CAPÍTULO III

EL DISCO ACTUADOR BIDIMENSIONAL

Llegados a este punto vamos a desarrollar la teoría del disco actuador para el caso "bidimensional".

Ahora, en general, se considerará que los flujos podrán tener componentes de la velocidad en las tres direcciones. De igual forma podrá existir una componente de la vorticidad en cada una de esas direcciones, con lo cual, nos encontramos ahora, que las líneas de corriente podrán variar en las tres direcciones.

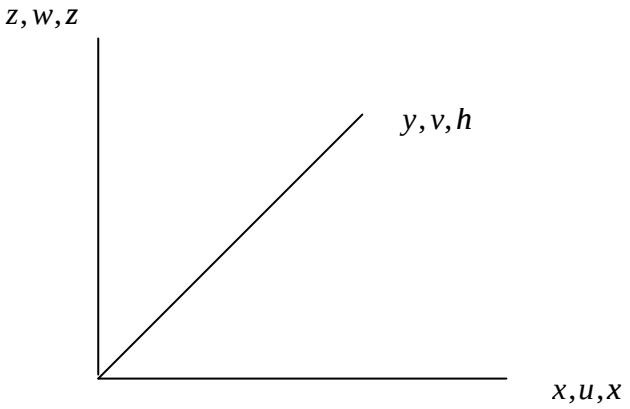
Sin embargo hay que notar que, el hecho de considerarlos bidimensionales es porque los flujos serán resueltos en un plano bidimensional determinado y que será seleccionado para tal efecto.

De la misma forma que anteriormente se resolverán unos casos genéricos mediante el desarrollo de la teoría del disco actuador para analizar su fundamento e implementación.

El análisis se desarrolla para flujo incompresible, asumiendo que la densidad no cambia a lo largo de las líneas de corriente, siendo para flujo compresible de forma similar.

Primero consideraremos unos casos donde se incluyen solo pequeñas perturbaciones unidimensionales o de "dimensión y media" para terminar examinando el flujo meridional a través de una cascada, cuyo caso se examinara también posteriormente de forma detallada.

Para todos los casos usaremos un sistema de referencia similar como el mostrado en la figura (3.1).



(Figura 3.1 Sistema de referencia)

3.1.- FLUJO "CORTANTE" A TRAVÉS DE UN FILTRO

El primer caso que vamos a ver y más simple, es el de flujo "cortante" incompresible a la entrada, $u_1(z)$, pasando a través de un filtro en $x = 0$, el cual provocará tanto una pérdida de presión como una deflexión local del flujo en el plano (x, z). La velocidad v es siempre nula por lo cual, la solución del problema es el campo de velocidades en el plano (x, z), por lo que tenemos asegurada la "bidimensionalidad" del mismo. En el desarrollo se admite la presencia de la vorticidad h en el flujo. Sin embargo, si la entrada del flujo fuese uniforme, entonces h sería nula y volveríamos al flujo unidimensional a través de un filtro.

Dando las características del filtro, el problema es determinar el flujo al atravesarlo y en particular el perfil de velocidad $u_2(z)$ en $x = \infty$.

Lo primero que haremos es asumir el coeficiente de resistencia (basado en la caída de presión) para un flujo que se encuentra el filtro con un ángulo $e = e_u$, con velocidad normal u_u,

$$K(e_u) = (p_u - p_d) / \frac{1}{2} \rho u_u^2 \tag{3.1}$$

y consideraremos que es similar al coeficiente de resistencia para flujo normal al filtro $(e_u = 0)$, es decir

$$K(e_u) \approx K(0) = K \tag{3.2}$$

Por tanto, asumiremos que las velocidades tangenciales justamente aguas arriba y abajo del filtro, zonas u y d, vienen relacionadas aproximadamente por

$$w_d = w_u(1 - B) \tag{3.3}$$

donde B es también una característica conocida del filtro.

Antes de seguir avanzando en el desarrollo hay que hacer un pequeño inciso. Para un flujo, donde la componente de la velocidad perpendicular al plano seleccionado es nula y en el cual la componente de la vorticidad en esa dirección (b) normalmente no lo es, la ecuación de Helmholtz para flujo incompresible

$$(c \cdot \nabla) w = (w \cdot \nabla) c \tag{3.4}$$

podría aplicarse en la dirección b, con $c_b = 0$ para ver que

$$c \frac{\partial w_b}{\partial s} = 0 \tag{3.5}$$

donde s es la coordenada medida a lo largo de una línea de corriente en el plano seleccionado y w_b es la vorticidad perpendicular a ese plano. w_b es por tanto invariable a lo largo de una línea de corriente en el flujo bidimensional.

Aplicando por tanto para nuestro caso la ecuación de Helmholtz para w_b, la cual es ahora la componente tangencial h, obtenemos la ecuación

$$c \frac{\partial h}{\partial s} = u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \tag{3.6}$$

para flujo incompresible. Desde que $w/u, \partial h / \partial z$ son pequeños en un flujo cortante "débil", entendiendo como tal que las variaciones frente a z son pequeñas, podríamos escribir

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

y que

$$h = h(z) \tag{3.8}$$

en ambas caras del disco.

Este es un factor importante y que nos conduce a poder concluir, que en tales flujos "cortantes" débiles, si bien las velocidades w (componente z) podrían variar, la vorticidad tangencial permanece constante a lo largo de las líneas de $z = cte$ a ambos lados del disco. Existe una discontinuidad en h en el disco.

Una ecuación para la velocidad radial se obtiene ahora de la ecuación de continuidad y de la solución aproximada de Helmholtz, $h = h(z)$. Suponemos que el campo de velocidades local en un punto (x, z), por ejemplo aguas arriba del disco, viene dado por

$$u = \bar{u} + u_1'(z) + u'(x, z) \tag{3.9}$$

$$w = w'(x, z) \tag{3.10}$$

es decir, que las perturbaciones en el flujo son debidas a pequeñas variaciones en los campos de velocidades u' y v'. Es decir, suponemos que el efecto del "disco" sobre el flujo es una pequeña perturbación del flujo medio de entrada.

Entonces, para flujo incompresible, la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.11}$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{3.12}$$

De forma similar, la solución de Helmholtz

$$h(x, z) = h_1(z) \tag{3.13}$$

de forma que

$$\frac{\partial u_1'}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial u_1'}{\partial z}$$

y por tanto

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial x} \tag{3.14}$$

Las ecuaciones de la (1.11) a la (1.14) dan

$$\nabla^2 w' = \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0 \tag{3.15}$$

para el flujo aguas arriba, y de forma similar para las perturbaciones del flujo aguas abajo.

La solución de la ecuación para w' en las dos regiones puede ser expresada en forma de desarrollos en serie:

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pm k_n x} \left(A_n sen k_n z + B_n \cos k_n z \right) \tag{3.16}$$

donde el signo $(+)$ corresponde aguas arriba y el signo $(-)$ corresponde aguas abajo. Dado que la velocidad radial debe ser cero en las paredes, en $z = 0$ y $z = 1$ para todo x, tenemos que $B_n = 0$ y $k_n = np / l$. Esas condiciones de contorno limitan la solución a

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nu} sen \frac{npz}{l} e^{npx/l} \qquad \text{corriente arriba} \tag{3.17}$$

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nd} sen \frac{npz}{l} e^{-npx/l} \qquad \text{corriente abajo} \tag{3.18}$$

e integrando la ecuación de continuidad con respecto a x desde el ∞ (donde $u' = 0$) a x la solución obtenida es

$$u' = -\sum_{n=1}^{\infty} A_{nu} \cos \frac{npz}{l} e^{npx/l} \qquad \text{corriente arriba} \tag{3.19}$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nd} \cos \frac{npz}{l} e^{-npx/l} \qquad \text{corriente abajo} \tag{3.20}$$

Estas son las soluciones genéricas a través del disco actuador, es decir, las perturbaciones que sufre el flujo medio en las proximidades del disco debido a su presencia.

Si queremos obtener unas soluciones más concretas tenemos que obtener los coeficientes A_{nu} y A_{nd} para emparejar las soluciones a través del disco actuador. Usaremos las dos características conocidas del filtro, ecuaciones (3.2) y (3.3), junto con la ecuación de continuidad. La ultima, aplicada en una posición z a través del disco da

$$G_u = ru_u = G_d = ru_d$$

y por tanto

$$u_u = u_d$$

$$\bar{u} + u_1'(z) + u_u' = \bar{u} + u_2'(z) + u_d' \tag{3.21}$$

La componente de la velocidad z cambia a través del disco según la ecuación (3.3), así que

$$w_d' = w_u'(1 - B) \tag{3.22}$$

$$(1 - B)A_{nu} = A_{nd} \tag{3.23}$$

De las ecuaciones (3.21) y (3.23) tenemos

$$(u_1 - u_2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2 - B)A_{nu} \cos\frac{npz}{l} \tag{3.24}$$

Finalmente, usaremos la ecuación (3.2), la cual da las pérdidas de presión de remanso a través del filtro (aunque lo tenemos en función de la caída de presión $p_u - p_d$). Como

$$p_o = p + \frac{1}{2} r\left(u^2 + w^2\right)$$

$$\frac{\partial p_o}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + ru\frac{\partial u}{\partial z} + rw\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.25}$$

Para los flujos débiles considerados, el desplazamiento de las líneas de corriente es pequeño y el termino de la energía cinética $(w\partial w/\partial z)$ puede ser eliminado. Por tanto, podríamos usar la relación de Lamb $(\nabla p_o / r = c \times w)$ para escribir el gradiente de la presión de remanso en la dirección z como

$$\frac{\partial p_o}{\partial z} = uh \tag{3.26}$$

donde $h = \partial u / \partial y - \partial w / \partial z$. Como vimos anteriormente, esta vorticidad es una función de z en ambas caras del disco en un flujo "cortante" pequeño, así que $h_u = h_1$ y $h_d = h_2$.

Tomando la diferencia del gradiente de p_o en las dos caras del disco

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(p_{ou} - p_{od}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(p_u - p_d) + u_u \frac{\partial u_u}{\partial z} - u_d \frac{\partial u_d}{\partial z}$$

$$= u_u h_u - u_d h_d \tag{3.27}$$

Pero, como $u_u = u_d$ y $(p_u - p_d)/r = Ku_u^2/2$, entonces se llega a que

$$u_u (h_u - h_d) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ku_u^2}{2}\right) \tag{3.28}$$

Con lo cual obtenemos las velocidades en ambas caras del disco como una función de la vorticidad y de las características del filtro.

3.1.1.- FLUJO A TRAVÉS DE UN FILTRO UNIFORME

Como caso particular, vamos a resolver el caso anterior tomando un filtro uniforme (la característica del filtro será constante), lo cual nos va a permitir simplificar los resultados.

Si K es constante con z $(K = K_o)$, entonces la ecuación (3.28) puede escribirse como

$$u_u\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) = K_o u_u \frac{\partial u_u}{\partial z}$$

o integrando

$$u_1 - u_2 = K_o u_u + cte = K_o(u_u + C) \tag{3.29a}$$

Para determinar la constante de integración C, integramos la ecuación (3.29a) desde $z = 0$ hasta $z = L$, haciendo notar que en una sección $\int_0^l udz$ es constante e igual al flujo másico $\bar{u}l$, donde $\bar{u}$ es la velocidad media. Esto lleva a que $C = -\bar{u}$ y

$$u_1 - u_2 = K(u_u - \bar{u}) \tag{3.29b}$$

Alternativamente, esta ecuación podría escribirse

$$u_1 - u_2 = K(u_1 - \bar{u}) - K\sum_{n=1}^{\infty} A_{nu} \cos\frac{npz}{l} \tag{3.29c}$$

ò

$$u_1 - u_2 = K(u_1 - \bar{u}) - K(u_1 - u_2)/(2 - B) \tag{3.29d}$$

la cual puede ser de nuevo arreglada para dar la distribución de velocidades corriente abajo $u_2(z)$ en función de la distribución corriente arriba $u_1(z)$ y de las características del filtro K y B:

$$\begin{aligned} u_2 - \bar{u} &= \{1 - K(2 - B)/(2 - B + K)\}(u_1 - \bar{u}) \\ &= f(u_1 - \bar{u}) \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde

$$f = \{1 - K(2 - B)/(2 - B + K)\} \tag{3.31a}$$

es denominado el factor de multiplicación.

Los coeficientes A_{nu} y A_{nd} se hallan mediante el análisis en series de Fourier de la ecuación (3.29c), la cual puede escribirse como

$$u_1 - u_2 = \frac{K(u_1 - \bar{u})}{\{1 + K/(2 - B)\}} = K(u_1 - \bar{u}) - K\sum_{n=1}^{\infty} A_{nu} \cos\frac{npz}{l}$$

así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nu} \cos\frac{npz}{l} = (u_1 - \bar{u})\left(\frac{K}{2 - B + K}\right) \tag{3.32}$$

Dado $u_1(z)$, K y B, se determina A_{nu} a partir de esta ecuación y

$$A_{nd} = A_{nu}(1 - B)$$

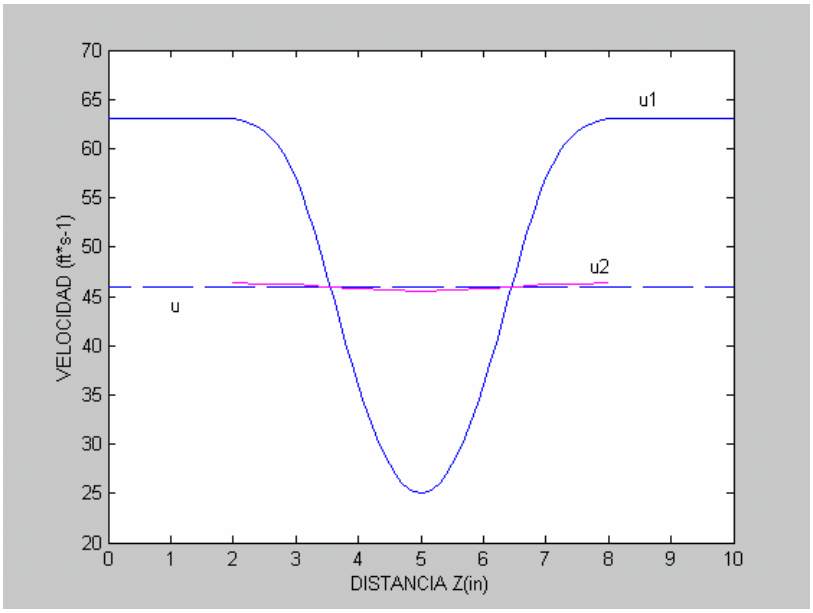
de la ecuación (1.23). La velocidad radial w' es entonces conocida de las ecuaciones (1.17) y (1.18), junto con las perturbaciones de la velocidad axial en las caras del disco. El problema está ahora totalmente resuelto.

Vamos a hacer un pequeño inciso en el factor de multiplicación f. Podríamos notar que

$$f = \{2 - B + K(B-1)\}/(2 - B + K) \qquad (3.31b)$$

f siempre se encuentra entre $(2-K)/(2+K)$ y $1/(1+K)$, ya que B se mueve entre cero y la unidad. Los filtros suavizan el perfil de velocidades, si bien el análisis indica que bajo ciertas condiciones ($B = 0$, K>2) el efecto es la inversión del perfil de velocidades .

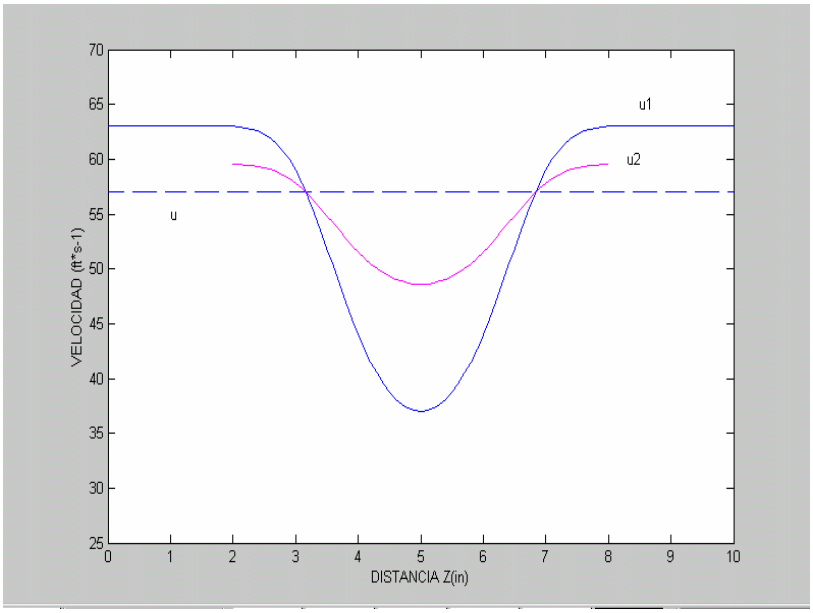
El objetivo usual de instalar un filtro es eliminar la variación de velocidad. El análisis muestra que, si $K = (2 - B)/(1 + B)$, entonces f es nulo y se produce un perfil uniforme. Para un filtro con $K = 2.49$ y $B = 0.335$ podemos observar en la figura (3.2) como se produce un perfil uniforme de la velocidad a su paso por el filtro, a partir de entrada variable.



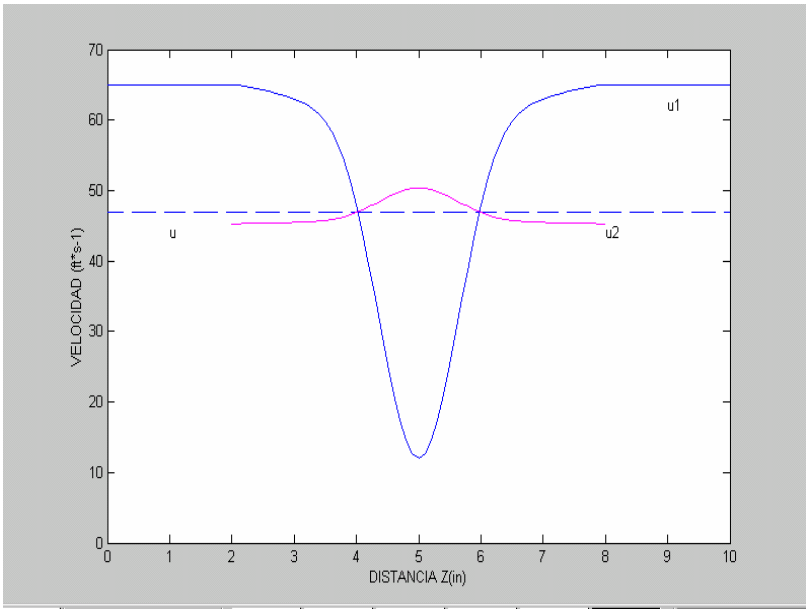
(Figura 3.2 "Suavización" del perfil de velocidad mediante un filtro)

Para mostrar como la teoría del disco actuador describe correctamente el flujo bidimensional a través de filtros, se muestran otros resultados como los mostrados en las figuras (3.3) y (3.4). En la primera, $K = 0.88$, $B = 0.29$ y $f = 0.42$, lo que produce una "amortiguación" sustancial del perfil de la velocidad. En la segunda,

$K = 3.20$, $B = 0.34$ y $f = -0.095$, lo cual produce una pequeña inversión del perfil en la velocidad axial.



(Figura 3.3 Reducción de la variación por un filtro)



(Figura 3.4 Inversión del perfil por un filtro)

3.2.- FLUJO "MALDISTRIBUIDO" A TRAVÉS DE UNA CASCADA

En este caso consideraremos un flujo a la entrada con velocidades $[u_1(y), v_1(y)]$ y con vorticidad z pasando a través de un disco actuador en $x = 0$. La "bidimensionalidad" está ahora asegurada por la asunción de que $w = 0$, $\partial / \partial z = 0$ y resolveremos el flujo en el plano (x, y). Se producirá una deflexión del flujo en la dirección tangencial (y) debido al paso por los "alabes" dentro de los márgenes del disco. Se trata pues de una perturbación bidimensional del flujo de una dimensión y media.

Desarrollando igual que en el caso anterior, nos encontramos ahora con que la ecuación de Helmholtz en la dirección z es nula debido a que la componente de la velocidad según ese eje es cero. Por tanto, teniendo en cuenta que la componente de la vorticidad en esa dirección es z

$$c\frac{\partial z}{\partial s} = u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{3.33}$$

Por tanto, en este caso es z la componente de la vorticidad que es invariable a lo largo de las líneas de corriente.

De nuevo asumiremos aquí que el flujo en ambas caras del disco, es una pequeña perturbación del flujo de "dimensión y media", con lo cual tenemos que:

$u_1 = \overline{u}$ $\qquad$ $\overline{v}_1 = \overline{u}\tan\overline{a}_1$ $\qquad$ corriente-arriba

$u_2 = \overline{u}$ $\qquad$ $\overline{v}_2 = \overline{u}\tan\overline{a}_2$ $\qquad$ corriente-abajo

Por medio de la ecuación de Helmholtz, podemos decir que la vorticidad z generada es aproximadamente

$$z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = z\left(y - x\tan\overline{a}\right) \tag{3.34}$$

donde a es el ángulo del flujo.

Se puede considerar que las perturbaciones del flujo uniforme vienen dadas por

$u_\infty' + u'$ $\qquad$ $v_\infty' + v'$

donde las primeras componentes son las perturbaciones del flujo en el "infinito" y las segundas están asociadas a un campo irrotacional

$$\nabla^2 u' = \nabla^2 v' = 0 \tag{3.35}$$

De esta forma las soluciones para estas perturbaciones del flujo en las proximidades del disco son de la forma:

$$u' = \sum_n e^{npx/L}\left(B_{nu}\, sen\left(\frac{npy}{L} + f_u\right)\right)$$

corriente-arriba (3.36)

$$u' = -\sum_n e^{-npx/L}\left(B_{nd}\, sen\left(\frac{npy}{L} + f_d\right)\right)$$

$$v' = \sum_n e^{npx/L}\left(B_{nu}\cos\left(\frac{npy}{L} + f_u\right)\right)$$

corriente-abajo (3.37)

$$v' = \sum_n e^{-npx/L}\left(B_{nd}\cos\left(\frac{npy}{L} + f_d\right)\right)$$

Hay que recordar que estas perturbaciones se anulan en zonas "suficientemente lejanas" al disco, donde teóricamente el disco ya no tiene influencia sobre el movimiento del flujo.

Una vez conocidas estas perturbaciones, podrían hallarse las soluciones completas conociendo la velocidad de entrada y aplicando como en casos anteriores las condiciones a través del flujo.

3.3.- FLUJO MERIDIONAL A TRAVÉS DE UNA CASCADA

Por último vamos a analizar el caso del flujo meridional a través de una cascada. Este caso, que se ampliará posteriormente con detalle, es de gran importancia ya que representa el flujo a través de una corona de álabes con una elevada relación radio de raíz-cabeza (con ciertas restricciones que se comentaran).

Tomaremos un flujo con componentes de la velocidad $u_1(z)$ y $v_1(z)$ que atraviesa nuestro disco actuador situado en $x = 0$, el cual provocará una deflexión del flujo en la dirección tangencial y. Como se comentó en anteriores casos, el hecho de que el flujo sea invariante en una dirección (la "y" en este caso, $\partial / \partial y = 0$) hace que lo podamos describir en un plano (x, z) y que por tanto se considere de "dos dimensiones y media" en vez de tridimensional como es en realidad.

Vamos a intentar obtener las posibles soluciones de este problema.

Para el desarrollo de las soluciones del flujo meridional "dos dimensiones y media" incompresible se usará un sistema de coordenadas cartesianas. Como se mencionó anteriormente, las propiedades del flujo no varían en la dirección tangencial (y), lo que nos permite definir una función de corriente y en el plano de estudio a partir de la ecuación de continuidad de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad u = -\frac{\partial y}{\partial z} \qquad w = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{3.38}$$

Por otro lado la vorticidad tangencial es:

$$h = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\nabla^2 y \tag{3.39}$$

Sabemos además, que para flujo incompresible existe una relación entre la presión de remanso, la vorticidad tangencial y la velocidad tangencial (las tres son constantes a lo largo de una línea de corriente)

$$\frac{1}{r}\frac{dp_0}{dy} = h + v\frac{dv}{dy} \tag{3.40}$$

Por tanto, ya tenemos las dos ecuaciones que modelan el problema, (3.39) y (3.40), de las cuales vamos a intentar hallar las soluciones exactas.

Consideraremos soluciones lineales del tipo:

$$h = -\lfloor C + C'y \rfloor \qquad \nabla^2 y = C + C'y \tag{3.41}$$

donde C y C' son constantes.

Estudiaremos, por tanto, dos tipos de soluciones. La primera con $C = 0$ y la segunda con C'=0.

Veámoslas de forma detallada.

a) Solución con $C = 0$ y $C' = -m^2$

Es decir, tenemos una ecuación del tipo:

$$\nabla^2 y = -m^2 y \tag{3.42}$$

cuyas soluciones son de la forma:

$$y = y_\infty(z) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pm kx} y_n'(z) \tag{3.43}$$

y en la cual el signo positivo corresponde aguas arriba del disco y el negativo aguas abajo.

Vemos, como en casos anteriores, como la solución se compone de dos términos, el segundo de los cuales se anula cuando su distancia al disco es elevada. En estas zonas "alejadas" tenemos por tanto que:

$$\frac{d^2 y_\infty}{dz^2} + m^2 y_\infty = 0 \tag{3.44}$$

y

$$y_\infty = A_\infty sen mz + B_\infty \cos mz \tag{3.45}$$

Ahora bien, si la velocidad principal es conocida $(\bar{u})$, entonces

$$y_\infty(0) - y_\infty(l) = \bar{u} l$$

con lo cual se llega a la siguiente solución:

$$y_\infty = B_\infty \left\{ \cos mz + \frac{(1 - \cos ml) sen mz}{sen ml} \right\} - \bar{u} l \frac{sen mz}{sen ml} \tag{3.46}$$

donde B es la única constante desconocida. Hemos obtenido el primer término de la solución.

Para el segundo término, tenemos que como

$$\nabla^2 y = -m^2 y \qquad \nabla^2 y_\infty = -m^2 y_\infty$$

entonces

$$\nabla^2 (y - y_\infty) = -m^2 (y - y_\infty) \tag{3.47}$$

así que la solución será:

$$y_n'(z) = (A_n sen\, l_n z + B_n \cos l_n z) \tag{3.48}$$

con

$$l_n = \left(k_n^2 + m^2\right)^{1/2} \tag{3.49}$$

Como además, la función de corriente permanece constante en el "infinito", sabemos que $y_n'(0) = y_n'(l) = 0$ y se llega a la siguiente relación:

$$k_n = \left\{\left(n^2 p^2 / l^2\right) - m^2\right\}^{1/2} \tag{3.50}$$

Con lo cual tenemos completa la solución del primer tipo que estábamos examinando. Esta queda de la forma:

$$y = B_\infty \left\{\cos mz + \frac{(1-\cos ml) senmz}{senml}\right\} - \bar{u} l \frac{senmz}{senml} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen \frac{npz}{l} e^{\pm k_n x} \tag{3.51}$$

donde por inspección m debe ser siempre menor que p / l.

Una vez encontrada la solución, vamos a intentar unir las soluciones para las dos regiones separadas por el disco actuador situado en $x = 0$. Supondremos conocida la velocidad del flujo $\bar{u}$, con lo cual los dos únicos coeficientes que no conocemos son A_{nu} y A_{nd}.

La ecuación del momento radial a través del disco en ausencia de fuerzas viene dada por:

$$ru_u w_u = ru_d w_d \tag{3.52}$$

y la ecuación de continuidad por:

$$ru_u = ru_d \tag{3.53}$$

Por tanto, de ambas ecuaciones, $w_u = w_d$ y

$$k_{nu} A_{nu} = -k_{nd} A_{nd} = k_{bn} \tag{3.54}$$

La ecuación de continuidad (3.53) da

$$u_1(z) + u_u' = u_2(z) + u_d' \tag{3.55}$$

con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} u_1(z) - u_2(z) &= (A_2 \cos m_d z - B_2 sen m_d z) m_d - (A_1 \cos m_u z - B_1 sen m_u z) m_u \\ &= u_d' - u_u' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{np}{l} k_{bn} \left(\frac{1}{k_{nd}} + \frac{1}{k_{nu}} \right) \cos \frac{npz}{l} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Por tanto tenemos ya relacionadas las velocidades axiales en ambas caras del disco. El único factor desconocido es k_{bn} que se obtendría mediante un análisis de Fourier de la ecuación (3.56).

Para terminar de completar la solución necesitamos obtener las velocidades tangenciales, las cuales se obtendrían de la integración de la ecuación (3.40) resultando

$$v^2 = \frac{2p_0}{r} + m^2 y^2 + cte \tag{3.57}$$

en la cual m y $p_0(y)$ deben ser conocidas.

Con esto tenemos definida completamente la solución y relacionada en las dos caras del disco.

Es de interés notar que para flujos "cortantes" pequeños ($m << p/l$) tenemos que $k_{nu} \approx k_{nd} \approx np/l$ y $A_{nu} \approx -A_{nd} = A_n$. Por tanto

$$u_1 - u_2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2pn}{l} A_n \cos \frac{npz}{l} \tag{3.58}$$

y se puede aproximar la solución por

$$u_u \approx u_1 + (u_2 - u_1)/2 = (u_1 + u_2)/2$$
$$u_d \approx u_2 + (u_1 - u_2)/2 = (u_1 + u_2)/2 \qquad (3.59)$$

Observamos como la velocidad en el disco es la media aritmética de las velocidades en los "extremos". Aunque sea una aproximación es un resultado a tener en cuenta.

b) Solución con $C' = 0$ y $C = -h$

Con estas constantes adoptadas, la ecuación (3.40) queda ahora

$$\frac{1}{r}\frac{dp_0}{dy} - \nu\frac{dv}{dy} = h = -C \qquad (3.60)$$

Entonces, podemos hacer

$$\nu\frac{dv}{dy} = a_1 \qquad \frac{v^2}{2} = a_1 y + a_3 \qquad (3.61)$$

$$\frac{1}{r}\frac{dp_0}{dy} = a_2 \qquad \frac{p_0}{r} = a_2 y + a_4 \qquad (3.62)$$

$$h = (a_2 - a_1) = cte = -C \qquad (3.63)$$

La solución para el término correspondiente a los "extremos" se puede obtener de

$$\frac{d^2 y_\infty}{dz^2} = -h_\infty = (a_1 - a_2) = C$$

es decir

$$y_\infty = (a_1 - a_2) z^2/2 + a_5 z + a_6 \qquad (3.64)$$

Aplicando las condiciones de contorno, $y_\infty(0) - y_\infty(l) = \bar{u} l$, obtenemos

$$(a_1 - a_2) l^2/2 + a_5 l = -\bar{u} l$$

y

$$y_{\infty} = (a_1 - a_2)z^2/2 + [(a_2 - a_1)l/2 - \overline{u}]z + a_6 \tag{3.65}$$

El perfil de velocidades vendrá dado por:

$$u_{\infty} = -\frac{dy_{\infty}}{dz} = \overline{u} + (a_1 - a_2)(z - l/2) \tag{3.66}$$

que como puede observarse es lineal.

Nos falta ahora para completar la solución hallar el segundo término, que como en la primera solución, será de la forma

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pm kx} y_n'(z) \tag{3.67}$$

con

$$y_n' = A_n sen\frac{npz}{l} \qquad \text{y} \qquad k_n = \frac{np}{l} \tag{3.68}$$

Definida la solución completa, vamos a intentar relacionarla entre las dos regiones del disco. Como

$$A_{nu} = -A_{nd} = A_n$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 2\sum A_n \left(\frac{np}{l}\right)\cos\frac{npz}{l} \\ &= [(a_1 - a_2)_u - (a_1 - a_2)_d](z - l/2) \\ &= (C_u - C_d)(z - l/2) \end{aligned} \tag{3.69}$$

con lo cual tenemos relacionadas las velocidades axiales. El coeficiente A_n se obtiene del análisis de Fourier.

Con esta solución, también se cumple que la velocidad axial en el disco es exactamente la media de las velocidades axiales del "infinito" ya que la vorticidad es constante en ambas caras del disco.

Por lo tanto se han alcanzado dos soluciones diferentes para el caso de flujo meridional a través de una cascada. Hay que notar el hecho de que en ambas, la solución se compone de dos términos, uno correspondiente a las zonas "alejadas" del

disco y otro a las "inmediaciones" del mismo. Ambos términos, hay que recordar, son las perturbaciones de un flujo uniforme que atraviesa el disco. Este hecho será muy importante en el análisis más detallado que se hará posteriormente.