CAPÍTULO II

EL DISCO ACTUADOR "DIMENSIÓN Y MEDIA"

En la teoría del disco unidimensional consideramos que las discontinuidades o los "discos" eran normales al flujo, el cual se consideraba además unidimensional en todo su análisis.

Ahora vamos analizar la situación en la cual la discontinuidad no sea normal al flujo. Sin embargo, hay que resaltar que en ambas caras del disco el flujo si es estrictamente unidimensional, de ahí el nombre de "dimensión y media". Es decir, el flujo es unidimensional hasta su llegada al disco, en el cual cambiará su dirección para salir de nuevo sin componente normal a la dirección principal del flujo (unidimensional).

Definiendo un sistema de coordenadas como el de la figura (2.1), las velocidades de los flujos en ambas caras tendrán como componentes de la velocidad u y v. Sin embargo, hay que notar que no existirán variaciones en las direcciones x e y $\left(\partial/\partial x, \partial/\partial y = 0\right)$. No existe vorticidad, por lo cual las líneas de corriente no sufrirán variaciones en ambas caras del disco.

Al igual que se hizo en el análisis unidimensional, si consideráramos una onda de choque, oblicua en este caso, veríamos como se conservan las ecuaciones de flujo de masa, momento y energía. De igual manera, nuestro análisis del disco entra en acción cuando una de estas ecuaciones sufre una variación.

Por lo tanto, dada la similitud existente, nos centraremos en un caso concreto como es el flujo a través de una cascada de alabes para seguir nuestra introducción en la teoría del disco actuador.

2.1.- FLUJO UNIFORME A TRAVÉS DE UNA CASCADA

Como ejemplo de disco actuador en "una dimensión y media" se puede considerar la desviación que sufre un flujo estacionario a su paso por una cascada de álabes estrechamente separados. Si nos fijamos en la figura (2.1) la cascada se orienta hacia el eje "y" y gira el flujo hacia el eje "x". Las ecuaciones básicas para el flujo a través del disco son:

Continuidad

$$G_1 = G_2 \tag{2.1a}$$

$$r_1 u_1 = r_2 u_2 \tag{2.1b}$$

Momento en la dirección x

$$F_1 + Lsena_m = F_2 \tag{2.2a}$$

$$Lsena_m = (p_2 - p_1) + \left(r_2 u_2^2 - r_1 u_1^2\right) \tag{2.2b}$$

Momento en la dirección y

$$G_1 v_1 = L\cos a_m + G_2 v_2 \tag{2.3a}$$

$$L\cos a_m = r_1 u_1 v_1 - r_2 u_2 v_2 \tag{2.3b}$$

Energía

$$H_1 = H_2 \tag{2.4a}$$

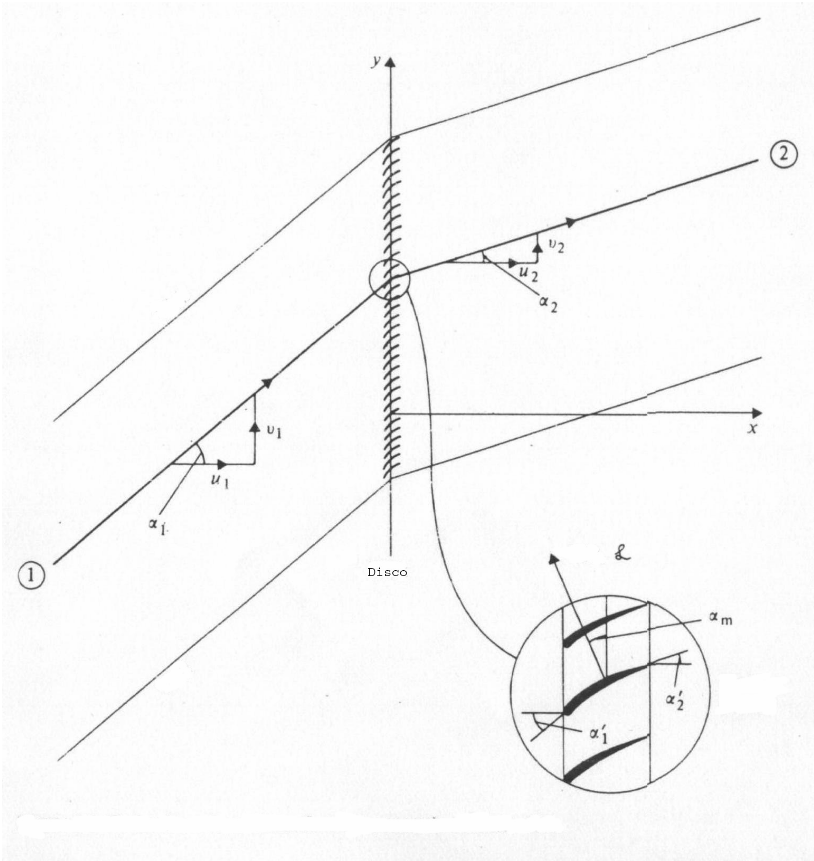
$$h_1 + (u_1^2 + v_1^2)/2 = h_2 + (u_2^2 + v_2^2)/2 \tag{2.4b}$$

Estado

$$R_1 = R_2 \qquad (2.5a)$$

$$\frac{p_1}{r_1 T_1} = \frac{p_2}{r_2 T_2} \qquad (2.5b)$$

donde L es la sustentación por unidad de longitud de la cascada y formando un ángulo a_m con la dirección y.



(Figura 2.1 flujo uniforme a través de una cascada)

El método usual de solución es obtener las condiciones del flujo a la salida y la sustentación L para condiciones del flujo a la entrada especificadas, y para un ángulo de salida del flujo a_2 especificado e igual al ángulo de salida de los alabes $a_2^{'}$ (notar que el ángulo de entrada de los alabes $a_1^{'}$ no tiene por que ser igual a a_1).

Por tanto,

$$v_2 = u_2 \tan a_2^{'} \tag{2.6}$$

aunque hay cuatro incógnitas en el flujo aguas abajo (p_2, r_2, T_2, u_2). La sustentación L por unidad de longitud y su inclinación a_m (o las dos componentes $L_x = Lsen a_m$, $L_y = L\cos a_m$) son dos nuevas variables desconocidas, teniendo seis incógnitas en total.

La sexta ecuación necesaria para la resolución del problema es la relación isentrópica:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{g/(g-1)} \tag{2.7}$$

la cual hace posible que la solución completa sea obtenida.

La solución para flujo compresible requiere un análisis complejo. Para flujo incompresible es mucho mas simple. En ese caso, las ecuaciones que modelan el problema son:

$$u_1 = u_2 = u \tag{2.8}$$

$$Lsen a_m = (p_2 - p_1) \tag{2.9}$$

$$L\cos a_m = ru(v_1 - v_2) = ru^2(\tan a_1 - \tan a_2) \tag{2.10}$$

En lugar de las ecuaciones de la energía y la isentrópica podríamos usar la ecuación de Bernouilli:

$$\frac{p_1}{r} + \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{2} = \frac{p_2}{r} + \frac{(u_2^2 + v_2^2)}{2}$$

Así que el aumento de presión a través de la cascada es:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} ru^2\left(\tan^2 a_1 - \tan^2 a_2\right) \tag{2.11}$$

en la cual u, a_1 y $a_2 = a_2^{'}$ son conocidos. A partir de esas ecuaciones, la solución se completa hallando L y a_m:

$$Lsena_m = ru^2(\tan a_1 - \tan a_2)\left\{\frac{(\tan a_1 + \tan a_2)}{2}\right\} \tag{2.12}$$

$$L\cos a_m = ru^2(\tan a_1 - \tan a_2) \tag{2.13}$$

$$a_m = \tan^{-1}\left\{\frac{(\tan a_1 + \tan a_2)}{2}\right\} \tag{2.14}$$

donde a_m es el ángulo del flujo.

Por último, la sustentación sería:

$$L = ru^2(\tan a_1 - \tan a_2)\sec a_m \tag{2.15}$$

con lo cual el problema estaría resuelto.

Podemos observar, después de los casos resueltos tanto en flujo unidimensional como de dimensión y media, como se puede aplicar la teoría del disco actuador a casos muy diversos.