Capitulo 11. Estados limites últimos. Estado de inestabilidad o pandeo.-

11.1 Generalidades.-

Vamos a estudiar las deformaciones producidas por la actuación del pretensado en la fase de vació.

La instrucción Española define el concepto de esbeltez mecánica como el cociente entre la longitud de pandeo l_0 y el radio de giro i de la sección total de hormigón en la dirección considerada de comprobación.

La longitud l_0 se define como la distancia entre puntos de inflexión de la deformada, que para el caso de piezas apoyadas, esta longitud coincide con la luz de calculo.

Así la esbeltez mecánica puede expresarse por $\frac{L}{\sqrt{\frac{NI}{A}}}$ siendo L la luz de calculo, NI el momento de inercia de la sección en la dirección considerada y A el área de la sección.

Para esbelteces menores de 35 en secciones constantes, no hace obligatorio la comprobación de pandeo. Así como en aquellos casos en los que los efectos de segundo grado puedan ser despreciados.

En nuestro estudio al ser secciones variables, vamos a estudiar las deformaciones de la pieza en mas detalle.

11.2 Ecuación de la elástica.-

Consideremos el modelo de la figura siguiente:

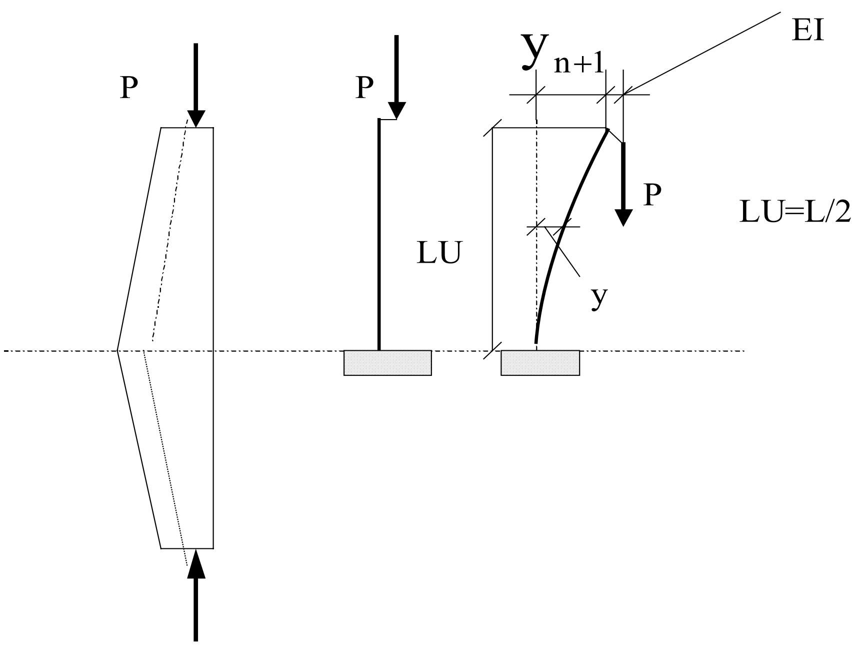

fig 11.1

La ecuación de la elástica puede escribirse considerando positivo el momento que tiende a aumentar la elástica por:

$$E \times NI_y \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y_{n+1} + EI_y - y)$$

En donde E es el modulo de elasticidad del material, NI_y el momento de inercia de la sección considerada, en la dirección en la que se estudia la flexión, y_{n+1} la flecha del punto extremo de la barra y EI_y la excentridad del pretensado en dicha sección.

11.3 Diferencias finitas. Expresión de las derivadas.-

Para la resolución de esta ecuación vamos a utilizar un método de soluciones numéricas que se emplea en el calculo de estructuras complejas, en las que las distribución de cargas, las propiedades de la sección y las condiciones de contorno no pueden describirse por expresiones matemáticas o si se pueden, no son funciones sencillas. Este sistema de solución es conocido como el Método de las Diferencias Finitas.
Consideremos la siguiente figura que representa la función $y = f(x)$, que para nuestro propósito podría ser la deformada de la pieza de la figura anterior.

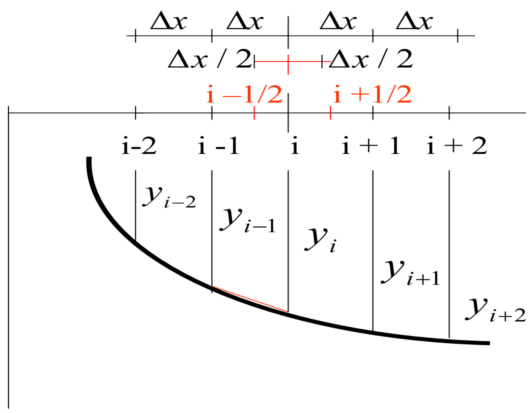

fig 11.2

En la que alrededor del punto i e igualmente espaciados por Δx se han dibujado los puntos de abcisas $(x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2})$ cuyas ordenadas se corresponden con $(y_{i-2}, y_{i-1}, y_{i+1}, y_{i+2})$.

La derivada en el punto intermedio entre $(i-1, i)$ puede expresarse como:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1/2} \cong \frac{1}{\Delta x}(y_i - y_{i-1})$$

Análogamente para el punto intermedio entre $(i, i+1)$ la derivada primera se puede aproximar a:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} \cong \frac{1}{\Delta x}(y_{i+1} - y_i)$$

La segunda derivada en el punto i (la cual representa la variación de la pendiente) puede aproximarse por la diferencia entre la pendiente entre los puntos $(i+1/2, i-1/2)$ dividida por el intervalo Δx.

Con lo que podremos escribir:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1/2}\right]$$

en la que sustituyendo las primeras derivadas por sus valores y operando tendremos:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

En las anteriores expresiones se han usado las diferencias centrales porque la derivada de la función en cada caso fue expresada en función de los valores de puntos situados simétricamente con respecto al punto considerado.

Este mismo procedimiento puede ser repetido para obtener las derivadas de mayor orden, para lo cual será necesario considerar en el procedimiento mayor numero de puntos igualmente distanciados. En libros especializados pueden encontrarse representaciones para derivadas de mayor orden.

Si nos interesa para nuestro problema la representación de la derivada primera en el punto i en función de los puntos (y_{i-1}, y_{i+1}) que teniendo en cuenta la definición de la derivada podemos escribir:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \cong \frac{1}{2 \times \Delta x}(y_{i+1} - y_{i-1})$$

Si llamamos H a Δx podemos expresar en forma matricial las derivadas anteriores, así tendremos :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{H^2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

para la derivada segunda en el punto i , y para la primera podemos escribir:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2H}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

11.4 Aplicación de las diferencias a la ecuación de la elástica.-

Vamos a ahora a aplicar las soluciones anteriores a la deformación de nuestro modelo.

Dividamos la barra en n+1 partes como se ve en la figura siguiente.

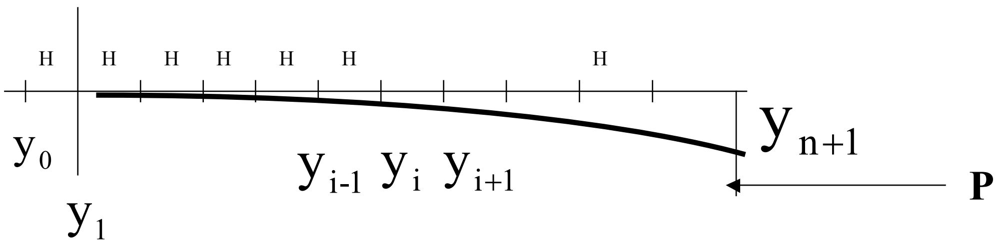

fig 11.3

L a ecuación diferencial de la deformada podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{E \times NI_y}(y_{n+1} + EI_y - y)$$

En la que pasando y al otro miembro se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{E \times NI_y} y = \frac{P}{E \times NI_y}(y_{n+1} + EI_y)$$

Podemos ahora aplicar para los puntos en los que hemos dividido la barra las diferencias finitas sustituyendo la derivada por su valor. Apliquémosla al punto $i = 1$ tendremos:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 = \frac{1}{H^2}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2\end{bmatrix}$$

Con lo que la ecuación diferencial puede escribirse llamando $NB(I) = \dfrac{P}{E \times NI(I)} \times H^2$:

$$\begin{bmatrix}1 & -2+NB(1) & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & -NB(1)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = NB(1) \times EI(1)$$

Si ahora la aplicamos al punto i = 2 podríamos escribir:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -2+NB(2) & 1 & 0 & . & . & . & . & -NB(2)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3. \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = NB(2) \times EI(2)$$

y para el punto i = n se tendría

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & -2+NB(n) & 1-NB(n)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3. \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = NB(n) \times EI(n)$$

Con la aplicación de los puntos de desde i = 1 a i = n obtendríamos n ecuaciones con n+2 incógnitas, con lo que serian necesarias dos ecuaciones mas para la resolución del sistema.

Estas dos ecuaciones adicionales las podemos obtener de las condiciones de contorno.

La primera de ellas la podemos escribir en el empotramiento teniendo en cuenta que la derivada primera en el mismo es igual a cero.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{1}{2H}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

que completándola para incluirla en el conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$

La otra ecuación la podemos obtener haciendo $y_1 = 0$ que completada como la anterior la podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$