

CAPÍTULO 3

**REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS.
MODELOS DEA**

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 se desarrollan los modelos DEA de reasignación centralizada de recursos.

Veremos un ejemplo gráfico, que servirá de introducción a la 1ª y 2ª fase para cada modelo, entenderemos en que consisten los denominados modelos híbridos, explicaremos en qué consiste la 3ª fase y por último veremos un capítulo de conclusiones, donde se comparan modelos tradicionales y centralizados.

2. PROBLEMA CENTRALIZADO

La realización del modelo centralizado viene motivada por la búsqueda de un nuevo escenario en el que una entidad superior asignará los recursos a todas las unidades productivas del problema. Esto es así porque los recursos son escasos y el objetivo de muchas organizaciones puede ser el reducir de la mayor forma posible el total de recursos que se consume.

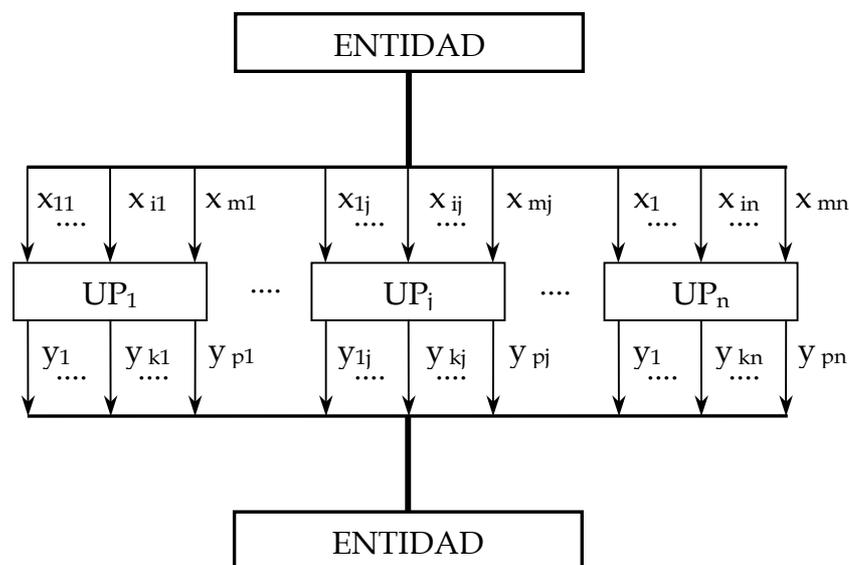


Figura 3.1. Esquema del problema centralizado

Un ejemplo que define bien este problema son los hospitales públicos que dependen de una comunidad autónoma. En este caso hay una entidad superior: la comunidad autónoma, que es quien decide la asignación de recursos, como por ejemplo: presupuesto designado a cada hospital, número de médicos asignados, etc.; y unas unidades productivas que son los hospitales. Los hospitales no controlan la cantidad de los recursos que poseen sino que dependen de los que le sean asignados por la entidad superior.

Esta situación habitual en procesos reales no estaba considerada en los modelos anteriores. Con los modelos tradicionales no se puede resolver este tipo de problemas por lo que se hacía necesaria la inclusión de un nuevo tipo de modelo DEA.

El objetivo es ahora reducir la cantidad total de recursos que se asignan a las unidades o aumentar los productos que dan las unidades productivas a la entidad superior.

En esta ocasión las unidades productivas no pueden denominarse DMU, porque no son ellas las que decidan la cantidad de entradas a consumir, sino que la unidad superior le reasigna los recursos para la mejora de todas las unidades en su conjunto.

Por conveniencia, sin embargo, mantendremos en este la denominación de DMU (aunque no es la correcta). El único y real decisor en el problema es la planificación central.

Ejemplo numérico y gráfico

Planteamos la siguiente situación inicial ($\sum X = 195$). El modelo CCR-I propone la siguiente reducción de la suma de las entradas $\sum X = 117$. Sin embargo, por ejemplo puede plantearse una solución mejor que la obtenida por el modelo CCR-I: $\sum X = 116,5$. Por lo tanto hay que introducir un nuevo modelo que proporcione la solución óptima. Veamos las características de los modelos centralizados a través de un ejemplo numérico y gráfico de un modelo Radial CRS-INPUT Centralizado para el caso de una entrada y una salida. No se ha formulado todavía el modelo, por lo tanto, sólo veremos una solución que mejora al modelo tradicional.

La frontera eficiente es la línea que une el origen con la DMU₁, al ser de retorno de escala constante:

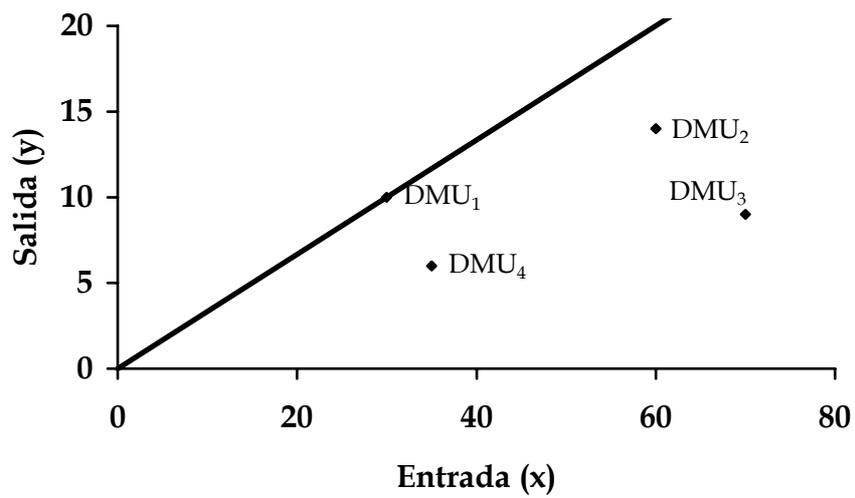


Figura 3.2. Ejemplo gráfico con 1 entrada y 1 salida

Los 4 puntos representados en la gráfica son los siguientes:

DMU	X	Y
1	30	10
2	60	14
3	70	9
4	35	6
TOTAL	195	39

Tabla 3.1. Valores de cada DMU

La frontera eficiente atraviesa por la DMU₁, que es la que presenta una mayor eficiencia (mayor cociente y/x).

Proyectamos cada unidad productiva sobre la frontera eficiente:

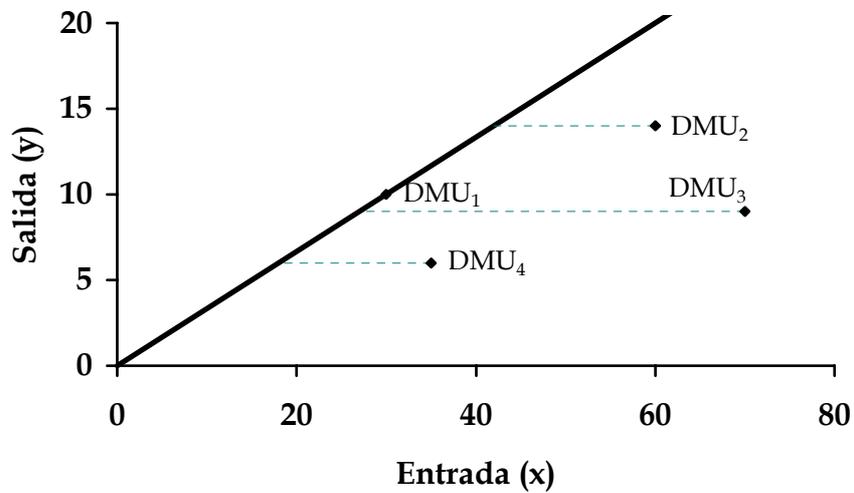


Figura 3.3. Resolución gráfica del modelo CCR-I, caso tradicional

DMU	X'	Y'
1	30	10
2	42	14
3	27	9
4	18	6
TOTAL	117	39

Tabla 3.2. Resultados numéricos de cada DMU para la solución propuesta

Planteamos, sin embargo, la siguiente solución sobre el ejemplo anteriormente descrito, donde se buscará una disminución mayor del total de los recursos consumidos por el conjunto de las DMU's del problema.

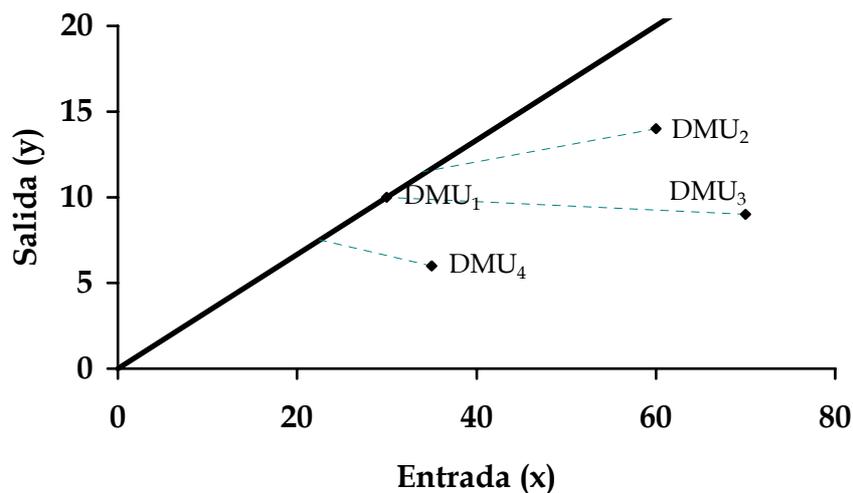


Figura 3.4. Proyecciones de cada DMU sobre la frontera eficiente

Cada DMU se proyecta sobre un punto de la frontera de la frontera eficiente indicado en la siguiente tabla:

DMU	X'	Y'
1	30	10
2	34	11.5
3	30	10
4	22,5	7.5
TOTAL	116,5	39

Tabla 3.3. Proyecciones de cada DMU para un modelo Radial CCR-I Centralizado

Vemos que todas las unidades productivas han disminuido sus entradas. Esto es evidente al tratarse de un modelo con orientación de entrada. Sin embargo ha habido unidades que han aumentado su salida, como la DMU3 y la DMU4 . Mientras, la DMU2 ha disminuido su salida, esto es debido a que en el modelo centralizado se sacrifican algunas unidades productivas a costa de mejorar el conjunto global. A diferencia de los modelos tradicionales hay unidades que empeoran. Analizando el conjunto vemos que $\sum X' = 116,5 < \sum X = 195$, el resultado que esperamos, porque al ser un modelo con orientación de entrada, y además centralizado, se han reducido los recursos de todo el conjunto. En cuanto a las salidas: $\sum Y' = 39 = \sum Y$, la suma global no ha variado, por lo que podemos comprobar que la eficiencia global ha mejorado, al ser necesario menos recursos.

Como se puede observar el resultado para el modelo tradicional es peor que el caso propuesto, el resultado para las entradas es más alto $\sum X^i=117 > \sum X^i=116,5$, y al ser la suma de las salidas igual, lógicamente la eficiencia es menor para el caso tradicional, por lo que se comprueba que los modelos centralizados suponen una mejora respecto a los tradicionales, como ya se dijo antes, aunque algunas DMUs reduzcan sus entradas habrá otras que empeoren, pero en conjunto la suma de las entradas disminuirá, incluso, como se puede comprobar en este último ejemplo, mejoran los resultados obtenidos en el modelo tradicional.

Por lo tanto hay que introducir un modelo DEA que incorpora la posibilidad de empeoramiento individual de la unidades productivas y que el objetivo sea la mejora común en la organización.

Las bases de los modelos centralizados expuestos en este proyecto son fruto de la evolución de otros modelos anteriores, entre los que caben destacar:

- Modelos de Golany, Philips y Rousseau (1993): los autores proponen tres tipos de modelos lineales que resuelven a partir de la solución obtenida mediante un modelo DEA. Dan una buena solución pero no la óptima pues se realizan cálculos de forma heurística.
- Modelos de Golany y Tamir (1995): Estos modelos tienen una gran dependencia de los parámetros introducidos, el total de las restricciones hacen que muchos problemas resulten inadmisibles y algunas de ellas puedan dar lugar a que determinadas unidades productivas no se proyecten sobre la frontera eficiente.
- Modelo de Athanassopoulos (1995): Es un modelo bastante complejo que tiene los mismos problemas que los modelos de Golany y Tamir.
- Modelo de Fare et al. (1997): Resuelve un caso muy particular donde sólo una entrada es objeto de reasignación entre las salidas y que además deben ser conocidas a priori la cantidad de recurso fijo que cada unidad productiva debe usar para producir cada una de sus salidas.
- Modelo de Athanassopoulos (1998): Esta vez utiliza unos ratios de transformación entre entrada y salidas cuando la unidad es considerada eficiente. Pese a no ser tan complejo como su modelo anterior, presenta los mismos problemas.
- Modelo de Krishna Kumar y Sinha (1999): Plantea un problema no lineal difícil de resolver que carece de sentido en casos reales.
- Modelos de Beasley (2003): Plantea dos modelos no lineales basados en DEA. Para resolver el primer modelo emplea metaheurísticas que no aseguran la solución óptima del problema,

mientras que en el segundo modelo las unidades productivas pueden no proyectarse sobre la frontera eficiente.

3. MODELOS CENTRALIZADOS BÁSICOS

Como en el caso tradicional desarrollaremos los modelos básicos para el caso centralizado: modelo CRS Centralizado, modelo VRS Centralizado y modelo Aditivo Centralizado.

3.1. Modelos CRS Centralizados

Aquí, se introducen los modelos centralizados para el caso de retorno de escala constante. Veremos los modelos radiales, los no radiales y los modelos híbridos, mezcla entre tradicional (vistos en los modelos básicos) y centralizado.

3.1.1. Modelo Radial CRS-Input Centralizado

En el apartado anterior hemos introducido este modelo a través de un ejemplo gráfico. En este otro apartado explicaremos los pasos necesarios para plantear el modelo en sus 2 fases.

Desarrollo del modelo en sus 2 fases

En la primera fase se busca una reducción equi-proporcional en todas las entradas, mientras que en la segunda fase lo que se busca es una reducción adicional de las entradas y/ó una expansión de las salidas. Las dos diferencias esenciales respecto de los modelos DEA convencionales son:

- En vez de solucionar un modelo de programación lineal para cada DMU presente en el problema, todas las DMUs son proyectadas de forma simultánea.
- En vez de reducir las entradas de cada DMU, es el total del consumo de entradas de las DMUs lo que se pretende reducir.

(Fase I/Radial/Orientación de entrada)

MIN : θ

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_{jr} \geq 0$$

θ libre

Es un problema lineal con n^2+1 variables y $m+s$ restricciones. Siendo θ^* el óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial/Orientación de entrada)

$$MAX : \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

Una vez resuelta la fase II, el vector $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ define para cada DMU r el punto al cuál deberían tender dichas unidades.

Las entradas y salidas de cada punto pueden ser calculadas como:

$$x_{ir}' = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{kr}' = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

El modelo radial propuesto proyecta de forma conjunta cada DMU existente sobre la frontera de eficiencia técnica.

Una reasignación centralizada de recursos implica un sometimiento de las unidades individuales en su comportamiento de cara al objetivo del sistema como un todo.

3.1.2. Modelo Híbrido CRS-Input Tradicional- Centralizado

En el modelo híbrido algunas entradas o salidas deberán considerarse de manera tradicional, mientras que habrá otras que serán tratadas desde el punto de vista centralizado. Así:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{Centralizado}} \cup I_{\text{Tradicional}} \quad (\text{entradas}) \\ O &= O_{\text{Centralizado}} \cup O_{\text{Tradicional}} \quad (\text{salidas}) \end{aligned}$$

El concepto de tradicional implica que se está impidiendo empeoramientos individuales de las DMU's cuando se resuelve el modelo.

El modelo en sus dos fases queda:

(Fase I/Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$\text{MIN : } \quad \theta$$

s.a :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq y_{kr} & \forall k \in O_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} & \forall k \in O_{\text{Centralizado}} \\ \lambda_{jr} &\geq 0, \theta \text{ libre} \end{aligned}$$

(Fase II/Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$\text{MAX : } \quad \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k \in O_{\text{Centr}}} h_k^+ + \sum_{r=1}^n \sum_{k \in O_{\text{Trad}}} h_{kr}^+$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &= \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ & \forall k \in O_{\text{Centralizado}} \\ \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+, h_{kr}^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

Podemos ver cómo hemos dividido las restricciones del modelo para las variables de entrada en 2 restricciones distintas: unas para las variables del modelo tradicional y otras para el nuevo modelo centralizado.

3.1.3. Modelo Radial CRS-Output Centralizado

Las dos fases son:

(Fase I/Radial/Orientación de salida)

$$MAX \quad : \quad \gamma$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_{jr} \geq 0$$

γ libre

Es un problema lineal con n^2+1 variables y $m+s$ restricciones. Siendo γ^* el óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial/Orientación de salida)

$$MAX \quad \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} = \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

En este caso, al ser de orientación de salida; la entidad superior lo que pretende es maximizar las salidas, por lo que habrá unidades en las que las salidas obtenidas sean mayores y otras en las que serán menores, pero en el conjunto de todas las salidas la salida total será mayor.

3.1.4. Modelo Híbrido CRS-Output Tradicional-Centralizado

Planteamos las 2 fases para el modelo:

(Fase I/Radial Híbrido /Orientación de salida)

$$MAX : \quad \gamma$$

s.a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq x_{ir} \quad \forall i \in I_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i \in I_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{jr} &\geq 0, \gamma \text{ libre} \end{aligned}$$

La segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial Híbrido/Orientación de salida)

$$MAX : \quad \sum_{i \in I_{\text{Central}}} h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{r=1}^n \sum_{i \in I_{\text{Rad}}} h_{ir}^-$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &= \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \in I_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &= x_{ir} - h_{ir}^- \quad \forall i \in I_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &= \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+, h_{ir}^- &\geq 0 \end{aligned}$$

3.2. Modelos VRS Centralizados

Al igual que ocurría con los modelos CRS Centralizados vamos a ver los mismos casos para el VRS Centralizado: modelos VRS-Input, VRS-Output y modelos VRS-Híbrido.

3.2.1. Modelo VRS-Input Centralizado

(Fase I/Radial/Orientación de entrada)

MIN : θ

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad \theta \text{ libre}$$

Es un problema lineal con n^2+1 variables y $m+s+n$ restricciones. Siendo θ^* el óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial/Orientación de entrada)

$$MAX : \quad \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

Una vez resuelta la fase II, el vector $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ define para cada DMU r el punto al cuál deberían tender dichas unidades.

3.2.2. Modelo Híbrido VRS-Input Tradicional-Centralizado

Nuevamente planteamos las 2 fases para este modelo:

(Fase I/Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$MIN : \quad \theta$$

s.a :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq y_{kr} & \forall k \in O_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} & \forall k \in O_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr} &\geq 0 \\ \theta &\text{ libre} \end{aligned}$$

La segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$MAX : \quad \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k \in O_{\text{Central}}} h_k^+ + \sum_{r=1}^n \sum_{k \in O_{\text{Trad}}} h_{kr}^+$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ & \forall k \in O_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= y_{kr} + h_{kr}^+ & \forall k \in O_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+, h_{kr}^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

3.2.3. Modelo VRS-Output Centralizado

Igualmente como en el caso anterior las dos fases son:

(Fase I/Radial/Orientación de salida)

$$MAX \quad : \quad \gamma$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \sum_{r=1}^n x_{ij} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} & k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr} &\geq 0 \\ \gamma &\text{ libre} \end{aligned}$$

Siendo γ^* el óptimo de la fase I, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial/Orientación de salida)

$$MAX \quad \sum_{i=1}^m h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \sum_{r=1}^n x_{ij} - h_i^- & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ & k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, al ser de orientación de salida, la entidad superior lo que pretende es maximizar las salidas, por lo que habrá unidades en las que las salidas obtenidas sean mayores y otras en las que serán menores, pero en el conjunto de todas las salidas, la salida total será mayor.

3.2.4. Modelo Híbrido VRS-Output Tradicional-Centralizado

Planteamos las 2 fases para el modelo:

(Fase I/Radial Híbrido /Orientación de salida)

MAX : γ

s.a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq x_{ir} && \forall i \in I_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &\leq \sum_{r=1}^n x_{ir} && \forall i \in I_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &\geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} && k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 && r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr} &\geq 0 \\ \gamma &\text{ libre} \end{aligned}$$

La segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial Híbrido/Orientación de salida)

$$\text{MAX : } \sum_{i \in I_{\text{Centralizado}}} h_i^- + \sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{r=1}^n \sum_{i \in I_{\text{Centralizado}}} h_{ir}^-$$

s.a :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &= \sum_{r=1}^n x_{ir} - h_i^- && \forall i \in I_{\text{Centralizado}} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} &= x_{ir} - h_{ir}^- && \forall i \in I_{\text{Tradicional}}, \forall r \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} &= \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ && k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 && r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+, h_{ir}^- &\geq 0 \end{aligned}$$

3.3. Modelos No Radiales Centralizados

Vamos a plantear el modelo con orientación de entrada y salida. Estos modelos vienen motivados porque hayan unas entradas/salidas más importantes que otras.

3.3.1. Modelo No Radial Centralizado con Orientación de Entrada

En este apartado se presenta un nuevo modelo no radial con orientación de entrada, que también consta de dos fases. La fase I considera un factor de reducción diferente para cada entrada, ponderándolos de acuerdo a las preferencias del analista. Sea:

- θ_i Factor de reducción para el consumo total de entrada i
- w_i Coeficiente de preferencia para la reducción del consumo total de entrada i

El modelo en su fase I es:

(Fase I/No Radial/Orientación de entrada)

$$MIN : \sum_{i=1}^m w_i \theta_i$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta_i \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad \theta_i \text{ libres}$$

Este modelo de programación lineal tiene n^2+m variables y $m+s+n$ restricciones. Si θ_i^* es el óptimo del modelo anterior, entonces la fase II puede formularse como:

(Fase II/No Radial/Orientación de entrada)

$$MAX : \sum_{k=1}^s t_k$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta_i^* \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr}, t_k \geq 0$$

Como puede observarse, para este modelo no se requieren holguras de entrada ya que la fase I ha agotado todas las posibles reducciones a lo largo de cada dimensión de entrada. Una vez resuelta la fase II, el vector $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ define para cada DMU_r la unidad productiva sobre la que se proyecta. Las entradas y salidas de cada punto pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{ir} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i$$

$$\bar{y}_{kr} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad \forall k$$

Por lo tanto, los dos modelos propuestos, radial y no radial, proyectan todas las DMUs de forma conjunta sobre la frontera de eficiencia técnica.

3.3.2. Modelo No Radial Híbrido Tradicional-Centralizado con Orientación de Entrada

(Fase I/No Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$MIN : \sum_{i=1}^m w_i \theta_i$$

s.a.:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta_i \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \in O_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_{kr} \quad \forall k \in O_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad \theta_i \text{ libres}$$

(Fase II/No Radial Híbrido/Orientación de entrada)

$$MAX : \sum_{k \in O_{Central}} t_k + \sum_{k \in O_{Trad}} \sum_{r=1}^n t'_{kr}$$

s.a.:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta_i^* \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \in O_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = y_{kr} + t'_{kr} \quad \forall k \in O_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr}, t_k, t'_{kr} \geq 0$$

3.3.3. Modelo No Radial Centralizado con Orientación de Salida

Planteamos a continuación el modelo resuelto en sus 2 fases:

(Fase I/No Radial/Orientación de salida)

$$MAX : \quad \sum_{k=1}^m w_k \gamma_k$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \sum_{r=1}^n x_{ij} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \gamma_k \sum_{r=1}^n y_{kr} & k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr} &\geq 0 \\ \gamma_k &\text{ libres} \end{aligned}$$

Este modelo de programación lineal tiene n^2+m variables y $m+p+n$ restricciones. Si γ_K es el óptimo del modelo anterior, entonces la fase II puede formularse como:

(Fase II/No Radial/Orientación de salida)

$$MAX : \quad \sum_{i=1}^m u_i$$

s.a:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \sum_{r=1}^n x_{ij} + u_i & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \gamma_k^* \sum_{r=1}^n y_{kr} & k = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & r = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_{jr}, u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

3.3.4. Modelo No Radial Híbrido Tradicional-Centralizado con Orientación de Salida

(Fase I/No Radial Híbrido/Orientación de salida)

$$MAX : \quad \sum_{k=1}^m w_k \gamma_k$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad \forall i \in I_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall i \in I_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma_k y_{kr} \quad \forall k \in O_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr} \geq 0$$

γ_k libres

(Fase II/No Radial Híbrido/Orientación de salida)

$$MAX : \quad \sum_{i \in I_{Central}} u_i + \sum_{i \in I_{Trad}} \sum_{r=1}^n u'_{ir}$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ij} + u_i \quad \forall i \in I_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = x_{ij} + u_{ir} \quad \forall i \in I_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma_k^* \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr}, u_i, u_{ir} \geq 0$$

3.4. Modelo Aditivo Centralizado

Como hemos hecho en todos los modelos anteriores, partimos del modelo aditivo. Este modelo, recordemos, es de retornos de escala variables y la proyección que realiza sobre la frontera eficiente es en dirección rectangular (paralela a los ejes), por tanto no es radial como el BCC y el CCR, sólo se realizará la 2ª fase de estos modelos. En este modelo siempre se maximizan las holguras por lo que no se distinguirá entre orientación de entrada y de salida.

3.4.1. Modelo Aditivo Centralizado Híbrido Tradicional-Centralizado

Al ser un modelo aditivo tendremos una sola fase, contrariamente a lo que ocurría con otros modelos:

$$MAX : \quad \sum_{i \in I_{Central}} h_i^- + \sum_{k \in O_{Central}} h_k^+ + \sum_{r=1}^n \sum_{i \in I_{Trad}} h_{ir}^- + \sum_{r=1}^n \sum_{k \in O_{Trad}} h_{kr}^+$$

s.a:

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ij} - h_i^- \quad \forall i \in I_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = x_{ij} - h_{ir}^- \quad \forall i \in I_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \in O_{Centralizado}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = y_{kr} + h_{kr}^+ \quad \forall k \in O_{Tradicional}, \forall r$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+, h_{ir}^-, h_{kr}^+ \geq 0$$

4. FASE 3 DE LOS MODELOS CENTRALIZADOS

Una vez resueltas las dos fases de los modelos propuestos en el apartado anterior nos planteamos que las proyecciones obtenidas se realicen sobre los consumos y producciones más cercanos a las unidades originales, es éste el motivo de que haga falta una tercera fase. Esto puede realizarse debido a las múltiples soluciones óptimas alternativas que ofrece el modelo al ser resuelto.

El criterio de mínima distancia se debe a que en la realidad cuando decimos que una unidad se proyecta sobre otra, implica una modificación en la cantidad de recursos y productos involucrados. Cuanto menos traumático sea ese cambio, más realista es la solución propuesta.

Para ello se define una Medida de Proximidad (MP), entre la DMU original y la DMU propuesta por el modelo como resultado de resolver las dos primeras fases:

$$MP(j, r) = \frac{1}{m + p} \left[\sum_{i=1}^m \frac{|x_{ij} - x_{ir}|}{\max\{x_{ij}, x_{ir}\}} + \sum_{k=1}^p \frac{|y_{kj} - y_{kr}|}{\max\{y_{kj}, y_{kr}\}} \right]$$

También hemos de considerar la siguiente variable de decisión binaria:

$$\mu_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{si } DMU_j \text{ se proyecta sobre } DMU_r, \\ 0 & \text{si } DMU_j \text{ no se proyecta sobre } DMU_r, \end{cases}$$

La tercera fase del modelo queda:

(Fase III)

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n MP(j, r) \mu_{jr}$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \mu_{jr} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\mu_{jr} \in \{0,1\}$$

El primer grupo de restricciones hace que cada unidad existente realice sólo una proyección, mientras que el segundo grupo obliga a que cada proyección sólo sea escogida por una sola DMU existente.

Como consecuencia de realizar esta tercera fase obtenemos una solución que se ajusta mejor a la realidad.

A continuación, se plantea un ejemplo con una entrada y una salida que nos ayuda a comprender la impotancia de esta tercera fase. Los datos de entrada son los que se reflejan en la siguiente tabla:

DMU	X	Y
A	3	3
B	4	8
C	5	5
D	5	10
E	6	8
F	7	11
G	8	9
TOTAL	38	54

Tabla 3.4: Datos de entrada para ilustrar la tercera fase

Los resultados obtenidos una vez resueltas las dos primeras fases del modelo VRS con orientación de salida son los siguientes:

DMU	X	Y
A	6	10,5
B	7	11
C	5	10
D	5	10
E	5	10
F	5	10
G	5	10
TOTAL	38	71,5

Tabla 3.5: Resultados de las dos primeras fases del modelo VRS-O

Al ser un problema con sólo una entrada y una salida se puede representar gráficamente este resultado:

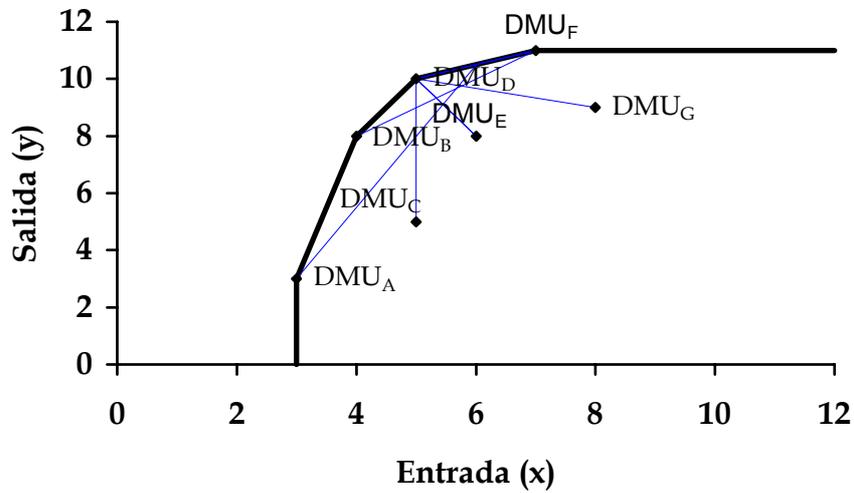


Figura 3.5. Proyecciones de cada DMU sobre la frontera eficiente propuestas por las dos primeras fases del modelo VRS-O

A continuación se aplica la tercera fase al problema, obteniéndose los siguientes resultados:

DMU	X	Y
A	5	10
B	5	10
C	5	10
D	5	10
E	6	10,5
F	7	11
G	5	10
TOTAL	38	71,5
γ^*	1,3241	

Tabla 3.6: Resultados propuestos por la fase III del modelo VRS-O

Siendo su representación gráfica:

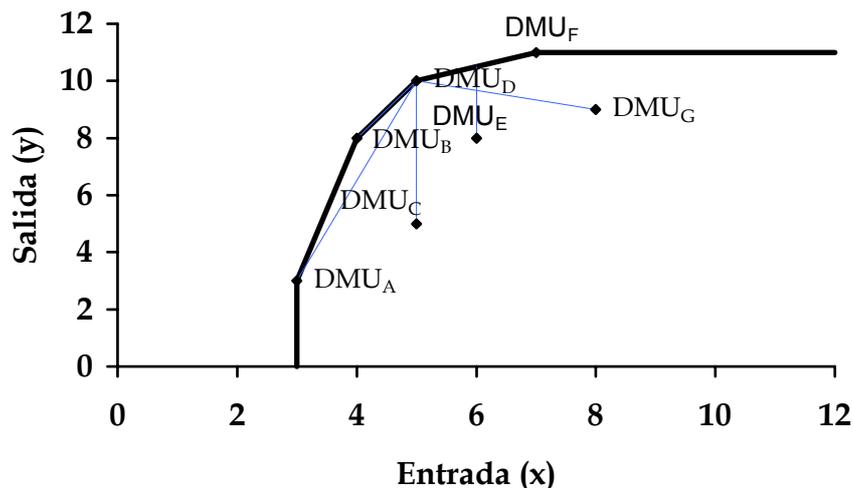


Figura 3.6. Proyecciones de cada DMU sobre la frontera eficiente propuestas tras la tercera fase del modelo VRS-O

Comparando las figuras 3.5 y 3.6, se aprecia que las proyecciones de los consumos y producciones se ajustan más a los datos de entrada en la figura 6. Puede observarse que la distancia entre la proyección final y la unidad original en la unidad E es un poco mayor tras la tercera fase mientras que en las DMUs A, B y F estas distancias son claramente mucho menores, las unidades productivas C y G se proyectan de forma idéntica en las dos figuras. Puede deducirse como era previsible que la distancia media entre las DMUs originales y sus proyecciones es inferior tras la resolución de la tercera fase.

5. CONCLUSIONES

La realización de un modelo centralizado se debe a la existencia de una entidad de nivel superior que tiene como objetivo la mejora global del sistema que tiene a su cargo, reduciendo los recursos consumidos o aumentando los productos generados por el conjunto de unidades productivas. A diferencia de los modelos tradicionales es posible que alguna DMU empeore para conseguir un aumento de la eficiencia global del sistema.

Frente a las dos fases de los modelos tradicionales, se ha incorporado una tercera a los modelos centralizados que permite que las proyecciones obtenidas se realicen sobre los consumos y producciones más cercanos a las unidades originales.

Los modelos centralizados propuestos pueden acomodarse a diferentes condiciones del problema de una manera sencilla añadiendo restricciones adicionales como cotas en los cambios que puedan producirse sobre las entradas y salidas, límites superiores y/ó inferiores en las entradas o salidas individuales, etc. Pero se debe tener en cuenta que al utilizar dichas restricciones posiblemente se impida la proyección de todas las DMUs sobre la frontera eficiente, característica ésta en principio más deseable que las anteriores.