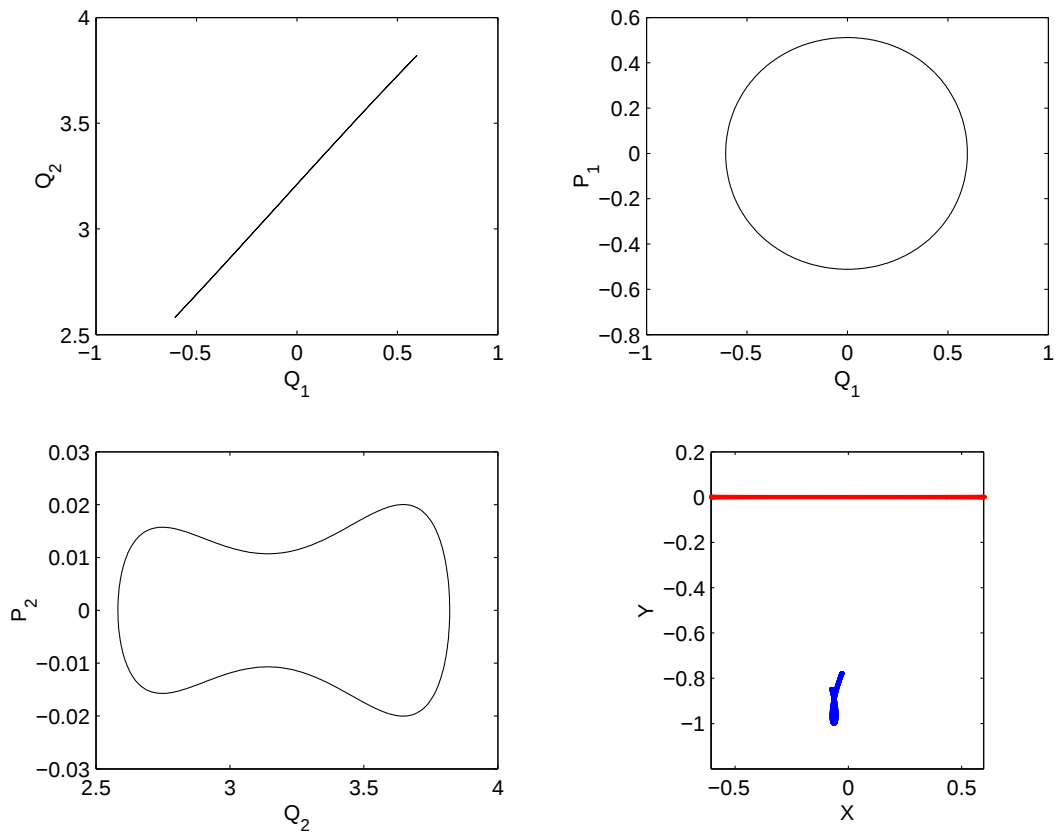


Figura 5.41: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 70 de la rama “ m_2 ”. Obsérvese la pérdida de simetría al oscilar el péndulo sólo a uno de los lados del plano (X, Y) . La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

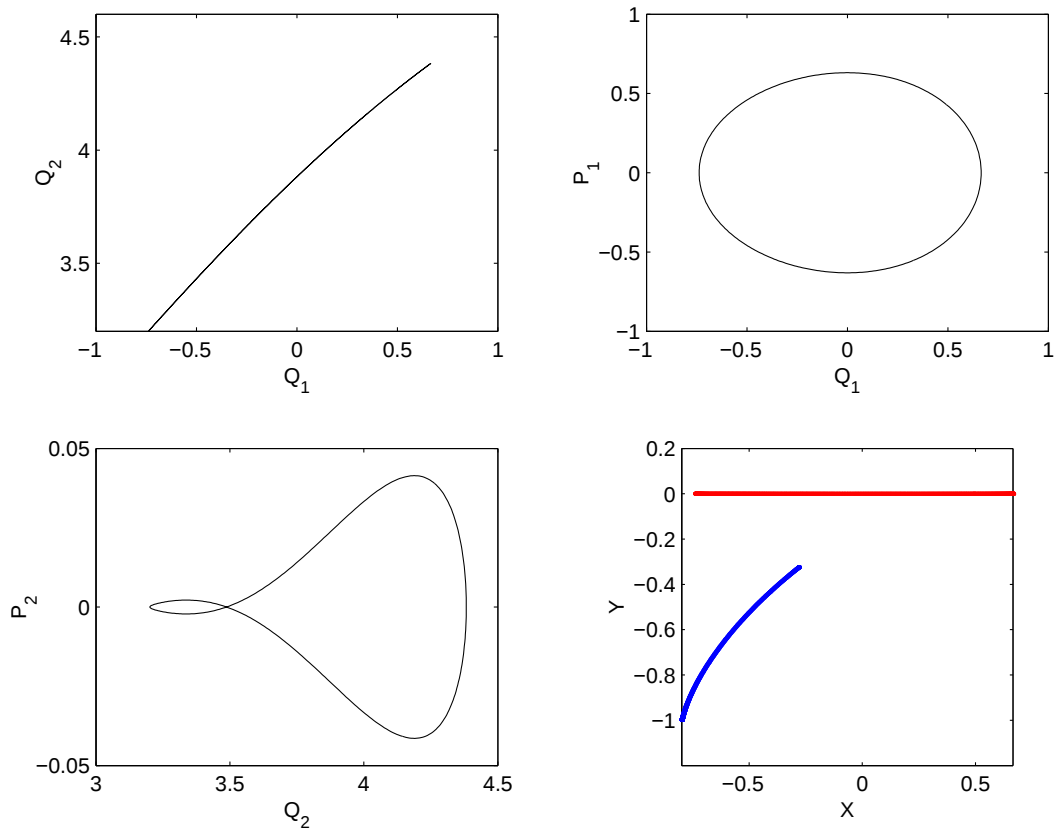


Figura 5.42: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 120 de la rama “ m_2 ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

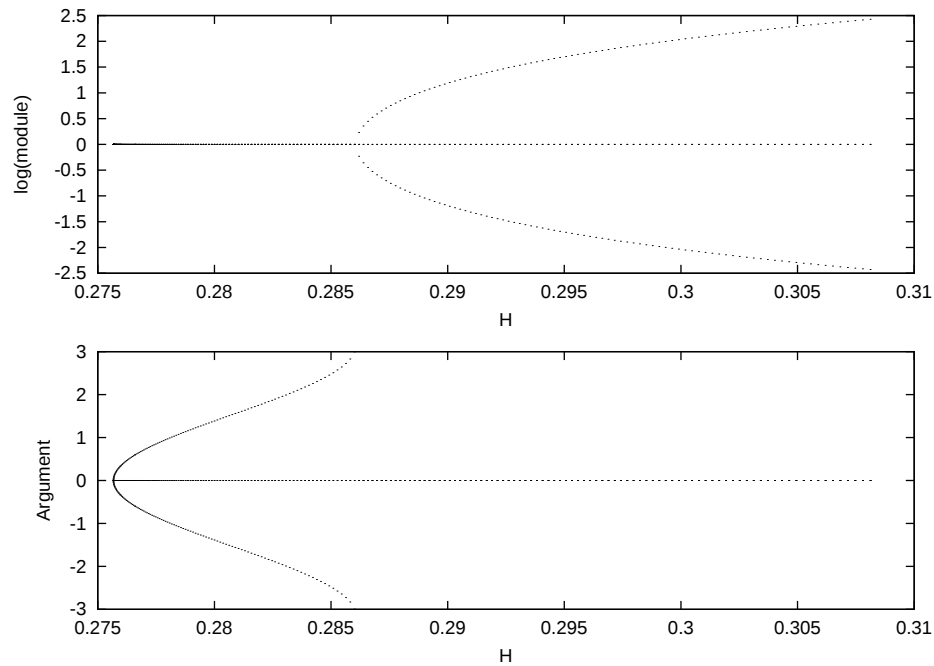


Figura 5.43: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m2r1$ ”.

5.1.14 Continuación de la bifurcación PD de la rama “ $m2$ ”.

Se parte de la órbita con etiqueta “60” de la rama de órbitas duplicadas y se realizan los siguientes cambios en las constantes de AUTO.

```
ld(s='m2.dup')
ch('IRS',60)
ch('ISW',-1)
ch('NPR',10)
ch('NMX',200)
ch('DS',-.001)
ch('DSMAX',.001)
run()
```

En la figura (5.43) aparecen los multiplicadores de Floquet de esta rama de órbitas periódicas. La solución experimenta de nuevo una bifurcación de duplicación de periodo que AUTO no detecta, para detectarla se procede como antes.

```
ch('NMX',2)
ch('NPR',0)
ch('ISW',-1)
run()
sv('tmp')
dobla()
ld(s='tmp')
ch('IRS',1)
```

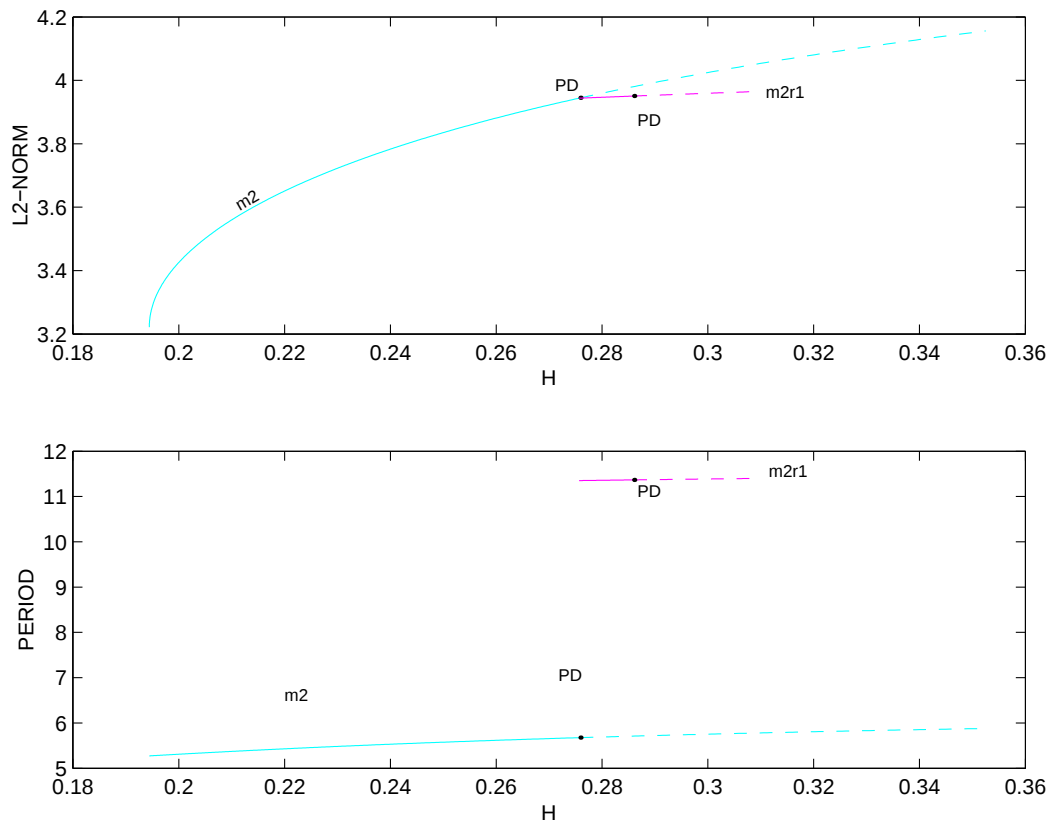


Figura 5.44: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m2r1$ ”.

```
ch('ISW',1)
ch('NTST',100)
ch('NPR',10)
ch('NMX',200)
ch('DS',-.001)
ch('DSMAX',.001)
run()
sv('m2r1.dup')
```

La figura (5.44) muestra el diagrama de bifurcación de esta rama, y en las figuras (5.45) y (5.46) aparecen dos órbitas periódicas estables de esta rama, concretamente las número “100” y “115”.

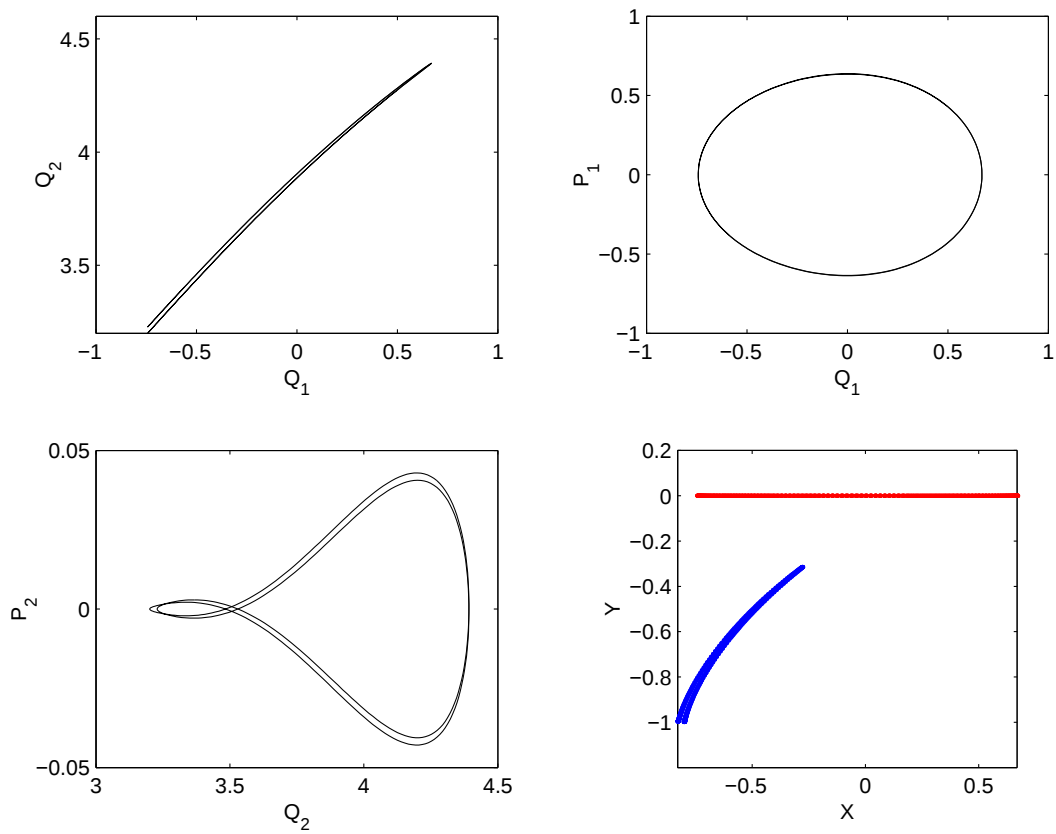


Figura 5.45: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 100 de la rama “ $m2r1$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

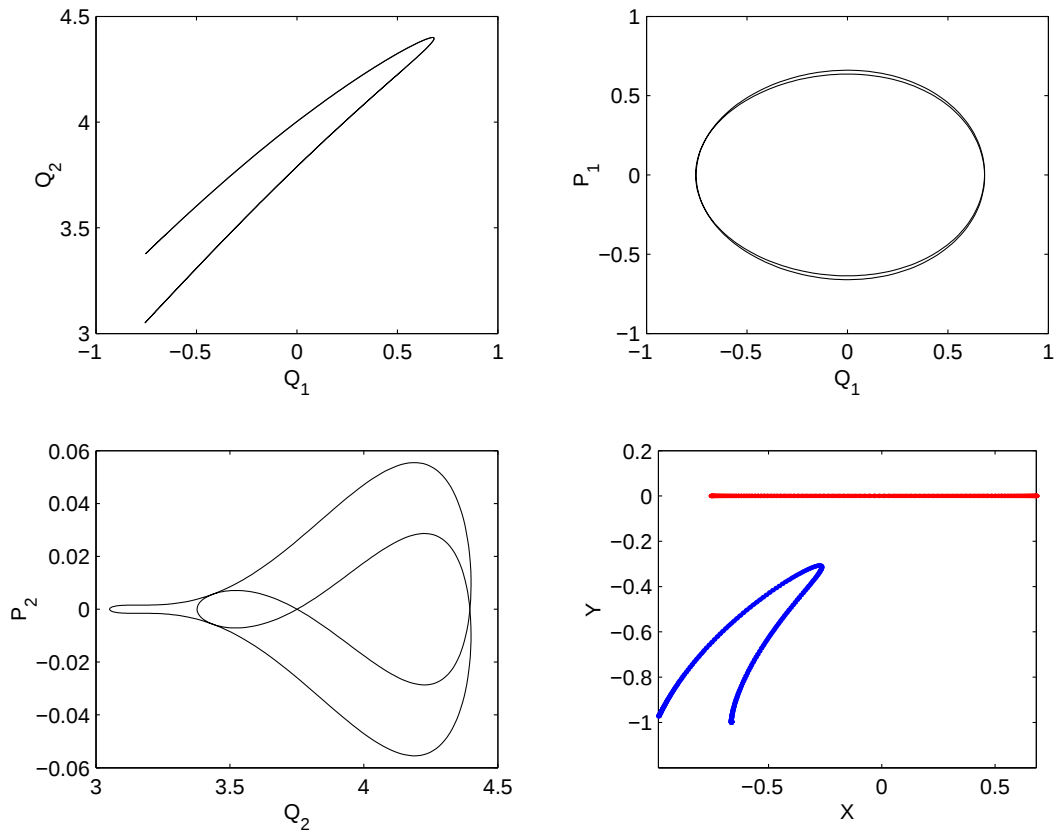


Figura 5.46: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 115 de la rama “m2r1”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

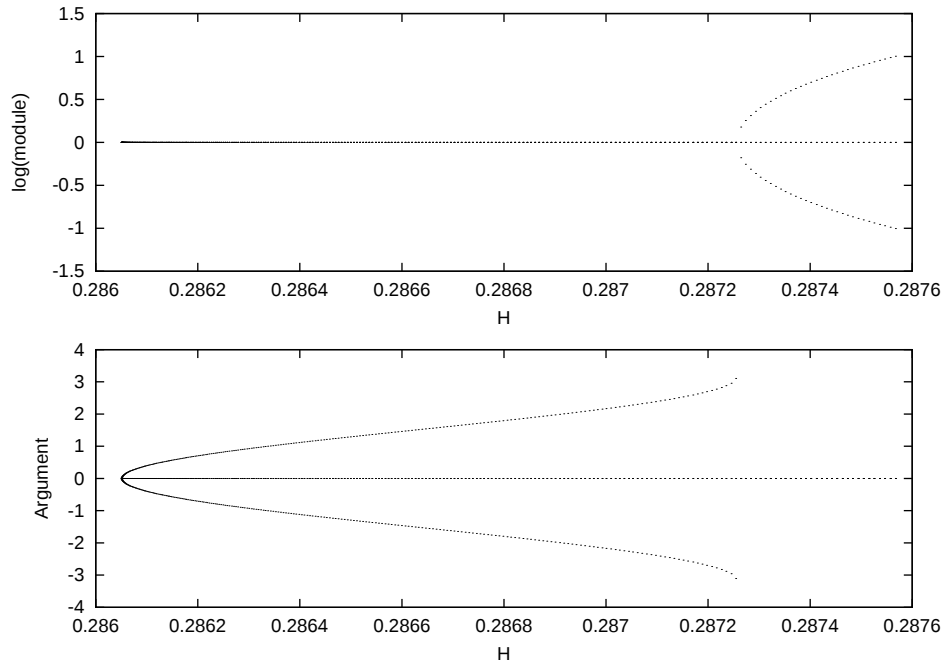


Figura 5.47: Evolución de los multiplicadores característicos de la rama “ $m2r2$ ”.

5.1.15 Continuación de la bifurcación PD de la rama “ $m2r1$ ”.

La bifurcación PD de la rama “ $m2r1$ ” continúa por la rama “ $m2r2$ ”, hasta que se la orbita experimenta de nuevo una duplicación de periodo, los errores numéricos que se producen al intentar detectar dicha duplicación de periodo nos impiden continuar por esta rama. En la figura (5.47) se han representado los multiplicadores característicos de esta rama de órbitas periódicas, en la figura se observa como el rango de valores de H antes de que la solución se haga inestable es muy pequeño. La figura (5.48) muestra el diagrama de bifurcación de esta rama, y en la figura (5.49) aparece la orbita periódica estable número “66”. La continuación numérica de esta rama se interrumpe en este punto, debido a que la solución experimente una cascada de duplicaciones de periodo que conducen el sistema directo al caos, en el siguiente apartado usaremos la técnica conocida como “sección de Poincaré” para obtener otro punto de vista de la forma en la que se mueve el sistema.

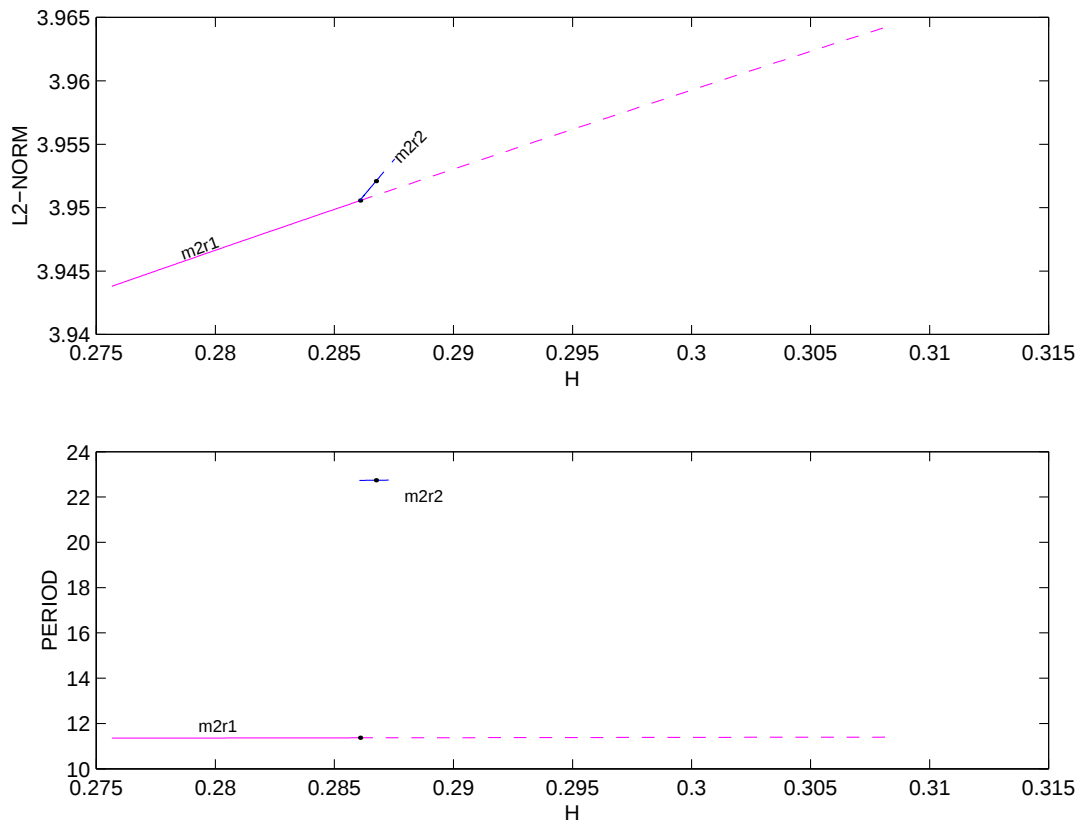


Figura 5.48: Rama de órbitas periódicas que emana de la bifurcación PD de la rama “ $m2r2$ ”.

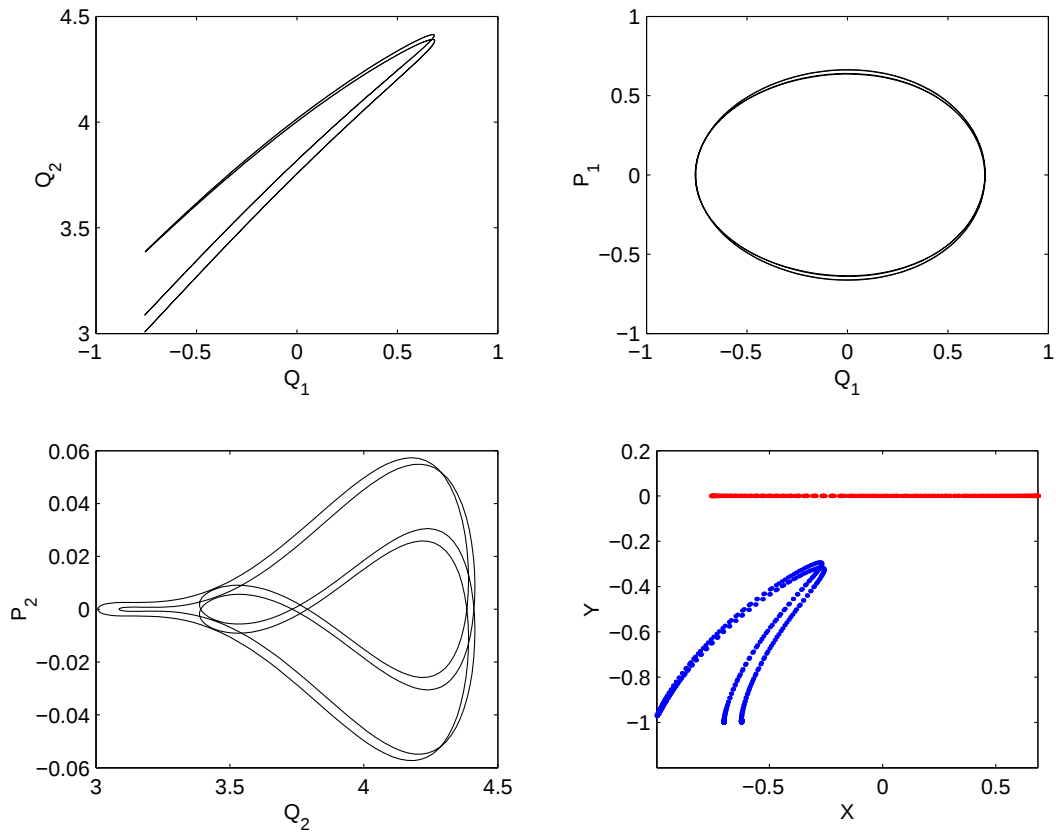


Figura 5.49: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 66 de la rama “ $m2r2$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

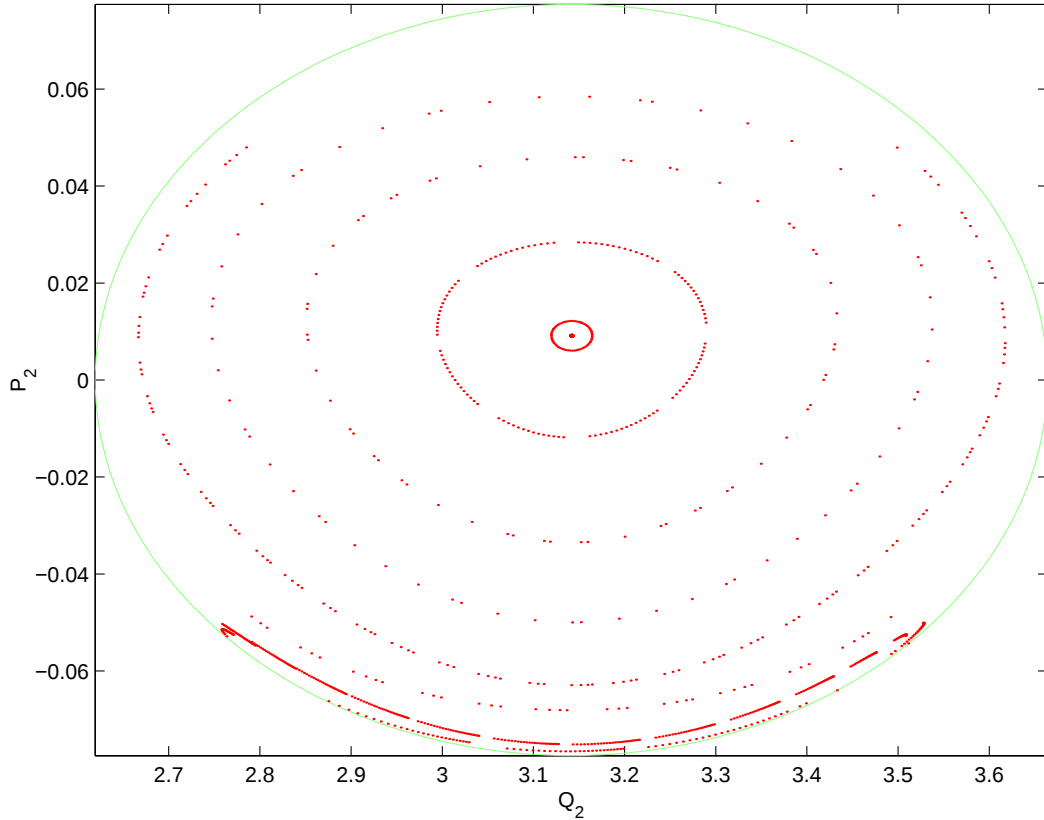


Figura 5.50: Sección de Poincaré realizada para un valor de $H = 0.01$. En la figura pueden apreciarse los dos modos normales, el segundo (en el centro de la figura) puede apreciarse con más claridad que el primero que está muy pegado al borde inferior de la figura. Los “toros” concéntricos revelan la presencia de una órbita periódica, en este caso un modo normal.

5.2 Secciones de Poincaré.

Las secciones de Poincaré proporcionan una nueva visión de los cálculos realizados a lo largo del capítulo reduciendo la dinámica a una aplicación discreta en un plano, fijando H y una variable; véase el Apéndice B para más información. En las figuras (5.50), (5.51) y (5.52) se muestran tres secciones que difieren únicamente en los niveles de energía H . A medida que se aumenta el nivel de energía, las bifurcaciones subarmónicas se muestran con mayor claridad, obsérvese la riqueza de comportamiento que muestra el sistema para el nivel de energía de la figura (5.52), por otra parte los niveles de energía mas altos inducen en el sistema un comportamiento caótico que se manifiesta en el aumento de las zonas sin estructura. Para valores de H mayores el comportamiento caótico se extiende a toda la sección manifestándose en forma de nube de puntos sin patrón fijo.

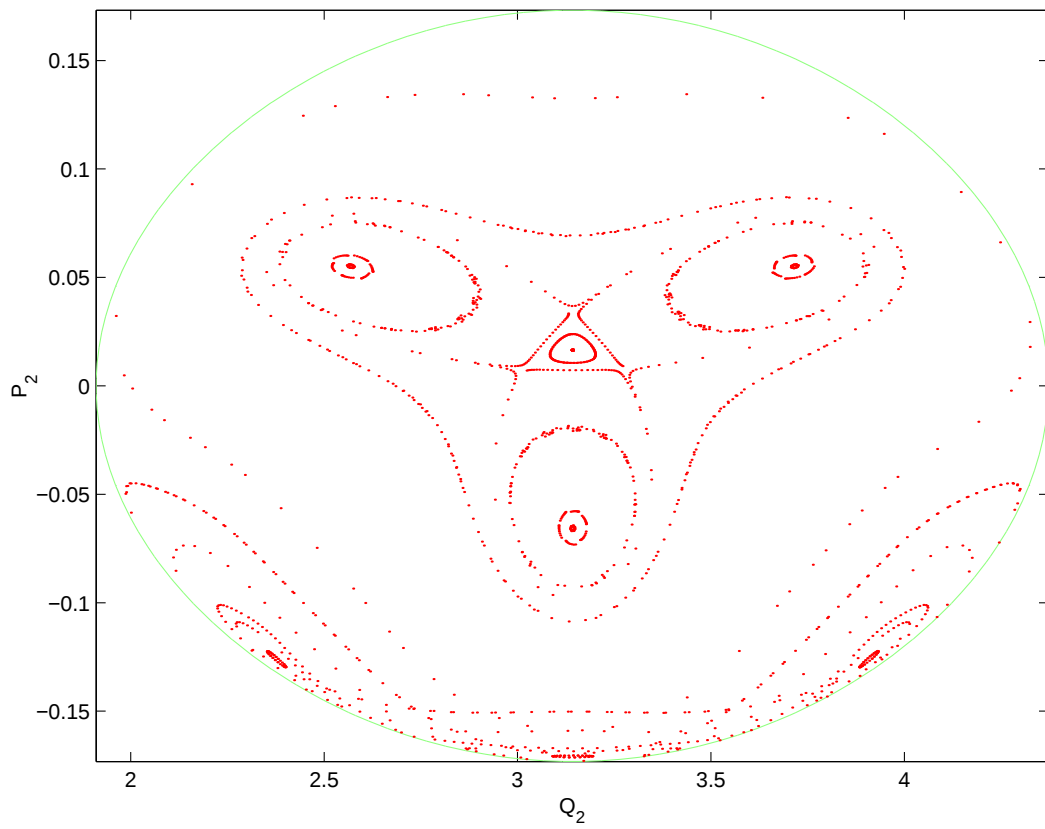


Figura 5.51: Sección de Poincaré realizada para un valor de $H = 0.05$.

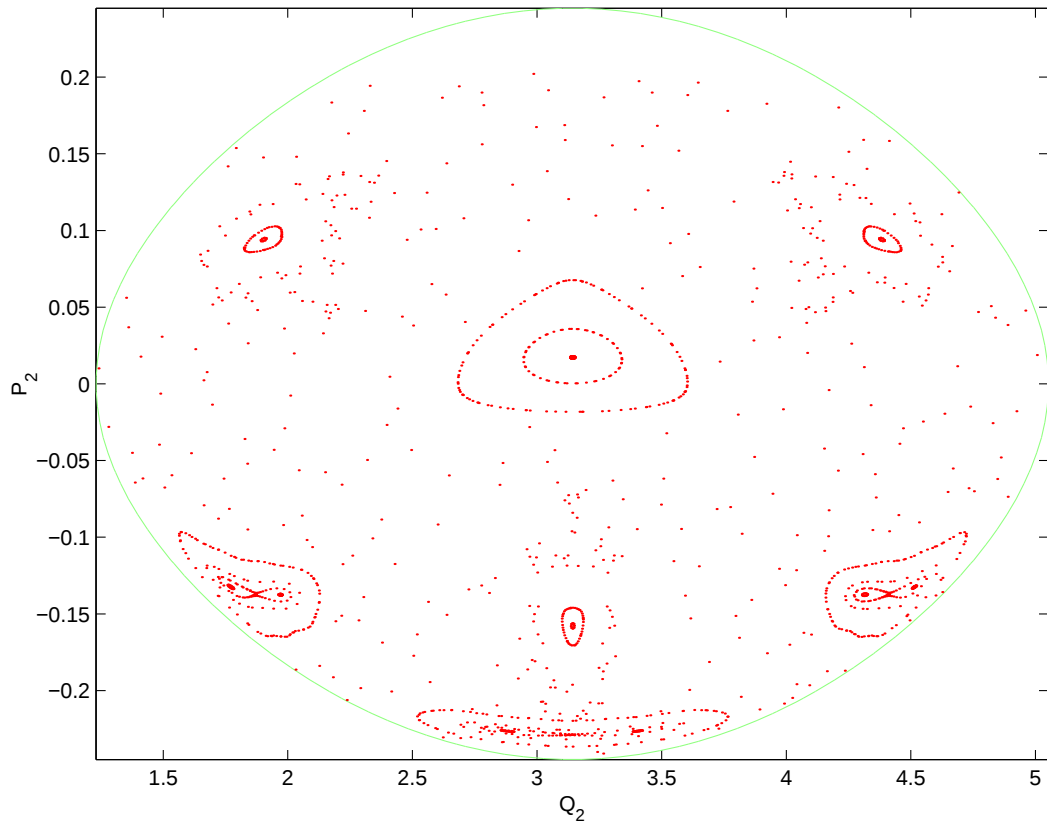


Figura 5.52: Sección de Poincaré realizada para un valor de $H = 0.1$.

Capítulo 6

Estudio de las órbitas periódicas para $\lambda = 0.3$ y $\epsilon = 0.05$.

Los resultados obtenidos en el capítulo anterior muestran de forma general el comportamiento del sistema péndulo-muelle; se han analizado las dos ramas que parten del equilibrio, correspondientes a los dos modos normales, así como todas las ramificaciones que experimentan antes de llegar al caos.

El movimiento descrito por las órbitas de la rama “modo1” es una libración, con batida asimétrica a partir de cierto valor del parámetro H , que se extiende a ambos lados del punto de equilibrio “ $Q_2 = \pi$ ”, por tanto, por esta rama no es posible alcanzar una posición estable próxima a la horizontal. Sin embargo, continuando por la rama “modo2” se vio como el movimiento rápidamente quedaba relegado a un lado del punto de equilibrio “ $Q_2 = \pi$ ”, siendo por tanto posible alcanzar una cierta posición estable. En la figura (6.1), tomada del capítulo anterior, puede apreciarse los movimientos periódicos estables obtenidos a un lado de la posición de equilibrio inferior, el siguiente paso será limitar la variación del ángulo “ Q_2 ” a un intervalo más reducido y acercar dicho ángulo a la horizontal.

Investigando el caso del péndulo forzado mediante vibración horizontal de la base¹, se descubrió que al aumentar la frecuencia de dicha vibración, era posible alcanzar un posición estable próxima a la horizontal, este hecho se vio reforzado al hacer secciones de Poincaré en el caso autoexcitado y con valores inferiores del parámetro “ ϵ ” y obtenerse puntos rodeados de toros que indicaban la presencia de una órbita periódica cerca de la posición horizontal. Un aumento de la frecuencia del movimiento de la base en el caso forzado equivale a un aumento de la frecuencia natural del muelle en el caso autoexcitado. Uno de los argumentos del parámetro “ ϵ ” que se definió como:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{kL_2}}$$

es el parámetro “ k ”; un aumento de éste supone una disminución de “ ϵ ” así como un aumento de la frecuencia natural del muelle, considerandolo desacoplado del péndulo. Por

¹El caso forzado ha sido estudiado por el físico teórico Franz-Josef Elmer, del “Institut für Physik”, de Basilea y los resultados están expuestos en su página web: “<http://monet.physik.unibas.ch/elmer/>”

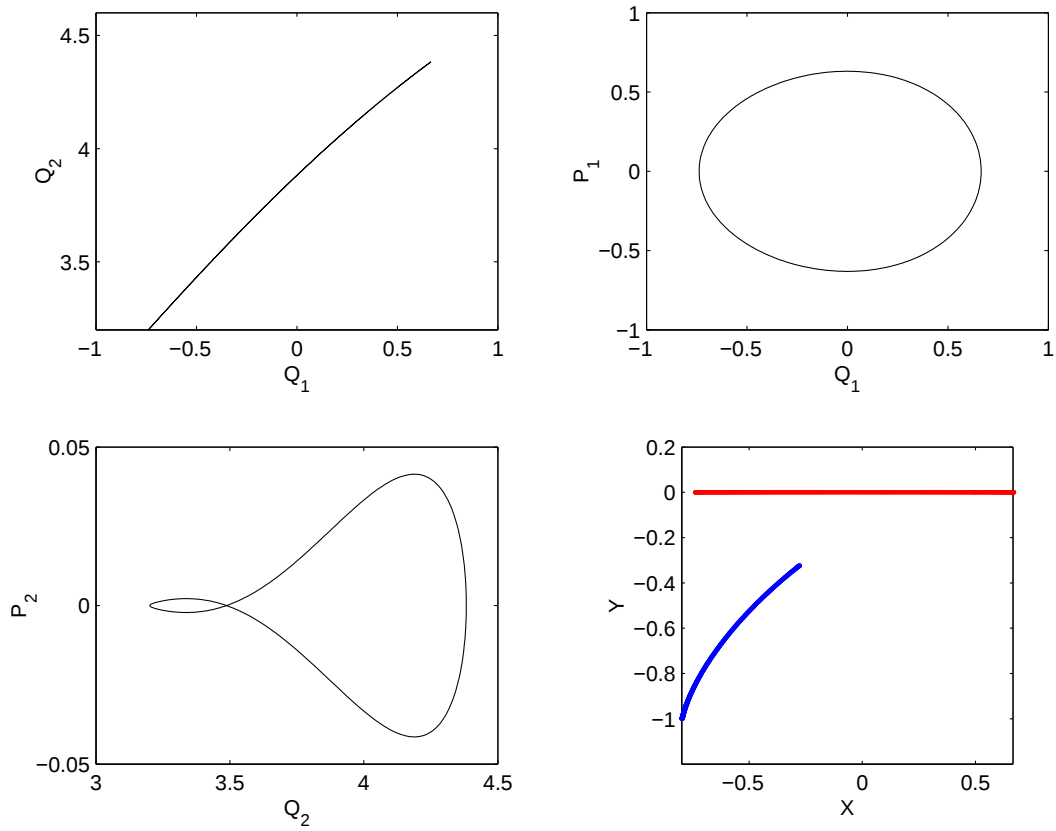


Figura 6.1: Órbita periódica estable a un lado del punto de equilibrio inferior, el objetivo de este capítulo es reducir el intervalo de variación del ángulo “ Q_2 ” disminuyendo el valor del paramtro “ ϵ ”.

lo tanto es de esperar que una disminución del parámetro “ ϵ ” del sistema péndulo-muelle autoexcitado proporcione un comportamiento parecido al que se obtiene al aumentar la frecuencia de la vibración en el caso del péndulo forzado.

El objetivo de este capítulo es investigar las órbitas periódicas mediante continuación numérica partiendo nuevamente de la posición de equilibrio inferior.

6.1 Continuación numérica.

Los cálculos que a continuación se presentan están expuestos con muchos menos detalles y las explicaciones son más escuetas que en el caso anterior, la causa es que los procedimientos son esencialmente iguales y el objetivo no es agotar la dinámica del Hamiltoniano sino estabilizar el péndulo en la posición horizontal.

6.1.1 Detección de la bifurcación de Hopf.

Partiendo del fichero “*pm.c*”, lo primero es detectar la bifurcación de Hopf. Examinando el fichero de diagnósticos “*fort.9*” resultante, se puede ver como “AUTO” a encontrado un par de autovalores complejos conjugados para la órbita correspondiente a la bifurcación de Hopf. Los valores numéricos detectados por el programa son:

$$\begin{aligned}\Omega_1^\pm &= \pm 0.04998123 i \\ \Omega_2^\pm &= \pm 1.195678 i\end{aligned}$$

Por otra parte si se sustituyen los valores de los parámetros “ $\lambda = 0.3$ ” y “ $\epsilon = 0.05$ ” en las expresiones obtenidas de la linealización de las ecuaciones en torno a la posición de equilibrio inferior se obtienen los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned}\Omega_1^\pm &= \pm 0.05 i \\ \Omega_2^\pm &= \pm 1.1957 i\end{aligned}$$

Que como puede verse coinciden con los obtenidos por “AUTO”. Por otra parte los periodos con los que parten del equilibrio las dos ramas correspondientes a los dos modos normales son:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{2\pi}{|\Omega_1|} = 125.7109 \\ T_2 &= \frac{2\pi}{|\Omega_2|} = 5.2548\end{aligned}$$

El modo que vamos a continuar es el segundo, el de mayor frecuencia ya que como se vio antes es el candidato para estabilizar el péndulo en la posición horizontal.

Si se parte de la bifurcación de Hopf, “AUTO” continúa por la rama correspondiente al primer modo, por tanto, hay que forzar al programa para que continúe el segundo modo.

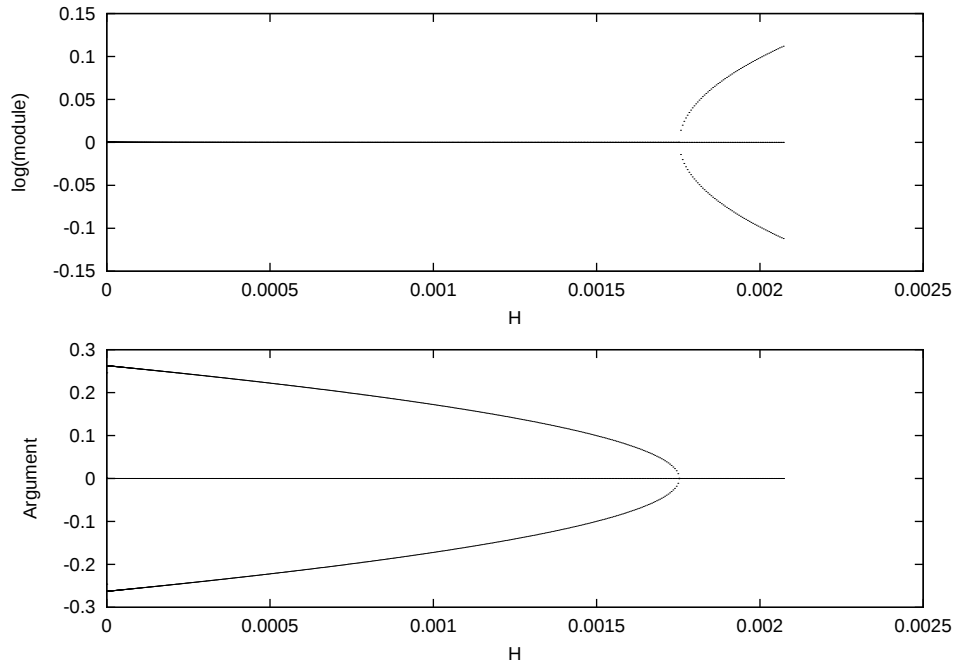


Figura 6.2: Evolución de los multiplicadores característicos a lo largo de la rama “*modo2*”.

6.1.2 Continuación de la rama “*modo2*”.

Para continuar el segundo modo la rama corremos “AUTO” partiendo de una órbita cercana a la bifurcación de Hopf, hacemos los cambios:

```
ch('DS',-0.0001)
ch('DSMAX',0.0001)
ch('NPR',10)
ch('NMX',750)
```

El programa detecta una bifurcación “BP” con “splitting”, es decir que los multiplicadores característicos al llegar al punto “+1” se abren y continúan por el eje real, en vez de continuar por el círculo unidad, como puede apreciarse en la figura (6.2). La bifurcación se produce en la órbita “690” y es etiquetada con el número “74”.

La figura (6.3) muestra el diagrama de bifurcaciones para la rama “*modo2*”, y las figuras (6.4) y (6.5) muestran dos órbitas periódicas de esta misma rama, antes de bifurcar y perder la estabilidad, obsérvese la pequeña amplitud de los movimientos debido a los bajos niveles de energía.

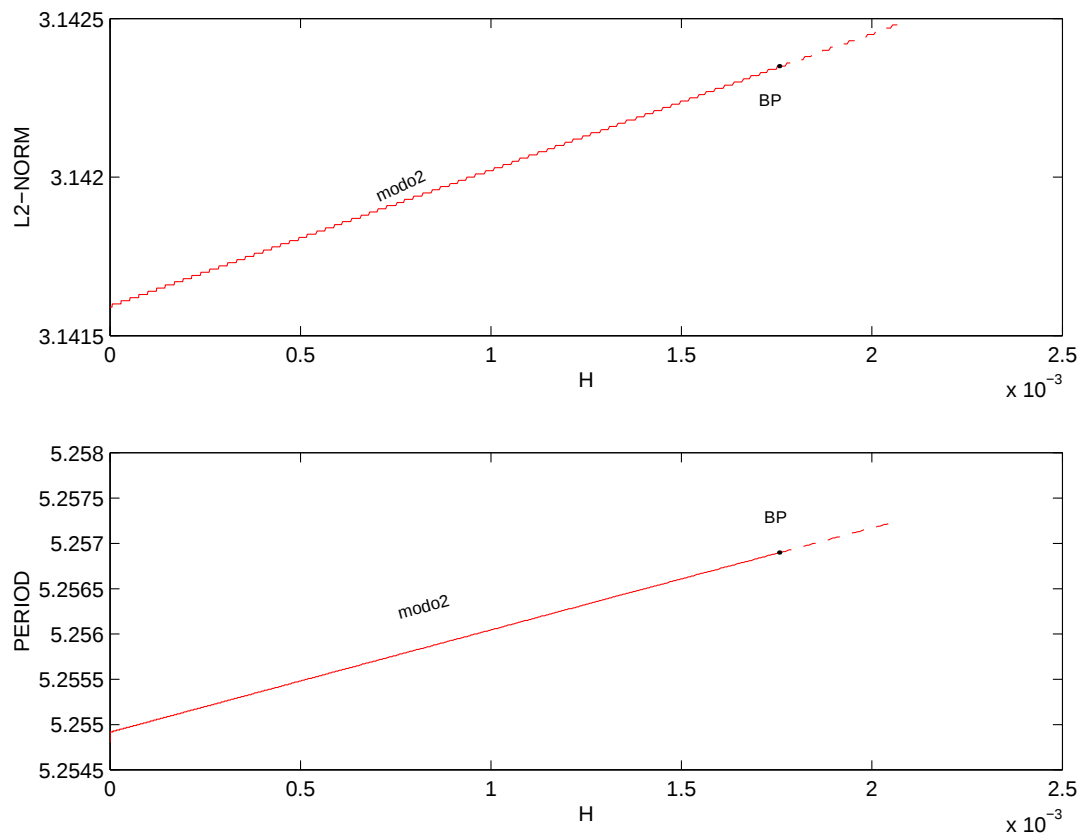


Figura 6.3: Rama de órbitas periódicas “*modo2*”.

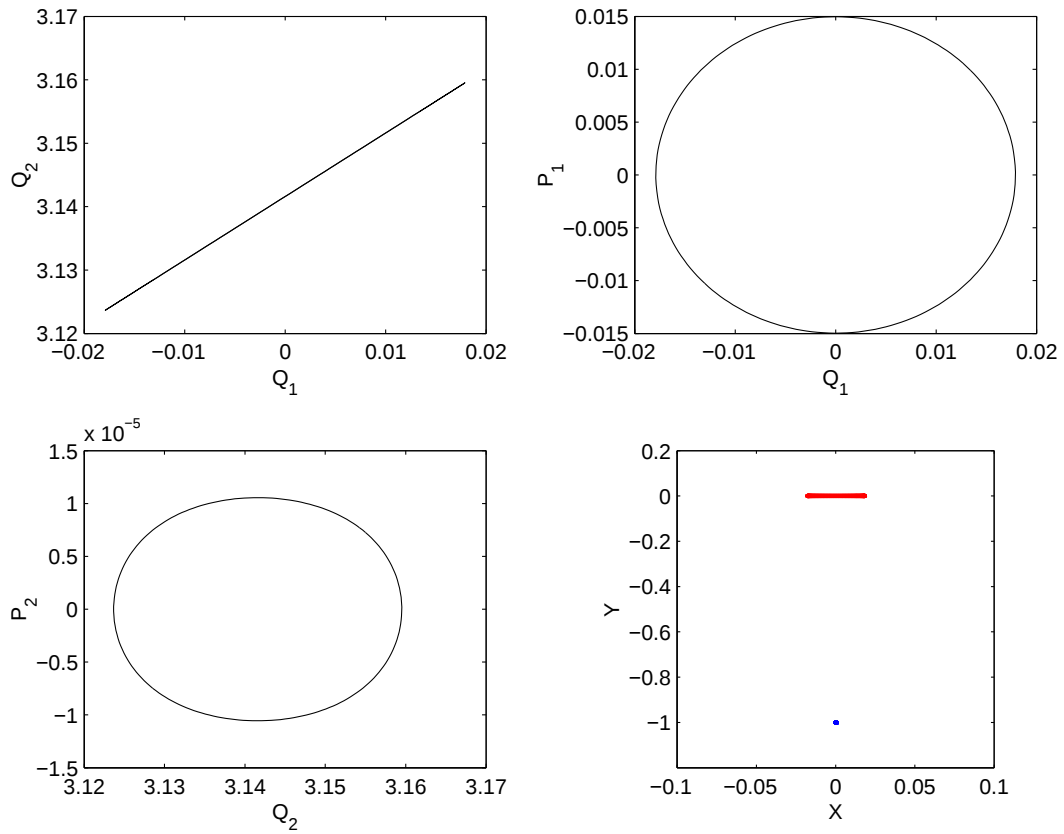


Figura 6.4: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 26 de la rama “modo2”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

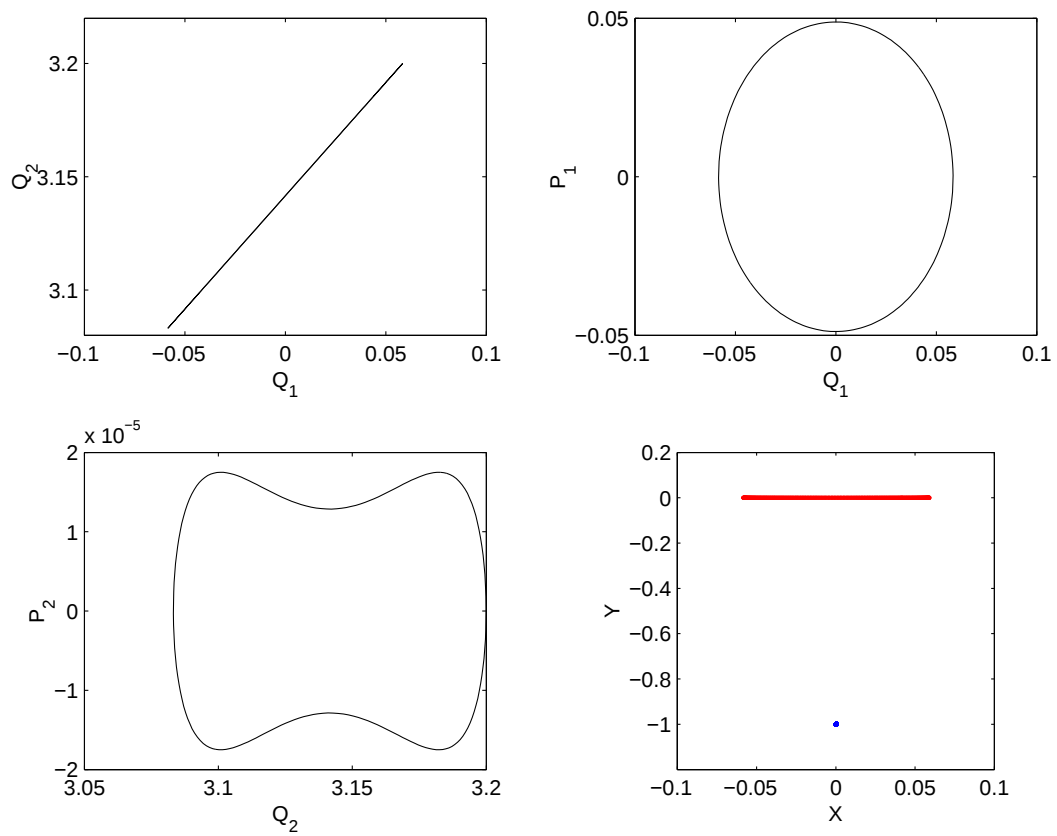


Figura 6.5: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 73 de la rama “*modo2*”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

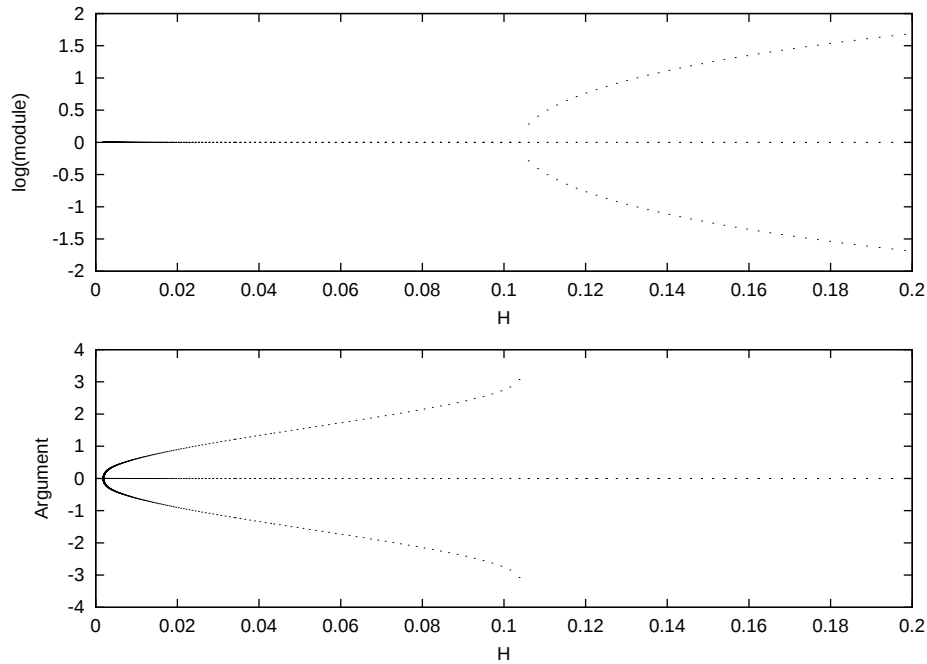


Figura 6.6: Evolución de los multiplicadores característicos a lo largo de la rama “ $m2$ ”.

6.1.3 Continuación de la bifurcación BP de la rama “ $modo2$ ”.

Para continuar la bifurcación “BP” encontrada hacemos los siguientes cambios:

```
ld(s='modo2')
ch('IRS',74)
ch('DS',-0.005)
ch('DSMAX',0.005)
ch('NPR',10)
ch('NMX',400)
```

A continuación ejecuto el programa “AUTO” y salvo los ficheros con la extensión “*.m2”. En la gráfica (6.6) puede verse la evolución de los multiplicadores característicos a lo largo de esta rama, la solución experimenta una bifurcación de duplicación de periodo.

La figura (6.7) muestra el diagrama de bifurcaciones para la rama “ $m2$ ”, y las figuras (6.8) y (6.9) muestran dos órbitas periódicas de esta misma rama, antes de bifurcar y perder la estabilidad, observese como el péndulo se levanta y estabiliza en la posición horizontal, a esta forma de estabilizar se la conoce como “swing-up”.

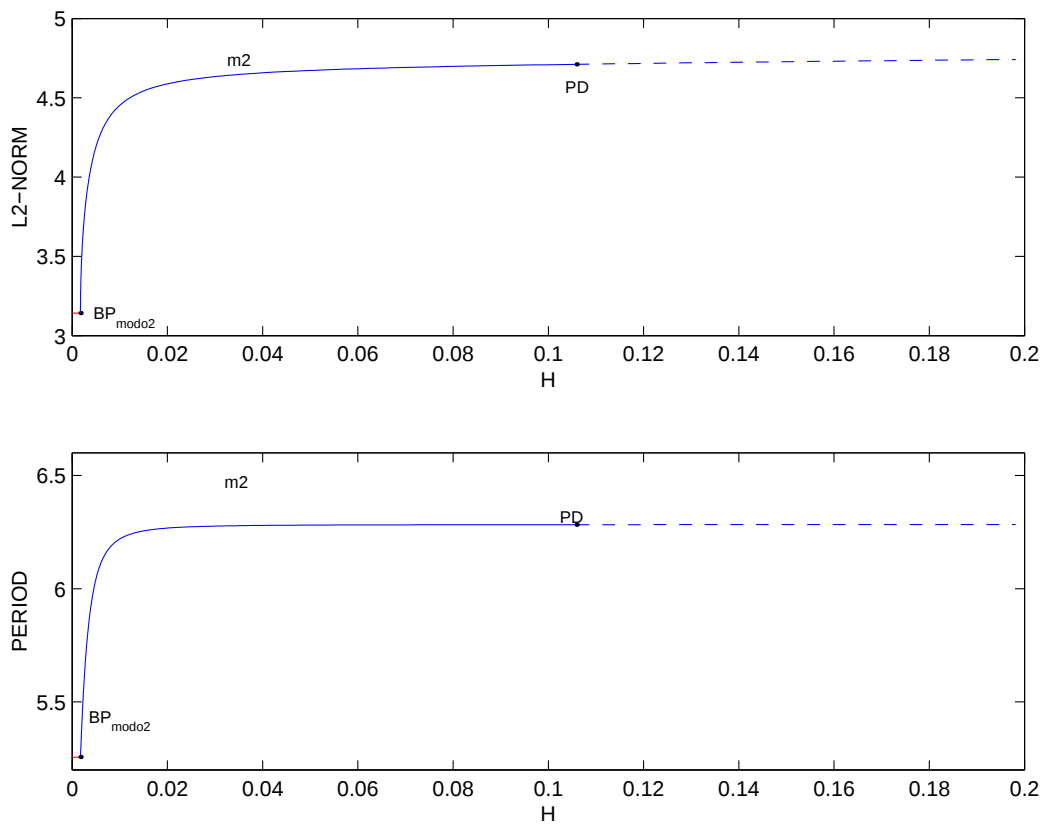


Figura 6.7: Rama de órbitas periódicas “ $m2$ ”. Obsérvese como la solución tiende rápidamente a posición horizontal, este efecto es lo que se conoce con el nombre de “swing-up”, obsérvese así mismo, la isocronía de la solución horizontal, el periodo de dicha solución es prácticamente “ 2π ”.

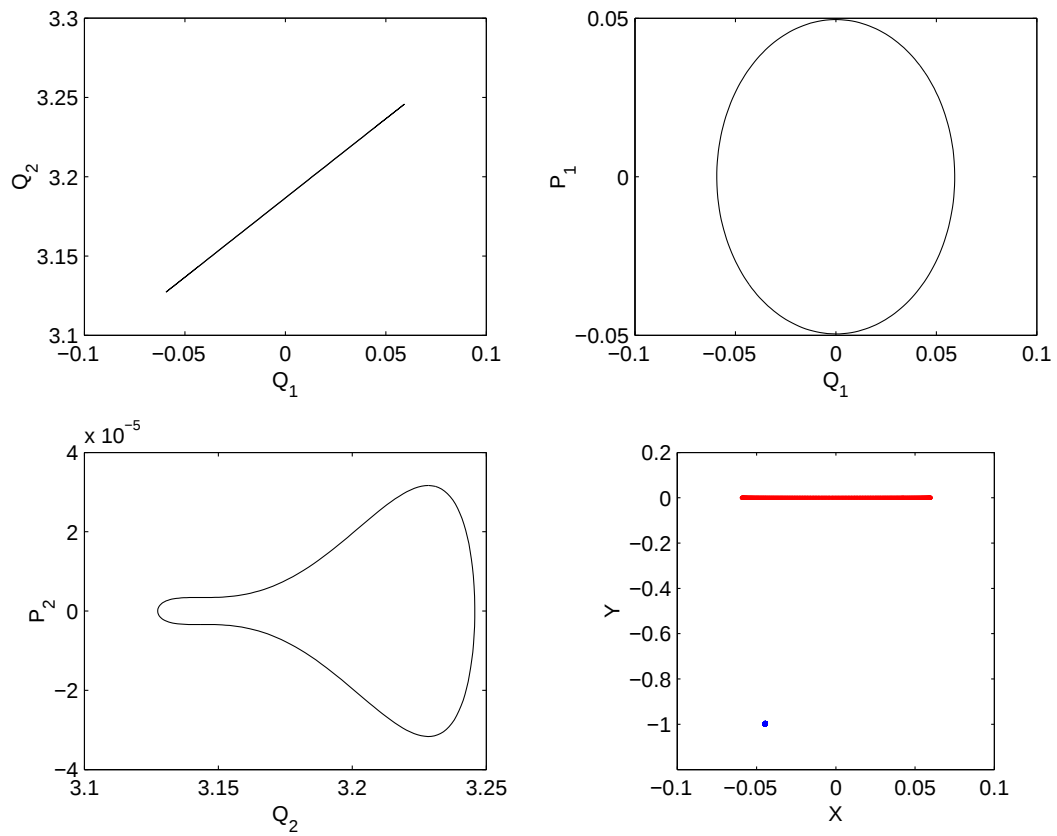


Figura 6.8: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 81 de la rama “ m_2 ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

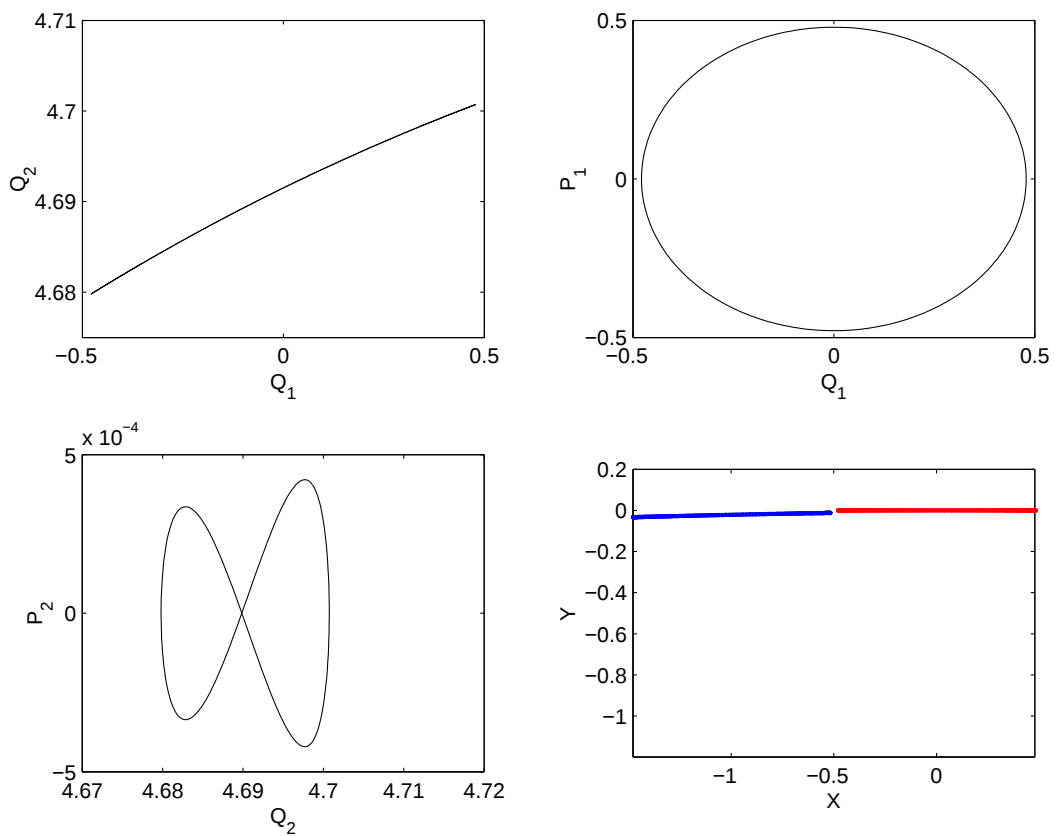


Figura 6.9: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 135 de la rama “ $m2$ ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

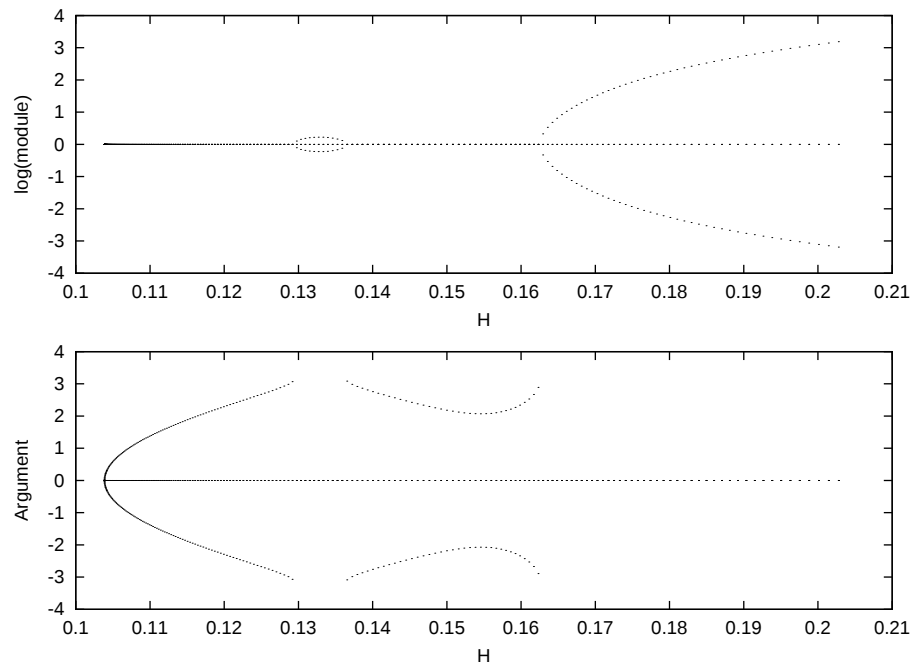


Figura 6.10: Evolución de los multiplicadores característicos a lo largo de la rama “ m_3 ”.

6.1.4 Continuación de la bifurcación PD de la rama “ m_2 ”

Tras detectar la bifurcación “PD”, ya que el programa no lo hace por si solo, la continuamos por la rama “ m_3 ”, haciendo los siguientes cambios:

```
ch('DS',-0.005)
ch('DSMAX',0.005)
ch('NPR',10)
ch('NMX',200)
```

En la figura (6.10) puede verse la evolución de los multiplicadores característicos, la solución experimenta tres bifurcaciones de duplicación de periodo.

La figura (6.11) muestra el diagrama de bifurcaciones para la rama “ m_3 ”, la figura (6.12) muestra una órbita periódica perteneciente al primer tramo estable y la figura (6.13) muestra una órbita periódica perteneciente al segundo tramo estable.

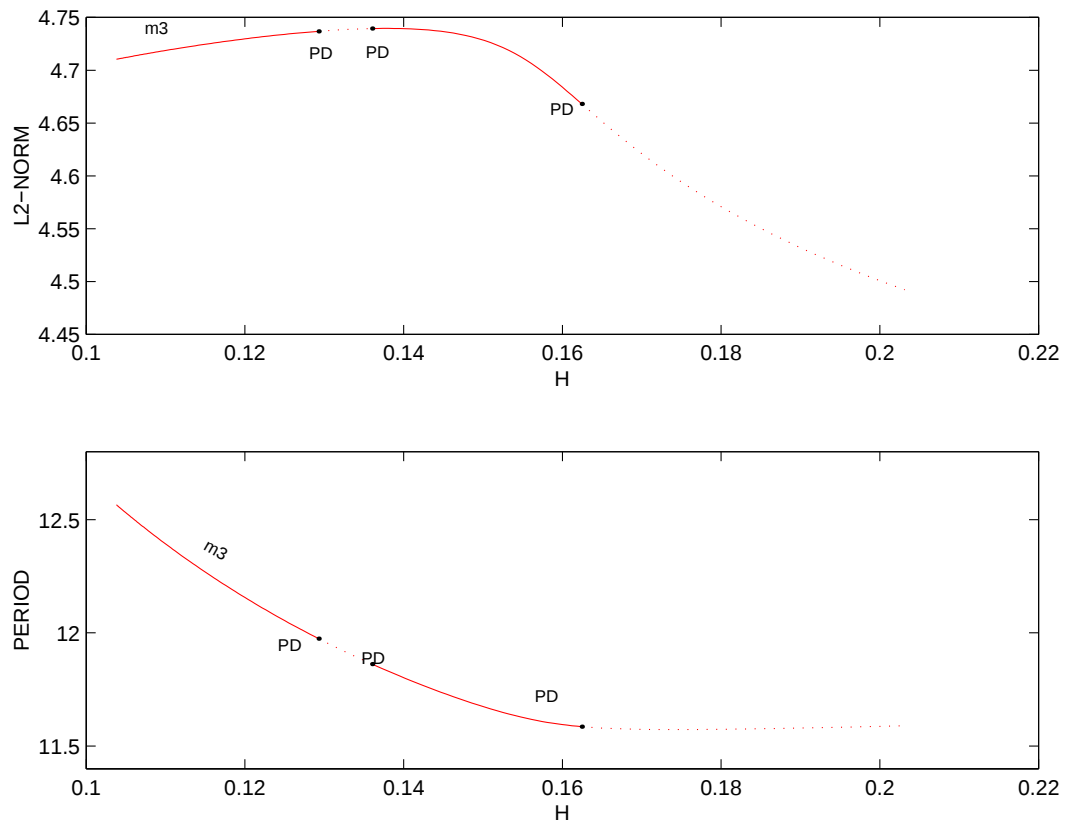


Figura 6.11: Rama de órbitas periódicas “ m_3 ”.

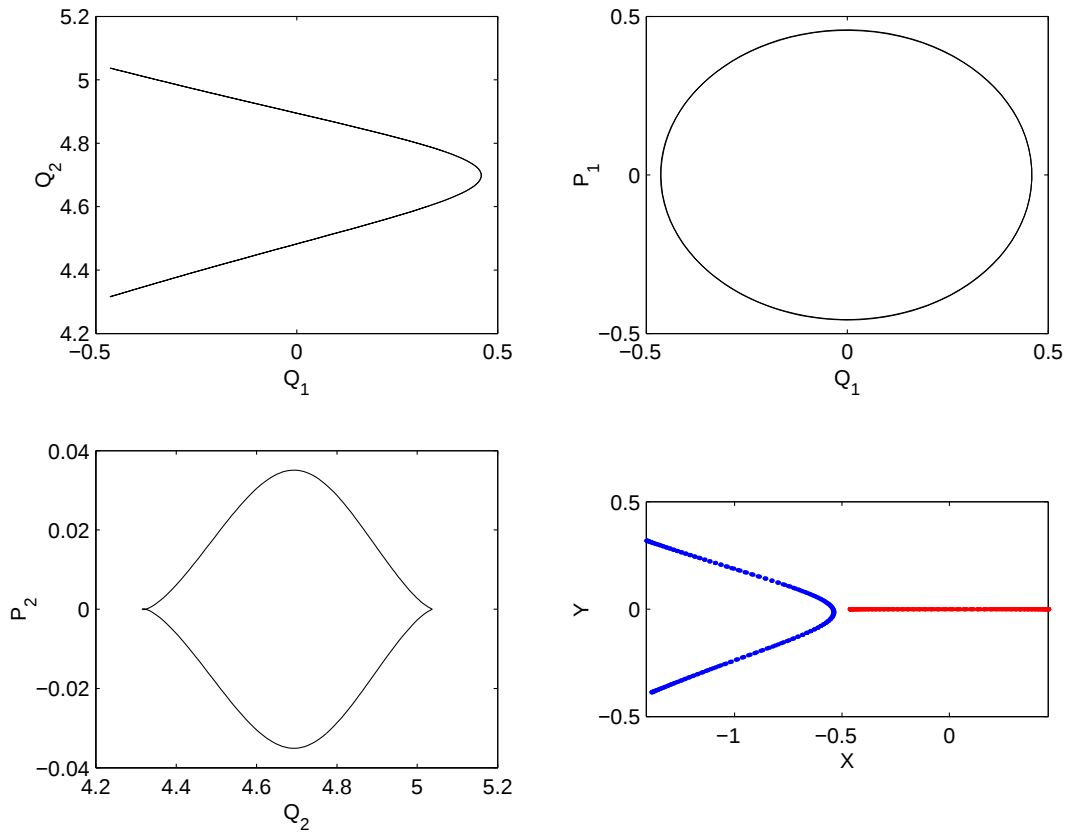


Figura 6.12: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 56 de la rama “m3”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

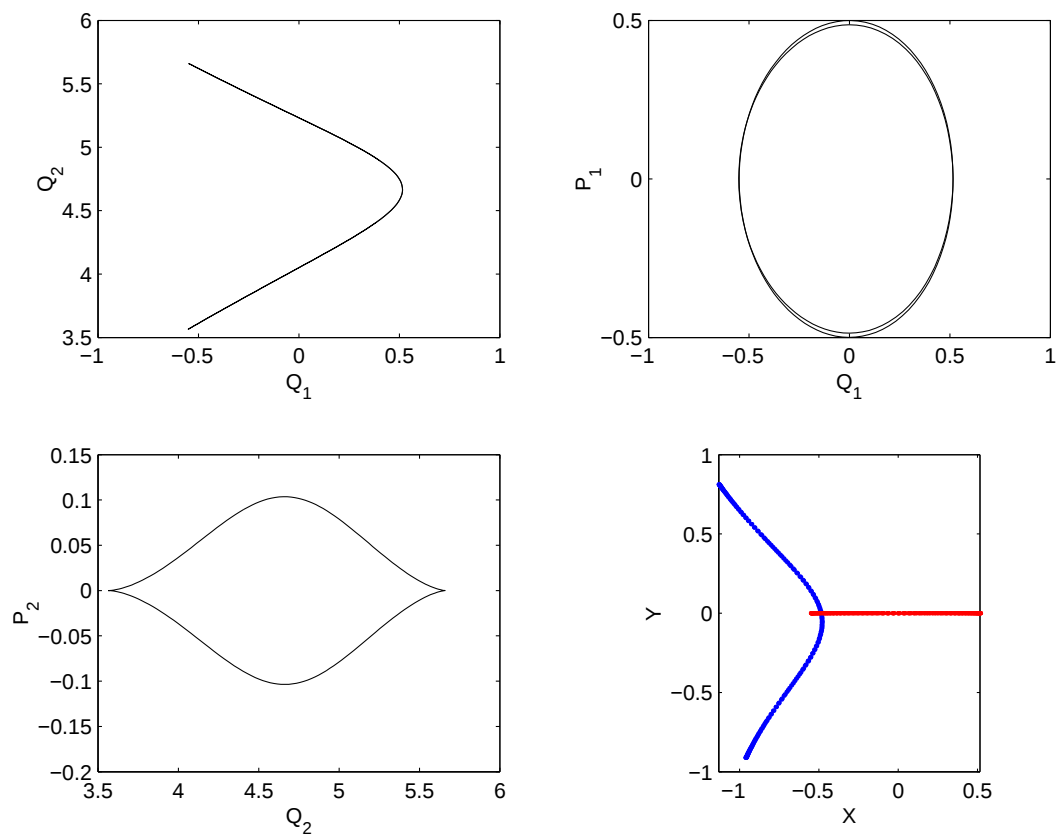


Figura 6.13: Gráficas que representan la evolución de las variables de estado en el espacio de las fases a lo largo de un periodo para la órbita 71 de la rama “ m_3 ”. La última gráfica representa las huellas de las masas m_1 y m_2 al moverse.

6.2 Secciones de Poincaré.

Como en el capítulo anterior, todas las soluciones obtenidas por continuación numérica, van a ser verificadas utilizando secciones de Poincaré, ya que esta representación proporciona una información complementaria del comportamiento del sistema dinámico.

La figura (6.14) muestra una sección de Poincaré para un valor de la energía “ $H = 0.001$ ”, el segundo modo normal puede verse muy claramente, el primer modo normal está tan pegado a la parte inferior que no se puede ver con claridad.

La figura (6.15) muestra una sección de Poincaré para un valor de “ $H = 0.005$ ”. Puede verse como la rama correspondiente al primer modo se ha dividido en dos ramas simétricas, el movimiento del péndulo en cada una de estas ramas está limitado a un lado de la vertical. La figura (6.8) ilustra el movimiento del péndulo para estos niveles de energía.

La figura (6.17) muestra una sección de Poincaré para un valor de “ $H = 0.1$ ”. Las órbitas periódicas detectadas corresponden a la posición de equilibrio próxima a la horizontal, la de la izquierda para “ $Q_2 \simeq \pi/2$ ” y la de la derecha para “ $Q_2 \simeq 3\pi/2$ ”. Obsérvese también las bifurcaciones subarmónicas que rodean a la órbita periódica. La figura (6.9) ilustra el movimiento del péndulo para estos niveles de energía.

La figura (6.19) muestra una sección de Poincaré para un valor de “ $H = 0.12$ ”. Obsérvese como la órbita periódica que en la sección de Poincaré de la figura (6.17) venía dada por un solo punto ha experimentado ahora una bifurcación de duplicación de periodo y se representa por dos puntos debido a que para realizar un ciclo completo. La masa colocada al final del muelle tiene que pasar dos veces por el punto “ $Q_1 = 0$ ”; este movimiento corresponde a batidas del péndulo en torno a la posición horizontal. La figura (6.12) ilustra el movimiento del péndulo para estos niveles de energía.

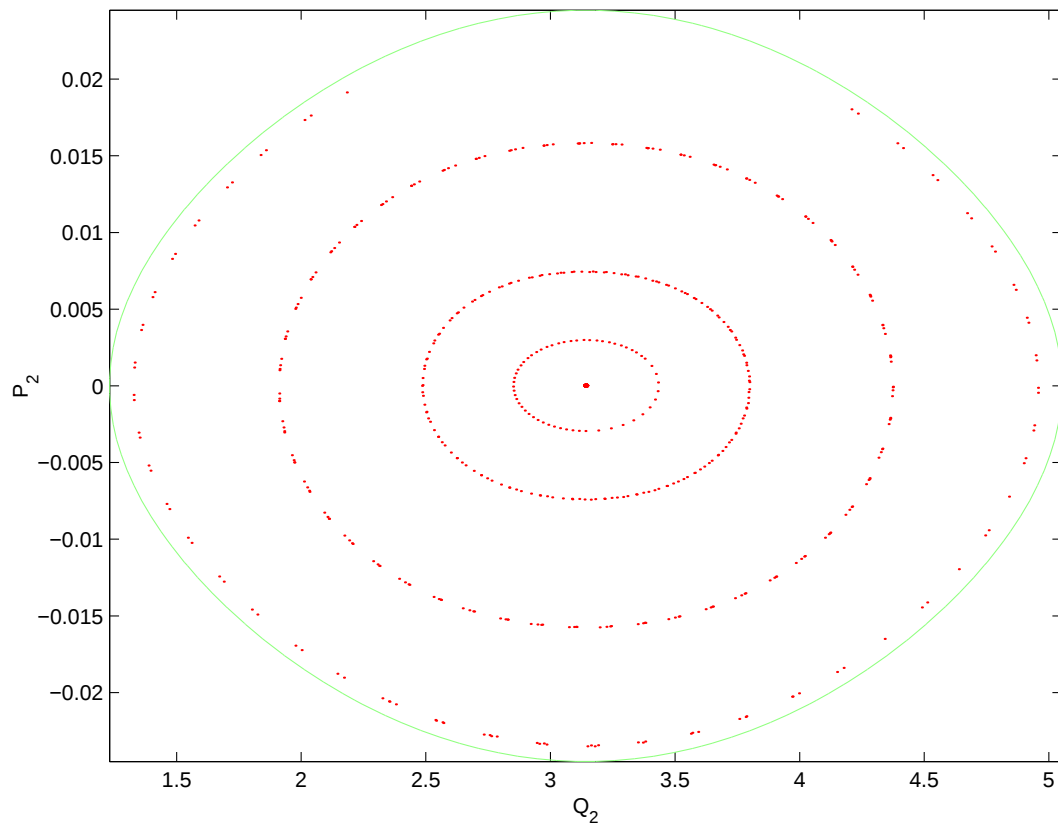


Figura 6.14: Sección de Poincaré para un valor de la energía “ $H = 0.001$ ”.

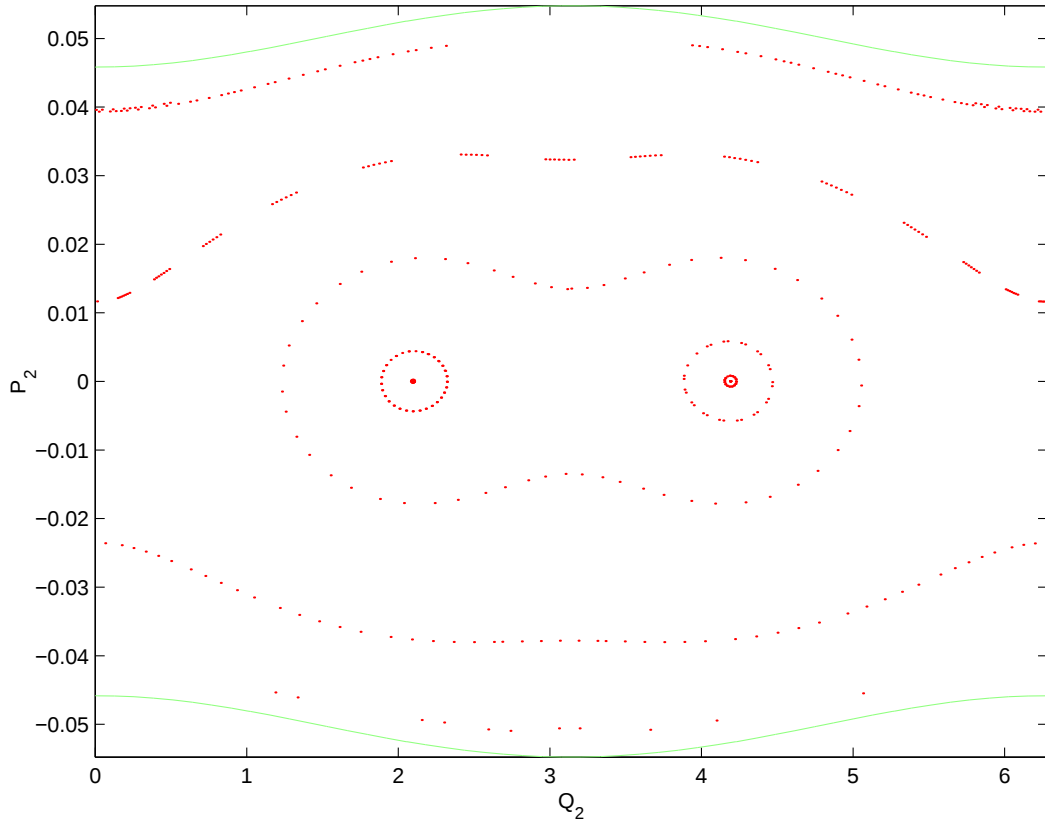


Figura 6.15: Sección de Poincaré para un valor de la energía “ $H = 0.005$ ”. Observese como el segundo modo normal ha bifurcado en dos ramas simétricas, en cada una de estas ramas el péndulo se mueve sólo a un lado de punto “ $Q_2 = \pi$ ”. El péndulo aun no ha alcanzado la posición horizontal, está en una situación intermedia.

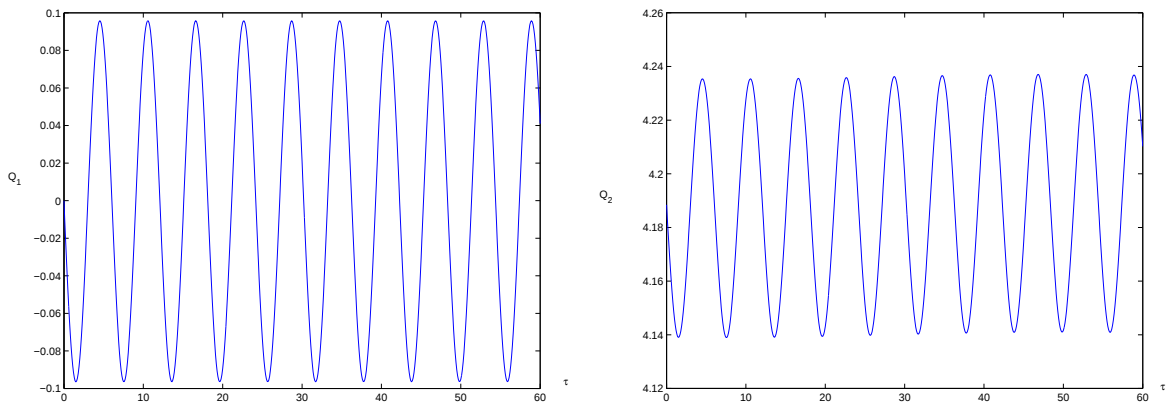


Figura 6.16: Evolución de los dos grados de libertad “ Q_1 ” y “ Q_2 ” para la órbita periódica de la derecha en la sección de Poincaré dibujada en la figura (6.15). Observarse como los valores de “ Q_2 ” están acotados en un intervalo: “ $\pi < Q_2 < 3\pi/2$ ”.

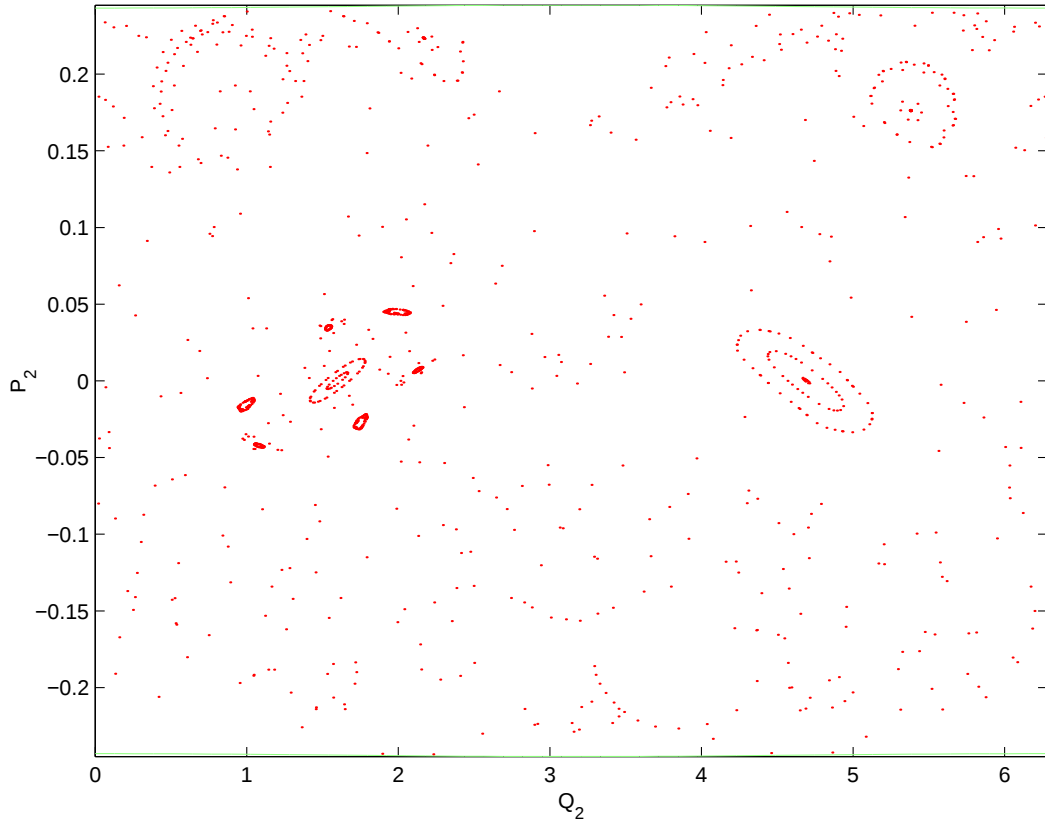


Figura 6.17: Sección de Poincaré para un valor de la energía “ $H = 0.1$ ”. Obsérvese como la órbita periódica de la izquierda pasa por un punto cercano a “ $Q_2 \simeq \pi/2$ ” y la de la derecha por un punto cercano a “ $Q_2 \simeq 3\pi/2$ ”.

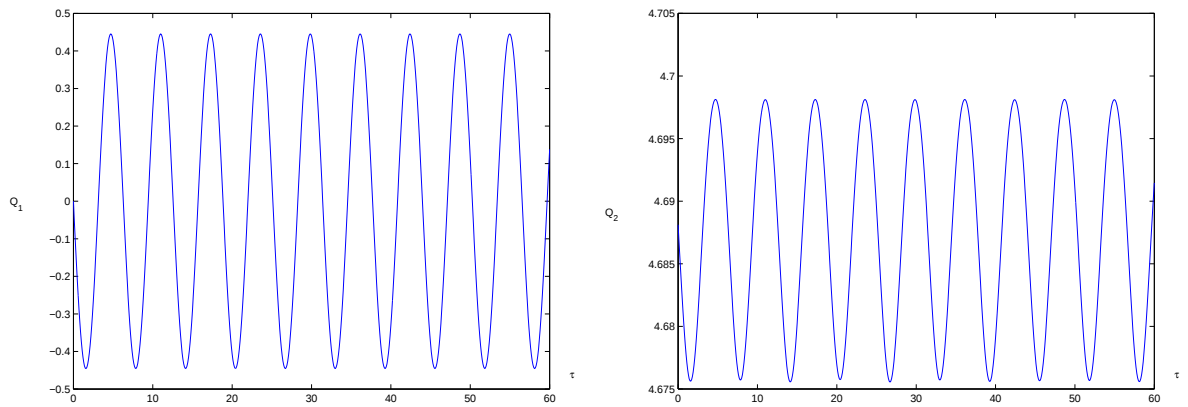


Figura 6.18: Evolución de los dos grados de libertad “ Q_1 ” y “ Q_2 ” para la órbita periódica de la derecha en la sección de Poincaré dibujada en la figura (6.17). Obsérvese la poca variación de los valores de “ Q_2 ” y su proximidad al valor “ $3\pi/2 \simeq 4.7123889$ ”.

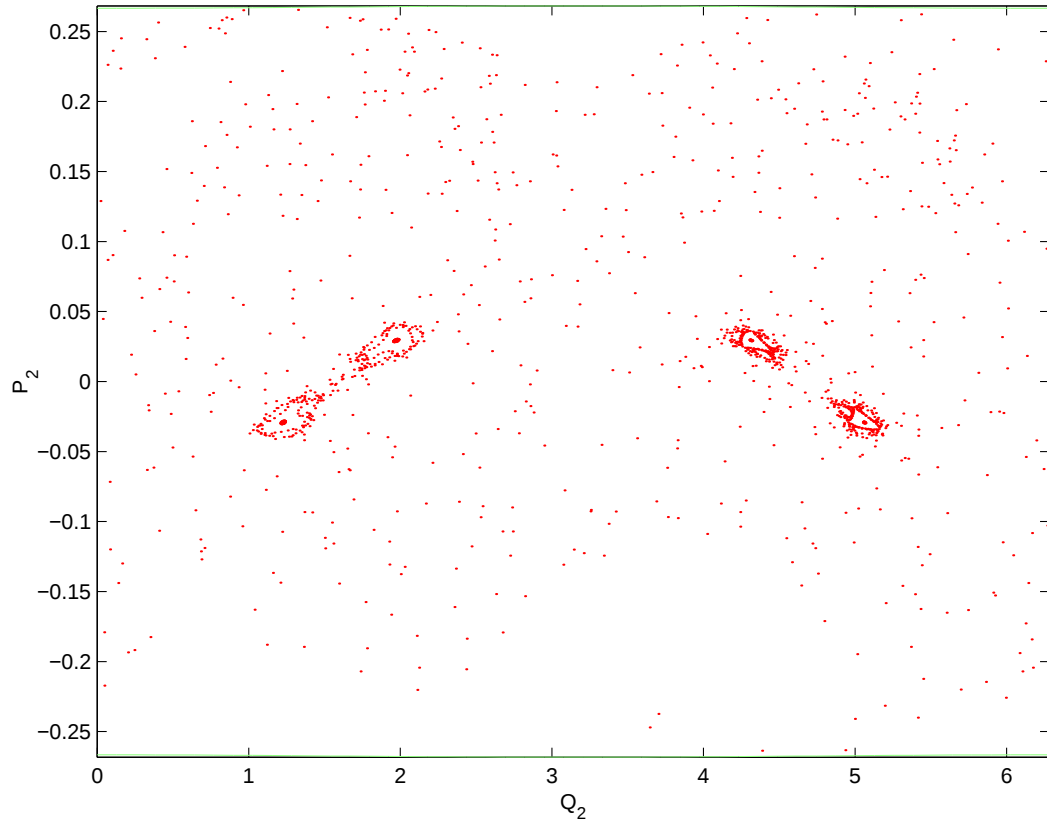


Figura 6.19: Sección de Poincaré para un valor de la energía “ $H = 0.12$ ”. La órbita de periodo doble a la derecha, con su correspondiente simétrica a la izquierda, corresponde a batidas del péndulo en torno a la posición horizontal.

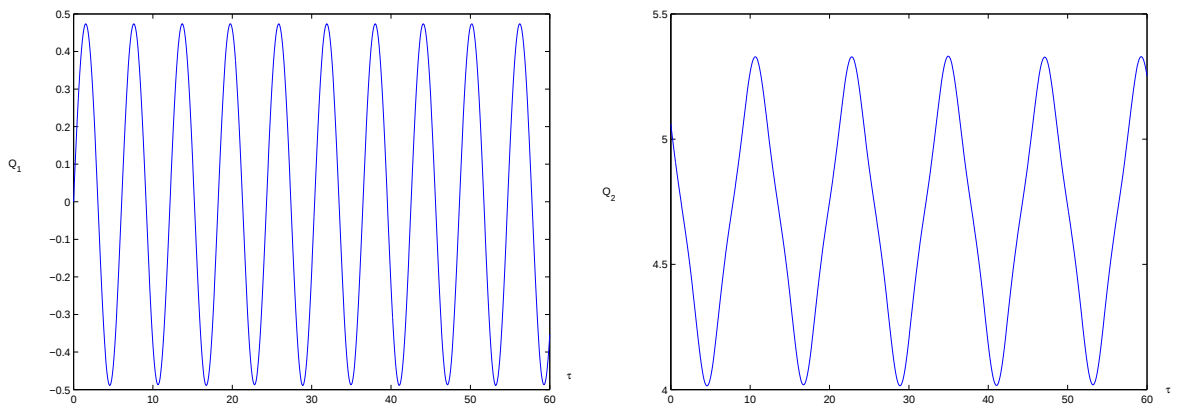


Figura 6.20: Evolución de los dos grados de libertad “ Q_1 ” y “ Q_2 ” para la órbita periódica de la derecha en la sección de Poincaré dibujada en la figura (6.19). Obsérvese como el ángulo “ Q_2 ” tiene un movimiento periódico en torno al punto “ $Q_2 = 3\pi/2$ ”.

Capítulo 7

Conclusiones.

El objetivo del proyecto era doble, por un lado estudiar la dinámica del Hamiltoniano determinando la interconexión entre las ramas de órbitas periódicas estables y por otro lado confirmar la posibilidad de estabilizar el péndulo en una posición cercana a la horizontal. Los objetivos se han cumplido y a continuación se presentan los resultados más interesantes.

El proyecto se ha desarrollado en dos partes bien diferenciadas, una parte analítica y otra parte numérica.

En la parte analítica se han seguido los siguientes pasos:

1. Obtener las ecuaciones adimensionales del movimiento a partir de la formulación de Hamilton.
2. Linealizar y estudiar los puntos de equilibrio así como las resonancias como punto de partida de cara al análisis numérico.

En la parte numérica se han utilizado de manera conjunta las siguientes técnicas:

1. Continuación numérica para determinar las familias de órbitas periódicas usando el programa “AUTO”.
2. Secciones de Poincaré para confirmar la presencia de órbitas periódicas así como para detectar todas las bifurcaciones subarmónicas que no hemos estudiado con “AUTO”.

La idea original del proyecto era utilizar las resonancias para obtener movimientos periódicos inestables cerca de la posición inferior y tratar así de estabilizar el péndulo en otra posición, después se vio que la resonancia no jugaba un papel tan importante como se pensaba en principio y se trató de extrapolar las conclusiones obtenidas mediante el estudio del caso con vibración forzada del pivote al caso autoexcitado.

En el caso forzado se vio que al aumentar la frecuencia del movimiento vibratorio de la suspensión se conseguía aumentar el ángulo de la posición de relativo equilibrio que alcanzaba el péndulo. La forma más directa de aumentar la frecuencia de la vibración del pivote en el caso autoexcitado era aumentando la frecuencia natural del muelle

“ k ”¹, esta hipótesis se vio confirmada por integración numérica de las ecuaciones del movimiento y por las secciones de Poincaré realizadas.

El siguiente paso fue buscar movimientos periódicos horizontales examinando las diferentes ramas de órbitas periódicas y sus bifurcaciones, usando los valores de los parámetros que habíamos utilizado en la integración numérica. El resultado fue inmediato, en cuanto aumentaba un poco el valor de la energía “ H ” las órbitas periódicas cerca de la posición inferior del péndulo se hacían inestable y el nuevo movimiento periódico estable era con el péndulo prácticamente horizontal, nunca llega a ser completamente horizontal debido al efecto de la gravedad, sólo se alcanzaría en el límite de frecuencia infinita para el caso de movimiento vibratorio forzado del pivote o en el caso autoexcitado en el límite de frecuencia natural del muelle infinita, gravedad nula o longitud del péndulo infinita en definitiva en el límite “ $\epsilon = 0$ ”.

¹Un aumento de la constante de rigidez del muelle supone una disminución del parámetro “ ϵ ” que se definió como $\epsilon = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)g}{kL_2}}$.

Apéndice A

Programa AUTO

A.1 Fichero *pm.c*

A continuación aparece el fichero de ecuaciones “*pm.c*”, que necesita el programa AUTO para hacer continuación numérica. Este fichero contiene las ecuaciones del movimiento (A.1) debidamente modificadas para poder continuar en el parámetro H así como el Hamiltoniano (A.2).

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{d\tau} &= \frac{P_1 - P_2 \cos Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= \frac{-P_1 \cos Q_2 + \frac{P_2}{\lambda}}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} \\ \frac{dP_1}{d\tau} &= -Q_1 \\ \frac{dP_2}{d\tau} &= \frac{\lambda \sin Q_2 \cos Q_2}{(1 - \lambda \cos^2 Q_2)^2} \left(P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{P_1 P_2 \sin Q_2}{1 - \lambda \cos^2 Q_2} + \lambda \epsilon^2 \sin Q_2\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$H = \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \frac{1}{2} Q_1^2 + \lambda \epsilon^2 \cos Q_2\tag{A.2}$$

```
#include "auto_f2c.h"
/*Esta funcion calcula el valor del hamiltoniano en cada orbita periodica*/
/*-----*/
/*-----*/
/*   pen :                                     */
/*-----*/
/*-----*/
/* ----- */
```

```

/* ----- */
int func (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
          const doublereal *par, integer ijac,
          doublereal *f, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp)
{
    doublereal lambda,epsilon,beta,P1,P2,Q1,Q2,SQ2,CQ2,aux,HQ1,HQ2,HP1,HP2;

    /*"lambda" y "epsilon" son parametros del sistema dinamico*/
    /*"beta" es el parametro de continuacion*/

    lambda = par[0];
    epsilon = par[1];
    beta = par[2];

    /*Variables canonicas del sistema pendulo-muelle*/

    Q1 = u[0];
    Q2 = u[1];
    P1 = u[2];
    P2 = u[3];

    /*Variables auxiliares*/

    SQ2 = sin(Q2);
    CQ2 = cos(Q2);
    aux = 1/(1-lambda*CQ2*CQ2);

    /*Componentes del gradiente del hamiltoniano*/

    HQ1 = Q1;
    HQ2 = P1*P2*SQ2*aux-lambda*SQ2*CQ2*aux*aux*(P1*P1-2*P1*P2*CQ2+P2*P2/lambda)-
        lambda*epsilon*epsilon*SQ2;
    HP1 = aux*(P1-P2*CQ2);
    HP2 = aux*(-P1*CQ2+P2/lambda);

    /*Campo a continuar*/

    f[0] = HP1+beta*HQ1;
    f[1] = HP2+beta*HQ2;
    f[2] = -HQ1+beta*HP1;
    f[3] = -HQ2+beta*HP2;

    return 0;
}

```

```

/* ----- */
/* ----- */
int stpnt (integer ndim, doublereal t,
           doublereal *u, doublereal *par)
{
    doublereal lambda, epsilon, beta;

    /*Valores de los parametros del sistema*/

    lambda = (doublereal).3;
    epsilon = (doublereal).5;
    beta = (doublereal).4;

    par[0] = lambda;
    par[1] = epsilon;
    par[2] = beta;

    /*Condiciones iniciales de las variables de estado*/

    u[0] = 0;
    u[1] = 3.1415926536;
    u[2] = 0;
    u[3] = 0;

    return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int bcnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
          integer nbc, const doublereal *u0, const doublereal *u1, integer ijac,
          doublereal *fb, doublereal *dbc)
{
    return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int icnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
          integer nint, const doublereal *u, const doublereal *uold,
          const doublereal *udot, const doublereal *upold, integer ijac,
          doublereal *fi, doublereal *dint)
{
    return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int fopt (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
          const doublereal *par, integer ijac,

```

```

        doublereal *fs, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp)
{
    return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */

int pvls (integer ndim, const doublereal *u,
          doublereal *par)

/*Esta funcion calcula el valor del hamiltoniano en cada orbita periodica, para ello l

{
    integer tmp;
    extern doublereal getp();
    doublereal Q1,Q2,P1,P2;
    doublereal lambda,epsilon,SQ2,CQ2,aux,H;

    tmp=1;
    Q1 = getp("BV0", &tmp, u, 3L);
    tmp = 2;
    Q2 = getp("BV0", &tmp, u, 3L);
    tmp = 3;
    P1 = getp("BV0", &tmp, u, 3L);
    tmp = 4;
    P2 = getp("BV0", &tmp, u, 3L);

    lambda = par[0];
    epsilon = par[1];
    SQ2 = sin(Q2);
    CQ2 = cos(Q2);
    aux = 1/(2*(1-lambda*CQ2*CQ2));

    H = aux*(P1*P1-2*P1*P2*CQ2+P2*P2/lambda)+
        Q1*Q1/2+lambda*epsilon*epsilon*(CQ2+1);

    par[3] = H;

    return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */

```

Apéndice B

Secciones de Poincaré.

La sección de Poincaré es una técnica desarrollada por el ingeniero y matemático Henry Poincaré para investigar el comportamiento de los sistemas dinámicos; la técnica consiste en imponer una condición sobre alguna de las variables del sistema y reducir así el número de las mismas, esta condición impuesta puede visualizarse geoméricamente como la intersección de la trayectoria descrita por el sistema dinámico con el plano determinado por las condiciones. Se trata por tanto, de interpretar los resultados obtenidos de estas intersecciones reiteradas buscando algún tipo de estructura, generalmente estas estructuras serán “toros” aunque pueden ser también puntos fijos que indican la presencia de órbitas periódicas o todo tipo de bifurcaciones en sistemas más complejos. Para más información sobre secciones de Poincaré véase [10].

B.1 Condición para la sección de Poincaré.

La condición elegida para realizar la sección de Poincaré es:

$$Q_1 = 0 \quad P_1 > 0$$

Cada vez que el muelle pase por el origen con momento generalizado positivo se dibujará un punto en el plano (Q_2, P_2) .

Para iniciar una sección de Poincaré, se dan unas condiciones iniciales a algun integrador numérico que contiene las ecuaciones diferenciales del movimiento, en este caso se ha usado el que incorpora el programa MATLAB, concretamente el “ode45”. Estas condiciones iniciales suelen darse picando con el ratón dentro de una región sobre la sección de Poincaré y que verifique las condiciones impuestas a las variables.

La forma de esta región puede determinarse usando la expresión del Hamiltoniano.

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_1^2 - 2 P_1 P_2 \cos Q_2 + \frac{P_2^2}{\lambda}}{2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2)} + \frac{1}{2} Q_1^2 + \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) \\ 2 (1 - \lambda \cos^2 Q_2) \left(H - \frac{Q_1^2}{2} - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) \right) &= (P_1 - P_2 \cos Q_2)^2 + \frac{P_2^2}{\lambda} - (P_2 \cos Q_2)^2 \\ &= (P_1 - P_2 \cos Q_2)^2 + \frac{P_2^2}{\lambda} (1 - \lambda \cos^2 Q_2) \end{aligned}$$

$$(P_1 - P_2 \cos Q_2)^2 = 2(1 - \lambda \cos^2 Q_2) \left(H - \frac{Q_1^2}{2} - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) - \frac{P_2^2}{2\lambda} \right)$$

$$P_1 - P_2 \cos Q_2 = \sqrt{2(1 - \lambda \cos^2 Q_2) \left(H - \frac{Q_1^2}{2} - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) - \frac{P_2^2}{2\lambda} \right)}$$

La expresión anterior sólo tiene sentido si el radicando es positivo.

Ya que la expresión:

$$1 - \lambda \cos^2 Q_2$$

es siempre estrictamente mayor que cero.

La condición que deben cumplir las condiciones iniciales sobre el plano (Q_2, P_2) para que existan valores reales de P_1 es:

$$H - \frac{Q_1^2}{2} - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) - \frac{P_2^2}{2\lambda} > 0 \quad (\text{B.1})$$

Esta expresión junto con la condición $Q_1 = 0$, determina una región en el plano (Q_2, P_2) donde puede picarse con el ratón para dar condiciones iniciales al integrador numérico. Picando dentro garantizamos que existen valores reales de P_1 , pero no garantizamos que los valores cumplan la condición $P_1 > 0$, en cualquier caso, aun siendo negativos valen como condiciones iniciales para el integrador, sólo que el corte con el plano (Q_2, P_2) no quedará marcado con un punto. Esto en principio no tiene gran importancia, ya que la trayectoria que describe el sistema dinámico producirá cortes con el plano con valores de P_1 positivos.

Los límites de esta región quedan determinados igualando la expresión (B.1) a cero e imponiendo la condición $Q_1 = 0$:

$$H - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) - \frac{P_2^2}{2\lambda} = 0$$

Los valores de P_1 utilizados como condición inicial para el integrador, vienen dados por la expresión:

$$P_1 = P_2 \cos Q_2 \pm \sqrt{2(1 - \lambda \cos^2 Q_2) \left(H - \lambda \epsilon^2 (\cos Q_2 + 1) - \frac{P_2^2}{2\lambda} \right)}$$

Bibliografía

- [1] ACHESON, D.: *Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum.*
Jesus College, Oxford University Press, 1997
- [2] DOEDEL, E. J.; CHAMPNEYS, A.; FAIRGRIEVE, T.; KUZNETSOV, Y.; SANDST-EDE, B & WANG, X. J.: *AUTO 97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont).*
Technical Report Computer Science Department. Concordia University, Montreal, Canada 1997
- [3] MEYER, M.K.; HALL, G.R.: *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem.*
Springer-Verlag 1992
- [4] WIGGINS, S.: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.*
Springer-Verlag 1990
- [5] GALÁN, J.; CHAMPNEYS, A.R.: *Subarmonic branching in the parametrically forced pendulum: the origin of multiple nodding solutions.*
Preprint 2001
- [6] JORDAN, D.W.; SMITH, P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations.*
Clarendon, Oxford 1987
- [7] KUZNETSOV, YU.A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory.*
Appl. Math. Sci. 112, 2nd ed., Springer-Verlag, New York 1998
- [8] MUÑOZ, F. J.; GALÁN J.; FREIRE, E.; DOEDEL, E. J.: *Continuación Numérica de Órbitas Periódicas en Sistemas Hamiltonianos con Simetría.*
Actas del XVI CEDYA, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria 1999
- [9] MUÑOZ-ALMARAZ, F. J.; FREIRE, E.; DOEDEL, E. J.; VANDERBAUWHEDE, A.; GALÁN, J.: *Continuation of Periodic Orbits in Symmetric Hamiltonian Systems.*
Preprint submitted to Physica D 2000

- [10] POINCARÉ, H.: *Les methodes nouvelles de la mécanique céleste.*
Gauthier-Villars, Paris 1899
- [11] RAÑADA, A.: *Dinámica Clásica.*
Alianza Universidad Textos AUT/133, Madrid 1990
- [12] STROGATZ, S. H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering.*
Addison-Wesley 1994
- [13] TONDL, A.; RUIJGROK, T.; VERHULST, F.; NABERGOJ, R.: *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems.*
Cambridge University Press 2000
- [14] SANGUINO, J.: *Iniciación al $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ . Un sistema para producir documentos.*
Universidad politécnica de Madrid, Addison-Wesley 1997
- [15] CASCALES, B.; LUCAS, P.; MIRA, J.M.; PALLARÉS, A.; SÁNCHEZ-PEDREÑO, S.: *$\text{\LaTeX}$. Una imprenta en tus manos.*
Madrid, Addison-Wesley 2000