

CAPÍTULO 4

MODELOS CENTRALIZADOS CON OPCIÓN DE DESAPARICIÓN DE UNIDADES PRODUCTIVAS

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo planteamos la posibilidad de que alguna DMU pueda desaparecer al ser innecesaria en la consecución del objetivo global.

Este análisis carece de sentido en los problemas tradicionales, ya que en éstos sólo se pretende la mejora individual de cada unidad productiva. En los modelos centralizados el sistema está a cargo de una entidad superior que plantea una mejora global, pudiendo contribuir a dicha mejora el que alguna DMU desapareciese.

Plantaremos tres tipos de modelos de retorno variables con opción de desaparición de unidades productivas: Modelos centralizados para identificar unidades productivas susceptibles de desaparecer, modelos centralizados con un objetivo de unidades prefijado y modelos centralizados con un objetivo de reducción prefijada.

2. MODELOS VRS CENTRALIZADOS CON OPCIÓN DE DESAPARICIÓN DE UNIDADES PRODUCTIVAS.

2.1. Modelos centralizados para identificar unidades productivas susceptibles de desaparecer.

La entidad de nivel superior tiene como objetivo reasignar los recursos que reparte a las unidades productivas de forma que se identifiquen a aquéllas que, si desapareciesen, harían mejorar la situación global del conjunto. Por lo tanto, los modelos identifican el número de unidades que podrían desaparecer sin empeorar la situación global.

2.1.1. Modelo con orientación de entrada.

Sean las siguientes variables:

n	número de unidades productivas consideradas.
m	número de entradas del problema.
p	número de salidas del problema.
j,r	índices para las unidades productivas.
i	índice para las entradas.
k	índice para las salidas.

x_{ij}	cantidad de recurso i consumida por la unidad j .
y_{kj}	cantidad de producto k generada por la unidad j .
θ	variable de reducción radial del total de las entradas.
$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr})$	vector para la proyección de la unidad r .

Además considérese la siguiente variable binaria para cada unidad productiva r :

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{si DMU}_r \text{ no desaparece} \\ 0 & \text{si DMU}_r \text{ desaparece} \end{cases}$$

Planteamos a continuación las tres fases que forman este modelo:

(Fase I)

Minimizar θ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\theta \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

De esta primera fase tendríamos el valor de θ^* .

El primer grupo de restricciones, hace que en la solución obtenida la suma del consumo de las unidades originales se deba reducir por igual en todas las entradas en una proporción de θ .

El segundo grupo de restricciones, obliga a que la solución obtenida no emperore la producción que se está generando actualmente en cada salida.

El tercer y último grupo de restricciones establece que si la DMU r desaparece ($\delta_r=0$), no debe contribuir ni en los consumos de recursos ni en las producciones de las salidas.

(Fase II)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

Se puede observar del primer grupo de restricciones que el modelo intenta reducir la suma de las entradas del problema conseguida en la primera fase mediante la introducción de las holguras s_i . Por otro lado, el segundo grupo de restricciones intenta maximizar en lo posible el total de cada una de las salidas del problema.

El último conjunto de restricciones de nuevo crea la relación vista en la primera fase entre las variables de decisión y las variables del problema.

De esta segunda fase obtendríamos: $s_i^*, t_k^*, (\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ y el número de unidades productivas que no han desaparecido $N^* = \sum_r \delta_r^*$.

Planteamos ahora una tercera fase en la que decimos qué unidades deben desaparecer. Para ello, calculamos los consumos y producciones que propone el modelo para todas las unidades del problema:

$$x_{ir}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad y_{kr}^* = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj}$$

Se identifican cuáles no son nulas, y se renumeran desde 1 hasta N^* :

$$x_{i\ell} = x_{ir}^* \quad \text{Si } x_{ir}^* \neq 0 \quad \ell = 1, \dots, N^*$$

$$y_{k\ell} = y_{kr}^* \quad \text{Si } y_{kr}^* \neq 0 \quad \ell = 1, \dots, N^*$$

Se plantea en la tercera fase que una unidad eficiente no desaparezca si no han desaparecido anteriormente todas las ineficientes del problema y que las proyecciones se realicen sobre los consumos y producciones más cercanos a las unidades existentes para lo que definiremos la Medida de Proximidad (MP):

$$MP(j, \ell) = \frac{1}{m+p} \left[\sum_{i=1}^m \frac{|x_{ij} - x_{i\ell}|}{\max\{x_{ij}, x_{i\ell}\}} + \sum_{k=1}^p \frac{|y_{kj} - y_{k\ell}|}{\max\{y_{kj}, y_{k\ell}\}} \right]$$

Es una medida que por definición está comprendida entre 0 y 1, que cuantifica con cierta métrica la distancia entre las proyecciones finales a efectuar y las unidades productivas originales del problema.

Definiéndose:

$$\mu_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si DMU}_j \text{ se proyecta sobre DMU}_\ell \\ 0 & \text{si DMU}_j \text{ no se proyecta sobre DMU}_\ell \end{cases}$$

La tercera fase queda:

(Fase III)

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{N^*} MP(j, \ell) \mu_{j\ell}$$

s.a.

$$\sum_{\ell=1}^{N^*} \mu_{j\ell} \leq 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_{j\ell} = 1 \quad \forall \ell$$

$$\sum_{\ell=1}^{N^*} \sum_{\{j: MED_j^{BCC} < 1\}} \mu_{j\ell} = \max\{0, N^* - n^e\}$$

$$\sum_{\ell=1}^{N^*} \sum_{\{j: MED_j^{BCC} = 1\}} \mu_{j\ell} = \min\{n^e, N^*\}$$

$$\mu_{j\ell} \in \{0, 1\}$$

Siendo:

n^e número de unidades eficientes del problema

MED_j^{BCC} la eficiencia de la unidad j

Los dos primeros grupos de restricciones hacen que haya una proyección por DMU y que cada proyección sea recogida por una DMU.

La tercera restricción da el número de ineficientes que son solución del problema.

La cuarta restricción da el número de eficientes que son solución del problema.

2.1.2. Modelo con orientación de salida.

Las variables utilizadas son las mismas del apartado anterior e incluimos la amplificación radial γ , quedando las tres fases de la siguiente forma:

(Fase I)

Maximizar γ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\gamma \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

El primer grupo de restricciones, obliga a que en la solución no se consuma más de cada entrada de lo que se está haciendo actualmente.

El segundo grupo de restricciones, obliga a la solución que se adopte que aumente la producción de cada salida k en una proporción de γ .

La tercera restricción ya ha sido analizada en el apartado anterior.

A continuación, se procede a resolver la segunda fase:

(Fase II)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

El primer grupo de restricciones intenta reducir mediante las holguras introducidas el total de cada una de las entradas presentes en el problema.

En lo que respecta al segundo grupo, se intenta una amplificación de cada salida a partir de la generada en la fase radial del modelo.

Las restantes restricciones consiguen relacionar las variables de decisión con las propias del problema.

Por último hace falta una tercera fase que es análoga a la del apartado 2.1.1.

2.2. Modelos centralizados con un objetivo de cierres de unidades prefijado.

Estos modelos plantean la posibilidad a la entidad superior de establecer el número de unidades productivas a eliminar. Es decir, por un motivo justificado con anterioridad, se ha decidido la eliminación de un número de unidades concreto y se estudia sobre esa cifra la mejora global que aún podría generar el sistema.

2.2.1. Modelo con orientación de entrada.

Sean:

θ^* máxima reducción radial.

N^{obj} número de unidades que no deberían desaparecer.

N^* número de unidades a eliminar por la entidad superior.

Las tres fases de este modelo son las que se plantean a continuación:

(Fase I)

Minimizar θ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \delta_r \leq N^{obj}$$

$$\theta \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

Las tres primeras restricciones ya fueron explicadas con anterioridad en el apartado 2.1.1.

La cuarta restricción obliga a que el número de unidades productivas presentes en el problema sea menor que el prefijado por la entidad superior.

Una vez obtenido $\hat{\theta}^*$ de esta primera fase se procede a realizar la segunda, que es la siguiente:

(Fase II)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \hat{\theta}^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \delta_r \leq N^{\text{obj}}$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

Al no fijar el valor de la variable δ_r al óptimo de la fase anterior, esta segunda fase tendría también opciones de variar el número de unidades a cerrar y podría darse el caso de que esta segunda fase cerrara menos unidades que la primera.

La tercera fase al igual que en los apartados anteriores decide qué unidades desaparecen y los consumos y productos que son solución de nuestro problema. Es análoga a la de los apartados 2.1.

2.2.2. Modelo con orientación de salida.

Así, se podría formular la primera fase de este modelo::

(Fase I)

Maximizar γ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \delta_r \leq N^{\text{obj}}$$

$$\gamma \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

Una vez resuelta esta fase, se procede a resolver la segunda:

(Fase II)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \hat{\gamma}^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\sum_{r=1}^n \delta_r \leq N^{\text{obj}}$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

Por último, habría que considerar la tercera fase que es idéntica a la formulada en los apartados anteriores de este capítulo.

2.3. Modelos centralizados con reducción prefijada.

En este apartado se le plantea a la entidad superior la posibilidad de hacer desaparecer unidades productivas para conseguir una reducción prefijada de los consumos o bien una amplificación prefijada de la cantidad global de cada producto. Es decir, se ha fijado un objetivo de reducción o amplificación, y se plantea si se pueden hacer desaparecer unidades.

2.3.1. Modelo con orientación de entrada.

Se plantea la desaparición de unidades productivas con una reducción total de las entradas fijo (θ^{obj}).

A diferencia de los modelos anteriores nos encontramos que son necesarias cuatro fases para resolver este problema. Procedemos a formularlas

(Fase I)

$$\text{Minimizar } \sum_{r=1}^n \delta_r$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta^{obj} \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

De esta primera fase obtenemos δ_r^* , cuyo sumatorio nos dará el número mínimo de unidades que no desaparecen. El modelo es semejante a la primera fase del apartado 6.1.1, excepto por la función objetivo, que minimiza el número de unidades que no desaparecen, y el primer grupo de restricciones, donde, en esta ocasión, la reducción radial de las entradas es un dato conocido en el problema.

La segunda fase queda:

(Fase II)

Minimizar θ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r^* \quad \forall r$$

$$\theta \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0$$

En esta fase se intenta reducir en lo posible y de forma radial el total de las entradas una vez fijado el número de unidades que desaparecerán. De aquí obtendríamos el valor de θ^* que usaremos en la tercera fase.

Una vez resueltas estas dos fases se resuelve una tercera fase:

(Fase III)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r^* \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0$$

Así tendríamos el mínimo consumo de entradas y la máxima producción a partir de la reducción radial de la segunda fase.

La cuarta fase es idéntica a la tercera fase de los modelos de este capítulo.

2.3.2. Modelo con orientación de salida.

Se plantea la desaparición de unidades productivas con una amplificación total de las salidas fijo (γ^{obj}).

Planteamos a continuación las cuatro fases de las que consta este modelo.

(Fase I)

$$\text{Minimizar } \sum_{r=1}^n \delta_r$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma^{obj} \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad \delta_r \in \{0,1\}$$

De esta primera fase obtenemos δ_r^* , cuyo sumatorio nos dará el número mínimo de unidades que no desaparecen. Las consideraciones que se pueden realizar son análogas a las expuestas en el apartado anterior.

A continuación, se procede a resolver la segunda fase:

(Fase II)

Maximizar γ

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r^* \quad \forall r$$

$$\gamma \text{ libre } \lambda_{jr} \geq 0$$

En donde se maximiza la amplificación radial de las salidas una vez que se ha decidido cerrar las unidades cuyo valor δ_r^* ha resultado ser nulo, obteniéndose el valor γ^* que utilizaremos posteriormente en la tercera fase. Con esta fase se posibilita a la entidad superior obtener un mayor valor de las salidas del que había predeterminado con γ^{obj} .

A continuación se resuelve la tercera fase:

(Fase III)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = \delta_r^* \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad s_i, t_k \geq 0$$

En la que se apuran las entradas y las salidas de las unidades productivas para obtener respectivamente la máxima reducción y aumento posibles mediante el uso de holguras.

Como en 2.3.1 la cuarta fase donde se deciden los consumos y producciones de cada unidad, es idéntica a la tercera de los apartados anteriores de este capítulo.

3. CONCLUSIONES

En este capítulo se han planteado tres tipos de modelos tanto para el caso de orientación de entrada como para el caso de orientación de salida. El primero consiste en identificar las unidades productivas susceptibles de desaparecer, reduciendo (aumentando) en lo posible el total de los recursos (producciones) de las DMUs que permanezcan. El segundo modelo fija un número mínimo de eliminaciones determinado a priori, e intenta que la mejora en dicha situación sea la mayor posible. Por último se ha introducido un tercer modelo que establece una situación de mejora respecto a los consumos (orientación de entrada) o a los productos generados (orientación de salida), a partir de la cual intenta reducir en lo posible el número de unidades productivas presentes en el problema.

Por último, decir que ante la toma de decisión de cierre de unidades, se pueden incluir diversos criterios no contemplados en este trabajo, como los costes, la localización geográfica, cuestiones sociopolíticas, etc. Esto podría ser objeto de otro proyecto.