4.1. Introducción .

La función de coste de un arco o función volumen retraso expresa la variación del nivel de servicio o impedancia del arco con el volumen o flujo que lo atraviesa. Esta impedancia incluye, o al menos puede incluir, distintos componentes. En efecto, estas variables que pueden influir para la elección del itinerario a seguir pueden ser:

- Tiempo de viaje. Lógicamente muy importante. Veremos poco después como podemos reducir la impedancia a este término.

- Distancia. Evidentemente también, es una variable a tener en cuenta a la hora de elegir un itinerario. Al contrario del tiempo de viaje, no depende en absoluto del flujo. Por esto, en caso de ser incluida en la función de coste de los arcos, supondrá tan sólo una traslación de la curva.

- Variabilidad del tiempo de viaje. Relacionado con el hecho de que existen itinerarios cuya duración es siempre muy parecida, y otros que varían mucho según las circunstancias. Además, en muchas ocasiones la variabilidad del tiempo de viaje es fundamental a la hora de elegir una ruta, especialmente cuando no se trata de llegar cuanto antes a un lugar, sino a una hora concreta, como puede ocurrir en desplazamientos al lugar de trabajo.

- El peaje. Cada vez son más frecuentes los tramos de peaje, ya incluso dentro de las propias ciudades. En ocasiones, su objetivo es precisamente la descongestión de tramos muy utilizados. Otras veces, simplemente son tramos construidos por empresas privadas. En cualquier caso, es un factor que condiciona fuertemente la elección de un itinerario.

A pesar de todas estas variables, es el tiempo de viaje el factor más utilizado por su importancia, por diversas razones, a saber:

1. Se ha observado empíricamente que es la variable que más condiciona el flujo.

2. El resto de las componentes que influyen en la impedancia están íntimamente correlacionadas con el tiempo de viaje.

3. Por último, y la más importante tal vez, su facilidad de medición. Y esto debido a que se dispone de medidores en diversos puntos de la ciudad a partir de los cuales se puede calcular la velocidad con que los vehículos circulan por la vía.

Por tanto, simplemente denominaremos función volumen-retraso a aquella función que relaciona el tiempo empleado en atravesar el arco con el volumen de tráfico en él.

La forma más usual para expresarlas es como producto del tiempo de flujo libre t_o por una función de congestión normalizada f(x). Es decir:

$$t(v) = t_0 \quad f\left(\frac{v}{c}\right)$$

donde:

t: tiempo en el arco.

v: volumen en el arco (flujo) .

t_0: tiempo en flujo libre, que se define como el que tarda en recorrer el arco un vehículo sin que haya ningún otro vehículo circulando. Es característico de cada arco, y depende de la longitud y velocidad máxima permitida en éste.

c: capacidad del arco, que se define como aquel flujo que hace que la velocidad sea mitad que la correspondiente al flujo libre (no confundir con el intuitivo concepto de capacidad).

A continuación, veremos distintos tipos de funciones de coste, sus problemas, y requisitos que debe cumplir una buena función volumen-retraso para solucionarlos.

4.2. Funciones BPR .

Las funciones BPR (Bureau of Public Roads) eran hasta hace poco tiempo las más utilizadas, por su simplicidad. Presentan el aspecto:

$$t^{BPR}(v) = t_0 \left(1 + \left(\frac{v}{c} \right)^a \right)$$

Si denominamos s al cociente entre el volumen y la capacidad del arco:

$$f^{BPR}(s) = 1 + s^a$$

El parámetro a nos determina la sensibilidad de la vía respecto a variaciones en el nivel de congestión. Si a crece, más bruscamente variará el tiempo ante variaciones del volumen. Esto se aprecia fácilmente en las figuras siguientes (Figs. 4.2.a y 4.2.b).

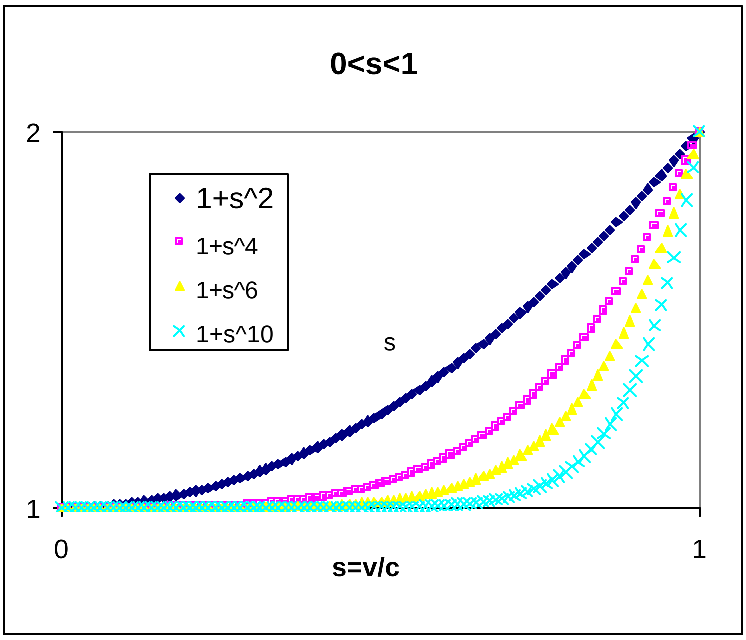

Fig. 4.2.a. Funciones BPR para v/c entre 0 y 1.

En dichas gráficas, el valor que aparece sobre las curvas representa el a correspondiente.

Valores típicos de a son 2, 4, 6, 8, 10 y 12, aunque su valor no se restringe a números enteros.

Nótese que para cualquier valor de a, cuando el volumen que circula por el arco es igual a su capacidad, la velocidad es igual a la mitad de la velocidad en flujo libre. Es decir $f^{BPR}(1) = 2$.

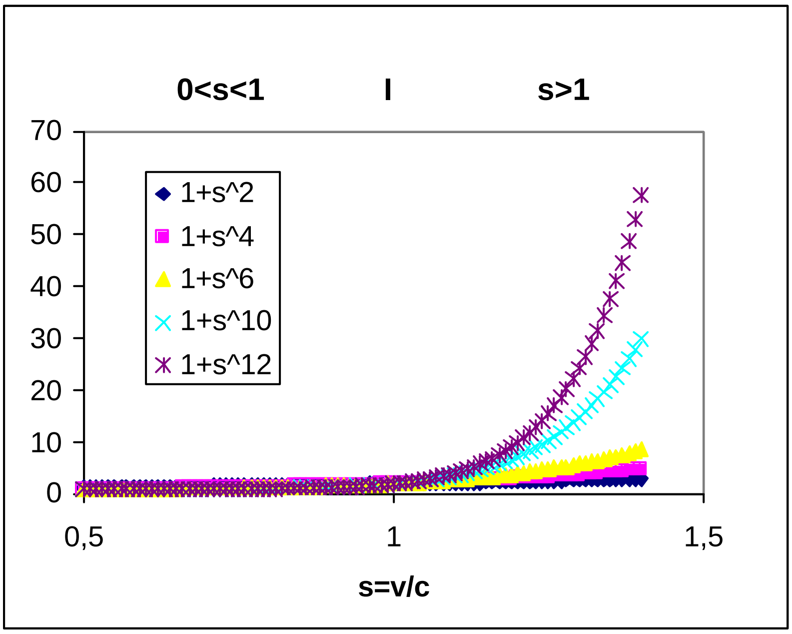

Fig. 3.1b. Funciones BPR para v/c mayores a l .

Los problemas que presentan estas funciones son los siguientes:

- Durante las primeras iteraciones del algoritmo de asignación de equilibrio, los valores de v/c pueden llegar a ser mayores de uno, tomando valores incluso superiores a 3. Esto provoca que para curvas con a grande, el retraso se dispare a valores muy lejanos a la realidad. Por ejemplo, para un arco con a =12 y v/c =3, la función tomaría el valor f(3) =531443, lo que traería consigo que se tardara más de un año en atravesar dicha vía. Estos valores absurdos en las primeras iteraciones provocan una convergencia extremadamente lenta, e incluso problemas de pérdida de precisión y overflow. Todo esto se puede apreciar en la figura 3.1b, mostrada anteriormente.

- Cuando el flujo en el arco se encuentra muy por debajo de la capacidad, estas funciones generan un tiempo de viaje igual al de flujo libre, independientemente del flujo que circule por el arco. Este problema se hace más acuciante para valores elevados de a . Por ejemplo, para a =4 y c=1000 la función BPR proporciona el mismo retraso para v=1 y para v=300. Véase la figura 3.1a. Todo esto provoca que el modelo de equilibrio degenere en una asignación todo-nada, donde muy ligeros cambios en el tiempo de flujo libre provocan grandes cambios de volumen (de vehículos) de una ruta a otra .

- Además, al no ser las funciones volumen-retraso estrictamente crecientes para valores bajos del volumen, no se garantiza la unicidad de la solución.

- A pesar de la simpleza de la fórmula de las funciones BPR, requieren el cálculo de funciones trascendentes, al aparecer la función exponencial. Esto provoca que aumente el tiempo de computación.

4.3. Condiciones que debe cumplir una función Volumen Retraso .

Acabamos de ver las desventajas de las funciones BPR. Buscamos por tanto unas funciones que no planteen dichos problemas. Veamos las condiciones que debe cumplir una función volumen-retraso para que represente adecuadamente el comportamiento del tráfico, y que pueda ser utilizada con éxito en un proceso de asignación.

1. La función f(s) debe ser estrictamente creciente para que el método converja a una solución única.

2. f(0)=1 y f(1)=2. Esta condición sí que la cumplen las funciones BPR. Definen la capacidad como el volumen para el cual la velocidad de congestión es igual al doble de la velocidad de flujo libre .

3. f(s) debe ser derivable, y su derivada estrictamente creciente. Con esto se asegura la convexidad de la función volumen-retraso, condición que aunque no es necesaria, es muy deseable.

4. $f'(1)= a$. Así el valor del parámetro a define, por analogía con las funciones BPR, un parámetro que mide la influencia de la congestión en

el retraso (como cambian los efectos de la congestión cuando la capacidad se ha alcanzado) .

5. $f'(s) < M\alpha$, donde M es una constante positiva y finita. Esto evita el problema de que el retraso alcance valores excesivamente elevados cuando v/c toma valores mayores que 1, lo que constituía uno de los problemas de las funciones BPR. Y esto viene impuesto desde el momento en que se evita un crecimiento excesivamente rápido de la función .

6. $f'(0) > 0$, para garantizar la unicidad de la solución del algoritmo de asignación.

7. La evolución de la función ha de necesitar unos cálculos lo más sencillos posibles, de modo que el tiempo de computación de f(s) no ha de ser mayor que el de la función BPR.

Nótese que las cuatro primeras condiciones las cumplen las funciones BPR, y las restantes las que se imponen para evitar los inconvenientes que planteaban.

4.4. Funciones cónicas .

Las funciones de congestión cónicas cumplen las condiciones anteriores. De ahí su importancia, y el ser las utilizadas en el presente proyecto.

La forma de dichas funciones se muestra en las figuras siguientes (Figs. 4.4.a y 4.4.b), y responde a:

$$f(s) = 2 + \sqrt{a^2(1-s^2)+b^2} - a(1-s) - b$$

donde b se obtiene del parámetro a a partir de :

$$b = \frac{2a-1}{2a-2}$$

siendo $a > 1$, que se estima a partir de valores observados de velocidades y volúmenes .

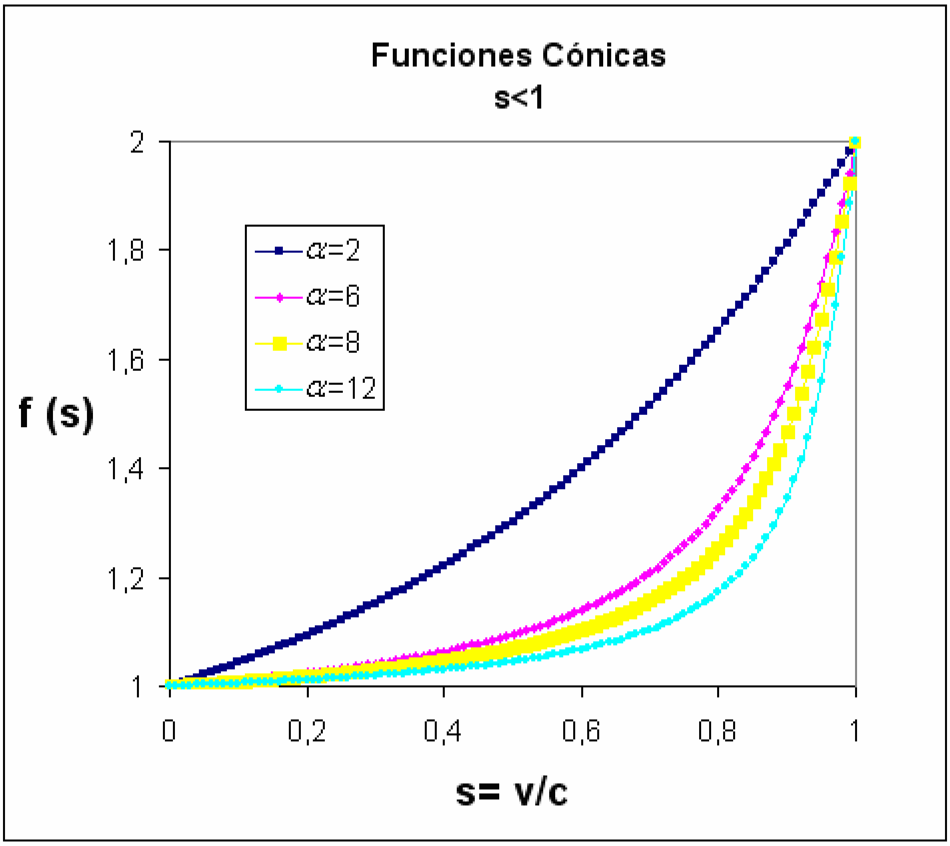

Fig 4.4.a. Funciones cónicas para v/c menores que 1

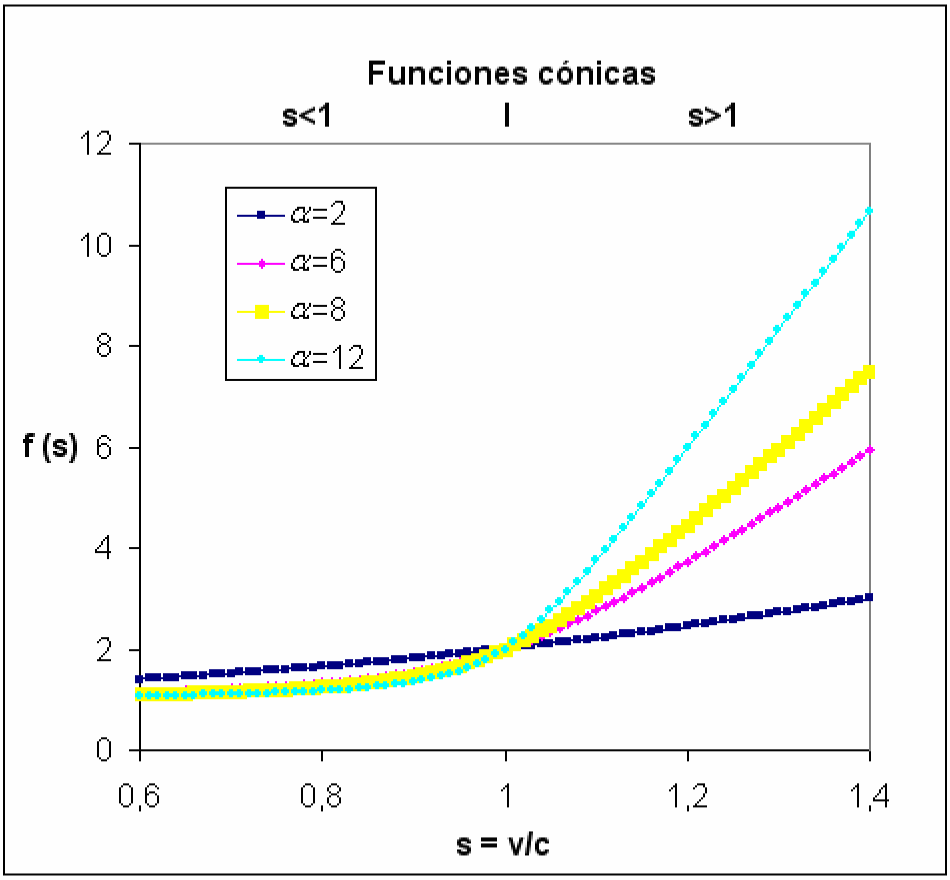

Fig 4.4.b. Funciones cónicas para v/c mayores que 1 .

De nuevo , hay que hacer notar que el número que aparece en las figuras sobre cada curva representa el valor del a correspondiente .