

## **CAPÍTULO I**

### **EL DISCO ACTUADOR “UNIDIMENSIONAL”**

El desarrollo de nuestro estudio lo vamos a llevar a cabo principalmente mediante la teoría del disco actuador. Ésta se trata de un modelo matemático basado fundamentalmente en la presencia de un plano discontinuo (llamado disco actuador) en el cual tendrán lugar las discontinuidades repentinas de las propiedades del flujo. Esto hace de esta teoría un elemento muy útil debido al gran abanico de problemas físicos distintos que nos permitirá simular.

Antes de introducirnos en el verdadero objeto de nuestro estudio, vamos a analizar la “sistemática” de la teoría del disco actuador, al mismo tiempo que se analizarán las distintas posibilidades que nos ofrece.

La teoría del disco actuador nos va a permitir el simular la introducción de perturbaciones físicas externas al flujo. Es decir, hay un agente externo que nos modifica las propiedades del flujo y lo que se pretende es simular este agente externo mediante un plano ( al que llamamos disco ) el cual genere un efecto similar al de dichas perturbaciones.

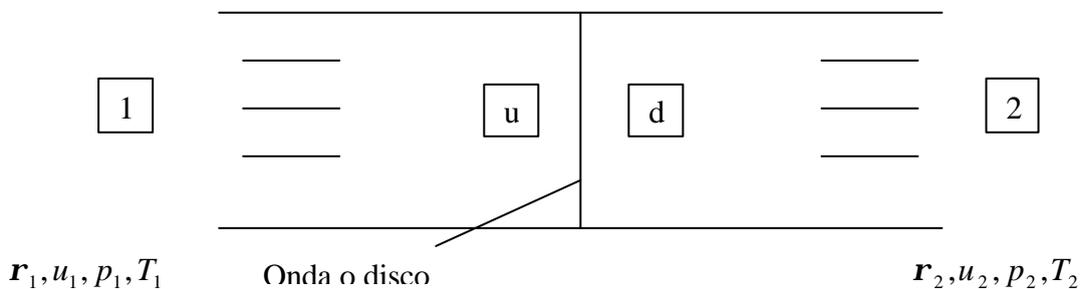
En un primer análisis, vamos a considerar flujos unidimensionales. Se asumirá la existencia de una discontinuidad en el flujo, la cual provocará en el mismo un cambio de propiedades. Las soluciones que se obtendrán describirán correctamente el flujo unidimensional, aunque no es el objetivo principal. Esto nos será de ayuda para entender otros tipos de flujos, y usaremos las soluciones unidimensionales aquí para mostrar como es usado el disco, como una introducción a problemas mas complejos en dos y tres dimensiones, los cuales estudiaremos mas

tarde. Sin embargo, debe recordarse que las soluciones en dos y tres dimensiones que trataremos de conseguir son normalmente perturbaciones de las soluciones unidimensionales descritas en este capítulo.

Hay que notar, que existe la posibilidad de que se produzcan discontinuidades en el flujo sin necesidad de un agente externo, como es el caso de una onda de choque en flujo supersónico. Es por este hecho por el cual se mostrarán primeramente las ecuaciones de conservación en flujo tubular unidimensional (con propiedades uniformes) como una introducción a la teoría del disco actuador, en la cual la continuidad de masa, momento y energía es alterada por agentes externos. En un primer momento las restricciones serán introducidas de forma limitada, en flujos tubulares unidimensionales para simular flujos a través de filtros o películas, de frentes de llama o de dispositivos con transferencia de trabajo. Mas tarde, consideramos flujo sin restricciones en el cual podrían existir velocidades pequeñas perpendiculares a la corriente principal (y paralelas al disco actuador) para cambiar la velocidad principal en ambas caras del disco. De cualquier modo, tales velocidades son pequeñas, y la corriente principal o velocidad axial en cualquier sección axial es lo suficientemente uniforme para que el flujo sea descrito como unidimensional.

**1.1. - DISCONTINUIDADES UNIDIMENSIONALES – ONDAS DE CHOQUE**

Para analizar el flujo compresible a través de una onda de choque normalmente se asume la presencia de una discontinuidad repentina en el flujo. Fijándonos en la figura (1.1), vemos que esta se produciría desde la posición u hasta la d.



( Figura 1.1 Flujo unidimensional a través de una discontinuidad )

La discontinuidad no se opone entonces a nuestra definición de un disco actuador, ya que no hay fuerza neta en la discontinuidad y no se le proporciona energía o fluido al flujo. Hay que indicar que el flujo no sufrirá variaciones en las posiciones alejadas, posiciones 1 y 2 (figura 1.1), hasta las posiciones u y d. Es decir, todas las variaciones que sufra se producirán en la discontinuidad de forma repentina. De este modo, a través de la discontinuidad, podríamos aplicar:

(i) ecuación de continuidad

$$G_1 = G_u = G_d = G_2 \quad (1.1)$$

donde  $G = \rho u$  es el flujo másico específico;

(ii) ecuación del momento

$$F_1 = F_u = F_d = F_2 \quad (1.2)$$

donde  $F = p + \rho u^2$  es la función impulso;

(iii) ecuación de la energía en flujo adiabático, sin transferencia de trabajo o calor

$$H_1 = H_2 = H_u = H_d \quad (1.3)$$

donde  $H = h + \rho u^2$  es la entalpía.

Además necesitamos una ecuación de estado; por ejemplo, la de los gases perfectos

$$R_1 = R_u = R_d = R_2 \quad (1.4)$$

donde  $R = \frac{p}{\rho T}$  y T es la temperatura.

Esas ecuaciones serían resueltas para dar las propiedades del flujo aguas debajo de la onda de choque, aguas arriba si el flujo es supersónico. Es decir, esto sería en el caso de que nos encontráramos con una discontinuidad donde no hubiera actuado ningún agente externo. Por lo tanto, estas ecuaciones no se resolverán aquí y

serán usadas para mostrar nuestras condiciones para el flujo a través del disco actuador.

Cuando aparece un agente externo, esas ecuaciones se ven modificadas y es cuando entra en acción el disco actuador. Existen diversas posibilidades de que las ecuaciones de conservación varíen:

- (i) la ecuación de continuidad podría modificarse para introducir una fuente o aporte de masa.
- (ii) la ecuación del momento podría modificarse para permitir un cambio en la función impulso  $F$  (la resistencia en un filtro por ejemplo).
- (iii) la ecuación de la energía podría modificarse para permitir el aporte o pérdida de energía (desde el disco). Por ejemplo, en el análisis del flujo a través de una corona de alabes girando hay una transferencia de trabajo la cual cambia la entalpía ( $H$ ). En un modelo de disco actuador de un frente de llama, hay un intercambio de energía, frecuentemente simulada mediante un aporte de calor a un gas perfecto, el cual varía el valor de la entalpía.

Recordamos de nuevo que, nuestro análisis del disco actuador entra en acción cuando una de las ecuaciones de conservación es modificada por un flujo de energía o masa desde el disco o desde una fuerza externa hacia el disco. Debemos notar, sin embargo, que la perturbación de una de esas ecuaciones debe ser enlazada con otras discontinuidades que puedan existir del flujo. Por ejemplo, si existe una fuente en el flujo, entonces se requieren fuerzas externas para mantenerlo en posición y la ecuación del momento debe incluir tales fuerzas.

## 1.2.- FLUJO TUBULAR CON RESTRICCIONES

Como vimos anteriormente, nuestra condición para que haya un disco actuador es que exista una perturbación física en una de las ecuaciones de gobierno – continuidad, momento o energía.

Se mostrarán a continuación ejemplos de cada uno de los casos, como son el flujo a través de un filtro, de un frente de llama y de un mecanismo con intercambio de trabajo.

La figura (1.1) muestra nuestra notación para cada uno de los ejemplos. Desde el estado 1 = estado u y estado d = estado 2, describimos el flujo enteramente en términos de propiedades en 1 y 2, no usando las notaciones u y d. Igual que en el caso de flujo unidimensional con onda de choque, las condiciones del flujo aguas arriba y abajo del disco actuador son idénticas que en las posiciones mas alejadas ( u y d).

### 1.2.1.- FLUJO A TRAVÉS DE UN FILTRO

En este caso es la ecuación del momento la que cambia (comparada con el caso de onda de choque) en el flujo a través de un filtro. Para entrada de flujo normal, la acción principal del filtro es producir una fuerza que se opone al movimiento del fluido y, accidentalmente, correspondientes caídas de presión e incrementos de entropía. Consideremos una unidad de área normal al flujo. La caída  $D$  será entonces función de la velocidad de entrada y de las propiedades del fluido, de la geometría y dimensiones del filtro,

$$D = D(u_1, \mathbf{r}, T_1; R; \mathbf{g}, \mathbf{m}, d, \text{geometria}) \quad (1.5a)$$

Donde  $d$  es una medida del diámetro de los hilos que forman el filtro. La geometría normalmente también incluirá el espacio del hilo. Se asume que el fluido es un gas perfecto así que si  $\mathbf{r}_1$  y  $T_1$  son conocidas, no necesitamos introducir la presión como variable adicional, ya que  $p_1 = \mathbf{r}_1 R T_1$ .  $\mathbf{m}$  es la viscosidad del fluido y  $\mathbf{g}$  es la relación de calores específicos.

La forma adimensional de la ecuación (1.5a) es:

$$C_D = \frac{D}{(1/2)u_1^2 \mathbf{r}_1} = f\left(\frac{\mathbf{r}_1 u_1 d}{\mathbf{m}}, \frac{u_1}{\sqrt{\mathbf{g} R T_1}}, \mathbf{g}, \text{geometria}\right) = f(R_{ed}, M_1, \mathbf{g}, \text{geometria}) \quad (1.5b)$$

donde  $R_{ed}$  y  $M_1$  son el número de Reynolds y de Mach a la entrada. La geometría es descrita normalmente de forma adecuada por la porosidad,  $P$ , fracción de espacio libre.

Consideraremos primero el caso de flujo incompresible a través de un área unitaria de un filtro de geometría conocida y con un número de Reynolds dado. La ecuación de continuidad es

$$G_1 = G_2 \quad (1.6a)$$

$$u_1 = u_2 \quad (1.6b)$$

Y la ecuación del momento es:

$$F_1 = D + F_2 \quad (1.7a)$$

De este modo,

$$D = F_1 - F_2 \quad (1.8a)$$

$$= p_1 - p_2 = \Delta p \quad (1.8b)$$

$$= p_{01} - p_{02} = \Delta p_0 \quad (1.8c)$$

Así, el coeficiente de caída de presión estática ( $K$ ) y el coeficiente de pérdida de presión de remanso ( $\Pi$ ) son iguales al coeficiente de resistencia ( $C_D$ ) en el caso de flujo normal incompresible:

$$K = \frac{\Delta p}{(1/2)ru_1^2} = \Pi = \frac{\Delta p_0}{(1/2)ru_1^2} = \frac{D}{(1/2)ru_1^2} = C_D(R_{ed}, P) \quad (1.9)$$

De este modo el único efecto del filtro en el fluido es producir una pérdida de presión estática, y una idéntica caída de presión de remanso, además de un aumento de entropía,

$$\Delta s = \frac{(p_0^1 - p_0^2)}{rT_1} \quad (1.10a)$$

Y en forma adimensional

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\Delta p_0}{p_1} \quad (1.10b)$$

Para flujo compresible, si de nuevo asumimos conocidos el número de Reynolds a la entrada y el número de Mach, las ecuaciones de control para el flujo de un gas perfecto a través de un filtro vienen dadas por:

Continuidad

$$G_1 = G_2 \quad (1.11a)$$

$$r_1 u_1 = r_2 u_2 \quad (1.11b)$$

Momento

$$F_1 = D + F_2 \quad (1.12a)$$

$$(p_1 + r_1 u_1^2) = (p_2 + r_2 u_2^2) + D \quad (1.12b)$$

Energía

$$H_1 = H_2 \quad (1.13a)$$

$$c_p T_1 + u_1^2 / 2 = c_p T_2 + u_2^2 \quad (1.13b)$$

Estado

$$R_1 = R_2 \quad (1.14a)$$

$$\frac{p_1}{r_1 T_1} = \frac{p_2}{r_2 T_2} \quad (1.14b)$$

A partir de estas ecuaciones, el flujo aguas abajo podría determinarse como sigue:

- (a) el número de Mach  $M_2$  como función del número de Mach  $M_1$  y del coeficiente de resistencia  $C_D$ ; ó
- (b) la relación de velocidad  $u_2/u_1$  como función del número de Mach  $M_1$  y del coeficiente de resistencia  $C_D$

A partir de la ecuación de continuidad (ec. 1.11) y de la ecuación de estado (ec. 1.14), la relación de velocidades  $u_2/u_1$  puede escribirse:

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \quad (1.15)$$

A partir de la ecuación de momento (ec. 1.12),

$$p_1(1 + gM_1^2) - C_D g p_1 M_1^2 / 2 = p_2(1 + gM_2^2) \quad (1.16)$$

ó

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + gM_2^2}{\{1 + gM_1^2(1 - C_D / 2)\}}$$

y de la ecuación de la energía (ec. 1.13)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \{(g-1)/2\}M_1^2}{1 + \{(g-1)/2\}M_2^2} \quad (1.17)$$

siguiendo como

$$\frac{(1 + gM_2^2)^2}{M_2^2 [1 + \{(g-1)/2\}M_2^2]} = \frac{\{1 + gM_1^2(1 - C_D / 2)\}^2}{M_1^2 [1 + \{(g-1)/2\}M_1^2]} \quad (1.18)$$

desde la cual puede determinarse  $M_2$  conociendo  $M_1$  y  $C_D$ .

Alternativamente, se puede obtener una ecuación cuadrática para la relación de velocidades  $u_2/u_1$ . Se eliminan las presiones de la ecuación del momento (1.12) usando continuidad y las ecuaciones de estado (1.11 y 1.14) para dar

$$\begin{aligned} r_1 \{RT_1(1 - gM_1^2 C_D / 2) + u_1^2\} &= r_2 (RT_2 + u_2^2) \\ u_2 RT_1(1 - gM_1^2 C_D / 2) + u_2 u_1^2 &= u_1 RT_2 + u_1 u_2^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Desde la ecuación de la energía (1.13),  $T_2$  es escrita como

$$T_2 = T_1 + (u_1^2 - u_2^2) / 2c_p \quad (1.20)$$

Y eliminada entre las ecuaciones (1.19 y 1.20), dando la siguiente ecuación para  $u_2/u_1$ :

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 - \frac{2g}{g+1} \left(\frac{u_2}{u_1}\right) \left(1 + \frac{1}{gM_1^2} - \frac{C_D}{2}\right) + \left(\frac{2}{(g+1)M_1^2} + \frac{g-1}{g+1}\right) = 0 \quad (1.21)$$

Con esto tendríamos la solución buscada, ya que conocemos la relación entre las velocidades de la cara anterior y posterior del disco. Sabríamos la variación que ha sufrido el flujo a su paso por el mismo.

### 1.2.2.- FRENTE DE LLAMA NORMAL

La segunda forma de disco actuador unidimensional que podríamos discutir es el frente de llama normal.

Ahora es la ecuación de la energía la que se modifica con respecto a las ecuaciones de discontinuidades de ondas de choque. Por simplicidad, sustituiremos el proceso de combustión por uno de aportación de calor a un gas perfecto, en el cual se supone que el calor por unidad de masa es suministrado en los márgenes del disco. Los estados 1 y 2 aguas arriba y abajo estarán entonces conectados, aunque la transición tendrá lugar de forma repentina entre los dos estados.

Las ecuaciones a través del disco son ahora:

Continuidad

$$G_1 = G_2 \quad (1.22a)$$

$$r_1 u_1 = r_2 u_2 \quad (1.22b)$$

Momento

$$F_1 = F_2 \quad (1.23a)$$

$$(p_1 + r_1 u_1^2) = (p_2 + r_2 u_2^2) \quad (1.23b)$$

Energía

$$H_1 + q = H_2 \quad (1.24a)$$

$$c_p T_1 + u_1^2 / 2 + q = c_p T_2 + u_2^2 \quad (1.24b)$$

Estado

$$R_1 = R_2 \quad (1.25a)$$

$$\frac{p_1}{r_1 T_1} = \frac{p_2}{r_2 T_2} \quad (1.25b)$$

Donde la suposición de gas perfecto  $R = p/(Tr)$  y  $C_p = cte$  ha sido hecha para el fluido en ambas caras del disco.

De nuevo, se podrían hallar todas las ecuaciones que nos definirían completamente los cambios de propiedades, aunque nos centraremos en hallar las relaciones para el número de Mach y la velocidad aguas abajo.

Como para el flujo del filtro, las ecuaciones (1.22), (1.23) y (1.25) se pueden combinar para eliminar  $u_2/u_1$  y obtener la relación de temperaturas

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ \frac{M_2}{M_1} \frac{(1 + gM_1^2)}{(1 + gM_2^2)} \right]^2 \quad (1.26)$$

Pero, desde la ecuación de la energía, las relaciones de temperaturas estáticas y de remanso son:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 + \frac{q}{c_p T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{[1 + \{(g-1)/2\}M_2^2]}{[1 + \{(g-1)/2\}M_1^2]} \quad (1.27)$$

Y combinando las ecuaciones (1.26) y (1.27)

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1 + \frac{q}{c_p T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{(1 + gM_1^2)^2}{(1 + gM_2^2)^2} \frac{[1 + \{(g-1)/2\}M_2^2]}{[1 + \{(g-1)/2\}M_1^2]} \quad (1.28)$$

A partir de la cual se obtiene el número de Mach aguas abajo  $M_2$  si  $M_1$  y  $q / C_p T_0$  son dadas.

Alternativamente, la relación de velocidad  $u_2 / u_1$  se podría obtener como en el flujo del filtro. La cuadrática de  $u_2 / u_1$  es ahora:

$$\left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 - \left( \frac{2g}{g+1} \right) \left( \frac{u_2}{u_1} \right) \left( 1 + \frac{1}{gM_1^2} \right) + \left( \frac{g-1}{g+1} \right) \left( 1 + \frac{2}{(g-1)M_1^2} \right) + \frac{2q}{c_p T_{01}} \left( \frac{1}{(g+1)M_1^2} \right) = 0 \quad (1.29)$$

### 1.2.3.- DISCO ACTUADOR CON TRANSFERENCIA DE TRABAJO

Para un disco actuador que represente a un mecanismo con transferencia de trabajo, debemos modificar de nuevo la ecuación de la energía, como en el análisis del frente de llama, pero también debemos considerar la posible modificación de la ecuación del momento. Si por ejemplo, el disco representa una etapa reversible adiabática (isentrópica) de un compresor, entonces no solo se incrementa la entalpía de remanso del fluido por el trabajo recibido por unidad de masa ( $w_s$ ), ya que los alabes de la etapa del compresor también ejercen una fuerza ( $f$  por unidad de área de sección transversal) sobre el fluido en la dirección del movimiento. El trabajo transferido y la fuerza serán relacionadas por un camino el cual depende del método de transferencia de trabajo. Por el momento consideraremos  $w_s$  y  $f$  como independientes y discutiremos su relación mas tarde.

Esencialmente, modificamos ahora la ecuación del momento y de la energía; en cierto sentido combinaremos el análisis para flujo a través de un filtro (modificación solo de la ecuación del momento) y el análisis del flujo a través del frente de llama (modificación solo de la ecuación de la energía). La ecuación de la entropía no se modifica por la transferencia de trabajo isentrópico. La ecuación de continuidad y las de estado son inalterables.

Las ecuaciones básicas para el flujo de un gas perfecto son ahora

Continuidad

$$G_1 = G_2 \quad (1.30a)$$

$$\mathbf{r}_1 u_1 = \mathbf{r}_2 u_2 \quad (1.30b)$$

Momento

$$F_1 + f = F_2 \quad (1.31a)$$

$$(p_1 + \mathbf{r}_1 u_1^2) + f = (p_2 + \mathbf{r}_2 u_2^2) \quad (1.31b)$$

Energía

$$H_1 + w_s = H_2 \quad (1.32a)$$

$$c_p T_1 + u_1^2 / 2 + w_s = c_p T_2 + u_2^2 / 2 \quad (1.32b)$$

Estado

$$R_1 = R_2 \quad (1.33a)$$

$$\frac{p_1}{r_1 T_1} = \frac{p_2}{r_2 T_2} \quad (1.33b)$$

De nuevo, intentaremos buscar el número de Mach  $M_2$ , pero ahora como función de  $M_1$ ,  $w_s$  y  $f$ . Alternativamente, podríamos resolver la relación de velocidades  $u_2/u_1$ .

Para obtener el número de Mach corriente abajo, usaremos las ecuaciones (1.30), (1.31) y (1.33), así que

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)} \quad (1.34)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{(1 + gM_2^2)T_2}{(1 + gM_1^2 + f/p_1)T_1}$$

Y, a partir de la ecuación de la energía, como en el frente de llama normal, ecuación (1.32) transformada

$$\frac{T_{02}}{T_{00}} = 1 + \frac{w_s}{c_p T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{[1 + \{(g-1)/2\}M_2^2]}{[1 + \{(g-1)/2\}M_1^2]} \quad (1.35)$$

Combinando las ecuaciones (1.34) y (1.35) obtenemos

$$1 + \frac{w_s}{c_p T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{(1 + gM_1^2 + f/p_1)^2}{(1 + gM_2^2)} \frac{[1 + \{(g-1)/2\}M_2^2]}{[1 + \{(g-1)/2\}M_1^2]} \quad (1.36)$$

a partir de la cual obtenemos  $M_2$ .

Alternativamente, la relación de velocidades  $u_2/u_1$  puede determinarse como en los casos anteriores. La ecuación resultante para  $u_2/u_1$  es

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 - 2\left(\frac{u_2}{u_1}\right)\left(\frac{g}{g+1}\right)\left(1 + \frac{1}{gM_1^2} + \frac{f}{p_1}\right) + \frac{g-1}{g+1}\left(1 + \frac{2}{(g-1)M_1^2}\right) + \frac{2w_s}{c_p T_{01}}\left(\frac{1}{(g+1)M_1^2}\right) = 0 \quad (1.37)$$

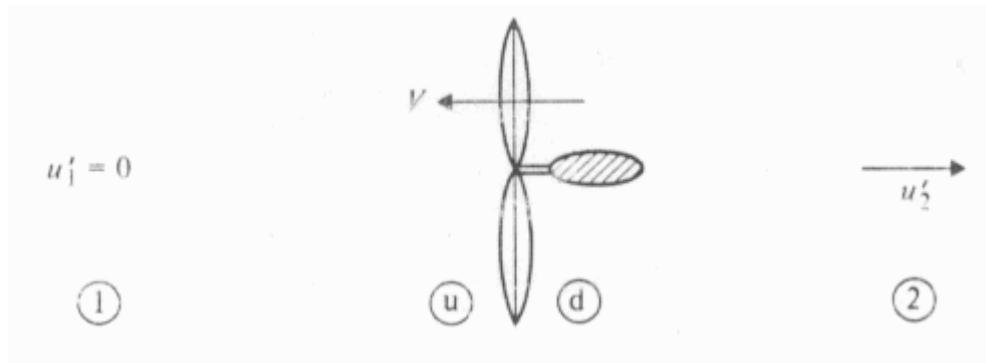
Una vez conocidos  $f$  y  $w_s$  conoceríamos, como en los casos anteriores, la variación de velocidad experimentada por el flujo a causa de la perturbación sufrida.

### 1.3.- DISCO UNIDIMENSIONAL – FLUJO “SIN RESTRICCIONES”

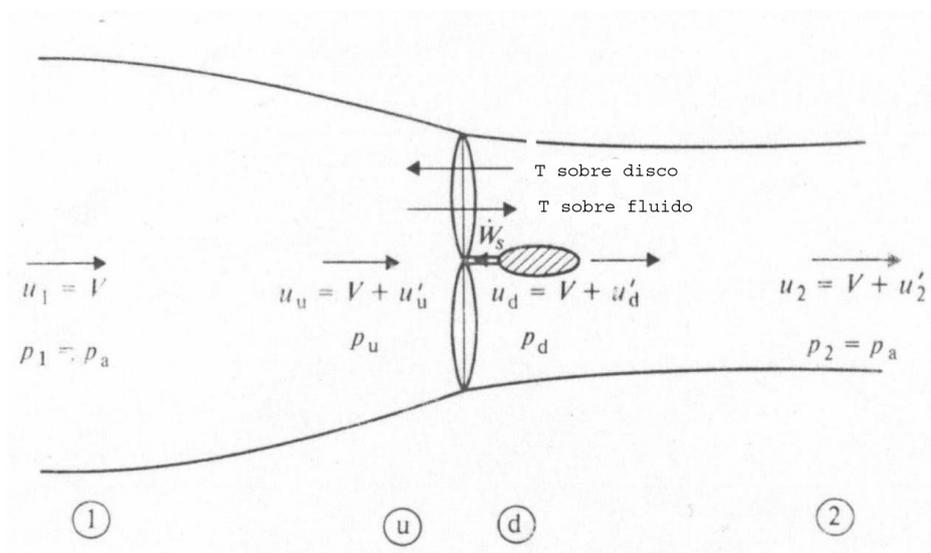
Se considerará ahora un flujo el cual no tenga restricciones a ambos lados del disco mas que el confinamiento en un tubo de longitud fijada. Se analizará el flujo incompresible a través de una hélice.

#### 1.3.1.- FLUJO A TRAVÉS DE UNA HÉLICE

Comentaremos ahora, como muestra la figura (1.2a) esquemáticamente, un hipotético disco actuador sustituyendo a una hélice que se mueve con velocidad  $V$  hacia la atmósfera estacionaria donde el ambiente esta a la presión  $p_a$ . Consideraremos el flujo relativo al disco (ver figura 1.2b), es decir que la velocidad relativa aguas arriba en la zona 1 es  $u_1 = V$ , aunque la presión estática es invariable ( $p_1 = p_a$ ).



( Figura 1.2a Flujo a través de una hélice )



( Figura 1.2b Flujo a través de una hélice )

Dado que el flujo es ahora libre para moverse en la dirección transversal a la principal, la velocidad en las zonas 1 y u no es la misma ( $u_1 \neq u_u$ ); de igual forma ( $u_d \neq u_2$ ) corriente abajo. Si asumimos que la contracción de la corriente no es grande, las velocidades en cualquier sección axial son razonablemente uniformes y el flujo puede ser descrito como unidimensional en el sentido de que  $u_1$ ,  $u_u$ ,  $u_d$  y  $u_2$  son tomadas constante en cada sección. Aunque la presión estática en el extremo es igual a  $p_a$ , las presiones intermedias  $p_u$  y  $p_d$  pueden diferir de la presión ambiente. En la zona 2, sin embargo,  $p_2 = p_a$ .

Las ecuaciones básicas que hemos usado a través de los discos en los flujos confinados son usadas de nuevo, para ahora entre las zonas u y d, corriente arriba y abajo del disco,

Continuidad

$$G_u = G_d \quad (1.38a)$$

$$\left(\frac{G}{r}\right)_u = u_u = V + u'_u = V + u'_d = \left(\frac{G}{r}\right)_d \quad (1.38b)$$

Momento

$$T + F_u A_u = F_d A_d \quad (1.39a)$$

$$T + A_u (p_u + r u_u^2) = A_d (p_d + r u_d^2) \quad (1.39b)$$

Energía

$$w_s = H_d - H_u \quad (1.40a)$$

$$w_s = (p_{0d} - p_{ou}) / r \quad (1.40b)$$

para el flujo de un fluido incompresible de densidad  $r$ .

$T = f A_d = f A_u$  es el empuje en la hélice, así que hay una fuerza T sobre el fluido en la dirección x.

Como la velocidad es continua ( $u_u = u_d$ ), esto hace que

$$f = T / A = p_d - p_u \quad (1.41)$$

$$w_s = (p_d - p_u) / r = f / r \quad (1.42)$$

donde  $A = A_u = A_d$  es el área del disco.

Ahora tenemos que relacionar las condiciones en la zona 1 con las de u, y las de la zona 2 con las de d. A partir de la ecuación de Bernouilli para el estrechamiento de la corriente entre 1 y u,

$$(p_1 + r V^2 / 2) = p_u + (r / 2) (V + u'_u) \quad (1.43)$$

inmediatamente aguas abajo del disco (zona d) hasta el extremo, la presión de remanso se mantiene constante, así que

$$p_d + (\mathbf{r}/2)(V + u_d')^2 = p_2 + (\mathbf{r}/2)(V + u_2')^2 \quad (1.44)$$

A partir de las ecuaciones (1.43) y (1.44), de que  $p_2 = p_1 = p_a$  y de que  $u_d' = u_u'$ , de la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} p_d - p_u &= (\mathbf{r}/2)(V + u_2')^2 - \mathbf{r}V^2/2 \\ &= (\mathbf{r}/2)(2Vu_2' + u_2'^2) \end{aligned} \quad (1.45)$$

De la ecuación (1.41), el empuje desarrollado por la hélice es la diferencia de presiones en el disco multiplicada por su área,

$$\begin{aligned} T = fA &= (p_d - p_u)A \\ &= \mathbf{r}Au_2'(V + u_2'/2) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Pero el empuje podría relacionarse también con el cambio global del momento entre 1 y 2

$$\begin{aligned} T &= GA\{(V + u_2') - V\} \\ &= \mathbf{r}A(V + u_u')u_2' \end{aligned} \quad (1.47)$$

De la ecuación (1.46) y (1.47) llegamos a

$$u_d' = u_u' = u_2'/2 \quad (1.48)$$

es decir, que la mitad de la perturbación que sufre la velocidad tiene lugar por encima del disco.

La energía cinética añadida al fluido por el movimiento de la hélice hacia un fluido estacionario, es

$$\frac{1}{2}(GA)(u_2')^2$$

mientras que la potencia del empuje es

$$TV = fAV = rA(V + u_d') \mathcal{N}u_2' \quad (1.49)$$

De este modo, la potencia total absorbida por la hélice es

$$\begin{aligned} W_s = GAw_s &= TV + (1/2)(GA)(u_2')^2 \\ &= rA(V + u_d')(V + u_2'/2)u_2' \\ &= TV(1 + u_2'/2V) \\ &= GA\{(p_d - p_u)/r\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

El rendimiento de la hélice  $h$  definido como la relación entre la potencia útil del empuje y la potencia total absorbida:

$$h = \frac{TV}{W_s} = \frac{1}{1 + u_2'/2V} = \frac{V}{V + u_d'} \quad (1.51)$$

con lo cual se resolvería el problema.

El hecho de presentar estos ejemplos, como se comentó anteriormente, no tiene la función principal de obtener su análisis completo para hallar una solución exacta de los mismos sino que se presentan como una introducción a los métodos del disco actuador. En este ejemplo, es importante apreciar la naturaleza de las suposiciones hechas, ya que los análisis de otros flujos mediante el disco actuador siguen un modelo similar. Las suposiciones son las siguientes

- (i) el flujo es uniforme a lo largo de la corriente en todas las zonas. Aunque hay una suposición razonable en las zonas “infinitas” 1 y 2, es claramente erróneo en las zonas u y d. La presión en las caras libres de la corriente es  $p_a = p_1 = p_2$ , pero las presiones principales  $p_u, p_d$  están por debajo y por arriba de la atmosférica respectivamente. Debe existir una curvatura local del flujo para que esto sea posible. Esto nos indica que el flujo no puede ser estrictamente unidimensional.

- (ii) las velocidades de giro son ignoradas en el análisis, aunque deben existir si la transferencia de trabajo tiene lugar. Si el flujo a través del disco es reversible y adiabático, entonces el incremento de la presión de remanso, ignorando la energía cinética de las velocidades de giro, es

$$\begin{aligned}(p_{od} - p_{ou}) / \mathbf{r} &= (p_d - p_u) / \mathbf{r} \\ &= U(v'_d - v'_u)\end{aligned}$$

donde  $v$  es la velocidad de giro y  $U$  es la velocidad de la hoja local. Claramente  $v'_u$  debe ser cero, y el disco añade velocidad tangencial:

$$v'_d = (p_d - p_u) / \mathbf{r} U = T / U A \mathbf{r}$$

- (iii) en el análisis no hay vorticidad aguas abajo, una vez que el flujo se asume uniforme. Sin embargo, la circulación en el flujo real debe variar a lo largo de la hoja así que la vorticidad existe.

Una vez examinado brevemente el disco actuador “unidimensional”, podemos analizar el mismo en flujos de “dimensión y media” y “bidimensionales” para ir conociendo con más detalle el funcionamiento básico del mismo.