Podemos representar las flechas extremas y veremos la discontinuidad que se produce entre los dos valores anteriores.

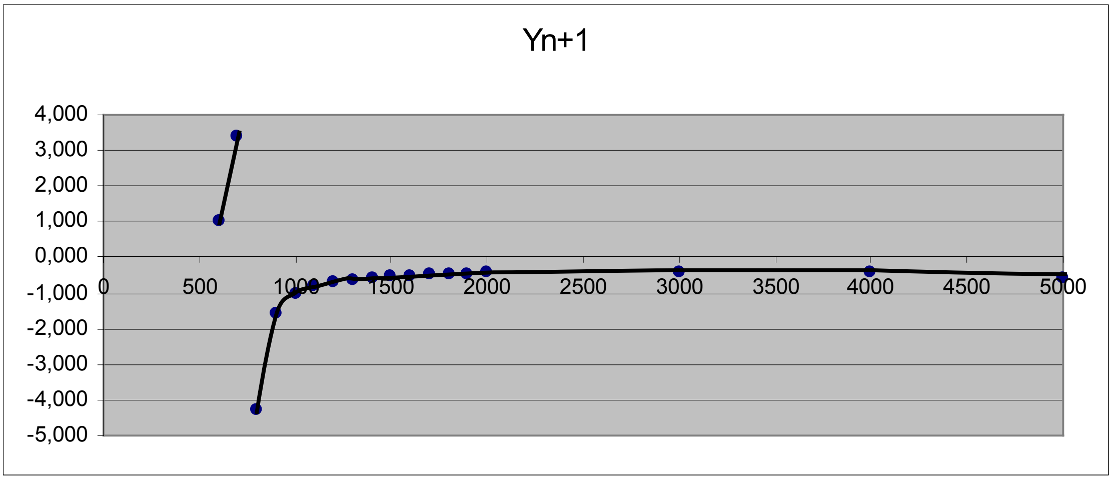

fig 11.12

El sistema se hace inestable entre los dos puntos anteriores y las soluciones a partir de este punto de inestabilidad no tienen interpretación física.

Como sabemos de la resistencia de materiales clásica la carga critica no depende de la excentricidad "e " aplicada a la fuerza de compresión y es la misma que la que se obtiene para una compresión centrada. La diferencia de comportamiento consiste en que cuando se trata de compresión excéntrica la pieza empieza a flexar para pequeños valores de la carga y sigue aumentado hasta que se hace infinita al alcanzar la carga critica.

En este caso para calcularla partiremos de una compresión centrada de la barra y la ecuación de la elástica la podemos escribir como:

$$M = E \times NI_y \frac{d^2 y}{dx^2} = P_{cr} y$$

Para valores constantes de del modulo de elasticidad e inercia de la sección la carga critica coincide con la de Euler que se obtiene en la discusión de la solución de la ecuación anterior $P_{cr} = \pi^2 E \times NI/l^2$, para el caso de secciones variables la solución analítica de la ecuación anterior puede llegar a ser dificultosa, en tales casos el método que se expone a continuación puede llegar a obtener soluciones satisfactorias.

La forma de la ecuación anterior en diferencia finitas usando la carga concentrada elástica equivalente es:

$$\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \vec{w}_i$$

por otra parte la carga elástica puede expresarse en función de la deformación usando tres puntos consecutivos y una distribución parabólica como:

$$\vec{w}_i = \frac{P_{cr}\lambda}{12}\begin{bmatrix}\frac{1}{E\times NI_{i-1}} & \frac{10}{E\times NI_i} & \frac{1}{E\times NI_{i+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{i-1}\\ y_i\\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

Igualando ambas expresiones de la carga elástica tendríamos:

$$\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{i-1}\\ y_i\\ y_{i+1}\end{bmatrix} = \frac{P_{cr}\lambda}{12}\begin{bmatrix}\frac{1}{E\times NI_{i-1}} & \frac{10}{E\times NI_i} & \frac{1}{E\times NI_{i+1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{i-1}\\ y_i\\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

Si ahora dividimos la pieza en intervalos iguales y aplicamos a los n puntos anteriores la expresión anterior, obtendríamos un sistema de ecuaciones simultaneas con la siguiente expresión:

$$[A]_{n\times n}\,[y]_{n\times 1} = \frac{P_{cr}\lambda}{12}[B]_{n\times n}\,[C]_{n\times n}[y]_{n\times 1}$$

Donde las matrices A, B y C tienen la siguiente expresión:

$$[A\ ]_{n\times n} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & .. & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$[B\ ]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 10 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & .. & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

$$[C]_{n\times n} = \begin{bmatrix}\frac{1}{ENI_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{ENI_2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{ENI_n}\end{bmatrix}$$

Si multiplicamos en el sistema de ecuaciones por A^{-1} en ambos lados de la ecuación anterior se tendrá:

$$[I]_{n\times n}\ [y]_{n\times 1} = \frac{P_{cr}\lambda}{12}[A]^{-1}\ [B]_{n\times n}\ [C]_{n\times n}[y]_{n\times 1}$$

En la que llamando $[J]=[A]^{-1}\ [B][C]$ y $\gamma=\frac{12}{P_{cr}\lambda}$ podemos escribir:

$$[J]\ [y]_{n\times 1} = \gamma\,[I]_{n\times n}[y]_{n\times 1}$$

Cuya solución es un problema de autovalores de la matriz $[J]$. La carga critica se calcula con el mayor autovalor y con la siguiente expresión $P_{cr}=\frac{12}{\lambda\gamma}$.

Podemos utilizar un procedimiento de iteración para determinar este autovalor como sigue. Asumimos un valor del autovector $[y]=[y^0]$ que sustituiremos en la ecuación anterior en la parte de la izquierda con lo que tendremos :

$$[J]\ [y^0]=[y^1]$$

Y la primera aproximación de $\gamma\,;\gamma_0$ la calcularemos por $\gamma_0=\frac{\sum y^1}{\sum y^0}$, si cada elemento del autovector se corresponde con $[y^1]=\gamma_0[y^0]$ la ecuación anterior se satisface y el proceso termina, en caso contrario volveríamos a efectuar la iteración con el autovector $[y]=\frac{1}{\gamma_0}\ [y^1]$ con lo que obtendríamos el vector $[y^{II}]$ y la siguiente aproximación de $\gamma\,;\gamma_I$ como $\gamma_I=\frac{\sum y^{II}}{\sum y^I}$ si se satisface la ecuación primitiva hemos encontrado la solución, si no continuaríamos el procedimiento hasta que se produzca la convergencia, que a veces puede ser lenta, una buena solución de partida es tomar una deformada de la pieza.

Consideremos ahora la pieza en estudio en su totalidad y dividámosla en cinco partes iguales con lo que $\lambda=1800/5\,\text{cm}$ y para E tomamos el valor de $E=3853600\ \text{N/cm}^2$.

Los características geométricas en cm de los cuatro nodos en que se divide la pieza serán :

seccion	altura	Area	Inercia	Excentricidad	Esbeltez Mecanica
1	102,50	1476,50	62853,52	0,00	275,88
2	138,50	1836,50	65853,52	0,00	300,59
3	138,50	1836,50	65853,52	0,00	300,59
4	102,50	1476,50	62853,52	0,00	275,88

fig 11.13

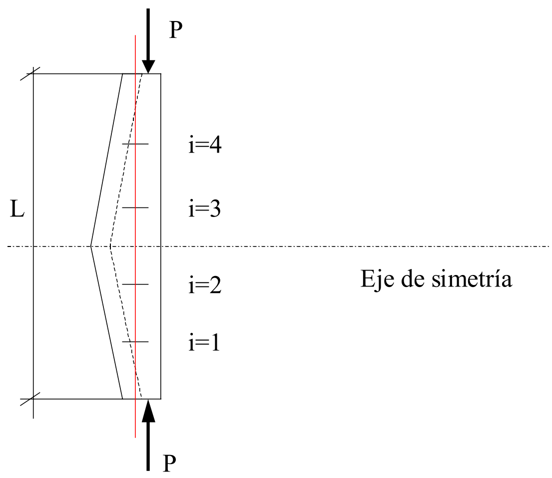

fig 11.14

Evaluemos las matrices correspondientes de acuerdo con la solución general:

$$[A] = \frac{5}{1800}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{A}]^{-1} = \frac{1800}{5}\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{C}] = \frac{1}{3853600}\begin{bmatrix} \frac{1}{62853{,}52} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{65853{,}52} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{65853{,}52} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{62853{,}52} \end{bmatrix}$$

La matriz $[C]$ podemos escribir como sigue para evitar trabajar con números pequeños en el calculo.

$$[C] = \frac{1}{3853600 \times 62853{,}52} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9544 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9544 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $[J]$ una vez efectuadas las multiplicaciones de matrices tendrá la siguiente expresión:

$$[J] = \frac{1800}{5 \times 3853600 \times 62853{,}52} \begin{bmatrix} 8{,}60 & 6{,}8720 & 4{,}5813 & 2{,}40 \\ 7{,}20 & 12{,}7896 & 9{,}1627 & 4{,}80 \\ 4{,}80 & 9{,}1627 & 12{,}7896 & 7{,}20 \\ 2{,}40 & 4{,}5813 & 6{,}8720 & 8{,}60 \end{bmatrix}$$

Busquemos la soluciones γ para el sistema aplicando el procedimiento de iteración descrito:

$$[J]\ [y]_{n\times 1} = \gamma\ [I]_{n\times n} [y]_{n\times 1}$$

el primer valor del autovector $[y^0]$ podemos tomarlo de la deformada de la pieza con P = 700 kN que puede obtenerse con el programa anterior.

$$[y^0] = \begin{bmatrix} 1{,}75442 \\ 2{,}03165 \\ 2{,}03165 \\ 1{,}75442 \end{bmatrix}$$

Los siguientes cuadros muestran el proceso de calculo y convergencia, el significado de cada columna esta puesto en la cabecera, la ultima fila contiene los valores calculados cuyo significado esta debajo, los datos en rojo corresponden con la parte de la matriz $[J]$ cuyas constantes se han dejado fuera del calculo por los mismos motivos que para la matriz $[C]$

$[y^{I}]$					$[y]=[y^{0}]$	y_i/y_i^{I}
42,56778	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,75442	0,041215
65,65227	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,03165	0,030946
65,65227	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,03165	0,030946
42,56778	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,75442	0,041215
216,4401					7,57214	28,58374
$\sum y_i^{I}$					$\sum y_i$	$\gamma_0=\dfrac{\sum_i y_i^{I}}{\sum_i y_i}$

La siguiente iteración será:

$[y^{II}]$					$[y]=\dfrac{[y^{I}]}{\gamma_0}$	y_i/y_i^{II}
42,688	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,48923	0,034886
68,29149	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,29684	0,033633
68,29149	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,29684	0,033633
42,688	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,48923	0,034886
221,959					7,57214	29,31258
$\sum y_i^{II}$					$\sum y_i$	$\gamma_I=\dfrac{\sum_i y_i^{II}}{\sum_i y_i}$

La tercera y siguientes serán:

$[y^{III}]$					$[y]=\dfrac{[y^{II}]}{\gamma_I}$	y_i/y_i^{III}
42,70293	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,4563	0,034103
68,61919	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,32977	0,033952
68,61919	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,32977	0,033952
42,70293	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,4563	0,034103
222,6442					7,57214	29,40308
$\sum y_i^{III}$					$\sum y_i$	$\gamma_{II}=\dfrac{\sum_i y_i^{III}}{\sum_i y_i}$

$[y^{IV}]$					$[y]=\dfrac{[y^{III}]}{\gamma_{II}}$	y_i/y_i^{IV}
42,70473	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,45233	0,034009
68,65875	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,33374	0,03399
68,65875	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,33374	0,03399
42,70473	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,45233	0,034009
222,727					7,57214	29,41400
$\sum y_i^{IV}$					$\sum y_i$	$\gamma_{III}=\dfrac{\sum_i y_i^{IV}}{\sum_i y_i}$

$[y^{V}]$					$[y]=\frac{[y^{IV}]}{\gamma_{III}}$	y_i / y_i^{V}
42,70495	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,45185	0,033997
68,66351	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,33422	0,033995
68,66351	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,33422	0,033995
42,70495	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,45185	0,033997
222,7369					7,57214	29,41532
$\sum y_i^{V}$					$\sum y_i$	$\gamma_{IV}=\frac{\sum_i y_i^{V}}{\sum_i y_i}$

$[y^{VI}]$					$[y]=\frac{[y^{V}]}{\gamma_{IV}}$	y_i / y_i^{VI}
42,70497	8,6000	6,8720	4,5813	2,4000	1,45179	0,033996
68,66408	7,2000	12,7896	9,1627	4,8000	2,33428	0,033996
68,66408	4,8000	9,1627	12,7896	7,2000	2,33428	0,033996
42,70497	2,4000	4,5813	6,8720	8,6000	1,45179	0,033996
222,7381					7,57214	29,41548
$\sum y_i^{VI}$					$\sum y_i$	$\gamma_{V}=\frac{\sum_i y_i^{VI}}{\sum_i y_i}$

fig 11.15

Donde los valores y_i / y_i^{VI} son todos iguales.

La carga critica venia dada por la expresión: $P_{cr}=\frac{12}{\lambda\gamma}$ con lo que sustituyendo valores tendremos:

$$P_{cr}=\frac{12\times 5^2\times 3853600\times 62853{,}52}{1800^2\times 29{,}41548}=762424{,}06\ \text{N}$$

Que es menor que el pretensado aplicado, por lo que si se producen estos tipos de errores en el centro de presiones seria necesario aumentar las dimensiones de la sección.