

Capítulo 3 Las acciones externas su simulación y esfuerzos derivados.-

3.1 Consideraciones generales.-

Para estas estructuras isostáticas podemos usar el cálculo de esfuerzos a flexión compuesta de piezas rectas si las discretizamos en un número de secciones suficiente.

Normalmente para las luces y alturas de secciones que se utilizan basta con dividirla entre 10 y 20 partes y si los cálculos son manuales, un uso frecuente es dividirlas en secciones cuyo módulo resistente sea constante con lo que las operaciones se simplifican notablemente. En nuestro caso usaremos por ventajas del cálculo las divisiones de longitud constante y procuraremos elegir las de forma que siempre incluyan la sección media.

Consideramos que la pieza está simplemente apoyada en sus extremos, por la disposición de los apoyos no serán admisibles los efectos del cálculo reacciones en la dirección horizontal. Si se originaran por efecto de las acciones, bastará con coaccionar el desplazamiento horizontal de uno de los extremos.

Por tanto la dirección en la que actúan las acciones exteriores es perpendicular a la línea de sustentación.

3.2 Simulación de las acciones.-

En la mayoría de las aplicaciones las acciones pueden considerarse simuladas por un conjunto de distribuciones elementales o por la superposición de ellas.

Entre las elementales consideraremos:

- **El intervalo uniforme** que actúa sobre la totalidad de la luz o en un tramo de ella.
- **La puntual** que actúa sobre un punto específico de la luz.
- **El intervalo triangular** que puede actuar en un tramo de luz o en la totalidad, de acuerdo con que las cargas sean decrecientes desde el extremo o crecientes distinguiremos dos subcasos.

Estas acciones elementales las señalaremos por un parámetro TC cuyos valores serán 1, para el intervalo uniforme, 2 para las puntuales, 3 para la triangular decreciente en el sentido del eje X^+ y 4 para la creciente en el mismo sentido.

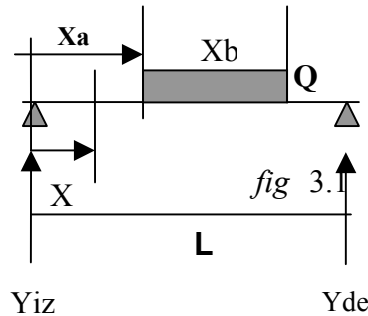
3.3 Ecuaciones de equilibrio determinación de esfuerzos y reacciones.-

Vamos a calcular el valor de las reacciones en los apoyos de las acciones elementales que hemos definido usando las dos ecuaciones de equilibrio que permite la sustentación elegida ($\sum M = 0$; $\sum \vec{F}_y = 0$) y formulando la de momentos en el apoyo derecho. Para determinar los esfuerzos en una sección cualquiera a lo largo del eje X^+ volveremos a aplicar las ecuaciones de equilibrio en ella y obtendremos las funciones $MF(X)$ y $V(X)$ que representan el flector y cortante respectivamente.

3.4 Distribución uniforme de carga.-

Consideremos la carga Q de valor uniforme que actúa sobre una pieza de luz L a la distancia X_a del extremo izquierdo y sobre una distancia X_b de la luz representada en la figura n.

De las ecuaciones de equilibrio aplicadas al extremo derecho Podremos obtener las dos reacciones Y_{iz} , Y_{de} .



$$Y_{iz} = QX_b(L - X_a - X_b/2)/L$$

$$Y_{de} = QX_b(X_a + X_b/2)/L$$

Para una sección a lo largo del eje X^+ debemos considerar el intervalo al que pertenece para formular correctamente las leyes de flectores y cortantes, así $MF(X)$ y $V(X)$ tendrán las expresiones que siguen en los intervalos considerados:

Para el intervalo $0 < X < X_a$

$$MF(X) = Y_{iz} X = (QX_b(L - X_a - X_b/2)/L)X$$

$$V(X) = Y_{iz} = QX_b(L - X_a - X_b/2)/L$$

Para el intervalo $X_a < X < X_b$ el flector y cortante en X puede expresarse por:

$$MF(X) = Y_{iz} X - Q(X - X_a)(X - X_a)/2 = (QX_b(L - X_a - X_b/2)/L)X - Q(X - X_a)^2/2$$

$$V(X) = Y_{iz} - Q(X - X_a) = QX_b(L - X_a - X_b/2)/L - Q(X - X_a)$$

Para el intervalo $X > X_a + X_b$ el flector y cortante en X se puede escribir :

$$MF(X) = Y_{iz} X - QX_b(X - X_a - X_b/2) = (QX_b(L - X_a - X_b/2)/L)X - QX_b(X - X_a - X_b/2)$$

$$V(X) = QX_b(L - X_a - X_b/2)/L - QX_b = -QX_b(X_a + X_b/2)/L$$

Podemos obtener las leyes de esfuerzos para una carga uniforme Q aplicada a toda la luz particularizando los parámetros (X_a y X_b) por $X_a = 0$ y $X_b = L$ si tenemos en cuenta que la coordenada X siempre estará en el intervalo $X_a < X < X_b$, sustituiremos

en las ecuaciones de $MF(X)$ y $V(X)$ correspondientes a este intervalo los parámetros con lo que se tendrá:

$$MF(X) = (QL(L - L/2)/L)X - Q(X)^2/2 = QLX/2 - Q(X)^2/2 = QX(L - X)/2$$

$$V(X) = QL(L - L/2)/L - QX = Q(L/2 - X)$$

3.5 Distribución Puntual de carga.

Consideremos la carga de valor Q que actúa sobre una pieza de luz L en un punto que dista X_a del extremo izquierdo, representada en la figura n+1.

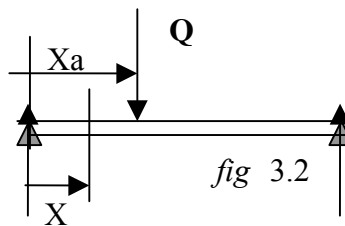
De las ecuaciones de equilibrio aplicadas al extremo derecho podremos obtener las dos reacciones Y_{iz} , Y_{de} como sigue:

$$\sum \bar{F}_Y = 0 \Rightarrow Y_{iz} + Y_{de} - Q = 0$$

$$\sum M_{de} = 0 \Rightarrow -Y_{iz} L + Q(L - X_a)$$

$$Y_{iz} = Q(L - X_a)/L$$

$$Y_{de} = QX_a/L$$



Para una sección cualquiera a lo largo del eje X^+

consideraremos por razones idénticas al caso anterior el intervalo al que pertenece, es decir anterior al punto de aplicación de la carga o posterior al mismo, por lo que aplicando las ecuaciones de equilibrio podemos escribir:

Para el intervalo $0 < X < X_a$ el flector:

$$MF(X) = Y_{iz} X = (Q(L - X_a)/L)X$$

Y el cortante:

$$V(X) = Q(L - X_a)/L$$

Para el intervalo $X > X_a$ el flector en X vendrá dado por:

$$MF(X) = Y_{iz} X - Q(X - X_a) = (Q(L - X_a)/L)X - Q(X - X_a) = QX_a(L - X)/L$$

Y el cortante por:

$$V(X) = -Q(X_a)/L$$

Una carga puntual (TC=2) podría considerarse como un caso particular de la distribución uniforme (TC=1) en la que el intervalo de aplicación de la carga X_b es igual a cero y el producto $Q X_b$ de la distribución uniforme que interviene en la formulación se sustituye por el valor Q de la puntual y solo se consideran los intervalos ($0 < X < X_a$) y ($X > X_a + X_b$) de la uniforme.

Si sustituimos en la formulación de TC=1 el producto $Q X_b$ por PUN y en la TC=2 Q por PUN se tendrá para las reacciones:

$$Y_{iz} = PUN(L - X_a - X_b/2)/L \text{ si } X_b = 0 \Rightarrow Y_{iz} = PUN(L - X_a)/L$$

Que se corresponde con el valor obtenido para la reacción izquierda de una puntual (PUN) al principio de este apartado, análogamente tendremos para la reacción derecha

$$Y_{de} = PUN(X_a)/L$$

Si consideramos el intervalo $0 < X < X_a$:

$$MF(X) = PUN(L - X_a - X_b/2)/L X \text{ si } X_b = 0 \Rightarrow MF(X) = PUN X(L - X_a)/L$$

Que se corresponde con el valor obtenido para la ley de flectores de una puntual (PUN) al principio de este apartado, análogamente tendremos para la ley de cortantes

$$V(X) = PUN(L - X_a)/L$$

Si consideramos el intervalo $X > X_a + X_b$:

$$MF(X) = (PUN(L - X_a)/L)X - PUN(X - X_a) = PUN X_a(L - X)/L$$

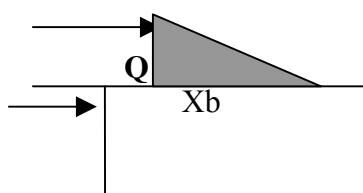
$$V(X) = -PUN(X_a)/L$$

Que vuelve a corresponderse con lo calculado en este apartado para ese intervalo.

Sin embargo nosotros por facilidad y claridad en la programación y codificación los trataremos como dos casos separados.

3.6 Distribución triangular decreciente.

Consideremos la carga Q de valor decreciente en la dirección del eje X^+ que actúa sobre una pieza de luz L a la distancia X_a del extremo izquierdo y sobre una distancia X_b de la luz representada en la figura siguiente.



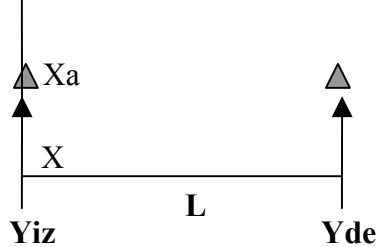


fig 3.3

De las ecuaciones de equilibrio aplicadas al extremo derecho podremos obtener como en los casos anteriores las dos reacciones Y_{iz} , Y_{de} .

$$\sum \bar{F}_Y = 0 \Rightarrow Y_{iz} + Y_{de} - QX_b/2 = 0$$

$$\sum M_{de} = 0 \Rightarrow -Y_{iz} L + QX_b(L - X_a - X_b/3)/2$$

$$Y_{iz} = QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L$$

$$Y_{de} = QX_b(X_a + X_b/3)/2L$$

Análogamente a los casos anteriores obtendremos las funciones de flectores y cortantes en los distintos intervalos en que queda subdividida la luz por la carga así:

Para $X < X_a$ el flector en X puede expresarse por:

$$MF(X) = Y_{iz} X = (QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L)X$$

Y el cortante:

$$V(X) = QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L$$

Para el intervalo $X_a < X < X_a + X_b$ el flector y cortante en X teniendo en cuenta que la ordenada de la carga en la sección X es $Q(X) = Q(X_b - (X - X_a))/X_b$ pueden expresarse por:

$$MF(X) = Y_{iz} X - Q((X_b - (X - X_a))(X - X_a)^2/2X_b + (X - X_a)^3/3X_b) = (QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L)X - Q(3X_b(X - X_a)^2 - (X - X_a)^3)/6X_b$$

$$V(X) = Y_{iz} - Q(X - X_a) = QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L - Q(6X_b(X - X_a) - 3(X - X_a)^2)/6X_b$$

Para el ultimo intervalo $X > X_a + X_b$ el flector y cortante en X se pueden escribir como sigue :

$$MF(X) = Y_{iz} X - QX_b(X - (X_a + X_b/3))/2 = (QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L)X - QX_b(X - (X_a + X_b/3))/2$$

$$V(X) = QX_b(L - X_a - X_b/3)/2L - QX_b/2 = -QX_b(X_a + X_b/3)/2L$$

3.7 Distribución triangular creciente.

Consideremos la carga Q de valor creciente en la dirección del eje X^+ que actúa sobre una pieza de luz L a la distancia X_a del extremo izquierdo y sobre una distancia X_b de la luz representada en la figura siguiente.

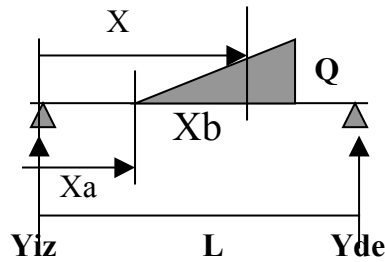


fig 3.4

De las ecuaciones de equilibrio aplicadas al extremo derecho podremos obtener como en los casos anteriores las dos reacciones Y_{iz} , Y_{de} .

$$\sum \bar{F}_Y = 0 \Rightarrow Y_{iz} + Y_{de} - QX_b/2 = 0$$

$$\sum M_{de} = 0 \Rightarrow -Y_{iz} L + QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2$$

$$Y_{iz} = QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2L$$

$$Y_{de} = QX_b(X_a + 2X_b/3)/2L$$

Análogamente a los casos anteriores obtendremos las funciones de flectores y cortantes en los distintos intervalos en que queda subdividida la luz por la carga.

Así para $X < X_a$ el flector en X puede expresarse por:

$$M_F(X) = Y_{iz} X = (QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2L)X$$

Y el cortante

$$V(X) = QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2L$$

Para $X_a < X < X_b$ el flector y cortante en X teniendo en cuenta que la ordenada de la carga en la sección X es $Q(X) = Q(X - X_a)/X_b$ puede expresarse por:

$$M_F(X) = Y_{iz} X - Q(X)(X - X_a)^2 / 6X_b = (QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2L) X - Q(X - X_a)^3 / 6X_b$$

$$V(X) = Y_{iz} - Q(X)(X - X_a)/2 = QX_b(L - (X_a + 2X_b/3))/2L - Q(X - X_a)(X - X_a) / 2X_b$$

Para $X > X_a + X_b$ el flector y cortante en X se pueden escribir :

$$MF(X) = Y_{iz}X - QXb(X - (X_a + X_b) + X_b/3)/2 = (QXb(L - (X_a + 2X_b/3))/2)X - QXb(X - (X_a + X_b) + X_b/3)/2$$

$$V(X) = QXb(L - X_a - 2X_b/3)/2L - QXb/2 = -QXb(3X_a + 2X_b)/6L$$

Los dos casos de triangulares podrían reducirse a uno solo teniendo en cuenta que pueden superponerse girando 180° las figuras. Para las reacciones se verifica que:

$$\triangleleft Y_{iz} = Y_{de} \triangleleft \quad \triangleleft Y_{iz} = Y_{de} \triangleleft$$

Si se tiene en cuenta que X_a en una de las cargas se corresponde $L - X_a - X_b$ y viceversa y que los intervalos izquierdos se corresponden con los derechos y viceversa, las leyes de momentos y cortantes son equivalentes a ambos lados de la pieza.

Basta con efectuar un cambio de coordenadas $X = L - X$ en la formulación de una de ellas para obtener la otra.

Por la misma razón que la puntual por simplicidad de la codificación y programación preferimos considerarlos como dos casos independientes.

Por ultimo todos los casos elementales anteriores podrían reducirse al de una carga trapezoidal aplicada en X_a y extensión X_b con valores en los extremos Q_1 y Q_2 y jugar con la codificación de forma que se represente cualquier tipo de carga elemental anterior, pero casi por las mismas razones que las expuestas anteriormente preferimos la separación por tipos.

3.8 Consideraciones del peso propio

El peso propio es una acción que siempre es conocida al conocer la geometría y los materiales que componen la pieza y para una determinada su valor es independiente del resto de las acciones, por lo que no será necesaria su codificación.

En nuestro caso lo asimilaremos a un conjunto de tres acciones elementales superpuestas como sigue para su calculo:

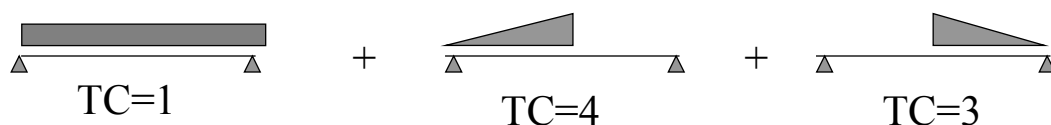


fig 3.5

- Una de tipo TC=1 que representaría la distribución del peso por unidad de longitud de una pieza recta de sección correspondiente a $X=0$ cuyo valor sería $Q = \rho_H A(1)$ en la

ρ_H es la densidad del hormigón y $A(1)$ el área de la sección extrema.

- Otra de tipo TC=4 con $X_a=0$ y $X_b=L/2$ que representaría la variación en altura del alma desde la sección izquierda al centro de la pieza cuyo valor podemos expresar por $Q = \rho_H CSL/2$ donde C es la pendiente de la peraltada y S el espesor del alma.

- Y otra de tipo TC=3 simétrica de la anterior con $X_a=L/2$ y $X_b=L/2$ y valor de $Q=\rho_H \text{ CSL} / 2$.

Para la TC=1 se tendría las leyes de flectores y cortantes:

$$MF_{TC=1}(X) = Q_{TC=1} X(L - X)/2$$

$$V_{TC=1}(X) = Q_{TC=1} (L/2 - X)$$

Para la TC=4 con $X_a=0$ y $X_b=L/2$ se tiene en los intervalos:
 $X_a < X < X_b$ ($X < L/2$)

$$MF_{TC=4}(X) = Q(L^2 X - 2X^3) / 6L$$

$$V_{TC=4}(X) = QL/3 - QX^2 / L$$

$X > X_a + X_b$ ($X \geq L/2$)

$$MF_{TC=4}(X) = Q_{TC=4} L^2 (1 - X/L) / 12$$

$$V_{TC=4}(X) = - Q_{TC=4} L/12$$

Para la TC=3 con
 $X_a=L/2$ y $X_b=L/2$ y

teniendo en cuenta que los valores de la carga son los mismos ($Q_{TC=4} = Q_{TC=3}$) se tiene

en los intervalos:

$X_a < X < X_b$ ($X < L/2$)

$$MF_{TC=3}(X) = Q_{TC=4} LX / 12$$

$$V_{TC=3}(X) = - Q_{TC=4} L/12$$

$X > X_a + X_b$ ($X \geq L/2$)

$$MF_{TC=3}(X) = Q_{TC=4} (L^2 X - 4(2L - X)(X - L/2)^2) / 6L$$

$$V_{TC=3}(X) = Q_{TC=4} L/3 - QX^2 / L$$

Si sumamos los valores de los momentos de las cargas TC=3 y TC=4 para $X \leq L/2$

$$MF_{TC=4}(X) + MF_{TC=3}(X) = Q_{TC=4} (L^2 X - 2X^3) / 6L + Q_{TC=4} LX/12 = (Q_{TC=4} L^2 X(3 - 4(X/L)^2)) / 12L$$

y haciéndolo para $X > L/2$ tenemos

$$MF_{TC=4}(X) + MF_{TC=3}(X) = Q_{TC=4} (L^2 - LX) / 12 + Q_{TC=4} (L^2 X - 4(2L - X)(X - L/2)^2) / 12L = \\ Q_{TC=4} (L^3 - 4(X - L/2)^2 (2L - X)) / 12L$$

Si efectuamos un cambio de variable en esta ultima $X = L - X$ que se corresponde con una simetría con el eje central, la ecuación anterior nos quedara como:

$$(Q_{TC=4} L^2 X(3 - 4(X/L)^2) / 12L$$

que es idéntica a la del intervalo $X \leq L/2$

Si observamos la ecuación de momentos de la carga de tipo $TC=1$ esta presenta la misma simetría respecto al eje central, por ello bastara con considerar para él calculo una de las partes y duplicar los momentos en las secciones correspondientes de la otra.

El flector correspondiente al peso propio quedara:

$$MF_{pp}(X) = Q_{TC=1} X(L - X)/2 + (Q_{TC=4} L^2 X(3 - 4(X/L)^2) / 12L$$

3.9 Consideraciones de simetría.

Esto nos va a permitir cuando las cargas sean uniformes y simétricas al eje central efectuar él calculo solo en la mitad de la pieza, con lo que se simplifica la impresión e interpretación de resultados.

Definiremos el parámetro ISME cuyos valores 0 y 1 respectivamente nos informaran de la distribución simétrica de la carga o la presencia de carga asimétrica.

3.10 Clasificación de las acciones directas de acuerdo con su duración.

La normativa clasifica las acciones en tres tipos de carga de acuerdo con su duración, esta clasificación nos permitira después efectuar los calculos para los distintos estados limites de comprobación de la estructura y es como sigue:

- **Carga permanente** es aquella que actúa en intensidad y posición durante toda la vida de la estructura (peso propio mas cargas y pesos que actúan o gravitan respectivamente sobre la estructura durante toda la vida de misma).
- **Sobrecarga usual o acciones variables frecuentes** son aquellas que actúan a intervalos de tiempos frecuentes a lo largo de la vida de la estructura.
- **Sobrecarga no usual o acciones variables infrecuentes** son aquellas que pueden actuar o no actuar a lo largo de la vida de la estructura.

Vamos a definir un parámetro que nos proporcione información sobre la naturaleza de la carga respecto a su duración, este parámetro lo llamaremos ITPE sus valores serán 1 para las cargas permanentes 2 para las cargas usuales y 3 para las cargas no usuales.

Consideraremos para los flectores tres conjuntos de combinaciones una formada por el peso propio $MFPR(I)$ otra $MF2(I)$ formada por la carga permanente y la sobrecarga usual y otra $MF1(I)$ formada por la carga total (permanente mas sobrecargas usuales y no usuales).

Para los esfuerzos cortantes $V(I)$ tomaremos en cada sección el mayor valor absoluto provocado por cualquiera de las combinaciones de cargas consideradas para el flector. Las reacciones en los extremos, izquierdo y derecho serán calculadas para cada una de las combinaciones anteriores.