

Capítulo 1

Fundamentos teóricos de la turbulencia homogénea.

En el presente capítulo se desarrolla la formulación estadística utilizada en el estudio de la turbulencia y se definen y explican las magnitudes utilizadas en el presente trabajo para caracterizarla.

1.1. Formulación estadística de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Reynolds.

El procedimiento utilizado por Osborne Reynolds(1895) para realizar el estudio estadístico de la turbulencia se basa en descomponer la velocidad instantánea del fluido U_i de la siguiente forma

$$U_i(\mathbf{x}, t) = \overline{U}_i(\mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

siendo \overline{U}_i la velocidad media y u_i la fluctuación. Análogamente se puede aplicar la descomposición a la presión.

$$P_i(\mathbf{x}, t) = \overline{P}_i(\mathbf{x}, t) + p_i(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

De las definiciones anteriores se puede deducir que la media de las fluctuaciones es

nula

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0 \quad \langle p_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0. \quad (1.3)$$

Por tanto el valor promediado que se utiliza para describir las fluctuaciones es la desviación típica de las mismas u_i' , es decir la raíz del promedio de las fluctuaciones al cuadrado (rms), que nos da una medida de la intensidad de las mismas

$$u_i'(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\langle u_i^2 \rangle}. \quad (1.4)$$

Hasta ahora se ha considerado la dependencia con el tiempo, de las magnitudes que estamos manejando. Sin embargo y dado que en este estudio los procesos se pueden considerar estadísticamente estacionarios, no se volverá a poner de manifiesto dicha dependencia.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que representan la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento son, para un fluido incompresible

$$\frac{\partial U_j(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial s_{i,j}}{\partial x_j}. \quad (1.6)$$

En la ecuación de cantidad de movimiento, el término $s_{i,j}$ representa el tensor de velocidades de deformación, dado por

$$s_{i,j} = \rho\nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Sustituyendo esta ecuación en la (2.6) se llega a

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 U_i. \quad (1.8)$$

Para obtener las ecuaciones de Reynolds basta con sustituir (2.1) y (2.2) en las ecuaciones de Navier-Stokes y promediar las ecuaciones obtenidas, resultando

$$\frac{\partial \overline{U_j}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i, \quad (1.10)$$

que son las llamadas ecuaciones de Reynolds. Como se puede observar, en estas ecuaciones aparece un término nuevo $\langle u_i u_j \rangle$ conocido como el *tensor de esfuerzos de Reynolds*, que incluye nuevas incógnitas, y por tanto, hay que encontrar nuevas ecuaciones para poder resolver el problema. Este constituye el conocido *problema de cierre de la turbulencia* del que se habló en el capítulo anterior.

1.2. La hipótesis de Taylor.

La hipótesis de Taylor permite intercambiar las variables espaciales por las temporales a través de una transformación bastante sencilla. Para poder hacer esto Taylor argumentó en su *hipótesis de turbulencia congelada*, que los cambios que sufre la componente de las fluctuaciones en la dirección del flujo (u_1) medida en un punto fijo del mismo, pueden considerarse como los debidos al paso de una estructura congelada del movimiento turbulento a través de dicho punto, siempre que se cumpla que la velocidad media que arrastra a dicha estructura es mucho mayor que las fluctuaciones de velocidad ($U_1 \gg u'_1$). Según esto el campo de fluctuaciones en cada instante admite la transformación

$$u(x, t) = u(x - U_1 t, 0). \quad (1.11)$$

De esta forma se pueden relacionar las derivadas temporales con las espaciales

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (1.12)$$

A continuación vemos que la hipótesis de Taylor es una aproximación válida si $u'_1 \ll \bar{U}_1$ (Hinze 1975). Así si consideramos un flujo de turbulencia estacionaria y homogénea, la ecuación de cantidad de movimiento será:

$$\frac{DU_1}{Dt} = \frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\bar{U} + u_i) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_1, \quad (1.13)$$

$$\frac{DU_1}{Dt} = \frac{Du_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = -u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_1. \quad (1.14)$$

Cuando $\bar{U}_1 \gg u'$ los términos del segundo miembro son despreciables respecto de los del primero, ya que las fluctuaciones de presión son del orden de ρu_1^2 debido a que la velocidad media no introduce apenas variaciones de presión, por ser bastante uniforme. Normalmente se considera válida la hipótesis de Taylor para valores de u' inferiores al 10% del valor de \bar{U} .

1.3. El espectro de energía cinética turbulenta.

El espectro de energía es una herramienta importante a la hora de caracterizar la turbulencia. Ya que de su conocimiento se desprenden magnitudes que nos permiten realizar una descripción de la misma. Para definir este concepto, es necesario remitirse a la forma que presenta el valor de la fluctuación de velocidad cuando lo representamos en el tiempo (Figura 2.1). En la fluctuación de velocidad intervienen, como es sabido, torbellinos o vórtices de distintos tamaños y por tanto asociados a distintas frecuencias (vórtices grandes se asocian a bajas frecuencias y vórtices pequeños a altas). De esta forma si a través de una herramienta, como la transformada de Fourier, descomponemos la fluctuación en las componentes correspondientes a cada frecuencia, podemos obtener la contribución de las distintas escalas de torbellinos a la fluctuación total u' . Partiendo de este razonamiento, podemos a su vez medir como contribuye cada escala a la energía total turbulenta ($\sim u'^2$). La magnitud que nos representa esto es el espectro de energía cinética turbulenta, que cumple la propiedad

$$u_1'^2 = \langle u_1^2 \rangle = \int_0^\infty E_{11}(f) df. \quad (1.15)$$

Si obtenemos el espectro a través de un analizador de espectro vía filtrado, un dispositivo que permite separar de la señal la parte correspondiente a una banda de frecuencia Δf , centrada en una frecuencia f , podemos describir el espectro como

$$E_{11}(f) = \frac{\langle u_1^2(f) \rangle}{\Delta f}. \quad (1.16)$$

Si además el ancho de banda capaz de filtrar el analizador pudiera tender a cero, tendríamos un espectro continuo dado por

$$E_{11}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\langle u_1^2(f) \rangle}{\Delta f}. \quad (1.17)$$

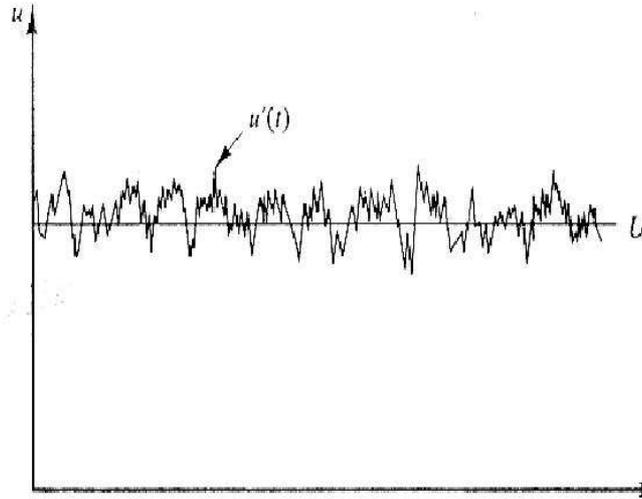


Figura 1.1: Fluctuaciones en la velocidad del fluido

Como se ha comentado, en el espectro se reparte la energía cinética turbulenta, entre las frecuencias incluidas en todo el registro de fluctuaciones. Cada frecuencia corresponde a torbellinos de tamaños y tiempos característicos determinados. Así los torbellinos grandes provocan fluctuaciones a baja frecuencia y los pequeños a frecuencias altas. Si al representar el espectro éste existe principalmente en las frecuencia bajas, entonces, la turbulencia estará dominada por las escalas grandes, mientras que si la turbulencia la dominan las escalas pequeñas, entonces el espectro estará desplazado hacia la región de altas frecuencias. Esto se pone de manifiesto si gracias a la hipótesis de Taylor, obtenemos el espectro en número de ondas, a través del espectro en frecuencias.

El número de ondas nos da una medida del tamaño de los torbellinos en función de la frecuencia y se define, a partir de la hipótesis de Taylor, de la forma

$$k_1 = \frac{2\pi f}{\bar{U}_1}. \quad (1.18)$$

El espectro en número de ondas se relaciona con el espectro en frecuencias a través de la siguiente relación

$$E_{11}(k_1) = \frac{\bar{U}_1}{2\pi} E_{11}(f). \quad (1.19)$$

Por supuesto la integral del espectro en número de ondas cumple también la

propiedad,

$$u_1'^2 = \langle u_1^2 \rangle = \int_0^\infty E_{11}(k_1) dk_1. \quad (1.20)$$

Dado que en el desarrollo de este trabajo, se han utilizado sondas simples, sólo se ha podido obtener el espectro unidimensional, correspondiente a las fluctuaciones en la dirección del flujo principal. Sin embargo las condiciones de isotropía, permitirían relacionarlo con el espectro tridimensional, a través de:

$$E_{11} = \int_{k_1}^\infty \left\{ \left(1 - \frac{k_1^2}{k}\right) \frac{E(k)}{k} \right\} dk \quad (1.21)$$

y por tanto

$$E(k) = \frac{k^3 d[k^{-1} \frac{dE_{11}(k)}{dk}]}{dk}. \quad (1.22)$$

1.4. Magnitudes relacionadas con el espectro de energía.

En este apartado se verán algunas magnitudes que se desprenden del espectro de energía y que serán utilizadas para describir la turbulencia.

1.4.1. Disipación de energía cinética turbulenta, ϵ .

Cuantifica la velocidad a la que se disipa la energía cinética, debido a los agentes viscosos, transformándose en calor. Visto de otra manera, sería la tasa a la que se debe inyectar energía al flujo, para mantener la turbulencia.

Ya se ha comentado con anterioridad que la energía cinética turbulenta pasa de los torbellinos grandes a los pequeños, repartiéndose entre éstos sin pérdidas. Esto ocurre así ya que el número de Reynolds correspondiente a los torbellinos grandes es elevado y por tanto los efectos viscosos son despreciables frente a los inerciales. Sin embargo para los torbellinos pequeños el número de Reynolds disminuye y la viscosidad gana importancia, disipándose la energía en calor.

Podemos describir este fenómeno de disipación sin más que escribir la ecuación de la energía cinética para un fluido newtoniano encerrado en un superficie S y ocupando un volumen V (ver McComb apéndice A.)

$$\frac{dE_T}{dt} = \int_V \rho u_i f_i dV - \int_V \rho \epsilon dV, \quad (1.23)$$

donde E_T es la energía cinética total en el volumen de control, f_i son las fuerzas externas por unidad de masa, ϵ es la velocidad de disipación de la energía cinética por unidad de masa de fluido y por unidad de tiempo, que viene definida por

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (1.24)$$

Analizando los miembros de la ecuación (2.23) se puede ver que la integral correspondiente al primer término del segundo miembro de la ecuación, representa la generación de energía (si es positivo) debida a las fuerzas exteriores. Por otro lado el segundo término, como ya se adelantó, representa la destrucción de energía cinética, ya que por la definición dada en (2.24) ϵ es siempre positiva. También se puede comprobar, que el caso estacionario ($\frac{dE_T}{dt} = 0$) corresponde a la situación $u_i f_i = \epsilon$ y que cuando las fuerzas exteriores son nulas, la velocidad con la que decae la energía cinética del fluido coincide con ϵ .

Si bien en (2.24) se da una definición de ϵ , podemos evaluarla a partir del espectro de energía (ver Mydlarski y Warhaft 1995) utilizando la relación isotrópica (Batchelor 1953)

$$\epsilon = 15\nu \int_0^\infty k_1^2 E_{11}(k_1) dk_1, \quad (1.25)$$

expresión que ha sido utilizada en el presente trabajo.

1.4.2. Escala de Kolmogorov, η .

La escala de Kolmogorov nos da una estimación del tamaño máximo de los torbellinos para la cual los efectos disipativos juegan un papel primordial, ya que para escalas mayores, el efecto viscoso es más débil que el inercial. Visto de otra forma, nos da el valor de la escala en la que los efectos viscosos empiezan a ser dominantes. Dado que en la disipación sólo intervienen la viscosidad ν y la velocidad de disipación, podemos definir esta longitud o escala característica mediante análisis

dimensional como

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.26)$$

En términos de número de ondas, se tendría que a la escala de Kolmogorov le correspondería el valor k_{max} relacionado con las escalas más pequeñas,

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\eta}. \quad (1.27)$$

Por otro lado podemos definir también un tiempo y una velocidad característica

$$\begin{cases} \tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \\ v = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Si definimos un número de Reynolds basado en la longitud η se obtendrá

$$Re_{\eta} = \frac{v\eta}{\nu} = 1. \quad (1.29)$$

Esto significa que para tamaños cercanos a η , los efectos viscosos son comparables a los inerciales, poniendo de manifiesto que las escalas pequeñas son las responsables de la disipación como se comentó anteriormente.

1.4.3. Longitud integral, L .

La longitud integral nos proporciona una medida estadística del tamaño de los torbellinos más grandes. Esta magnitud vendrá determinada por las dimensiones geométricas de nuestro sistema generador de turbulencia. Así en nuestros experimentos la longitud integral será del orden del tamaño de los orificios que generan los chorros, o de la distancia entre los mismos.

Un método para la obtención de la longitud integral, es aquel que está basado en la correlación que existe entre el valor de la fluctuación de dos puntos próximos en el espacio. De esta forma podríamos definirla como la mayor distancia entre dos puntos para la cual los valores de la fluctuación de velocidad de ambos, están correlacionados.

Definimos el momento de segundo orden de las fluctuaciones, a través de la ecuación

$$Q_{ij}(x, x'; t, t') = \langle u_i(x, t) u_j(x', t') \rangle. \quad (1.30)$$

El coeficiente de correlación R_{11} se define a partir del momento de segundo orden para las fluctuaciones de velocidad $Q_{ij}(x, x'; t, t')$ (2.30), para $t = t' = 0$ a través de la siguiente ecuación

$$Q_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = R_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_1(\mathbf{x}) u_1'(\mathbf{x}') \quad (1.31)$$

Así, si tomamos $R_{11}(r_1)$ como el valor del coeficiente de correlación espacial para los valores de la componente u_1 fluctuación tomados en el mismo instante t , entre dos puntos separados una distancia r_1 en la dirección del flujo principal podemos definir la longitud integral a través de la ecuación

$$L_{11} = \int_0^\infty R_{11}(r_1) dr_1, \quad (1.32)$$

En los experimentos realizados en este trabajo, las muestras se han realizado en un único punto espacial, con una única sonda. Por tanto no se puede aplicar la ecuación anterior y se recurre a la correlación temporal. De esta forma, si consideramos la función $R_{11}(\tau)$ como el coeficiente de correlación temporal de los valores u_1 tomados en un mismo punto del espacio pero espaciados temporalmente, definimos el tiempo integral T_I como

$$T_I = \int_0^\infty R_{11}(\tau) d\tau, \quad (1.33)$$

que no es más que el tiempo máximo que puede pasar entre dos medidas de la u_1 en un punto, para que estén correlacionadas. Aplicando la hipótesis de Taylor que nos permite intercambiar variable temporal por espacial, podemos obtener la longitud integral a partir de T_I sin más que hacer

$$L_{11} = \bar{U} T_I. \quad (1.34)$$

Del mismo modo que hicimos para la escala de Kolmogorov, podemos expresar la longitud integral en términos de números de onda. De esta forma obtendíamos

k_{min} , correspondiente a los torbellinos grandes.

$$k_{min} = \frac{2\pi}{L}. \quad (1.35)$$

1.4.4. El rango inercial

Hemos visto que la longitud integral y k_{min} , corresponden a las escalas grandes de la turbulencia, que son las que determinan el contenido principal de energía de la turbulencia. Por otro lado se tiene que la escala de Kolmogorov y k_{max} determinan el valor de las escalas en las que se produce la disipación de la misma. Entre estos límites existe un abanico de tamaños de vórtices de una escala del orden de l tal que $L \gg l \gg \eta$, que forman el llamado rango inercial. Cuanto mayor sea la relación k_{max}/k_{min} , más ancho será el rango inercial. En teoría, por tanto, puede hacerse todo lo amplio que se quiera, pues la relación anterior crece al aumentar el número de Reynolds.

El rango inercial, es importantísimo en el estudio de la turbulencia, pues es una zona, en la que podemos estudiar la transferencia de energía, sin preocuparnos por los detalles de entrada o salida de la misma. Además en este rango la turbulencia es homogénea y no disipativa. Veremos ahora, como en el rango inercial podemos escribir una expresión analítica para describir el espectro de energía. Así la hipótesis de Kolmogorov postula que a números de ondas suficientemente elevados el espectro de energía sólo depende de la viscosidad, de la velocidad de disipación y del número de ondas, y no depende de los detalles de las escalas grandes que generan la turbulencia. Por tanto, aplicando análisis dimensional, se puede escribir

$$E(k) = \nu^{\frac{5}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}} f(k\eta), \quad (1.36)$$

donde f es una función universal, o sea, independiente del tipo de flujo.

Por otro lado en el rango inercial, a números de Reynolds grandes, la dependencia con la viscosidad debe desaparecer. Por tanto debemos buscar una expresión de f , que haga que $E(k)$ sea independiente de la viscosidad cuando el número de Reynolds tienda a infinito.

$$f(k\eta) = \alpha \nu^{-\frac{5}{4}} \epsilon^{\frac{5}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (1.37)$$

donde α es una constante. De esta forma se obtiene la ecuación del espectro en la

zona inercial dada por

$$E(k) = \alpha \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \quad (1.38)$$

La expresión anterior hacía referencia al espectro tridimensional, por tanto haciendo uso de la ecuación (2.22) podemos escribir la expresión del espectro unidimensional bajo las hipótesis de Kolmogorov

$$E_{11}(k_1) = C_k \epsilon^{\frac{2}{3}} k_1^{-\frac{5}{3}}, \quad (1.39)$$

en la que C_k es la constante de Kolmogorov, que experimentalmente toma valores en torno a 0,5 (ver la recopilación de los valores obtenidos por distintos autores, hecha por Sreenivasan en 1995).

1.4.5. Número de Reynolds basado en la longitud de Taylor, Re_λ .

La longitud de Taylor (λ) es una longitud característica definida de forma artificial, pero que resulta útil en el tratamiento matemático. Por tanto no se identifica con ningún tamaño físicamente relevante, aunque puede decirse que corresponde a tamaños pequeños respecto a las escalas mayores del sistema a estudiar, aunque no tan pequeños como la escala de Kolmogorov. Por tanto λ , se encuentra comprendida entre L y η . La ventaja de utilizar un número de Reynolds referido a este valor, radica en que nos permite comparar la intensidad de la turbulencia en experimentos diferentes, pues es independiente de la geometría de estos.

El valor de Re_λ se define como

$$Re_\lambda = \frac{u' \lambda}{\nu}, \quad (1.40)$$

donde la longitud de Taylor viene definida por

$$\lambda = \left[\frac{\overline{u^2}}{(\frac{\partial u}{\partial x})^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.41)$$

Por otro lado la velocidad de disipación puede expresarse como (Mydlarski y Warhaft 1995)

$$\epsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}. \quad (1.42)$$

Por tanto la escala de Taylor quedaría

$$\lambda = u' \left(\frac{15\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.43)$$

1.5. Implicaciones de la isotropía y su generación en laboratorio

Partiendo de la definición de isotropía dada en el primer capítulo, se pueden obtener las siguientes implicaciones para el tensor de correlaciones de segundo orden

$$\langle u_1 u_2 \rangle = \langle u_1 u_3 \rangle = \langle u_2 u_3 \rangle = 0, \quad (1.44)$$

$$\langle u_1^2 \rangle = \langle u_2^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = \langle u^2 \rangle. \quad (1.45)$$

Así la correlación correspondiente a un único punto del espacio y en un mismo instante de tiempo R_{11} , puede escribirse

$$Q_{11}(0) = \langle u^2 \rangle = \frac{2(\frac{1}{2}(\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle))}{3} = \frac{2E}{3}, \quad (1.46)$$

donde E representa la energía cinética de las fluctuaciones por unidad de masa. Por tanto la condición de isotropía implica que la energía cinética turbulenta se reparte por igual en las tres direcciones del espacio.

1.5.1. Generación en laboratorio de la turbulencia isotrópica.

En laboratorio, es corriente que los investigadores utilicen como método para generar turbulencia isotrópica, métodos basados en hacer pasar la corriente a través de rejillas o mallas, generándose la conocida *turbulencia de rejilla*. Si el perfil de velocidades es plano en gran parte de la sección y se tiene que la capa límite asociada a la pared del túnel es delgada, entonces se forman vórtices aguas abajo de cada barra que forma la malla. Estas calles de torbellinos coalescen a cierta distancia aguas

abajo y forman un flujo turbulento. La experiencia demuestra que, suficientemente lejos de la rejilla, estos flujos son isótropos y homogéneos, salvo en la zona afectada por la capa límite. Así en la práctica se tiene que cerca de la malla la turbulencia depende fuertemente del modo en que se produce, pero al alejarse la estructura de la turbulencia adquiere un carácter más universal.

Este tipo de métodos se conoce como métodos pasivos, pues los elementos generadores de turbulencia permanecen inmóviles. Existen un buen número de experimentos basados en éstos (ver Comte-Bellot y Corrsin 1965, Kistler 1966, Schedvin 1974, Van Atta 1969). Un ejemplo de estos métodos pasivos se encuentra en el trabajo realizado por Daniel Polo (2000), en el que se realizan experimentos con una matriz de chorros inyectados en la dirección del flujo, para conseguir una mejora en la intensidad turbulenta, respecto a la conseguida usando malla metálica. Existen también otros métodos, denominados activos, en los que los elementos generadores de turbulencia, presentan cierto movimiento y por tanto comunican cantidad de movimiento al fluido. Entre los trabajos realizados con estos métodos destacan por un lado el realizado por Gad-el-Hak y Corrsin (1974), en el cual la turbulencia se generaba en un túnel mediante una parrilla de chorros de aire inyectados en proporción variable respecto al flujo principal; y por otro, el realizado por Mydlarsky y Warhaft (1996), en que se utiliza una malla con aletas triangulares que giran de forma aleatoria, colocada a la entrada del túnel, consiguiendo $Re_\lambda \sim 500$.