

4.3.2.- TEORÍA DEL DISCO ACTUADOR FLUJO COMPRESIBLE

Una vez analizado el flujo incompresible, vamos a extender la metodología para el análisis de flujos compresibles mediante la teoría del disco actuador. Para ello seguiremos un análisis similar, intentando alcanzar la ecuación de gobierno en función de la vorticidad y de la función de Stokes.

Empezando de nuevo por la ecuación de continuidad (4.41) para flujo compresible y la definición de la función de corriente de Stokes, teníamos:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{1}{rr} \frac{\partial y}{\partial r} \\ c_r &= -\frac{1}{rr} \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Introduciendo esas expresiones en la componente tangencial de la vorticidad w_q (ec. 4.38), resulta que

$$\begin{aligned} w_q &= \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{rr} \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rr} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Expandiendo las derivadas parciales, estas se pueden reordenar para dar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = -rrw_q - rc_r \frac{\partial r}{\partial x} + rc_x \frac{\partial r}{\partial r} \quad (4.93)$$

Esta es ahora la ecuación de gobierno para el caso de flujos compresibles, en la cual aparecen a diferencia del caso incompresible, dos términos asociados a los gradientes de densidad.

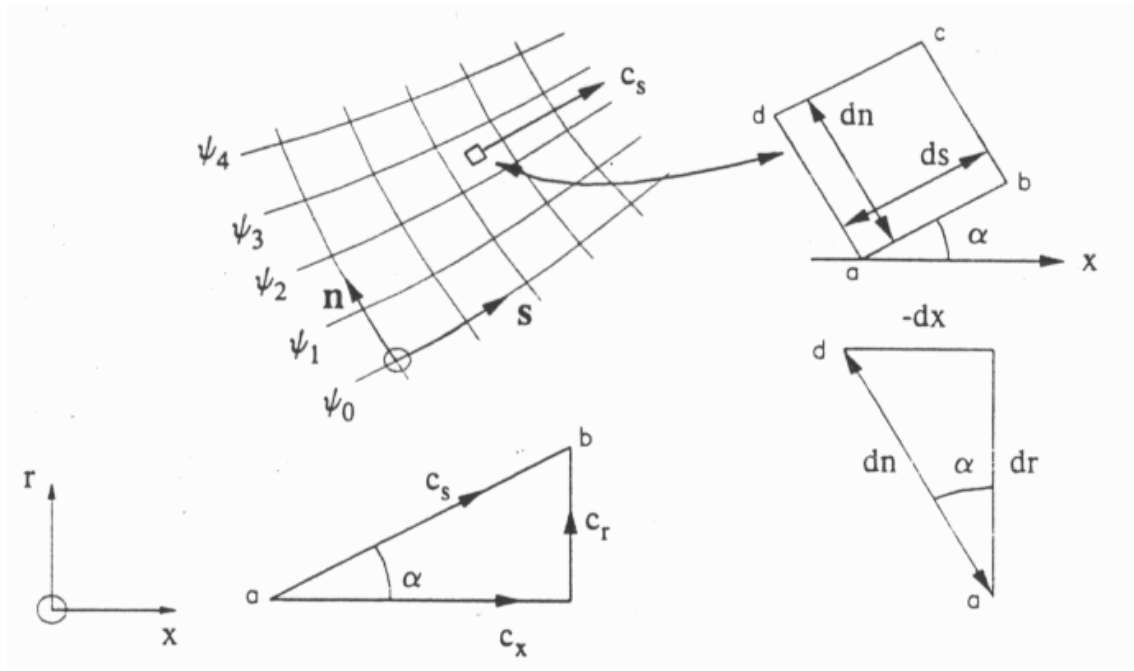
En la ecuación nos encontramos las siguientes perturbaciones:

- 1) las debidas a la presencia de la vorticidad tangencial w_q
- 2) las debidas a los gradientes de densidad $\partial r / \partial r$ y $\partial r / \partial x$.

La resolución de dicha ecuación nos dará la solución buscada para flujos meridionales compresibles.

Sin embargo, antes de su resolución, nos interesaría que la solución para flujo compresible, la pudiésemos expresar como una perturbación del incompresible. Es decir, solucionar primero el problema como si fuese incompresible y añadirle después el efecto del cambio de densidades.

Para ello es interesante trabajar con coordenadas curvilíneas como las definidas en la figura (4.4). La coordenada s se apoya a lo largo del vector de la velocidad local meridional c_s y por tanto coincide con los contornos $y = cte$ los cuales trazan el mapa de las líneas de corriente meridionales. La coordenada n es definida normal a s creando así una parrilla curvilínea (s,n) . Consideraremos ahora un pequeño elemento $abcd$ localizado en (s,n) donde la velocidad meridional c_s forma el ángulo α con el eje x (fig. 4.4). La cara ad del elemento es de longitud dn y es normal a c_s .



(Figura 4.4 Sistema de coordenadas curvilíneas)

De esos dos triángulos tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{c_x}{c_s} = \frac{dr}{dn} \\ \sin a &= \frac{c_r}{c_s} = -\frac{dx}{dn}\end{aligned}\quad (4.94)$$

Ahora la densidad será en general una función de x y r , es decir $\rho = \rho(x, r)$ y resulta muy interesante hallar su derivada total normal a las líneas de corriente. Por tanto

$$\frac{dr}{dn} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial r}{\partial r} \frac{dr}{dn}$$

e introduciendo las ecuaciones (4.94)

$$\frac{dr}{dn} = -\frac{c_r}{c_s} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{c_x}{c_s} \frac{\partial r}{\partial r}$$

Finalmente, reordenando tenemos

$$-c_r \frac{\partial r}{\partial x} + c_x \frac{\partial r}{\partial r} = c_s \frac{dr}{dn}$$

La ecuación de gobierno (4.93) para flujo compresible queda ahora

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = -r r w_q + r c_s \frac{dr}{dn} \quad (4.95)$$

Aún podemos escribirla de una forma más sencilla para su manejo, si tenemos en cuenta la ecuación (4.44) para flujo compresible. Tenemos

$$\begin{aligned}dy &= \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial r} dr \\ &= -r r c_r dx + r r c_x dr\end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones (4.94), ésta se transforma en

$$\begin{aligned} dy &= rrc_s(-dx \sin a + dr \cos a) \\ &= rrc_s(dn \sin^2 a + dn \cos^2 a) = rrc_s dn \end{aligned}$$

donde la velocidad meridional c_s viene dada por

$$c_s = \frac{1}{rr} \frac{dy}{dn} \quad (4.96)$$

Por tanto la ecuación (4.95) podría describirse como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = -rrw_q + \frac{dy}{dn} \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \quad (4.97)$$

Esta sería la ecuación de gobierno para flujo meridional compresible mediante el disco actuador. Para la resolución analítica de esta ecuación sería necesario un proceso iterativo al igual que para el caso incompresible.

En algunos casos, sin embargo, podría simplificarse la ecuación linealizando el término compresible para aproximar por

$$rc_s \frac{dr}{dn} \approx rC_x \frac{dr}{dr}$$

Inherente a esto va la asunción de que la densidad es sólo función del radio y por tanto la ecuación de gobierno (4.95) se puede aproximar por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &\approx -rrw_q + rC_x \frac{dr}{dr} \\ &= F_1(r) + F_2(r) \end{aligned} \quad (4.99)$$

donde $F_1(r)$ cubre las perturbaciones del flujo rotacional de la solución del disco actuador y $F_2(r)$ cubre las perturbaciones asociadas a la compresibilidad del flujo. Al ser ambos términos funciones sólo del radio podríamos esperar adoptar la solución del disco actuador de las ecuaciones del flujo incompresible directamente para el flujo compresible.

Por lo tanto, con las hipótesis hechas, vemos como la solución para flujo compresible podremos hallarla como una perturbación de la solución del flujo incompresible, que es lo que queríamos demostrar.

4.3.2.1.- SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA FLUJO COMPRESIBLE

Como hemos comentado en el apartado anterior, resolviendo la ecuación (4.97) (ó la 4.99) mediante un proceso iterativo, obtendríamos la solución buscada para flujo compresible. Sin embargo, a pesar de las hipótesis hechas su resolución no es fácil.

Por tanto, para simplificar la resolución, nos vamos a ayudar de la similitud existente entre las resoluciones para flujo incompresible y compresible.

Los efectos creados por la compresibilidad en el problema compresible, pueden ser simulados por un problema incompresible en el cual supusiéramos que en el plano del disco actuador tenemos una distribución de fuentes equivalentes $S(r)$ las cuales generan el término correspondiente. Estas distribuciones de fuentes, se pueden definir como un flujo creado en un punto por unidad de volumen y tiempo.

Teniendo en cuenta esto, para el caso incompresible, la ecuación de continuidad (4.31) se podría poner como:

$$\text{div} \hat{q} = S \quad (4.100)$$

Por otro lado, la ecuación de continuidad para flujo compresible quedaría, expandiendo la derivada:

$$\text{div} r \hat{q} = r \text{div} \hat{q} + \hat{q} \cdot \text{grad} r = 0$$

Reordenando, la ecuación de continuidad de flujo compresible podría expresarse como

$$\text{div} \hat{q} = -\frac{1}{r} \hat{q} \cdot \text{grad} r = s \quad (4.101)$$

donde el término del lado derecho, el cual absorbe todos los efectos de la compresibilidad, podría ser tratado analíticamente como una distribución de fuentes

equivalente en flujo incompresible; es decir, las ecuaciones (4.100) y (4.101) son similares.

Con estas dos ecuaciones, somos por tanto capaces de simular el problema compresible usando el desarrollo seguido para flujo incompresible. Por un lado tenemos el termino S debido a la distribución de fuentes y por otro el causado por los gradientes locales de la densidad.

Ahora estamos en disposición de resolver el problema compresible. Para ello vamos a considerar un elemento aislado de turbina. Supondremos que el flujo es irrotacional y que no hay vorticidad tangencial w_q en la corona de álabes. Se asume que el fluido experimenta una caída de densidad repentina en el plano del disco actuador, lo cual resulta físicamente análogo a un flujo incompresible a través de un disco actuador con una distribución de fuentes.

Dado que w_q es nula, la ecuación (4.38c) queda

$$w_q = \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r} = 0$$

la cual implica la existencia de una función potencial $f(x, r)$ tal que

$$c_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad c_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (4.102)$$

La ecuación de continuidad (4.101) queda entonces

$$\text{divgrad} f = s = -\frac{1}{r} \hat{q} \cdot \text{grad} r$$

O para flujo axilsimétrico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = -\frac{c_x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{c_r}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \quad (4.103)$$

$$= -\frac{c_s}{r} \frac{dr}{ds} = S(x, r)$$

$S(x, r)$ es la distribución de fuentes del flujo incompresible equivalente. Para una turbina los valores de dr / ds se asumirán grandes debido a la aceleración del fluido dentro de la corona de álabes. Tanto aguas arriba como abajo del estator bajo consideración, $c_s (dr / ds)$ será despreciable por comparación.

Esto hace que podamos sustituir la corona de álabes por un disco de fuentes $S(r)$ situado en el plano del disco actuador, en el cual las fuentes generadas se asume que se crean de forma instantánea. Para todos los valores de x , por tanto, excepto en $x = x_{AD}$, la ecuación (4.103) se reduce a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \quad (4.104)$$

La distribución general de fuentes $S(r)$ podría expandirse como series de Bessel

$$\begin{aligned} S(r) &= S_m - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \{J_o(k_n r) + v_n Y_o(k_n r)\} \\ &= S_m - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n Z_o(k_n r) \end{aligned} \quad (4.105)$$

Donde $Z_o(k_n r)$ es una combinación de funciones de Bessel de orden cero del primer y segundo tipo y S_m es la distribución de fuentes media definida como

$$S_m = \frac{2 \int_{r_h}^{r_t} S(r) r dr}{r_t^2 - r_h^2} \quad (4.106)$$

La solución general de la ecuación (4.104) para un disco de fuentes localizado en $x=0$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} f &= \pm x \frac{1}{2} S_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_0(k_n r) e^{-\pm k_n x} \\ c'_x &= \pm \frac{1}{2} S_m - \pm \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n Z_0(k_n r) e^{-\pm k_n x} \\ c'_r &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n Z_1(k_n r) e^{-\pm k_n x} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Con el signo + para $x>0$ y el signo – para $x<0$. Los coeficientes a_n siguen directamente del análisis de Fourier-Bessel.

Una solución aproximada se podría obtener con las hipótesis análogas al análisis del disco actuador de torbellinos. Por ejemplo, si sólo está presente el primer término de las series de Bessel, las perturbaciones de la velocidad concluyen en el disco cuando $x>0$, pero cuando $x \rightarrow 0$ son

$$\begin{aligned} c'_{xd} &= \frac{1}{2} S_m - a_1 k_1 Z_0(k_1 r) = \frac{1}{2} S(r) \\ c'_{rd} &= -a_1 k_1 Z_1(k_1 r) = \frac{1}{2k_1} \frac{dS(r)}{dr} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Por lo tanto en el conducto tendremos

$$\begin{aligned} c'_x &= \pm \frac{1}{2} S_m - \pm \left(c'_{xd} - \frac{1}{2} S_m \right) e^{-\pm k_1 x} = \pm \frac{1}{2} [S_m + (S(r) - S_m) e^{-\pm k_1 x}] \\ c'_r &= c'_{rd} e^{-\pm k_1 x} = \frac{1}{2k_1} \frac{dS(r)}{dr} e^{-\pm k_1 x} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Estas ecuaciones representan las perturbaciones causadas por el efecto compresible en términos de la distribución de fuentes. La solución completa resultaría de añadir esta perturbación a la solución hallada en apartados anteriores para flujo incompresible.

4.3.2.2.- MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Vamos a analizar el desarrollo seguido para la obtención de las soluciones completas del disco actuador compresible. Seguiremos el análisis con un elemento aislado de turbina, siendo el desarrollo similar para el caso de compresor.

Hasta ahora la única influencia introducida, sobre la solución del problema incompresible, es el disco fuente $S(r)$. Las ecuaciones (4.107) muestran que este emite un flujo neto igual a $S_m p (r_t^2 - r_h^2)$ mientras que las ecuaciones (4.109) nos dicen que este abandona el conducto en $\pm \infty$ con una velocidad uniforme

$c_{x \pm \infty} = \pm \frac{1}{2} S_m$. Para simular el flujo compresible a través de una corona de álabes primero superpondremos una velocidad uniforme C_x . La distribución de la velocidad axial combinando $S(r)$ y C_x viene dada por:

$$c_x = C_x - \frac{1}{2} S_m - \frac{1}{2} (S(r) - S_m) e^{kx} \quad \text{para } x < 0 \quad (4.110)$$

$$c_x = C_x + \frac{1}{2} S_m + \frac{1}{2} (S(r) - S_m) e^{-kx} \quad \text{para } x > 0$$

donde las velocidades de entrada y salida del conducto son:

$$C_{x1} = C_x - \frac{1}{2} S_m \quad \text{en } x = -\infty \quad (4.111)$$

$$C_{x2} = C_x + \frac{1}{2} S_m \quad \text{en } x = +\infty$$

Ahora, como último punto, necesitamos relacionar la fuente del flujo incompresible considerada con el cambio de densidad que se produce a través del disco para flujo compresible en el problema equivalente.

No hay que perder de vista que aunque resolvamos por una analogía entre ambos tipos de flujos, necesitamos resolver en función de una variación de densidad existente, la cual nos define el problema compresible.

Por tanto, para una corriente que atravesase por un conducto de superficie de entrada S_1 a través de un disco situado en un plano AD, tanto la densidad como la

velocidad axial cambiarán de forma discontinua en x_{AD} pero el flujo de masa por unidad de área se conservará. Por tanto, tenemos que atravesando el plano AD,

$$d(rc_x) = rdc_x + c_c dr = 0$$

Para cambios de densidad finitos, el salto de la velocidad axial se puede aproximar por:

$$\Delta c_x \approx -C_x \frac{\Delta r}{r_m} \approx \frac{1}{2}(C_{x1} + C_{x2}) \frac{r_1 - r_2}{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)} \quad (4.112)$$

donde r_m es la media de las densidades aguas arriba y abajo en el radio r . Las velocidades C_x son las velocidades meridionales corriente arriba y abajo, las cuales están relacionadas con S_m a través de las ecuaciones (4.111).

Llegados a este punto hemos conseguido relacionar el término debido a las fuentes con el término de variación de densidades.

Por otro lado, las velocidades C_x se pueden relacionar también mediante la aplicación de la ecuación de continuidad del flujo másico, resultando

$$\rho \int_{rh}^{rt} C_{x1} r_1 2\pi r dr = \rho \int_{rh}^{rt} C_{x2} r_2 2\pi r dr \quad (4.113)$$

Para el elemento simple que estamos considerando, si suponemos la densidad de entrada constante, de la ecuación anterior podemos obtener la relación de velocidades

$$\frac{C_{x2}}{C_{x1}} = \frac{\int_{rh}^{rt} r_1 r dr}{\int_{rh}^{rt} r_2 r dr} \quad (4.114)$$

Por tanto, la solución previa del flujo incompresible a través del disco (ec. 4.110) se transforma ahora para flujo compresible en:

$$c_x = C_{x1} + \frac{(r_2 C_{x2} - r_1 C_{x1})}{r_m} \frac{1}{2} e^{k1x} \quad \text{para } x < 0$$

$$c_x = C_{x2} - \frac{(r_2 C_{x2} - r_1 C_{x1})}{r_m} \frac{1}{2} e^{-k1x} \quad \text{para } x > 0$$
(4.115)

Obtenidas las ecuaciones, necesitamos ahora, al igual que en todos los casos anteriores, un proceso iterativo para la resolución de las mismas.

Antes de mostrar el diagrama de flujo vamos a considerar algunos aspectos importantes.

Las soluciones encontradas están expresadas, como estábamos buscando, en función de la variación de densidades. Ahora bien, a efectos de resolución, los datos que nos encontraremos de partida serán otros como temperatura, presión, trabajo del escalonamiento, etc. Es por ello, que en el proceso iterativo será necesario incorporar unas ecuaciones que nos den la relación de densidades en función de estos datos de entrada.

Para el caso de un rotor de turbina, por ejemplo, tendríamos:

$$\frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{W}{C_p T_1} + \frac{c_1^2}{2C_p T_1} - \frac{c_3^2}{2C_p T_1} \quad (4.116)$$

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{T_1}{T_3} \left\{ 1 - \frac{1}{h_{TT}} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) \right\}^{g/(g-1)} \quad (4.117)$$

Se han escogido una serie de parámetros de entrada, si bien se pueden seleccionar otros diferentes. De forma similar hallaríamos relaciones para el caso de un estator o para el caso de trabajar con compresores.

Otro hecho importante es la determinación de la ubicación de las líneas de corriente entre coronas. Hay que notar, que con las relaciones vistas anteriormente, lo que estamos haciendo es indicar un salto entálpico entre la entrada y la salida. Más

exactamente, el salto entálpico que sufre cada línea de corriente a su paso por la corona de álabes.

No obstante, hay que tener en cuenta, que las líneas de corriente sufren una deflexión a su paso por la corona. Por lo tanto, a la hora de relacionar ese salto entálpico, tenemos que ubicarlas para que sea válido la aplicación del teorema de Euler empleado en el desarrollo. Es decir, si por ejemplo nos fijamos en la línea de corriente que entra en el radio medio, necesitamos saber cual será su posición a la salida para así aplicar correctamente el salto producido.

Para ello nos valdremos de las propiedades de los tubos de corriente. Si calculamos el flujo de masa de un determinado tubo de corriente a la entrada de una corona, mediante la conservación del flujo másico a través de los tubos, podremos hallar la posición de esos tubos de corriente a la salida de la corona, y por correspondencia, las líneas de corriente que contienen. Una vez determinada la posición de los distintos tubos de corriente podemos aplicar el salto entálpico entre la entrada y la salida.

Una vez, examinados los distintos puntos, un posible diagrama de flujo para la resolución a del flujo meridional compresible a través de un elemento aislado sería el siguiente:

