CAPÍTULO IV

FLUJO MERIDIONAL EN TURBOMÁQUINAS AXIALES

En el apartado anterior hemos visto como se analizaba el flujo meridional en una turbomáquina. Para ello se hicieron una serie de suposiciones, bajo las cuales lo definíamos como un problema de “dos dimensiones y media”.

Ahora bien, el flujo que evoluciona a través de una turbomáquina es tridimensional. Para salvar este escollo lo consideraremos como la superposición de dos flujos: por un lado un flujo meridional axilsimétrico y por otro el flujo bidimensional resultante de la intersección de líneas de corriente “cilíndricas” con los alabes. Con esto y asumiendo como válida esta simplificación dentro del objetivo de este proyecto realizamos el estudio del flujo meridional desacoplado.

Para este flujo consideraremos que las líneas de corriente no sufren variaciones en el espaciado entre álabes, permaneciendo invariables. Sin embargo hay que tener en cuenta que éstas sufren variaciones a su paso por los álabes por lo cual la velocidad meridional sufrirá variaciones de la raíz a la cabeza del álabe y por tanto los triángulos de velocidades también variarán.

Analizaremos el flujo a partir de dos métodos distintos como son el equilibrio radial simplificado y la teoría del disco actuador, tratándose tanto el caso de flujo comprensible como incompresible.

4.1.- EQUILIBRIO RADIAL

El estado de nuestro flujo en movimiento lo podemos expresar en función de su velocidad y de sus propiedades termodinámicas. Las ecuaciones básicas para obtener la ecuación de equilibrio son las siguientes:

a) Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \nabla \cdot (r\vec{c}) = 0 \tag{4.1}$$

b) Ecuación de Navier-Stokes para un fluido con viscosidad constante

$$\frac{D\vec{c}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{r}\nabla p + \frac{u}{r}\left[\nabla^2 \vec{c} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{c})\right] \tag{4.2}$$

donde F es la fuerza por unidad de masa que ejerce el álabe sobre el fluido y u es la energía interna del fluido.

c) Ecuación de la energía

$$\frac{Du}{Dt} + p\frac{Dr^{-1}}{Dt} = \dot{Q} + \frac{f}{r} \tag{4.3}$$

donde $\dot{Q}$ es el calor cedido al fluido por unidad de masa y tiempo y f es la disipación viscosa de energía.

d) Ecuación de la entalpía de remanso

$$h_0 = h + \frac{c^2}{2} = u + \frac{p}{r} + \frac{c^2}{2} \tag{4.4}$$

e) Ecuación de la entropía

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{Du}{Dt} + p\frac{Dr^{-1}}{Dt} \tag{4.5}$$

f) Ecuación de estado de un gas perfecto

$$\frac{p}{r} = RT \tag{4.6}$$

Combinando las seis ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de equilibrio del fluido:

$$\nabla h_0 = \vec{F} + T\nabla s + \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c}) - \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + n\left|\nabla^2 \vec{c} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{c})\right| \tag{4.7}$$

donde el gradiente de la entalpía de remanso viene dado en función de la fuerza del álabe por unidad de masa, los esfuerzos viscosos, la velocidad, el gradiente de entropía, etc.

Ahora bien, en la zona entre coronas, que es donde desarrollamos nuestro estudio, la fuerza ejercida por el álabe sobre el fluido es nula, con lo cual el término correspondiente se anula. Si consideramos además que el flujo es estacionario, es decir, que las propiedades del flujo en cualquier punto son invariables en el tiempo, el término $\partial c / \partial t$ también se anula.

Por tanto, la ecuación (4.7) queda ahora de la siguiente forma:

$$\nabla h_0 = T\nabla s + \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c}) + n\left|\nabla^2 \vec{c} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \vec{c})\right| \tag{4.8}$$

Si adicionalmente, consideramos que en la zona entre las coronas de álabes los efectos viscosos son pequeños, podemos considerar en una primera aproximación el flujo como no viscoso. Esto nos lleva a eliminar el último término de la ecuación (4.8), con lo cual obtenemos:

$$\nabla h_0 = T\nabla s + \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c}) \tag{4.9}$$

Esta ecuación nos define las variaciones de la entalpía de remanso entre líneas de corriente en una determinada sección.

Ahora bien, desarrollando la ecuación (4.9) en coordenadas cilíndricas y quedándonos con las variaciones radiales, que son las que se producen en nuestro plano de estudio, se obtiene:

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} = T\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{c_q}{r}\frac{\partial (r c_q)}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} - \frac{c_q}{r}\frac{\partial c_r}{\partial q} - c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} \tag{4.10}$$

Si además tenemos en cuenta la consideración mencionada anteriormente de tomar el flujo axilsimétrico, las variaciones de las propiedades con respecto a la coordenada angular q se suponen nulas $(\partial / \partial q = 0)$. De esta forma la ecuación (4.10) queda reducida a:

$$\frac{\partial h_0}{\partial r} - T\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{c_q}{r}\frac{\partial (rc_q)}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} - c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} \tag{4.11}$$

Esta ecuación es la ecuación del *equilibrio radial para flujo compresible* para nuestro flujo meridional axilsimétrico objeto de estudio. Con ella, obtenemos las distribuciones radiales de la velocidad y de las propiedades del fluido en el espacio entre coronas.

De la misma forma podemos obtener la ecuación del equilibrio radial para flujo incompresible. Teniendo en cuenta la siguiente relación entre la temperatura, la entropía y la entalpía:

$$Tds = dh - \frac{1}{r}dp = dh_0 - \frac{1}{r}dp_0 \tag{4.12}$$

y dividiendo por (dr), podemos expresar la ecuación (4.11) como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{c_q}{r}\frac{\partial (rc_q)}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} - c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} \tag{4.13}$$

que es la ecuación del *equilibrio radial para flujo incompresible*.

4.2.- EQUILIBRIO RADIAL SIMPLIFICADO

Como acabamos de ver en el apartado anterior, las líneas de corriente sufren una variación radial a su paso por los alabes como consecuencia del gradiente radial de la presión de remanso en el caso incompresible y de la entropía y entalpía de remanso en el caso compresible. Vemos además como se produce en las mismas una variación axial de la velocidad radial. Ahora bien, si nos situamos en una zona alejada de los alabes podemos además hacer la hipótesis de que la componente radial de la velocidad y el gradiente de la misma en la dirección axial son despreciables. Bajo esta hipótesis se desarrolla el "equilibrio radial simplificado".

Con esta última hipótesis, la ecuación (4.11) para flujo compresible queda reducida a:

$$\frac{dh_0}{dr} - T\frac{ds}{dr} = c_x \frac{dc_x}{dr} + \frac{c_q}{r}\frac{d(rc_q)}{dr} \tag{4.14}$$

que es la ecuación del *equilibrio radial simplificado para flujo compresible*.

De igual forma, para flujo incompresible, eliminando de la ecuación (4.13) el termino de la velocidad radial $(-c_x \partial c_r / \partial x)$, llegamos a:

$$\frac{1}{r}\frac{dp_o}{dr} = c_x \frac{dc_x}{dr} + \frac{c_q}{r}\frac{d(rc_q)}{dr} \tag{4.15}$$

que es la ecuación del *equilibrio radial simplificado para flujo incompresible*.

Estas dos ecuaciones, (4.14) y (4.15), nos definen por tanto el perfil radial de la velocidad axial en la zona entre coronas en función de los gradientes de la velocidad tangencial y de las propiedades del fluido.

Para resolver las ecuaciones del equilibrio radial simplificado se necesita una condición de contorno denominada “ley torsional”. Normalmente esta condición puede venir dada de dos formas diferentes, con lo cual nos encontraremos con dos tipos de problemas como son:

(1) Problema inverso o de diseño: se conoce la distribución de la presión de remanso y de la velocidad tangencial con el radio como parte de las especificaciones de diseño (en el caso compresible se conocerían las distribuciones de la entalpía y de la entropía). Al resolver la ecuación del equilibrio radial obtendremos una estimación de la velocidad axial y por lo tanto de los triángulos de velocidades.

(2) Problema directo o de análisis: en este caso nos encontramos con una turbomáquina existente de geometría de alabes conocida y queremos predecir cual será el comportamiento dinámico del fluido. Se supone por tanto conocida la distribución radial del ángulo del flujo.

Hay que hacer notar que con la solución del equilibrio radial y del equilibrio radial simplificado se esta 'asumiendo' que las variaciones que sufren las líneas de corriente se producen de forma brusca y exclusivamente en el paso del fluido a través de los alabes permaneciendo después constante. Es decir, todo el cambio se produce en un plano, normalmente la cara posterior del alabe. Esto no sucede así en la realidad, efecto que se corregirá parcialmente mas tarde al aplicar la teoría del disco actuador.

4.2.1- MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Vamos a resolver ahora los dos tipos de problemas que nos podemos encontrar al resolver mediante la teoría del equilibrio radial simplificado. Se realizara el análisis para flujo incompresible, siendo el mismo muy similar para el caso de flujo compresible.

4.2.1.1- PROBLEMA INVERSO O DE DISEÑO

En este caso, y como se comentó anteriormente, se supone conocida la distribución de la velocidad tangencial de salida con el radio (es decir la ley torsional que sigue el fluido). Tendremos por tanto una relación del tipo:

$$c_q = f(r) \tag{4.16}$$

Se resolverá para el caso general de un rotor, siendo el estator un caso particular del mismo. Asimismo se supondrá una velocidad de entrada general (pudiendo por tanto entrar con componente tangencial).

La ecuación de Euler para el caso de un ventilador puede escribirse como:

$$\frac{1}{r}(p_{02} - p_{01}) = r\Omega(c_{q2} - c_{q1}) \tag{4.17}$$

la cual, si tomamos constante la presión de remanso a la entrada, podemos derivar para obtener:

$$\frac{1}{r}\frac{dp_{02}}{dr} = \Omega \frac{d\left(rc_{q2} - rc_{q1}\right)}{dr} \tag{4.18}$$

Ahora bien, introduciendo esta ecuación en la ecuación del equilibrio radial simplificado para flujo incompresible (4.15), se obtiene

$$c_{x2}\frac{dc_{x2}}{dr} = \Omega \frac{d\left(rc_{q2} - rc_{q1}\right)}{dr} - \frac{c_{q2}}{r}\frac{d}{dr}\left(rc_{q2}\right) \tag{4.19}$$

Reordenando esta ecuación:

$$\frac{dc_{x2}}{dr} = \frac{1}{c_{x2}}\left\{ \Omega \frac{d\left(rc_{q2}\right)}{dr} - \Omega \frac{d\left(rc_{q1}\right)}{dr} - \frac{c_{q2}}{r}\frac{d}{dr}\left(rc_{q2}\right) \right\} \tag{4.20}$$

cuya resolución nos dará la distribución radial de la velocidad axial.

Al conocer la distribución radial de la velocidad tangencial, podemos resolver esta ecuación de forma analítica de la siguiente forma. Primero, a partir de la ecuación (4.20) podemos definir las funciones:

$$f_1(r) = \Omega \frac{d\left(rc_{q2}\right)}{dr} \tag{4.21a}$$

$$f_2(r) = -\Omega \frac{d\left(rc_{q1}\right)}{dr} \tag{4.21b}$$

$$f_3(r) = -\frac{c_{q2}}{r}\frac{d\left(rc_{q2}\right)}{dr} \tag{4.21c}$$

Como solución de la ecuación (4.19) se puede adoptar una solución genérica de la forma:

$$c_{x2} = L\left(r, c_{x2}\right) + K_1 \tag{4.22}$$

donde

$$L\left(r_j, c_{x2}\right) = \int_{rh}^{rj} \frac{1}{c_{x2}}\left\{f_1\left(r_j\right) + f_2\left(r_j\right) + f_3\left(r_j\right)\right\}dr$$

$$\approx \Delta r \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{c_{x2}}\left\{f_1\left(r_j\right) + f_2\left(r_j\right) + f_3\left(r_j\right)\right\} \tag{4.23}$$

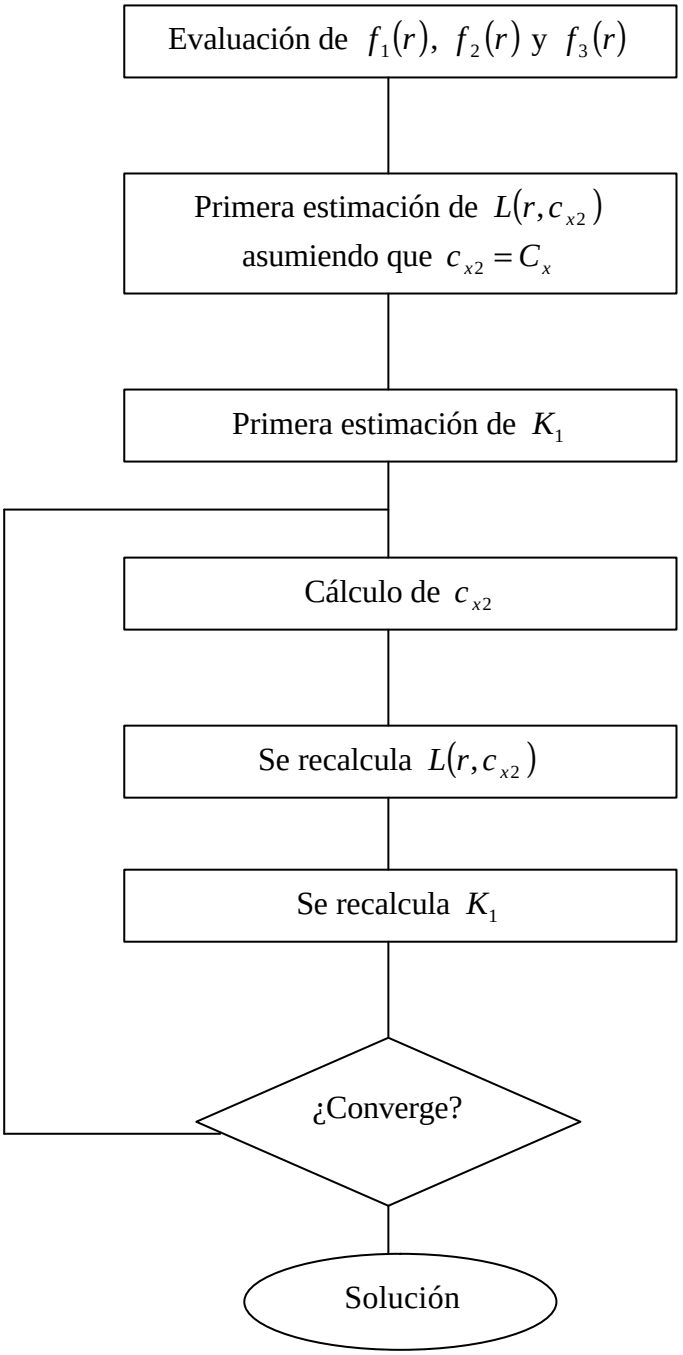
con $\Delta r = \left(r_t - r_h\right)/m$ y m las particiones del intervalo.

La constante de integración se puede obtener a partir de la ecuación de continuidad:

$$K_1 = C_x - \frac{2}{\left(r_t^2 - r_h^2\right)} \int_{rh}^{rt} rL\left(r, c_{x2}\right) dr$$

$$\approx C_x - \frac{2\Delta r}{\left(r_t^2 - r_h^2\right)} \sum_{i=1}^{m} r_j L\left(r_i, c_{x2}\right) \qquad (4.24)$$

Ahora bien, será necesario un proceso iterativo para resolver estas expresiones. En el siguiente diagrama de flujo se muestra el proceso iterativo requerido para la resolución.


Evaluación de $f_1(r)$, $f_2(r)$ y $f_3(r)$
Primera estimación de $L(r, c_{x2})$ asumiendo que $c_{x2} = C_x$
Primera estimación de K_1
Cálculo de c_{x2}
Se recalcula $L(r, c_{x2})$
Se recalcula K_1
¿Converge?
Solución

Para el caso de una turbina el método de resolución sería exactamente igual, con la única salvedad que ahora la ecuación (4.17) adopta la forma

$$\frac{1}{r}\left(p_{02} - p_{01}\right) = r\Omega\left(c_{q2} + c_{q1}\right)$$

con lo cual la ecuación (4.21b) se modificaría para quedar de la forma:

$$f_2(r) = \Omega\frac{d\left(rc_{q1}\right)}{dr}$$

4.2.1.2- PROBLEMA DIRECTO O DE ANÁLISIS

En este tipo de problemas la geometría de los alabes y por tanto la deflexión que sufre el fluido están especificadas y de nuevo queremos hallar el perfil de la velocidad axial resultante.

No se conoce por tanto la ley torsional $c_q = f(r)$, aunque se conocerá la distribución radial de los ángulos a la salida.

Al igual que en el apartado anterior se mostrará el método de resolución para un rotor de un ventilador, considerando el flujo incompresible.

El método de resolución es el mismo, con la salvedad que ahora la velocidad tangencial de salida es desconocida y en cambio se conoce la distribución radial de los ángulos. Por lo tanto, la ecuación (4.19) hay que ponerla ahora en función de b_2 en lugar de c_{q2}.

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones de los triángulos de velocidades:

$$\begin{aligned} c_{q2} &= r\Omega - w_{q2} \\ w_{q2} &= c_{x2}\tan b_2 \end{aligned} \qquad (4.25)$$

la ecuación (4.19) queda ahora de la siguiente forma:

$$\left(1+\tan^2 b_2\right)\frac{dc_{x2}}{dr} + \left(\frac{\tan b_2}{r}\frac{d}{dr}\left(r\tan b_2\right)\right)c_{x2} = 2\Omega\tan b_2 - \frac{\Omega}{c_{x2}}\frac{d(rc_{q1})}{dr} \qquad (4.26)$$

cuya resolución nos daría la distribución $c_{x2} = f(r)$ buscada.

Ahora, las funciones f_1, f_2 y f_3 adoptan la siguiente forma:

$$f_1(r)=\left(\frac{\tan b_2}{r}\frac{d}{dr}(r\tan b_2)\right)\frac{1}{1+\tan^2 b_2} \tag{4.27a}$$

$$f_2(r)=\frac{2\Omega\tan b_2}{1+\tan^2 b_2} \tag{4.27b}$$

$$f_3(r)=\frac{\Omega}{1+\tan^2 b_2}\frac{d(rc_{q1})}{dr} \tag{4.27c}$$

Adoptando de nuevo una solución de la forma:

$$c_{x2}=L(r,c_{x2})+K_1$$

donde ahora:

$$L(r_j,c_{x2})=\int_{rh}^{rj}\left\{-c_{x2}f_1(r_j)+f_2(r_j)-\frac{1}{c_{x2}}f_3(r_j)\right\}dr$$

$$\approx \Delta r\sum_{i=1}^{j}\left\{-c_{x2}f_1(r_j)+f_2(r_j)-\frac{1}{c_{x2}}f_3(r_j)\right\}$$

y

$$K_1=C_x-\frac{2}{(r_t^2-r_h^2)}\int_{rh}^{rt}rL(r,c_{x2})dr$$

$$\approx C_x-\frac{2\Delta r}{(r_t^2-r_h^2)}\sum_{i=1}^{m}r_jL(r_i,c_{x2})$$

Nuevamente la complejidad de las ecuaciones hace necesario un proceso iterativo para la resolución de las mismas. El diagrama de flujo del proceso iterativo sería similar al visto con anterioridad, usando las nuevas funciones obtenidas.

4.3.- TEORÍA DEL DISCO ACTUADOR

La teoría del disco actuador como hemos comentado anteriormente se trata de un modelo matemático constituido por un plano discontinuo (llamado disco actuador) en el cual supondremos que se produce la deflexión del flujo, y que esta perturbación tiene lugar además de forma instantánea.

Las perturbaciones meridionales, las cuales producen la desviación de las líneas de corriente son causadas por el desprendimiento vórtices en la parte posterior de los álabes. En realidad, este desprendimiento tiene lugar desde la parte anterior hasta la posterior debido a la variación de los álabes con el radio. Por simplicidad, sin embargo, se asumirá que tienen lugar en un plano, el cual será el “disco actuador”.

A diferencia del equilibrio radial donde las variaciones de las líneas de corriente se producían bruscamente y en un plano (en la cara posterior de los álabes), permaneciendo después constante, la teoría del disco actuador asume que las perturbaciones afectan de forma gradual. Esto conlleva que las variaciones de las líneas de corriente se producen de una forma mas ‘escalonada’ variando progresivamente desde la parte anterior de los alabes a la posterior. Es decir, se puede considerar como si al efecto brusco del equilibrio radial se le añadiese una perturbación adicional que suavizara el salto creado en las líneas de corriente.

Se desarrollará inicialmente el análisis para flujo incompresible, desarrollándolo posteriormente para flujo compresible.

4.3.1.- TEORÍA DEL DISCO ACTUADOR FLUJO INCOMPRESIBLE

Para nuestro flujo meridional axilsimétrico, desarrollaremos en primer lugar las ecuaciones generales de movimiento, para posteriormente deducir las ecuaciones que modelan el sistema así un desarrollo simplificado de la misma para su aplicación.

4.3.1.1.- ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO

En orden a obtener las ecuaciones que gobiernan el flujo meridional de una turbomáquina debemos primero determinar las ecuaciones de movimiento del flujo axilsimétrico. Estas comprenden:

a) la ecuación de continuidad, la cual involucra el principio físico de la conservación de la masa

b) las ecuaciones de cantidad de movimiento, las cuales involucran la segunda ley de Newton aplicada a un fluido

Vamos a hacer un pequeño análisis de las mismas.

- Ecuación de continuidad

Aplicando el principio de conservación de la masa a un volumen de control $dV = dx * dr * rdq$, el flujo másico neto que deja el volumen de control debe ser nulo. Para flujo axilsimétrico, todas las derivadas en la dirección q deben ser cero. El flujo másico a través de las caras, agrupadas por parejas opuestas, se puede obtener como:

$$\left(rc_x + \frac{\partial rc_x}{\partial x} dx - rc_x \right) rdqdr$$

$$\left(rc_r + \frac{\partial rc_r}{\partial r} dr \right)(r + dr)dqdx - rc_r rdqdx = 0 \qquad (4.28)$$

Despreciando los términos de segundo orden, la ecuación se reduce a la ecuación de continuidad para flujo compresible axilsimétrico:

$$\frac{\partial rc_x}{\partial x} + \frac{\partial rc_r}{\partial r} + \frac{rc_r}{r} = 0 \qquad (4.29)$$

Para flujo incompresible, la densidad es constante, resultando de la forma:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} = 0 \tag{4.30}$$

Alternativamente la ecuación de continuidad podría expresarse en forma vectorial:

$$\begin{aligned} &div\, r\hat{q} = 0 && \text{flujo compresible} \\ &div\hat{q} = 0 && \text{flujo incompresible} \end{aligned} \tag{4.31}$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

Si aplicamos la segunda ley de Newton a un elemento de volumen de control, para una dirección especificada, tenemos que las fuerzas en un volumen de control son iguales al cambio de momento del fluido sufrido al atravesar el mismo.

De este modo, para la dirección x tenemos:

(1) Fuerzas aplicadas en la dirección x. Estas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} &= F_x\, rdxdr(rdq) + pdr(rdq) - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dr(rdq) \\ &= rdxdr(rdq) \left(F_x - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde F_x está definida como la distribución de fuerzas por unidad de masa del fluido en el punto (x, r, q). La distribución de fuerzas puede ser generada externamente mediante la aplicación de campos potenciales a través de campos electroestáticos, electromagnéticos o gravitatorios. En turbomáquinas, las fuerzas de tales fuentes son raramente significativas y las fuerzas reales tales como la de

sustentación y la de arrastre son aplicadas en la superficie del álabe y no a través del fluido.

(2) Flujo de momento en la dirección x a través de ad y bc (caras paralelas al plano del disco). El flujo de momento a través de las caras del elemento ad y bc, las cuales son normales a la dirección x, están dadas por:

$$dM_{xx} = \left(\left(rc_x + \frac{\partial rc_x}{\partial x} dx \right) \left(c_x + \frac{\partial c_x}{\partial x} dx \right) - rc_x c_x \right) dr(rdq)$$

$$= \left(c_x \frac{\partial rc_x}{\partial x} + rc_x \frac{\partial c_x}{\partial x} \right) dxdr(rdq) \qquad (4.33)$$

donde se han despreciado los términos de segundo orden.

(3) Flujo de momento en la dirección x a través de ab y cd (caras normales al plano del disco). El fluido fluye a través de las caras ab y cd que son paralelas a la dirección x. Esto es debido a la componente radial de la velocidad c_r. El flujo de momento puede expresarse a través de :

$$dM_{xr} = \left(rc_r + \frac{\partial rc_c}{dr} dr \right) \left(c_x + \frac{\partial c_x}{dr} dr \right) (r + dr) dqdx - rc_r c_x rdqdx$$

$$= \left(c_r \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{c_x}{r} \frac{\partial rc_r}{\partial r} + \frac{c_r c_x}{r} \right) rrdqdxdr \qquad (4.34)$$

donde de nuevo se han despreciado los términos de segundo orden.

Combinando las ecuaciones desde la (4.32) hasta la (4.34) la ecuación del momento queda

$$F_x - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{c_x}{r} \left\{ \frac{\partial rc_x}{\partial x} + \frac{\partial rc_r}{\partial r} + \frac{rc_r}{r} \right\} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_r \frac{\partial c_x}{\partial r}$$

donde el término entre paréntesis es nulo por la ecuación de continuidad(4.29).

Aplicando el mismo proceso en las direcciones r y q se pueden obtener las ecuaciones de momento para flujo axilsimétrico:

$$\begin{aligned} F_x - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x} &= c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_r \frac{\partial c_x}{\partial r} \\ F_r - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} &= c_x \frac{\partial c_r}{\partial x} + c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - \frac{c_q^2}{r} \\ F_q &= c_x \frac{\partial c_q}{\partial x} + c_r \frac{\partial c_q}{\partial r} + \frac{c_q c_r}{r} \end{aligned} \qquad (4.35)$$

Que junto con la ecuación de continuidad (4.29) o (4.30) forman las ecuaciones de movimiento para flujos axilsimétricos con efecto despreciable de las fricciones.

Llegados a este punto, resulta interesante intentar expresar las ecuaciones de momento en función de la presión de remanso. Para ello, introducimos la siguiente definición de la presión de remanso:

$$\frac{p_o}{r} = \frac{p}{r} + \frac{c_x^2}{2} + \frac{c_r^2}{2} + \frac{c_q^2}{2}$$

Derivando parcialmente respecto a x y r, para flujo incompresible se tienen las siguientes expresiones

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial x} - c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} - c_r \frac{\partial c_r}{\partial x} - c_q \frac{\partial c_q}{\partial x}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} - c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} - c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - c_q \frac{\partial c_q}{\partial r}$$

Así que las ecuaciones (4.35) se transforman en :

$$F_x - \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial x} = c_r\left(\frac{\partial c_x}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial x}\right) - c_q \frac{\partial c_q}{\partial x}$$

$$F_r - \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} = -c_x\left(\frac{\partial c_x}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial x}\right) - \frac{c_q}{r}\frac{\partial r c_q}{\partial r} \qquad (4.36)$$

$$F_q = c_q\frac{\partial c_q}{\partial x} + \frac{c_r}{r}\frac{\partial r c_q}{\partial r}$$

Asimismo, se puede expresar las ecuaciones de momento en función de la vorticidad. Ésta nos relaciona las variaciones de la velocidad en las tres direcciones. Expresándola en coordenadas cilíndricas, las tres componentes de la vorticidad, vienen dadas por:

$$w_x = \frac{1}{r}\frac{\partial c_q r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial c_r}{\partial q}$$

$$w_r = \frac{1}{r}\frac{\partial c_x}{\partial q} - \frac{\partial c_q}{\partial x} \qquad (4.37)$$

$$w_q = \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r}$$

Para flujos axilsimétricos, las variaciones respecto a la componente q son nulas, por lo que las ecuaciones anteriores quedan reducidas a:

$$w_x = \frac{1}{r}\frac{\partial c_q r}{\partial r}$$

$$w_r = -\frac{\partial c_q}{\partial x} \qquad (4.38)$$

$$w_q = \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r}$$

Y las ecuaciones de momento (4.36) se simplifican a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial x} - F_x = c_r w_q - c_q w_r$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} - F_r = c_q w_x - c_x w_q \qquad (4.39)$$

$$-F_q = c_x w_r - c_r w_x$$

En notación vectorial se pueden escribir como:

$$\frac{1}{r} grad p_o - \hat{F} = \hat{q} \times \hat{w} \tag{4.40}$$

Observando las ecuaciones de cantidad de movimiento vemos como la existencia de gradientes de presión de remanso o de una distribución de fuerzas son asociadas con la distribución de la vorticidad $\hat{w}$ y con un vector cuya dirección es normal a la velocidad local $\hat{q}$. En flujo axilsimétrico, el gradiente de presiones permanece en el plano meridional (x, r). Por tanto, la vorticidad tangencial w_q, la cual es normal a la velocidad meridional c_s, jugará el papel mas importante en el control del flujo meridional.

Los álabes de las turbomáquinas son diseñados para controlar y manipular la velocidad tangencial c_q y para producir cambios en la presión de remanso y en la entalpía de remanso con el fin de producir un trabajo en el eje. Por tanto, los álabes son esencialmente los generadores de vorticidad.

Antes de continuar con nuestro análisis, vamos a fijarnos en la ecuación del momento radial y a observar su coincidencia con los resultados obtenidos mediante el equilibrio radial simplificado.

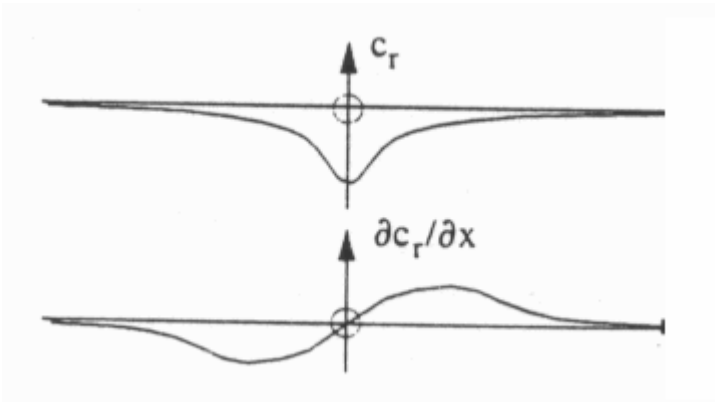
La ecuación de momento radial (4.36b), en ausencia de fuerzas de masa, puede rescribirse

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} = c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{c_q}{r}\frac{\partial r c_q}{\partial r} - c_x \frac{\partial c_r}{\partial x}$$

Por otro lado, la ecuación de equilibrio radial simplificado (4.15) venía dada por

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} = c_x \frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{c_q}{r}\frac{\partial r c_q}{\partial r}$$

Vemos que las ecuaciones son idénticas exceptuando el ultimo termino, $c_x(\partial c_r / \partial x)$. Hay que recordar, que en el análisis del equilibrio radial, la velocidad radial c_r se asumía nula.



(Figura 4.1 Variación axial de cr y dcr/dx)

La figura 4.1, muestra el comportamiento de c_r y $\partial c_r / \partial x$ en las cercanías de una corona de álabes aislados. Los cambios radiales de las líneas de corriente necesarios para acomodar los perfiles de la velocidad axial c_x a los del equilibrio radial $c_{x\infty}$, implican un decaimiento de c_r simétricamente sobre $x = 0$. Tomando la diferencial de esta curva, (fig. 4.1), vemos que $\partial c_r / \partial x$ tiende a cero cuando $x \to \infty$, como se esperaba para el equilibrio radial cuando hallamos la solución en zonas muy alejadas.

Es de interés notar que $\partial c_r / \partial x$ se anulará también en $x = 0$, por ejemplo en el plano equivalente de un disco actuador. Por ello, en este plano, la ecuación de movimiento se reduce a la ecuación del equilibrio radial simplificado aun cuando la componente radial de la velocidad c_r no sea nula.

Hay que resaltar, sin embargo, que en las regiones justamente aguas arriba y abajo de la corona de álabes, es donde se producen las perturbaciones máximas en el plano meridional. La teoría del disco actuador prevé una buena estimación de esas perturbaciones meridionales y de las interferencias entre múltiples etapas en turbomáquinas cilíndricas. Aquí observamos que esto es debido a las redistribuciones radiales del flujo másico causado por las velocidades radiales. Estos efectos son causados por la vorticidad tangencial w_q producida por la corona de alabes, la cual

es el eslabón entre las componentes axiales y radiales de la velocidad a través de su definición (ec. 4.37c). Recordando:

$$w_q = \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r}$$

4.3.1.2.- FUNCIÓN DE CORRIENTE DE STOKES

Una vez introducidas las ecuaciones de movimiento vamos a desarrollar primero la función de Stokes, la cual nos va a permitir obtener las ecuaciones que modelan el flujo para nuestro análisis meridional. Para conseguir esto, la ecuación de continuidad puede expresarse de la siguiente forma

$$\frac{\partial(\rho r c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho r c_r)}{\partial r} = 0 \tag{4.41}$$

Por observación, podemos postular que una existe una función $y(x,r)$, tal que, para flujo compresible

$$c_x = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$c_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{4.42}$$

Donde y es conocida como la función de corriente. Para flujo incompresible la densidad desaparece de la ecuación de continuidad y las ecuaciones (4.42) quedan

$$c_x = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$c_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial x} \tag{4.43}$$

- **Propiedades de la función de corriente (flujo incompresible)**

Es de interés mostrar las propiedades de esta función de corriente y que nos serán de gran utilidad para desarrollos posteriores.

La función de corriente tiene las características de una función potencial, cuyas derivadas en una dirección dada multiplicadas por 1/r dan las componente de la velocidad.

Otra propiedad más significativa es que los lugares geométricos con $y = cte$ nos definen las líneas de corriente meridionales (por ello su nombre). Para confirmar esto, como y es una función de x y r, derivándola obtenemos

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial r}dr$$
$$= r\left(-c_r dx + c_x dr\right) \qquad (4.44)$$

donde se ha usado la ecuación (4.43).

La pendiente a de una línea de corriente en un punto determinado vendrá dada por

$$\tan a = \frac{c_r}{c_x} = \frac{dr}{dx} \quad \text{ò}$$
$$-c_r dx + c_x dr = 0 \qquad (4.45)$$

Introduciéndolo en la ecuación (4.44), se observa que a lo largo de las líneas de corriente

$$dy = 0 \qquad \text{ò}$$
$$y = cte \qquad (4.46)$$

Introduciendo de nuevo la ecuación (4.45) en la ecuación (4.44) se obtiene el siguiente resultado

$$c_x \frac{\partial y}{\partial x} + c_r \frac{\partial y}{\partial r} = 0 \qquad (4.47a)$$

que en notación vectorial seria

$$\hat{q}.grad\, y = 0 \qquad (4.47b)$$

En otras palabras, el gradiente de y en la dirección de la velocidad local $\hat{q}$ es nulo. Esto es, y es constante a lo largo de las líneas de corriente meridionales.

- **Ecuación de gobierno en función de la función de Stokes (flujo incompresible)**

Una vez introducida la función de Stokes, vamos a expresar las ecuaciones que modelan el sistema en función de ésta.

Si eliminamos c_x y c_r de la componente de la vorticidad w_q (4.37c), introduciendo las ecuaciones (4.43), entonces

$$w_q = \frac{\partial c_r}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial x}\right\} - \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}\right\}$$

y finalmente tenemos la ecuación de Stokes para flujo incompresible axilsimétrico

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = -w_q r \qquad (4.48)$$

Esta es ahora nuestra principal ecuación para flujo meridional incompresible. La solución de la misma nos dará la distribución de las líneas de corriente en un espacio anular, en el cual tendremos una distribución especifica de la vorticidad tangencial w_q.

- **Presión de remanso y momento angular en función de la función de Stokes**

En ausencia de fuerzas de masa las ecuaciones de momento (4.39) quedan

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial x} &= c_r w_q - c_q w_r \\ \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r} &= c_q w_x - c_x w_q \\ 0 &= c_x w_r - c_r w_x \end{aligned} \qquad (4.49)$$

Si combinamos las dos primeras para eliminar w_q obtenemos

$$c_x \frac{\partial p_o}{\partial x} + c_r \frac{\partial p_o}{\partial r} = r c_q \left(c_r w_x - c_x w_r \right)$$

e introduciendo la tercera ecuación tenemos finalmente,

$$\begin{aligned} c_x \frac{\partial p_o}{\partial x} + c_r \frac{\partial p_o}{\partial r} &= 0 \\ \hat{q}.grad p_o &= 0 \end{aligned} \qquad (4.50)$$

Comparando este resultado con la ecuación (4.47) vemos que la presión de remanso, al igual que la función de corriente, permanece constante a lo largo de las líneas de corriente. Así, como se esperaba, la presión de remanso se conserva a lo largo de las líneas de corriente. Ahora la tercera ecuación de momento (4.49), introduciendo las definiciones de vorticidad w_x y w_r (4.38), se puede expresar de forma similar

$$\begin{aligned} c_x \frac{\partial r c_q}{\partial x} + c_r \frac{\partial r c_q}{\partial r} &= 0 \\ \hat{q}.grad\left(r c_q \right) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.51)$$

Vemos que el momento angular rc_q también debe conservarse a lo largo de las líneas de corriente. Esas leyes de conservación se pueden sintetizar como sigue

$$c_q r = f_1(y)$$
$$p_o = f_2(y) \tag{4.52}$$

donde la presión de remanso y $c_q r$ son función únicamente de y .

- **Ecuación auxiliar para w_q**

Podemos tomar todos esos resultados físicos y analíticos para obtener una ecuación auxiliar que ligue p_o y $c_q r$ con la vorticidad tangencial w_q. Como p_o es función de y y esta es función de x y r, la derivada total de p_o respecto a y se puede expresar como

$$\frac{1}{r}\frac{dp_o}{dy} = \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_o}{\partial r}\frac{dr}{dy}$$

introduciendo las ecuaciones (4.49a) y (4.49b) obtenemos

$$\frac{1}{r}\frac{dp_o}{dy} = w_q\left(c_r\frac{dx}{dy} - c_x\frac{dr}{dy}\right) + c_q\left(w_x\frac{dr}{dy} - w_r\frac{dx}{dy}\right) \tag{4.53}$$

Sin embargo, de la ecuación (4.44) el primer paréntesis se reduce a –1/r. El segundo paréntesis se puede simplificar también si usamos la ecuación (4.52a) para obtener la derivada total de $c_q r$ con respecto a y

$$\frac{dc_q r}{dy} = \frac{\partial c_q r}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial c_q r}{\partial r}\frac{dr}{dy}$$

y de las definiciones de vorticidad (4.38a) y (4.38b)

$$\frac{dc_q r}{dy} = r\left\{-w_r \frac{dx}{dy} + w_x \frac{dr}{dy}\right\}$$

Introduciendo esos resultados en la ecuación (4.53) y reordenando, tenemos finalmente la ecuación auxiliar para w_q

$$w_q = c_q \frac{d(c_q r)}{dy} - \frac{r}{r}\frac{dp_o}{dy} \tag{4.54}$$

Por tanto, la vorticidad tangencial w_q depende únicamente de las distribuciones de dos magnitudes físicas como son el momento angular y la presión de remanso. Estas se conservan independientemente a lo largo de las líneas de corriente para regiones anulares entre coronas de alabes. Los valores de $c_q r$ y p_o pueden cambiar en una corona a través de la ecuación de Euler. La vorticidad w_q creada, sin embargo, dependerá únicamente del gradiente de p_o y $c_q r$ a través de las líneas de corriente.

Por lo tanto, el flujo meridional para turbomáquinas incompresibles se describirá por la combinación de la ecuación de gobierno y la ecuación auxiliar (4.48) y (4.54)

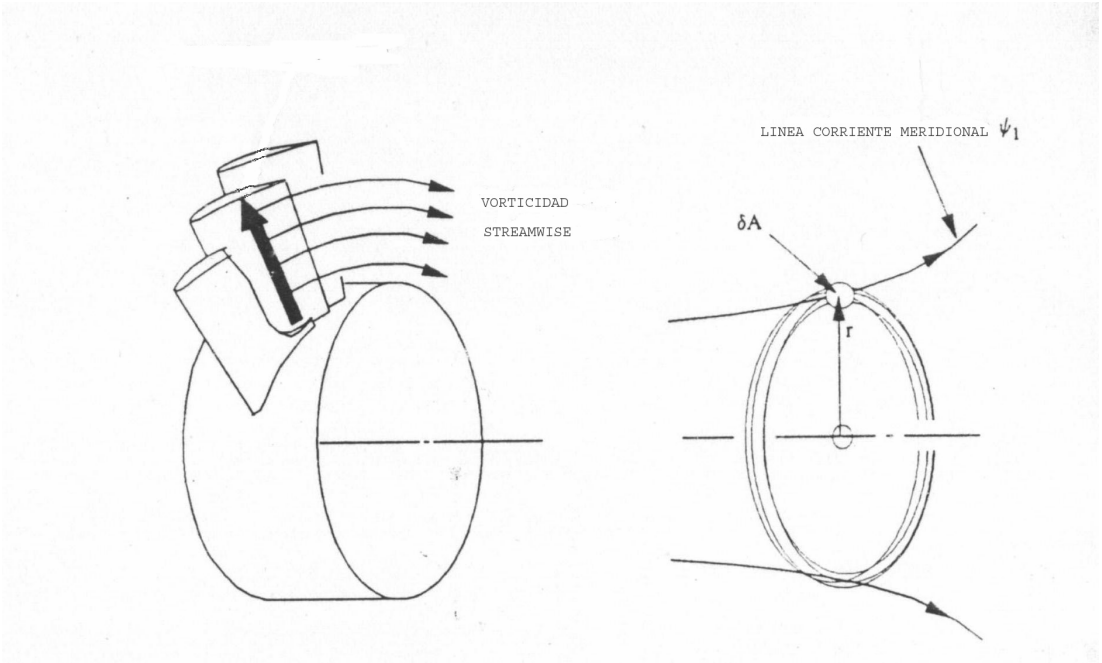
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = -w_q r = -c_q r \frac{d(c_q r)}{dy} + \frac{r^2}{r}\frac{dp_o}{dy} \tag{4.57}$$

Esta es la ecuación general que nos permitirá analizar el flujo meridional mediante la teoría del disco actuador.

4.3.1.3.- VORTICIDAD STREAMWISE Y SMOKE-RING

Antes de intentar resolver la ecuación, vamos a hacer hincapié en la ecuación de la vorticidad (4.54) y sus dos componentes.

Podemos observar como la vorticidad tangencial tiene dos componentes independientes, una compuesta por los gradientes del momento angular y la otra por los gradientes de la presión de remanso. Ambas tienen diferentes orígenes físicos (fig. 4.2) y consecuentemente tienen diferentes propiedades.



(Figura 4.2 Tipos de vorticidad)

Vamos a ver de forma detallada ambos tipos de vorticidad.

a) VORTICIDAD STREAMWISE O " DIRECCIÓN PRINCIPAL"

Para flujos con presión de remanso constante la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{w_x}{c_x} = \frac{w_r}{c_r} = \frac{w_q}{c_q} = \frac{\hat{w}}{\hat{c}} \tag{4.58}$$

En este caso el vector vorticidad local $\hat{w}$ se orienta paralelamente al vector velocidad local $\hat{c}$, una condición que puede definirse como vorticidad "streamwise" ó "dirección principal". Una hoja de vórtices será emitido desde la cara posterior de un álabe de una turbomáquina cuya geometría de diseño haga que a la salida de la corona no se genere un flujo de torbellino libre, la cual formará una espiral corriente abajo siguiendo un flujo modificado por la corona de álabes. Para esta situación la vorticidad tangencial (ec. 4.54) se reduce a

$$w_q = c_q \frac{d(c_q r)}{dy} \tag{4.59}$$

donde w_q es la componente tangencial del torbellino creado g_{shed} el cual se asume pasará circunferencialmente a través del extremo del álabe como una distribución de la vorticidad $\hat{w}$.

Teniendo en cuenta que $c_q r = f_1(y)$ (ec. 4.52a), la ecuación de la vorticidad "dirección principal" queda

$$w_q = \frac{1}{r} f_1(y) \frac{df_1(y)}{dy} = \frac{1}{r} F_1(y) \tag{4.60}$$

Donde $F_1(y)$ es una función de y. Esta ecuación muestra que la componente tangencial de la vorticidad "dirección principal" en turbomáquinas obedece a la ley $w_q r = F_1(y)$ y es por tanto constante a lo largo de una línea de corriente dada. Si el

radio de la línea de corriente cambia, como en flujos que siguen una ley general del tipo $c_q = ar \pm b/r$, w_q también cambiará inversamente con el radio.

b) VORTICIDAD SMOKE-RING O "ANULAR"

Si $c_q = 0$ o $c_q r = cte$, la vorticidad "dirección principal" es nula y el primer término de la ecuación (4.54) desaparece, reduciéndose la vorticidad tangencial a

$$w_q = -\frac{r}{r}\frac{dp_o}{dy} \tag{4.61}$$

Recordando la ley de conservación de la presión de remanso (ec. 4.52b) y llamando a $p_o = f_2(y)$, la ecuación queda

$$w_q = -\frac{r}{r}\frac{df_2(y)}{dy} = -rF_2(y) \tag{4.62}$$

donde $F_2(y)$ es función de y . En este caso la vorticidad tangencial obedece a una ley completamente diferente, de tal forma que $w_q / r = -F(y)$, y por tanto es constante a lo largo de una línea de corriente dada. De la definición de las componentes de la vorticidad (ec. 4.38), es claro que w_x y w_r serán nulas para los flujos que se encuentren bajo estas consideraciones. Como w_q es la única componente de la vorticidad presente en el fluido, ésta adopta la forma de la vorticidad "anular",concéntrica con el eje x.

Una vez examinados los dos tipos de vorticidad, hay que notar que en general estarán presentes ambos gradientes ($c_q r$ y p_o) y por tanto, el movimiento asociado a los torbellinos comprenderá ambos tipos de vorticidad. Las ecuaciones de gobierno para una turbomáquina genérica quedan reducidas entonces a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = F_1(y) + r^2 F_2(y) \tag{4.65}$$

donde

$$F_1(y) = c_q r \frac{dc_q r}{dy}$$

$$F_2(y) = \frac{1}{r}\frac{dp_o}{dy} \tag{4.66}$$

Por tanto, la solución para flujo incompresible, vía ecuación (4.65), es posible una vez determinadas completamente las funciones $F_1(y)$ y $F_2(y)$. Este es el caso en el cual $c_q r$ y p_o son especificadas en función de y .

4.3.1.5.- SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA TEORÍA DEL DISCO ACTUADOR

Una vez alcanzadas las ecuaciones de gobierno, (4.65) y (4.66), vamos a intentar su resolución para alcanzar la solución del disco actuador.

Para ello consideraremos un flujo que atraviesa una corona de álabes y en la cual se realizarán las siguientes hipótesis:

1) la corona de alabes esta representada por un plano (disco actuador) en el cual la vorticidad w_q es creada discontinuamente

2) la vorticidad w_q se asume que converge corriente abajo del disco actuador a lo largo de las líneas de corriente sin perturbar.

Los términos del lado derecho de la ecuación (4.65) no lineales presentan algunas dificultades para su resolución. Sin embargo, la segunda hipótesis permite linealizar dichos términos desde que w_q se puede aproximar de la siguiente forma.

De la ecuación (4.65):

$$\begin{aligned} rw_q &= F_1(y) + r^2 F_2(y) \\ &\approx F_1(r) + r^2 F_2(r) \\ &\approx F(r) \end{aligned} \tag{4.68}$$

Para una simple corona de álabes la ecuación de gobierno se simplifica a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= -F(r) && \text{para } x>0 \\ &= 0 && \text{para } x<0 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Al haber linealizado la ecuación, podemos considerar su solución como la superposición de las distintas componentes

$$y = y(r) + y'_\infty(r) + y'(x,r) \tag{4.70}$$

donde el primer término representa la corriente uniforme a la entrada C_x de la corona en $x=-\infty$, el segundo término representa el flujo del equilibrio radial a la salida $x=\infty$ y el tercero es una función suave la cual convierte progresivamente el flujo entre esos dos extremos. La ecuación (4.69) puede ser reemplazada ahora por las tres ecuaciones independientes siguientes:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{Corriente uniforme} \tag{4.71}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial y_\infty}{\partial r} + \frac{\partial^2 y_\infty}{\partial r^2} = -F(r) \qquad \text{Perturbación eq. radial} \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial r} + \frac{\partial^2 y'}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{Perturbación irrotacional} \tag{4.73}$$

Teniendo en cuenta la definición de función de corriente (ec. 4.43a) la primera ecuación puede ser integrada para obtener

$$C_x = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} = cte \tag{4.74}$$

La segunda ecuación (4.72) podría integrarse una vez obtenida la perturbación de la velocidad del equilibrio radial directamente de la vorticidad w_q

$$c'_{x\infty} = \frac{1}{r}\frac{\partial y'_{\infty}}{\partial r} = -\int_{r_h}^{r_t} w_q\, dr + K \tag{4.75}$$

Donde la constante K es tal que la perturbación de la velocidad $c'_{x\infty}$ no contribuya al flujo másico a través del tubo de corriente, es decir

$$\int_{r_h}^{r_t} r\, c'_{x\infty}\, 2\pi r dr = 0 \qquad \text{ó}$$

$$K = \frac{2}{r_t^2 - r_h^2}\int_{r_h}^{r_t} r \int_{r_h}^{r} w_q\, dr dr \tag{4.76}$$

Las soluciones de las ecuaciones (4.71) y (4.72) han sido obtenidas explícitamente en términos de la velocidad axial principal C_x y la vorticidad tangencial respectivamente. La solución de la ecuación (4.73) podría obtenerse por separación de variables, como una serie infinita de la siguiente forma:

$$y' = r\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(J_1(k_n r) + \nu_n Y_1(k_n r)\right)e^{knx} \tag{4.77}$$

Donde $J_1(k_n r)$ y $Y_1(k_n r)$ son las funciones de Bessel del primer y segundo tipo de primer orden y A_n y n_n son constantes arbitrarias. Los coeficientes k_n son determinados especificando que la perturbación radial de la velocidad c_r' es nula. De la ecuación (4.43b)

$$c_r' = -\frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n \left(J_1(k_n r) + v_n Y_1(k_n r)\right) e^{knx} = 0$$

Aplicando esto en el radio de raíz y de cabeza para el término n resulta

$$J_1(k_n r_h) + v_n Y_1(k_n r_h) = 0$$
$$J_1(k_n r_t) + v_n Y_1(k_n r_t) = 0$$

Y eliminado v_n tenemos

$$J_1(k_n r_h) Y_1(k_n r_t) - J_1(k_n r_t) Y_1(k_n r_h) = 0 \qquad (4.78)$$

La velocidad axial c_x puede expresarse como

$$c_{x1} = C_x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r}\{J_1(k_n r) + n_n Y_1(k_n r)\} e^{knx} \qquad \text{para } x \le 0$$

$$c_{x2} = C_x + c_{x\infty}' - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r}\{J_1(k_n r) + n_n Y_1(k_n r)\} e^{-knx} \qquad \text{para } x \ge 0 \qquad (4.81)$$

En $x = 0$, las soluciones de las velocidades axiales corriente arriba y corriente abajo coinciden, $c_{x1} = c_{x2}$, con lo cual se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial}{\partial r}\{J_1(k_n r) + n_n Y_1(k_n r)\} = \frac{1}{2} c_{x\infty}' \qquad (4.82)$$

donde $c_{x\infty}'$ es una función conocida del radio y los coeficientes A_n y n_n se obtienen de un análisis de Fourier-Bessel.

Por tanto, las ecuaciones (4.81) y (4.82), nos definen completamente las soluciones buscadas mediante el disco actuador. Estas nos definen los perfiles de la velocidad axial a ambos lados del mismo.

4.3.1.5.- MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para eludir la complejidad de Fourier-Bessel a la hora de la resolución vamos a realizar una pequeña aproximación. Resulta un análisis más simple si asumimos que el primer termino de las series de Bessel en las ecuaciones (4.82) es el que predomina. Despreciando todos los términos excepto n=1 la ecuación (4.82) puede aproximarse por

$$A_1\left\{J_1'(k_1 r)+v_1 Y_1'(k_1 r)\right\}\approx c_{xd}{}'=\frac{1}{2}c_{x\infty}'$$

y por tanto la solución para c_x, ecuaciones (4.81), se reduce a:

$$c_x = C_x + \frac{1}{2}c_{x\infty}' e^{k_1 x} \qquad \text{para x<0}$$

$$c_x = C_x + c_{x\infty}'\left(1-\frac{1}{2}e^{-k_1 x}\right) \qquad \text{para x>0} \qquad (4.83)$$

donde el coeficiente k_1 es una función de k y de los radios de raíz y de cabeza a través de $k_1=\dfrac{k}{(r_t-r_h)}$.

Como se vio en el desarrollo previo de la teoría del disco actuador, cuando se obtuvieron los dos tipos de soluciones, podemos expresar la velocidad como una velocidad uniforme a la cual habría que agregarle las perturbaciones sufridas como consecuencia de su paso a través del disco.

Por tanto, alcanzada la ecuación (4.83), podemos expresar la velocidad axial como:

$$c_x = C_x + c_x^*$$

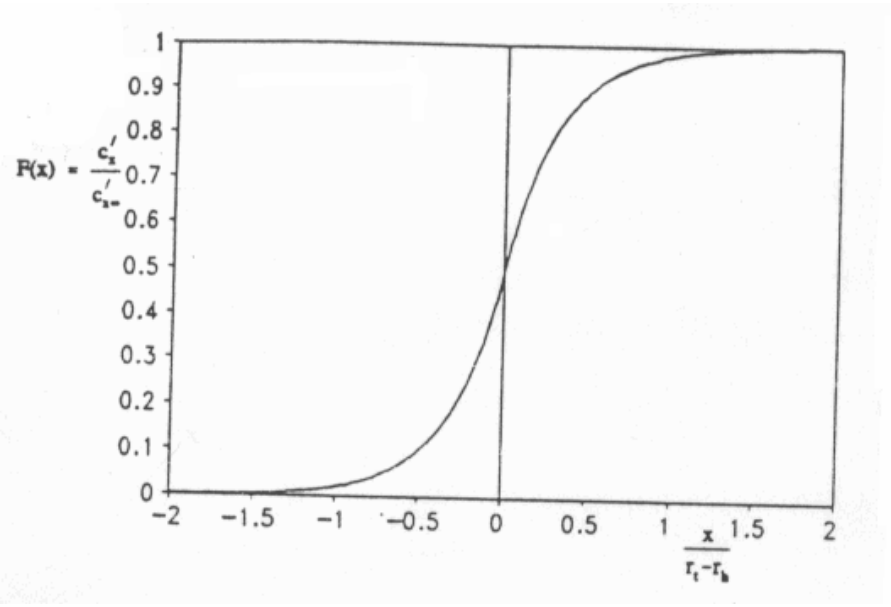
donde c_x^* es la perturbación de la velocidad axial media C_x. Las perturbaciones introducidas, podemos expresarlas en la forma:

$$\frac{c_x^*}{c_{x\infty}^*}=0.5\exp\left(\frac{kx}{r_t-r_h}\right)=F(x) \qquad \text{para } x<x_{AD}$$

$$=1-0.5\exp\left(\frac{-kx}{r_t-r_h}\right)=F(x) \qquad \text{para } x>x_{AD} \qquad (4.84)$$

donde $c_{x\infty}$ es la solución del equilibrio radial (la cual se obtiene con $x \to \infty$) y k es una constante que depende de la relación de los radios de raíz y de cabeza.

Como vimos en la obtención de las soluciones en el apartado anterior, las modificaciones del flujo vienen influenciadas por dos términos. Uno correspondiente al "propio" disco y otro al existente en el infinito. Este segunda perturbación viene ahora relacionada con la solución de equilibrio radial, la cual representaba la solución de dicho flujo en zonas alejadas.



(Figura 4.3 Función F(x))

Hay que hacer notar, como un hecho resaltable, que la corrección c_x^* es exactamente la mitad del valor del equilibrio radial $c_{x\infty}$ justo en el plano del disco actuador ($x_{AD} = 0$). En cualquier otra posición la velocidad axial puede expresarse en términos de la velocidad axial del equilibrio radial a través de:

$$c_{xte} = C_x + (c_{x\infty} - C_x) F(x - x_{AD}) \tag{4.85}$$

Con lo cual hemos obtenido la ecuación que nos define el perfil de velocidades axiales a su paso por el disco.

Llegados a este punto hay que decir, que a diferencia del equilibrio radial, aquí la velocidad axial sí se ve influenciada por la presencia de otros elementos. Por este motivo, a la hora de la resolución tendremos que diferenciar entre un escalonamiento aislado y múltiple.

a) ESCALONAMIENTO SIMPLE

Para la resolución de un escalonamiento aislado mediante la teoría del disco actuador se hacen las siguientes consideraciones:

1) el disco actuador está localizado en la mitad de la cuerda, posición x_{AD}

2) al igual que vimos en el estudio del equilibrio radial suponemos conocida la ley torsional, es decir la distribución radial de la velocidad tangencial $c_{q2}(r)$

Lo primero que tenemos que calcular es la velocidad en el infinito (equilibrio radial simplificado) para después "corregir" esta solución aplicando la teoría del disco actuador.

Por tanto, a partir de la ecuación del equilibrio radial simplificado deducida anteriormente, esta se modifica para quedar de la forma

$$c_{x\infty}\frac{dc_{x\infty}}{dr}=\Omega\frac{d\left(rc_{q2}-rc_{q1}\right)}{dr}-\frac{c_{q2}}{r}\frac{d}{dr}\left(rc_{q2}\right) \tag{4.86}$$

La ecuación anterior se simplifica, resultando

$$\frac{dc_{x\infty}}{dr}=p\left(r,c_{x\infty}\right) \tag{4.87}$$

donde

$$p\left(r,c_{x\infty}\right)=\frac{1}{c_{x\infty}}\left(\ \Omega\frac{d\left(rc_{q2}-rc_{q1}\right)}{dr}-\frac{c_{q2}}{r}\frac{d}{dr}\left(rc_{q2}\right)\ \right) \tag{4.88}$$

Para la resolución de las ecuaciones, al igual que en el caso del equilibrio radial, será necesario un proceso iterativo. Para ello, podemos tomar

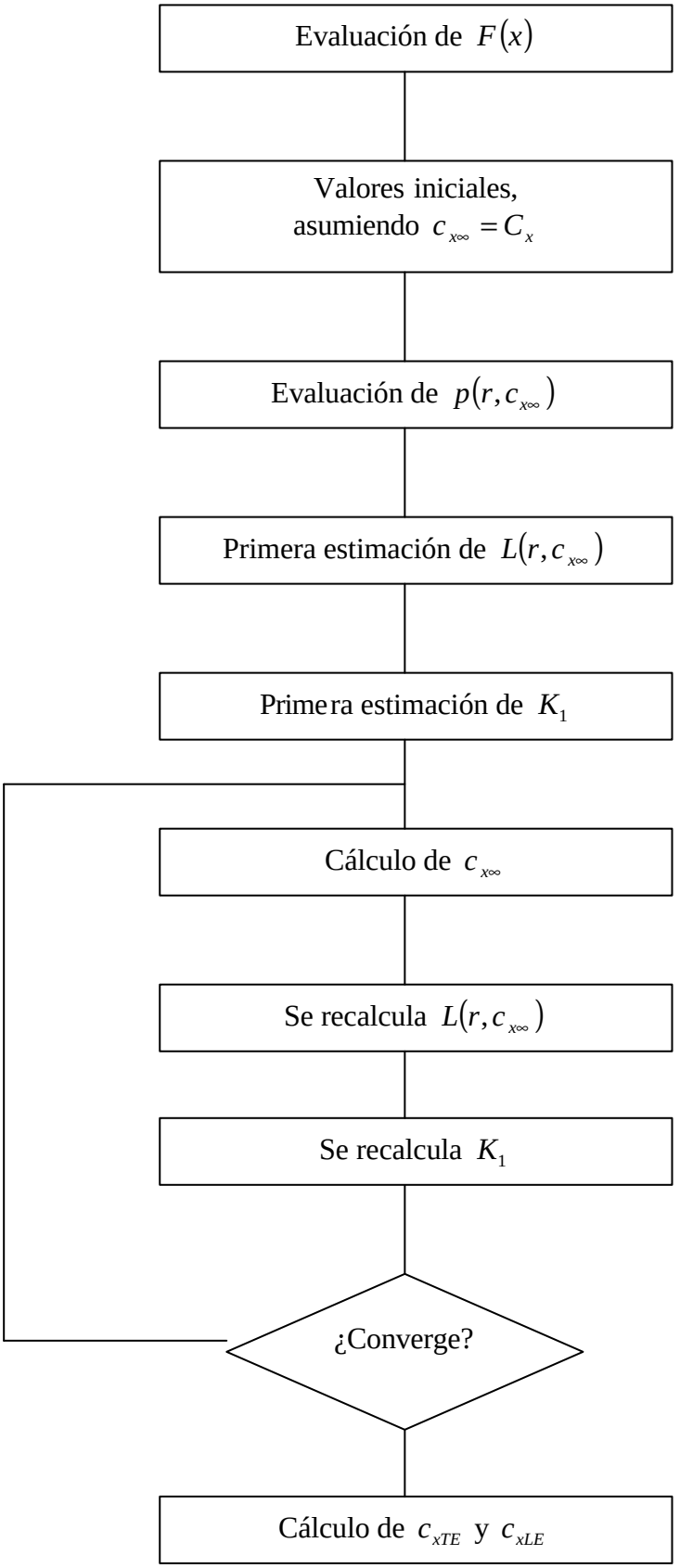
$$c_{x\infty} = L'\left(r, c_{x\infty}\right) + K_1 \tag{4.89}$$

con

$$L'\left(r_j, c_{x\infty}\right) = \int_{rh}^{rt} p\left(r, c_{x\infty}\right) dr$$

$$\approx \Delta r \sum_{i=1}^{j} p_i \tag{4.90}$$

Un posible diagrama de flujo sería el siguiente:


Evaluación de $F(x)$
Valores iniciales, asumiendo $c_{x\infty} = C_x$
Evaluación de $p(r, c_{x\infty})$
Primera estimación de $L(r, c_{x\infty})$
Primera estimación de K_1
Cálculo de $c_{x\infty}$
Se recalcula $L(r, c_{x\infty})$
Se recalcula K_1
¿Converge?
Cálculo de c_{xTE} y c_{xLE}

b) ESCALONAMIENTO MÚLTIPLE

En el caso de un escalonamiento múltiple, hay que tener en cuenta la interferencia que produce cada etapa tanto a la anterior como a la posterior. Esto no era tenido en cuenta en el equilibrio radial donde se asumía que después del cambio (cara posterior de los álabes) las líneas de corriente permanecían constante, con lo cual no existía interrelación entre las distintas etapas siendo cada una de ellas independientes.

En el caso del disco actuador tendremos un 'campo' de vórtices emanando de cada disco. El efecto de cada uno dura hasta que se alcanza otro disco, donde se reemplazaría por el nuevo campo de vórtices generados en ese otro disco.

Si nos centramos, para simplificar, en el campo de torbellinos comprendido entre dos discos cualesquiera (p.e. el primero y el segundo), este puede ser tratado como la superposición de los campos creados por ambos discos de manera aislada como si se extendiesen hasta el infinito. El campo creado por el segundo disco tendría un efecto contrario al creado por el primero.

Por tanto, a la hora de resolver este caso, lo primero que tenemos que conocer es la solución del equilibrio radial que generaría el campo de torbellinos creado por el primer disco

$$c_{x\infty 1} = C_x + c'_{x\infty 1}$$

La velocidad axial en cualquier otra localización x, se hallaría a partir de la ecuación del disco actuador (4.85), aplicada tanto al primero como al segundo disco

$$\begin{aligned} c'_x &= c'_{x\infty 1} F(x - x_{AD1}) - c'_{x\infty 1} F(x - x_{AD2}) \\ &= c'_{x\infty 1}\left[\ F(x - x_{AD1}) - F(x - x_{AD2})\ \right] \end{aligned} \tag{4.91}$$

Aplicando el mismo procedimiento para n etapas tendríamos:

$$\begin{aligned} c_x &= C_x + c'_x \\ &= \sum_1^n c'_{x\infty 1}\left[F(x - x_{ADi}) - F(x - x_{ADi+1})\right] + c'_{x\infty n} F(x - x_{ADn}) \end{aligned} \tag{4.92}$$

donde el último término, representa el efecto del último disco que se asume que se extiende hasta el infinito.

El diagrama de flujo sería similar al visto con anterioridad.