

El objetivo principal del capítulo es analizar los Problemas multicriterios para profundizar en la técnica conocida como Proceso Analítico Jerarquizado (AHP; por sus siglas en inglés, Analytic Hierarchy Process), que es la que se ha encontrado más apropiada para nuestro problema de asignación de prioridades en el reparto de recursos. De manera detallada, el contenido de este capítulo presenta el desarrollo del modelo matemático y jerárquico.

7. Problemas de Multicriterios

“Divide y conquistarás” (La estrategia de las ciencias)

Esta importante rama de la Investigación Operativa surgió como crítica al paradigma decisional tradicional en el que se trataba de tomar decisiones en función de un único criterio, cuando en muchos casos de la vida ordinaria el encargado de tomar las decisiones desea ordenar el conjunto de soluciones factibles atendiendo a diferentes criterios que reflejen sus particulares preferencias.

La modelización multicriterio proporciona al encargado de tomar las decisiones una libertad de juicio que le es negada por la modelización monocriterio. La modelización multicriterio es mucho más realista puesto que considera las pseudo-restricciones como elementos de la decisión, es decir, criterios. Una consecuencia de ello es que el modelo va a tener sentido para el encargado de tomar las decisiones y por tanto es posible un análisis interactivo.

Los primeros trabajos en esta rama se deben a Koopmans (1951), que desarrolla el concepto de vector eficiente o no dominado, y a Kuhn y Tucker (1951), que deducen las condiciones que garantizan la existencia de soluciones eficientes. Otro trabajo crucial para el desarrollo del paradigma multicriterio es

el de Charnes, Cooper y Ferguson (1955), donde se presentan los aspectos esenciales de **la Programación Por Metas** que posteriormente desarrollan Charnes y Cooper (1961) en su ya clásico trabajo *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. El indiscutible éxito y apoyo sociológico por parte de la comunidad científica al paradigma multicriterio ha motivado la creación de sociedades y revistas especialmente dedicada a este tipo de temas.

La denominada Toma de Decisiones Multiatributo o Multicriterio (MCDM) aborda problemas en los que el número de alternativas es finito y se conoce su evaluación sobre distintas características (denominadas atributos), de carácter cuantitativo o cualitativo.

La Toma de Decisiones Multicriterio trabaja con un número finito, generalmente pequeño, de alternativas predeterminadas, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ del cual se conoce además su evaluación sobre cada uno de los atributos, X_1, X_2, \dots, X_n , que no tiene que ser necesariamente cuantificable y que se representa a través de la denominada matriz de decisión:

	X_1	X_2	...	X_j	...	X_n
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...
A_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...
A_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Figura 7.1 Matriz de decisión

Denotaremos esta matriz por $D = (X_{ij}) \in M_{m \times n}$ donde X_{ij} es el resultado alcanzado por la alternativa $A_i = 1, \dots, n$. Además, en general, se conoce la condición de cambio deseable para cada atributo. Estos valores pueden medirse con relativa independencia de los deseos y necesidades del encargado de tomar las decisiones, siendo generalmente susceptibles de expresarse como una función matemática de las variables de decisión. Cuando el número de atributos es muy grande, éstos suelen presentarse en una estructura jerárquica. Cada grupo de la jerarquía suele tener alrededor de siete elementos. Esto tiene su origen en la Teoría de Miller (1965) según la cual siete aspectos (más/menos dos) es la mayor cantidad de información que un observador puede dar sobre un objeto en base a un juicio absoluto.

Así, a partir de los valores preferidos por el encargado o encargados de tomar las decisiones sobre cada uno de los atributos, X_j^* , se puede formar la alternativa ideal $A^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, definida anteriormente.

La decisión final consistirá en la elección de una o más alternativas de A como la "mejor" o "mejores", basándonos en la información aportada por el encargado de tomar las decisiones, o el acuerdo alcanzado en el caso ser varias personas con diferentes percepciones, acerca de sus preferencias sobre los atributos y/o las alternativas. El conjunto de las posibles alternativas puede estar definido por extensión (enumerando todos sus elementos) o por comprensión (enunciando las propiedades o características de los elementos del conjunto). El conjunto de alternativas no es una realidad objetiva. Su definición forma parte de la actividad de modelización y puede condicionar el resto del proceso. No obstante, la mayor parte de los métodos de MCDM suponen la existencia de un conjunto de alternativas dado, sobre el cual el analista aplicará una serie de técnicas con objeto de encontrar la "mejor" solución. Muy pocos estudios se han dedicado a la generación de alternativas, aunque Zeleny en su obra "Multiple Criteria Decision Making" plantea que éste es uno de los aspectos más importantes del proceso de decisión.

Existen dos escuelas dentro de la MCDM: la de origen anglosajón, más normativa (en el sentido de cómo deben ser las preferencias y de cómo debe tomar una decisión un agente económico racional), y la francesa, más positiva, que pretende estudiar las preferencias reales del encargado de tomar las decisiones, y cuyo principal objetivo es ayudar a éste a elegir la solución más compatible con tales preferencias.

La búsqueda de soluciones alternativas para la solución al problema de diseño multicriterio, conduce a determinar las especificaciones necesarias para cada una de ellas. En este sentido, es preciso tener en cuenta que la calidad de la solución final no tiene por que ser la mejor de todas las alternativas generadas en todas las especificaciones. Muther referencia algunas técnicas útiles en la evaluación de alternativas como son:

- Listas de pros y contras. (Exponiendo las ventajas y desventajas de cada una de ellas).
- Categoría (Ranking). Seleccionando los factores o consideraciones que se crea que son importantes para el layout, listarlos, y ordenar las alternativas en orden numérico para cada factor.
- Análisis de factores. Cada factor tiene asignado un peso numérico y cada alternativa es enfrentada a cada factor. Cada alternativa se pondera y se escoge la mejor.
- Comparación de costes (Cost comparison). Todos los costes asociados a cada alternativa son identificados, además de los costes ahorrados en la producción. La alternativa más económica es la elegida.

Del estudio de estas propuestas se han obtenido algunas observaciones:

Las listas de pros y contras son probablemente las formas más sencillas de evaluar alternativas. Sin embargo, también es probablemente, la peor en cuanto a la certeza de los resultados. El procedimiento de ranking tiene la propiedad de que todas las alternativas son comparadas frente al mismo conjunto de factores. Sin embargo este método puede presentar problemas si

no se realiza un correcto estudio y selección de los factores más importantes, y se pasan por alto algunos factores que son fundamentales en el diseño de una distribución. Francis & White señalan a este respecto que este método presenta algunos defectos, entre ellos que la elección final de los diseños preferentes no se lleva a cabo fácilmente. Es necesario combinar este procedimiento con otro posterior, para poder realizar la elección final de la alternativa. Además, deben ser incluidos tanto los factores cuantitativos como los cualitativos, por lo que es necesario estudiar con detenimiento el tratamiento que se debe dar a estos factores para que la comparación de alternativas se haga de la forma más objetiva posible, ya que un punto débil del método sería la influencia que pudiera tener sobre el diseño resultante la falta de objetividad del proyectista a la hora de elegir correctamente los factores y asignar los pesos.

Por este motivo se ha realizado un análisis de los métodos de ponderación de factores, encontrándose que es bastante frecuente que unos factores o criterios tengan para el proyectista, más relevancia que otros.

Según Barba-Romero y Pomerol, (1997), las circunstancias son muy diversas. Dependerá del caso concreto en estudio, de factores externos que le condicionen (cliente, legislación, etc.), su propia experiencia, y también están sus preferencias personales (que pueden objetivarse o pueden ser completamente subjetivas).

En cualquier caso, el proyectista puede considerar más o menos importante, la influencia de un factor respecto de los restantes. Precisamente, los Pesos o Ponderaciones reflejan estas medidas de la importancia relativa que los criterios tienen para un encargado de tomar las decisiones.

Los valores que toman los pesos van a influir de forma determinante en los resultados de la decisión. Esta influencia de los valores que toman los pesos es una consecuencia directa del papel que juegan en la decisión multicriterio como

indicadores de la importancia que el encargado de tomar las decisiones atribuye a cada uno de los factores o criterios. Resulta, por tanto, indispensable el evaluar los pesos de forma que reflejen lo más fielmente posible, las preferencias del encargado de tomar las decisiones. (Barba-Romero y Pomerol, 1997).

De entre los diversos métodos de asignación de pesos, existen métodos de asignación directa y métodos de asignación indirecta, dentro de los cuales se encuentran los denominados **métodos eigenpesos**.

Se conocen como métodos de eigenpesos a un conjunto de métodos de asignación de pesos basados en el cálculo del autovector dominante (dominant eigenvector) de una matriz de comparaciones binarias de los criterios. Se conocen algunos métodos precursores de éste, como **el método DARE** de Klee [1971], pero su principal representante es el ya clásico **método AHP** (Analytic Hierarchy Process) propuesto por Saaty a finales de los años 70.

7.1. El Proceso Analítico Jerarquizado (AHP)

Este método fue desarrollado por el matemático Thomas Saaty; y consiste en formalizar la comprensión intuitiva de problemas complejos mediante la formulación de un modelo jerárquico.

El propósito del método es estructurar un problema multicriterio en forma visual, mediante la construcción de un modelo jerárquico constituido por tres niveles: meta u objetivo, criterios y alternativas.

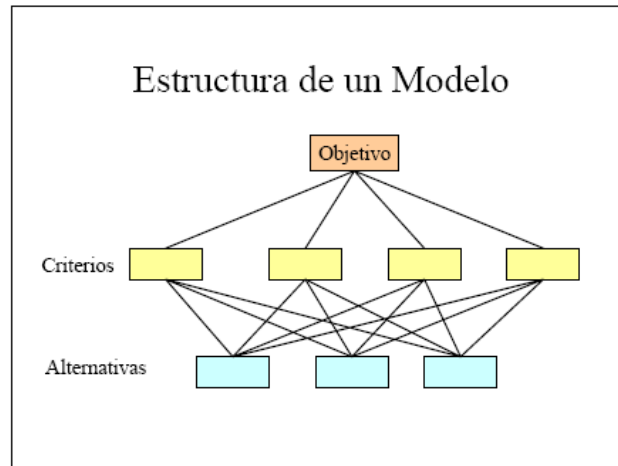


Figura 7.2 Estructura de un modelo AHP

Más específicamente, el AHP permite de una manera eficiente y gráfica organizar la información respecto de un problema, descomponerla y analizarla por partes; visualizar los efectos de cambios en los niveles, y sintetizar. El AHP “...trata de desmenuzar un problema y luego unir todas las soluciones de los subproblemas en una conclusión” (Saaty, 1998).

Una vez configurado el modelo jerárquico, se realizan comparaciones de “a pares” (comparaciones binarias) entre dichos elementos (criterios, subcriterios y alternativas), y se atribuyen valores numéricos a las preferencias señaladas por las personas, entregando una síntesis de las mismas mediante la agregación de dichos juicios parciales.

El fundamento del proceso de Saaty es permitir dar valores numéricos (asignación de “pesos”) a los juicios dados por las personas, logrando medir cómo contribuye cada elemento de la jerarquía al nivel inmediatamente superior del cual se desprende.

Para estas comparaciones se utilizan escalas de razón en términos de preferencia, importancia o probabilidad sobre la base de una escala numérica propuesta por el mismo Saaty, que va desde 1 hasta 9.

Una vez obtenido el resultado final, el AHP permite llevar a cabo un análisis de sensibilidad. El AHP posee un software de apoyo, y su aplicación comprende una variada gama de experiencias prácticas en campos muy diversos en diferentes países del mundo.

El AHP es una herramienta metodológica que ha sido aplicada en varios países para incorporar las preferencias de los actores involucrados en algún tipo de conflicto y/o proceso participativo de toma de decisiones.

Dentro de las posibilidades de aplicación de la herramienta están entre otras: formulación de políticas, priorizar cartera de proyectos, gestión ambiental, análisis costo beneficio, formulación de estrategias de mercado, priorizar recursos, etc.

7.1.1. Ventajas del AHP

Algunas de las ventajas del AHP frente a otros métodos de decisión multicriterio son:

- Es un método para organizar la información y los razonamientos que se utilizan en la toma de decisiones.
- Refleja la fuerza de la intuición, la experiencia y la lógica de los temas, para luego sintetizar estos diversos juicios en un resultado que concuerda con nuestras expectativas intuitivas.
- Presenta un sustento matemático.
- Permite desglosar y analizar un problema por partes.
- Permite medir criterios cuantitativos y cualitativos mediante una escala común.
- Incluye la participación de diferentes personas o grupos de interés, y obtener un consenso.

- Detecta y acepta, dentro de ciertos límites la incoherencia de los humanos encargados de tomar las decisiones.
- Permite verificar el índice de consistencia, y hacer las correcciones si fuera necesario.
- Genera una síntesis, y da la posibilidad de realizar análisis de sensibilidad.
- Es de fácil uso, y permite que su solución se pueda complementar con métodos matemáticos de optimización.
- Permite emplear de forma natural una jerarquización de los criterios, cosa que no pueden hacer los métodos que exigen comparaciones globales de las alternativas.
- No se necesita información cuantitativa acerca del resultado que alcanza cada alternativa en cada uno de los criterios considerados, sino tan sólo los juicios de valor del centro encargado de tomar las decisiones.

7.1.2. Base matemática del AHP

“El AHP trata directamente con pares ordenados de prioridades de importancia, preferencia o probabilidad de pares de elementos en función de un atributo o criterio común representado en la jerarquía de decisión. Se piensa que este es el método natural (pero refinado) que la gente siguió al tomar decisiones, mucho antes que se desarrollaran funciones de utilidad y antes que se desarrollara formalmente el AHP” (Saaty, 1998).

“El AHP hace posible la toma de decisiones grupal mediante el agregado de opiniones, de tal manera que satisfaga la relación recíproca al comparar dos elementos. Luego toma el promedio geométrico de las opiniones. Cuando el grupo consiste en expertos, cada uno elabora su propia jerarquía, y el AHP combina los resultados por el promedio geométrico” (Saaty, 1998).

También se puede utilizar **la Integración de modelos de representación de preferencias en problemas de toma de decisión con múltiples expertos**. Estos presentan sus preferencias con múltiples estructuras de representación de preferencias: órdenes de preferencia, función de utilidad y relaciones de preferencia. Después se abordan tanto la fase de selección de alternativas como la fase de consenso que hay que realizar previamente entre los expertos antes de alcanzar una solución. La fase de selección de alternativas se compone de dos pasos, uno de agregación de preferencias y otro de explotación de las preferencias agregadas. En cuanto al consenso, hay dos medidas: una para evaluar el estado de consenso que existe entre las opiniones de los expertos en cada momento, y otra para evaluar el grado de acuerdo de un experto con los demás. Se diseña un proceso de retroalimentación basado en unas reglas de cambio de opiniones simples que asisten al experto mediante recomendaciones sobre como cambiar sus opiniones de cara a acercarse a las posiciones de consenso de la mayoría.

Axioma No. 1 (Reciprocidad). Juicios recíprocos	La intensidad de preferencia de A_i/A_j es inversa a la preferencia de A_j/A_i . ($a_{ji} = 1/a_{ij}$; $a_{ii} = 1$)
Axioma No. 2 (Homogeneidad). Homogeneidad de los elementos	Los elementos que se comparan son del mismo orden de magnitud, con respecto a una misma propiedad
Axioma No. 3 (Dependencia). Condición de estructura jerárquica, o estructura dependiente de reaprovechamiento	Determinar y controlar el tipo de dependencia entre los elementos de dos niveles consecutivos en la jerarquía y dentro de un mismo nivel
Axioma No. 4 (Cumplimiento). Condición de expectativas de orden de rango	Las expectativas deben estar representadas en la estructura (modelos) en términos de criterios y alternativas

Tabla 7.1 Axiomas del AHP

En definitiva, AHP es una herramienta matemática bien estructurada que permite la combinación perfecta de variables cuantitativas y cualitativas a un mismo nivel, obteniendo resultados que apoyan adecuadamente a la toma de decisiones.

Más específicamente, el método AHP en principio trata de desarrollar un juicio sobre la importancia relativa de estas alternativas, y que el juicio final sea lo más objetivo posible.

La comparación al mismo tiempo de todas las alternativas es prácticamente imposible, el método AHP tiene la ventaja de llevarlas a cabo de manera “paritaria”, es decir, comparaciones dos a dos cada vez. El resultado de estas comparaciones se vuelca en una matriz de relaciones paralelas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 7.3. Matriz de las comparaciones paritarias entre alternativas

En la matriz “A” de relaciones paralelas, cada elemento “a_{ij}” representa la importancia relativa entre la alternativa 1 y la 2, es decir, la relación de las ponderaciones. En una analogía del peso específico de dos alternativas, la alternativa 1 con un peso w₁ = 50 g, y la alternativa 2, con w₂ = 40 g se pueden evaluar de la siguiente manera:

$$A_{12} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{50 \text{ g}}{40 \text{ g}} = \frac{5}{4}$$

Si en la matriz “A” cada elemento “a_{ij}” es reemplazado por una relación semejante a la ecuación 1, se tendrá una matriz de “pesos”, como la que se muestra en la figura.

$$A = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

Figura 7.4 Interpretación de la matriz de comparaciones paritarias

En esta matriz todos los elementos son positivos y verifican las siguientes propiedades:

- Reciprocidad: $w_{ij} = 1/w_{ji}$ Para todo $i, j = 1, \dots, n$.
- Consistencia: $w_{ij} = w_{ik}/w_{jk}$ Para todo $i, j, k = 1, \dots, n$.

Esta matriz se denomina “matriz cuadrada recíproca”. Las comparaciones descritas en ella, se definen “consistentes” si $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ (intuitivamente, si B es mayor que C y C es mayor que D, D no puede ser mayor que B y formalmente $a_{ik}=2$ y $a_{jk}=4$, entonces $a_{ik}=8$); Dicho de otra manera, $a_{ij} = a_{ik} / a_{jk}$.

Emitir un juicio ecuánime para la evaluación de distintas alternativas no puede estar lejos del proceso planteado, sin embargo, es necesario establecer una tolerancia entre los errores o desvíos con respecto a las apreciaciones. Considerando la línea “i” de la matriz de juicios (relaciones paralelas):

$a_{i1}, a_{i2}, \dots; a_{ij}, \dots, a_{in}$.

Para un caso ideal, si se multiplicará el primer elemento de la línea por “ w_1 ”, el segundo por “ w_2 ” y así sucesivamente, se tendría:

$$\frac{w_i}{w_1} \cdot w_1 = w_i \quad \frac{w_i}{w_2} \cdot w_2 = w_i \quad \dots \quad \frac{w_i}{w_j} \cdot w_j = w_i \quad \dots \quad \frac{w_i}{w_n} \cdot w_n = w_i$$

De acuerdo con Saaty, las relaciones anteriores, forman vectores línea cuyos elementos representarían la dispersión estadística del juicio elaborado sobre el valor de “ w_i ”. Luego, parece válido utilizar como estimativa de “ w_i ” el promedio de estos valores (Saaty, 1991). Es decir, para hacer w único, se pueden normalizar sus entradas divididas por su suma.

$$w_i = 1/n \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j$$

En el caso general, el valor preciso de w_i/w_j no se puede dar, sino sólo una estimación de él como juicio. Por el momento se considera una estimación de

estos valores por un experto que se supone “perturba” muy poco los coeficientes. Esto significa perturbaciones pequeñas a los valores propios (ideales). El problema ahora es que A se convierte en una matriz “perturbada” A', es decir:

$$A' w' = \tilde{\epsilon}_{\text{máx}} \cdot w'$$

Donde $\tilde{\epsilon}_{\text{máx}}$ es el mayor valor propio (ideal) de A'. Como una simplificación de la notación, se escribirá:

$$Aw = \tilde{\epsilon}_{\text{máx}} \cdot w'$$

Donde A es la matriz de comparaciones paritarias. El problema es evaluar como de precisa es w. El vector w se determina calculando el autovector (vector de prioridad) de la matriz A, con elementos normalizados que no son más que los “pesos”, si A es consistente.

De este modo, al calcular los valores a_{ij} se obtiene un vector de “pesos” que corresponde a la importancia relativa asignada a cada atributo. Ello no es matemáticamente válido en el caso de inconsistencias, pero es una buena aproximación si dicha inconsistencia es ligera (menor a 10% en los casos prácticos). Cuanto más parecido sea $\tilde{\epsilon}_{\text{máx}}$ al número de alternativas (n) que están siendo analizadas, más consistente será el juicio de valor que se elaboró (es decir, $\tilde{\epsilon}_{\text{máx}} \geq n$).

El índice de consistencia se define como:

$$IC = (\tilde{\epsilon}_{\text{máx}} - n) / (n - 1)$$

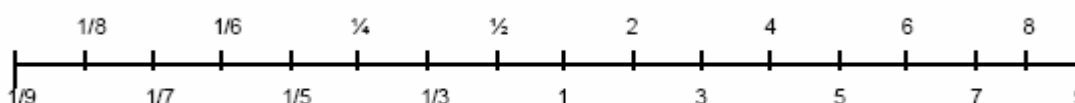
Con n y $\tilde{\epsilon}$ respectivamente, la dimensión y el autovalor de la matriz A. Esta base matemática genera un sistema simple, que permite la estructuración analítica de los criterios de decisión, así como aislar las opciones en un contexto simplificado (al compararlas de modo paralelo al nivel jerárquico más bajo posible).

A partir de matrices estrictamente recíprocas de diferentes tamaños, se estimaron los IC clasificados por el tamaño de la matriz, al cual llamaron “índice de consistencia aleatorio” (ICA). La relación entre IC e ICA se le conoce como “relación o ratio de consistencia” (RC); y si su valor es menor o igual a 0.10 se considera que la elaboración de la matriz de juicios de valor se hizo de manera coherente, respetando todas las relaciones transitivas del siguiente tipo: si la alternativa “i” tiene un “peso” superior a la “j” y a su vez ésta un “peso” superior a la “k”, la “i” deberá ser más “pesada” que la “k” (Saaty, 1991).

7.1.3. La escala AHP

Saaty ensaya cierto número de escalas de medida y justifica [Saaty 1980, 1997] la técnica, basada en el principio de “comparación por pares”: Para ello parte de comparar cada criterio i con cada criterio j, obteniendo unos valores a_{ij} que son posibles de agrupar en una matriz cuadrada de orden n: la llamada matriz de comparaciones binarias $A = [a_{ij}]$. La razón de comparar de dos en dos los criterios, es porque para el encargado de tomar las decisiones es más fácil que compararlos todos a la vez.

La técnica emplea la siguiente escala numérica, basada en el principio de “comparación por pares”:



Como producto de todo un estudio de base experimental, Thomas L. Saaty estableció esta escala compuesta por nueve (9) elementos, la cual refleja de forma adecuada y suficiente los distintos grados o niveles en los cuales una persona puede discriminar o asignar la “intensidad de la relación” entre elementos de un conjunto dado.

Saaty consideró que todas las comparaciones, y por tanto las mediciones, cuando se recurre a esta técnica se hacen en la misma escala, de tal manera que ello se ajusta al principio de homogeneización de la teoría de mediciones, en particular cuando se trabaja con factores o variables de gran variedad y diversidad.

IMPORTANCIA / PREFERENCIA	INTENSIDAD	SIGNIFICADO
1	Igual o diferente a...	Al comparar un elemento con otro, hay indiferencia entre ellos
3	Ligeramente más importante o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero es ligeramente más importante o preferido que el segundo
5	Más importante o preferido que...	Al compara un elemento con el otro, el primero se considera más importante o preferido que el segundo
7	Mucho más importante o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera mucho más importante o preferido que el segundo
9	Absolutamente, o muchísimo más importante o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera absolutamente, o muchísimo más importante que el segundo
2, 4, 6 y 8	Valores intermedios entre dos juicios adyacentes	Usados como valores de consenso entre dos juicios
Incrementos de 0.1	Valores intermedios en la graduación más fina de 01 (por ejemplo, 5.2 es una entrada válida)	Usados para graduaciones más finas de los juicios

Tabla 7.2 Escala de Saaty

Si no fuese el criterio i más importante que el j sino al revés, se estima a_{ij} de acuerdo con lo anterior y se hace $a_{ij}=1/a_{ji}$. Es decir, para el caso de los valores recíprocos de la escala, la interpretación es completamente análoga.

IMPORTANCIA / PREFERENCIA	INTENSIDAD	SIGNIFICADO
1/3	Ligeramente menos importante, o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera ligeramente menos importante o preferido que el segundo.
1/5	Menos importante, o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera menos importante o preferido que el segundo
1/7	Mucho menos importante, o preferido que...	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera mucho menos importante o preferido que el segundo
1/9	Absolutamente o muchísimo menos importante, o preferido que	Al comparar un elemento con el otro, el primero se considera absolutamente o muchísimo menos importante, o preferido que el segundo

Nota: Los valores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, y $\frac{1}{8}$ se usan de la misma forma que 2, 4, 6 y 8.

Tabla 7.3 Escala de Saaty (recíprocos)

Algunos de los aspectos que justifican el uso de esta escala, son su amplio abanico de posibilidades (sin superar las 9 que se establecen como límite de valores que la mente humana puede simultáneamente contemplar), y el que las valoraciones sean números enteros, con incrementos unitarios de una valoración a otra. También se considera interesante señalar que el valor 1 es el valor de equivalencia y que cualquier criterio es igualmente importante en sí mismo, luego los coeficientes a_{ii} de la matriz A, (su diagonal principal), tendrán siempre valor 1.

Además, como siempre $a_{ji}=1/a_{ij}$, el encargado de tomar las decisiones sólo necesita evaluar la parte triangular superior de la matriz A (es decir, aquellos $1/2n(n-1)$ elementos a_{ij} ($j>i$) que están por encima de la diagonal principal).

El método AHP tiene una sólida fundamentación teórica, basada en Teoría de Grafos. Una ventaja de utilizar este método es que permite emplear de forma natural una jerarquización de los criterios, cosa que no pueden hacer los métodos que exigen comparaciones globales de las alternativas [Vargas, 1989].

7.1.4. Estructura del modelo jerárquico

La técnica de las jerarquías analíticas fue propuesta por Saaty [1980, 1997], y su cometido es el de ordenar las alternativas de decisión a partir del establecimiento de comparaciones binarias entre objetivos, criterios o alternativas-criterios en función de lo que se desee jerarquizar en cada momento.

En general cuando se ha de resolver un problema complejo, compuesto de numerosos subproblemas, relacionados entre sí. La solución de cada uno de estos subproblemas constituye, a su vez, un sistema complejo, ya que dicha

solución está compuesta por un conjunto de elementos también relacionados entre sí.

Por otro lado, y dado el entorno, también complejo, en el que se encuentran los problemas actuales, y en el que existen numerosos y diversos factores relacionados entre sí y que van a afectar a la consecución de los objetivos planteados, resulta esencial, identificar cuales son los factores más importantes, así como determinar el grado o intensidad de la relación existente entre ellos, tal y como se ha expuesto anteriormente.

De entre todos estos factores, algunos de ellos como los de tipo social, político, u otros de carácter cualitativo, resulta difícil evaluarlos en términos de medidas físicas o económicas, pero sin embargo, es necesaria su cuantificación, para establecer prioridades o grados de importancia entre ellos, y de este modo completar el análisis factorial del problema. De entre los diferentes métodos que pueden resultar de ayuda al proyectista a este respecto, el proceso Analítico Jerárquico, concretamente, ofrece un enfoque matemático que ayuda a determinar las prioridades entre atributos y factores.

Se ha considerado muy interesante la utilización de este tipo de procedimiento, puesto que éste constituye un apoyo al comportamiento y pensamiento natural, ya que refuerza y acelera los procesos de pensamiento de manera que se amplía la conciencia en el problema, y se incluyen más factores que los que se considerarían normalmente. Satty lo define como un proceso de “racionalidad sistemática”, que permite considerar el problema como un todo y estudiar la interacción simultánea de sus componentes dentro de una jerarquía.

Este proceso analítico jerárquico consiste en descomponer una situación compleja, no estructurada, en sus partes o elementos constituyentes y ordenar estos elementos de una forma jerárquica, para poder asignarles a continuación unos valores numéricos a los mismos, tal y como se ha descrito anteriormente a través de la escala de valores enunciada.

Una de las partes más relevantes del modelo AHP consiste en la estructuración de la jerarquía del problema, etapa en la cual se debe desglosar el problema en sus componentes más relevantes. La jerarquía la forman unos elementos llamados “nodos” y unas “relaciones de pertenencia o subordinación” entre ellos, usualmente conocidos como arcos de la red jerárquica. La jerarquía básica esta conformada por meta u objetivo, criterios, y alternativas

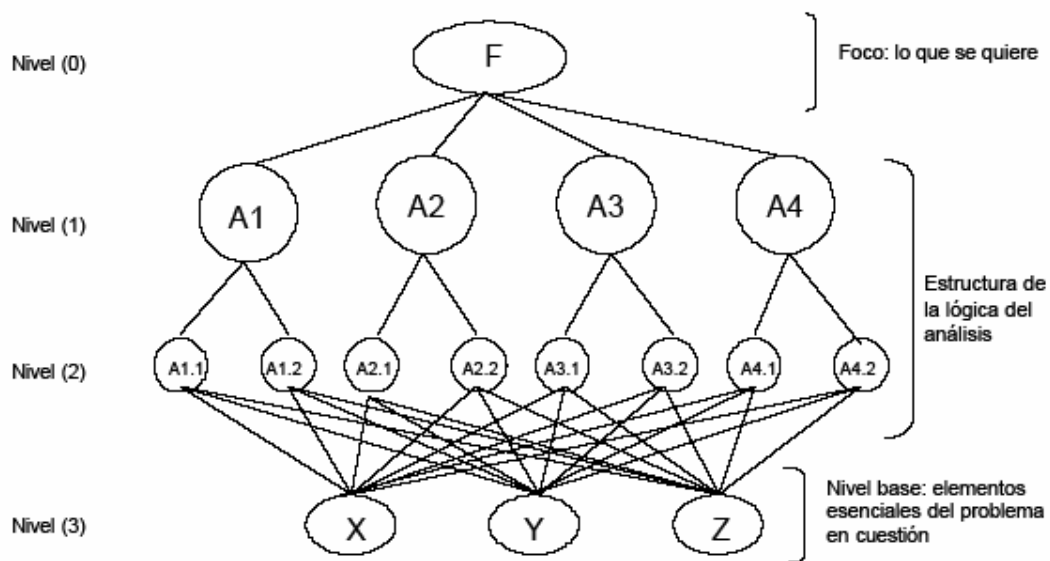


Figura 7.5 Modelo Jerárquico de varios niveles

Para identificar una jerarquía hay que seguir los siguientes pasos:

- Identificar el objetivo global (Goal o Foco).
- Identificar criterios para satisfacer el objetivo global.
- Identificar, el lugar adecuado, donde existirán subcriterios bajo cada criterio padre.
- Si los subcriterios son todavía muy generales, insertar un nivel más de subcriterios, y así sucesivamente hasta que la importancia del penúltimo nivel de subcriterios pueda determinarse en términos de

los subcriterios terminales. Cuando ocurra esto podemos dar por finalizada la jerarquía.

- Identificar las Alternativas para ser evaluadas en términos de los subcriterios (o criterios) terminales de la jerarquía.
- Ingresar prioridades sobre los elementos (criterios/subcriterios) en cada nivel, en términos del elemento del nivel superior.

Los distintos niveles del esquema muestran una red de relaciones en la que los factores involucrados se influyen entre sí. El foco representa lo que se quiere alcanzar; es decir, la meta u objetivo. A partir de este componente director se plantean los elementos o criterios específicos a considerar, o que inciden de manera directa para alcanzar la meta u objetivo y los elementos que los respaldan; o sea, se establecen una estructura lógica de análisis y las alternativas de soluciones al problema en cuestión.

7.1.4.1. Consistencia del Modelo Jerárquico

El proceso analítico jerárquico está basado, fundamentalmente, en los aspectos de la naturaleza humana, el pensamiento analítico y la medida, y es un método útil para solucionar de forma cuantitativa los problemas. También permite probar la sensibilidad de la solución ante cambios en la información, así como verificar de forma simple la validez de la consistencia de los juicios.

Conviene tener en cuenta, además, que el ser humano, (factor humano), en el análisis de los factores, y en el establecimiento de prioridades entre ellos, emite juicios que dependen de la lógica, la intuición y la experiencia propias, y a través de estos juicios, se introducen inconsistencias. Por este motivo, es importante averiguar hasta qué punto se es inconsistente en los juicios emitidos.

Si el número de criterios es n , Saaty demuestra matemáticamente que n debe ser el autovalor máximo, de modo que se puede comprobar la consistencia de

los juicios del encargado de tomar las decisiones comparando el valor del autovalor máximo con n , que en el caso de ser completamente consistentes, habrán de ser iguales. En relación a esto, Saaty proporciona tablas de inconsistencia para medir ésta, pero también se admite la consideración del ratio de inconsistencia, definido por Saaty a partir del índice de consistencia y del índice aleatorio:

$$\text{Ratio de Consistencia} = \frac{\text{Índice de consistencia}}{\text{Índice de Consistencia Aleatorio}}$$

$$\text{Índice de Consistencia} = \frac{(\lambda_{\max} - n)}{(n - 1)}$$

Admitiéndose que el juicio es consistente si el Ratio de Consistencia es inferior al 10%.

7.2. Thomas Saaty



“La toma de decisiones es el proceso más central y persistente de las actividades del ser humano, intrínseca a nuestra biología y realizada tanto consciente como inconscientemente.”

El matemático Dr. Thomas L. Saaty, es el creador del innovador método científico para la toma de decisiones: **the Analytical Hierarchy Process (AHP)** y **the Analytical Network Process (ANP)**.

Durante 7 años trabajó para “The Arms Control and Disarmament Agency at the US State Department”. Fue profesor en The Wharton School durante 10 años. Actualmente es profesor de la U. de Pittsburgh, de la Katz Graduate School of Business, y del Wharton Business School. Ha sido recientemente premiado por la prestigiosa US-NAE "National Academy of Engineering" de Estados Unidos.

Ha escrito más de 30 libros y cientos de artículos que han sido publicado en más de 15 idiomas. AHP y ANP se usan en todo el mundo tanto en negocios como por los gobiernos. Algunos de sus libros son:

- **"Toma de decisiones en escenarios complejos"** en coautoría con Claudio Garuti y Mauricio Escudey. (2002)
- **“Método analítico jerárquico (ANP): Principios básicos en evaluación y decisión multicriterio: Reflexiones y Experiencias”**. (1998)
- **“Método de análisis jerárquico”** (1991)

7.3. Software disponible para AHP

PRODUCTO	SISTEMA OPERATIVO	VENDEDOR/SUMINISTRADOR
Continuous Multi-Attribute Risk	PC	NEVADA Simulations P.O. Box 32272 Phoenix, AZ 85064-2272
Criterium DecisionPlus 2.0	PC/Windows y Windows 95	InfoHarvest, Inc. 729 122nd Avenue NE Bellevue, WA 98005 www.infoharvest.com
Computer Programs for Multi-Attribute Evaluation	DOS	Prof. Craig Kirkwood Department of Management Arizona State University Tempe, AZ 85287-4006
ERGO	Windows	Arlington Software 614 St. Jacques Suite 200 Montreal, Quebec Canada H3C 1E2 E-mail: info@arlingsoft.com
Expert Choice	Windows	Expert Choice, Inc. 5001 Baum Blvd, Suite 650 Pittsburgh, PA 15213 E-mail: info@expertchoice.com
EXPERT 87 with Consensus Builder	PC/DOS	Magic7 Software Co. 101 First St. Suite 237 Los Altos, CA 94022 E-mail: pjhmagic@aol.com
HIVIEW	PC/Windows	KRYVALIS Ltd. 28 Derwent Dr. Maidenhead SL6 6LB England UK E-mail: 100333.337@compuserve.com
Logical Decisions	Windows	Logical Decisions 1014 Wood Lily Dr. Golden, CO 80401 E-mail: gary@logicaldecisions.com
POLICY PC	PC/DOS	Executive Decision Services, Inc. P.O. Box 9102 Albany, NY 12209
Web-HIPRE	WWW	Prof. Raimo P. Hämmäläinen Systems Analysis Laboratory Helsinki University of Technology Otakaari 1 M 02150 Espoo, Finland E-mail: raimo@hut.fi
WINPRE	Windows	Prof. Raimo P. Hämmäläinen Systems Analysis Laboratory Helsinki University of Technology Otakaari 1 M 02150 Espoo, Finland E-mail: raimo@hut.fi
AHP-Leitstand		

Tabla 7.6 Software para AHP

7.4. Conclusiones

Dentro de los MADM, se ha considerado más eficiente para establecer una matriz de prioridades el Método AHP, además de las indicadas en el apartado 7.1.1 Ventajas del AHP, por las siguientes razones:

- Sencillez.
- Permite una organización jerárquica del problema en distintos niveles, lo cual conjuga perfectamente con el análisis de los diferentes atributos a considerar, los cuales a su vez son desagregables en subatributos (como por ejemplo las distintas franjas horarias en las que varía la oferta de las líneas).
- Para desarrollar una metodología que nos permita gestionar adecuadamente la información necesaria para la ejecución de esta tarea, fácil de implementar y perfectamente válida para las distintas temporadas.
- Como se verá más adelante, los factores de decisión en nuestro caso son medibles y cuantitativos, por lo que hace más fiable la asignación de pesos a los atributos.

Aunque hay bastante software desarrollado para el método AHP, (como se ha visto en el apartado 7.3), no se ha optado por ninguno de ellos (aunque se recomienda el "Expert Choice"), debido a las características especiales de nuestro problema.

En nuestro caso no se trata tanto de llegar a un objetivo, sino de establecer prioridades para poder asignar los recursos disponibles, que en nuestro caso no son limitados, tal y cómo se explica en el siguiente capítulo.

Sin embargo, la metodología como tal del AHP, sí se ha considerado la más indicada para desarrollar una matriz de prioridades.