

Capítulo 3. Control basado en la descripción externa

3.1 Introducción

La finalidad de este Capítulo es la de calcular de forma analítica diversos controladores adecuados al sistema obtenido en la identificación, empleando técnicas de control basadas en la descripción externa, esto es, en la función de transferencia del sistema. Dado que los modelos del eje azimut y de elevación son diferentes, será necesario sintonizar cada tipo de controlador dos veces. Como se anticipó en el Capítulo 1 se va a hacer un control de posición, por lo que las referencias serán ángulos.

Según se razonó en el Apartado 2.4 del Capítulo anterior, se va a tomar como período de muestreo y por tanto de control 200 ms., que se va a denominar a partir de ahora T en lugar de T_m . Los modelos definitivos para el eje de azimut y de elevación son los que se muestran en las Ecuaciones 3.1 y 3.2 respectivamente. A partir de este momento se llamará G_A a la función de transferencia de azimut y G_E a la de elevación. Por simplificar se va a denotar con K_S al valor de la constante del sistema en los respectivos ejes.

$$G_A(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.0004500}{(z-1) \cdot z^2} \quad \text{Ecuación 3.1}$$

$$G_E(z) = \frac{0.0004502}{(z-1) \cdot z} \quad \text{Ecuación 3.2}$$

El esquema general del control es el que se muestra en la Figura 3.1, en la que $G_C(z)$ es la función de transferencia del controlador y $G(z)$ representa al sistema. Además r_k es la referencia para cada instante de muestreo k , u_k la señal de actuación calculada por el controlador, y_k la respuesta del sistema a dicha actuación y e_k la diferencia entre la referencia y la salida, consecuencia de la realimentación.

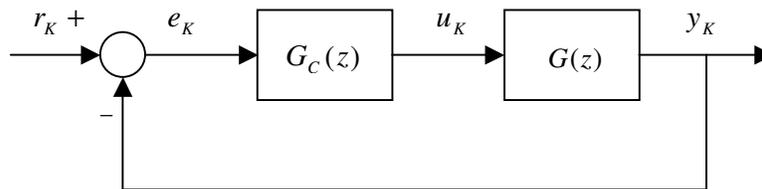


Figura 3.1

El objetivo del control en todo el Proyecto será que el sistema alcance la referencia en el menor tiempo posible, sin grandes sobreoscilaciones. En concreto se van a buscar dos tipos de respuestas:

- una sobreamortiguada lo más rápida posible, es decir, críticamente amortiguada.
- otra subamortiguada, rápida pero con una sobreoscilación pequeña.

Todos los programas de control que se van a realizar siguen los pasos que se muestran en el diagrama de flujo de la Figura 3.2. Primero se inicializan las variables involucradas en el programa, que en general serán el tiempo, los parámetros de control, señales de actuación, el error y la salida. A partir de ese instante se ejecutan sucesivos bucles de control en los que en primer lugar hay que actualizar los valores de las magnitudes relacionadas con ciclos anteriores y en segundo lugar leer la salida (posición de cada eje) para poder calcular los nuevos valores de las variables en el ciclo actual. Finalmente, en función de cada esquema de control propuesto, se obtendrá un valor final de consigna de actuación que se envía al sistema, teniendo en cuenta que como se explicó en el Anexo A el actuador está limitado a 2500, lo que influirá en el control.

Para poder mantener un sincronismo en el período de control T y dado que se desconocen los tiempos empleados en realizar cada instrucción (cuya suma se denominará τ) es necesario establecer una espera en el programa hasta que haya transcurrido dicho período. A partir de ese instante se ejecuta un nuevo bucle de control. Este proceso cíclico será interrumpido al alcanzar el tiempo asignado a cada experimento, T_{ex} , que será función del número de grados a desplazarse proporcionado por la referencia. Cuanto mayor sea la referencia más tiempo tardará el sistema en alcanzar la consigna, puesto que la velocidad de desplazamiento está limitada.

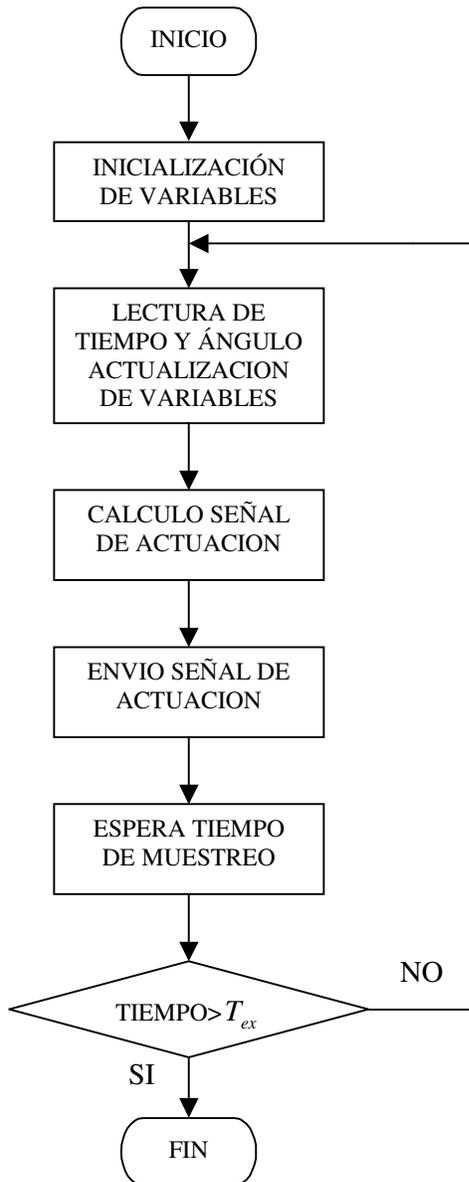


Figura 3.2

Para concluir esta Introducción, conviene resaltar que el control por computador lleva siempre asociado un error inherente debido al tiempo τ antes mencionado que emplea el procesador en calcular la señal de actuación. Este error se origina porque dicha señal se ha calculado en base a un valor de la salida que habrá evolucionado en el momento de enviar la actuación, con lo que la corrección que se pretende introducir no será exacta. En cualquier caso este error es despreciable puesto que como se señaló en el Apartado 2.2 del Capítulo 2 los programas tardan en ejecutarse unos 10 milisegundos, tiempo muy inferior a los 200 ms. del período de control T .

En el Apartado 3.2 se hace un análisis del sistema. En el Apartado 3.3 se establecen las especificaciones de control y la referencia, y del Apartado 3.4 al 3.9 se desarrollan las distintas técnicas de control consideradas.

3.2 Estudio del sistema

Antes de comenzar con el diseño de reguladores, se ha creído conveniente realizar un análisis del sistema, en lo referente a sus características estáticas. En primer lugar se estudiará la estabilidad BIBO de ambos ejes. para ver si ante una entrada acotada el sistema responde con una salida acotada. De la identificación se concluye que el sistema es inestable en bucle abierto, puesto que al aplicarle un escalón la salida es una rampa. Para conocer la estabilidad en bucle cerrado es necesario calcular las funciones de transferencia, que resultan como aparecen en las Ecuaciones 3.3 y 3.4.

$$G_{ABC}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.0004500}{z^3 - z^2 + 0.00045} \quad \text{Ecuación 3.3}$$

$$G_{EBC}(z) = \frac{0.0004502}{z^2 - z + 0.0004502} \quad \text{Ecuación 3.4}$$

Calculando los polos del bucle cerrado se puede analizar la estabilidad de cada eje. Así, el eje de azimuth tiene tres polos, en los puntos $z=0.9995$, $z=0.0214$ y $z=-0.0214$ y el eje de elevación dos, en $z=0.9995$ y $z=0.0005$. En consecuencia se puede afirmar, al estar todos ellos ubicados dentro del círculo unidad, que ambos ejes son estables en bucle cerrado.

En segundo lugar se va a evaluar el error en régimen permanente del bucle cerrado ante una entrada escalón, puesto que este es el tipo de señal que se le va a aplicar en los controladores. En este caso como las dos funciones de transferencia en bucle abierto (Ecuaciones 3.1 y 3.2) presentan un polo en $z = 1$ son de tipo 1 y el error en permanente es cero.

Para concluir este Apartado hay que señalar que la presencia de retardos en el sistema trae como consecuencia una disminución del margen de fase del mismo, inestabilizándolo. Este efecto es tanto más perjudicial cuanto mayor sea el valor del retraso, de forma que unos parámetros de un controlador que sean válidos para el eje de elevación pueden hacer inestable al eje de azimut.

3.3 Elección de la referencia y de las especificaciones

En la elección de la referencia empleada para los experimentos y simulaciones se han tenido en cuenta varias consideraciones. La primera es que dicha referencia debe ser suficiente para reflejar la saturación de la señal de actuación, dado que este es el caso más desfavorable de control que presenta el sistema. En segundo lugar, en lo concerniente a la duración de cada prueba se ha buscado que no sea excesiva, para poder realizar un mayor número de estas, pero que sea suficientemente significativa. Teniendo en cuenta todo lo dicho y haciendo una primera estimación del valor que tomarán los parámetros de los reguladores se concluye que una referencia de 10 grados puede ser adecuada.

Se van a diseñar los controladores en base a dos especificaciones:

- una respuesta críticamente amortiguada.
- una respuesta subamortiguada, llegando a un compromiso entre la rapidez de la respuesta y la sobreoscilación de ésta. Por ello se va a exigir una sobreoscilación del orden del 1% y un tiempo de subida de 1.2 segundos.

Es importante aclarar que se ha fijado este último tiempo sin tener en cuenta la saturación del controlador, con el objeto de que se pongan de manifiesto los inconvenientes que dicha saturación plantea. Es evidente que para una referencia de 10

grados, como la velocidad máxima es de 5.625 grados por segundo nunca se va a cumplir esta especificación del tiempo de subida.

Una vez justificada la elección de la referencia y las especificaciones, se pueden hacer algunos comentarios generales. En primer lugar si el número de grados a desplazarse es pequeño, puede que no se alcance la saturación de ± 2500 en la señal de actuación y por tanto existirán diferencias entre esa salida y la correspondiente al caso con saturación. De hecho es importante destacar que de no existir limitaciones en la acción que envía el regulador, o en el caso de que las referencias sean tales que no alcancen dicha limitación, todas las secuencias de movimiento serán idénticas salvo por el factor de escala. Esto significa que tendrán las mismas características de tiempos y sobreoscilaciones, puesto que las señales de actuación serán proporcionalmente iguales.

La diferencia entre la salida con o sin presencia de saturación va a depender del tipo de controlador empleado, teniendo presente que todos han sido diseñados sin considerar la saturación. En cada controlador se va a hacer un Apartado con un pequeño estudio del efecto de un cambio de referencia en las propiedades de dicho regulador. Esto es igualmente válido para el eje de azimut y el de elevación. Se han tomado referencias de 1, 10 y 50 grados para establecer las comparaciones. Por último expresar que la condición de actuador limitado a ± 2500 se establece en las simulaciones mediante el bloque de la librería no lineal *Saturation*.

3.4 Control proporcional (P)

En este tipo de control se envía una señal de actuación directamente proporcional al error entre la referencia y la salida, con lo que se consigue hacer más rápida la respuesta del sistema. Por tanto en esta situación la función de transferencia del regulador queda como se expresa en la Ecuación 3.5, donde K es la constante de proporcionalidad o ganancia. El objetivo de este Apartado es el de calcular un valor de K tal que el comportamiento del sistema se ajuste a las especificaciones.

$$G_p(z) = K \qquad \text{Ecuación 3.5}$$

Una primera forma de calcular el valor de K adecuado es mediante el polinomio de segundo orden que resulta de aplicar las especificaciones del transitorio de la respuesta. Estas especificaciones pueden venir dadas como sobreoscilación (s.o.), tiempo de subida t_r , tiempo de establecimiento t_s y tiempo de pico t_p e implican, a través de las fórmulas de la Ecuación 3.6, unos determinados valores para el factor de amortiguamiento δ y la frecuencia natural ω_n . También se ha incluido la expresión de la frecuencia natural amortiguada, ω_d . La s.o. aparece en tanto por uno.

$$s.o. = e^{\frac{-\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad t_{r(0-100\%)} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \cdot \text{tg}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$$

$$t_{s2\%} = \frac{4}{\delta \cdot \omega_n} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Los valores de δ , ω_n y T determinarán el polinomio correspondiente a esa dinámica deseada en bucle cerrado, $P_d(z)$. Se puede decir que δ es una medida de lo que va a sobrepasar la salida a la referencia, que será menor conforme aumenta dicho parámetro, mientras que ω_n es un indicador del tiempo empleado en llegar a la referencia, de manera que a mayor frecuencia menor tiempo. Igualando los coeficientes de $P_d(z)$ con los del sistema que resulta al añadir el controlador en bucle cerrado se llega a un sistema de ecuaciones del que se deducirá el valor de la ganancia K .

En consecuencia, para plantear las ecuaciones, es necesario calcular la función de transferencia del sistema con el regulador en bucle cerrado. En la Ecuación 3.7 aparecen dichas funciones para sendos ejes, azimut y elevación respectivamente:

$$G_{ABC}(z) = \frac{K_s \cdot K}{z^3 - z^2 + K_s \cdot K} \quad G_{EBC}(z) = \frac{K_s \cdot K}{z^2 - z + K_s \cdot K} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

Por otro lado se calcula el polinomio deseado $P_d(z)$. El inconveniente que se presenta es que dicho polinomio es de segundo orden, y en el caso del eje azimut el denominador del bucle cerrado es de orden 3, con lo que no sería posible establecer

comparaciones entre los coeficientes. La solución a este problema está en añadir un polo adicional a $P_d(z)$ que no modifique la dinámica deseada. Para ello el polo debe ser lo más rápido posible y por consiguiente cercano a cero. De hecho si se emplease un polo en el origen la salida conservaría las mismas especificaciones, con la única diferencia de añadir un retraso adicional igual al periodo de muestreo (T) considerado. Denotando con la letra a a dicho polo adicional, las expresiones para los polinomios deseados de orden 2 y 3 quedan como se muestra en las Ecuaciones 3.8 y 3.9. Hay que aclarar que dichas expresiones dependen del factor de amortiguamiento δ , según sea subamortiguado ($\delta < 1$), críticamente amortiguado ($\delta = 1$) o sobreamortiguado ($\delta > 1$).

$$P_d(z) = \begin{cases} z^2 - 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \cdot z + e^{-2\delta\omega_n T} & \text{para } \delta < 1 \\ z^2 - 2e^{-\omega_n T} \cdot z + e^{-2\omega_n T} & \text{para } \delta = 1 \\ z^2 - (e^{-\delta\omega_n T - \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T} + e^{-\delta\omega_n T + \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T}) \cdot z + e^{-2\delta\omega_n T} & \text{para } \delta > 1 \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.8}$$

$$P_d(z) = \begin{cases} \text{Exp1} & \text{para } \delta < 1 \\ \text{Exp2} & \text{para } \delta = 1 \\ \text{Exp3} & \text{para } \delta > 1 \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.9}$$

donde Exp1 , Exp2 y Exp3 son:

$$\text{Exp1} = z^3 - (a + 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot T)) \cdot z^2 + (e^{-2\delta\omega_n T} + 2a \cdot e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot T)) \cdot z - a \cdot e^{-2\delta\omega_n T}$$

$$\text{Exp2} = z^3 - (a + 2e^{-\omega_n T}) \cdot z^2 + (e^{-2\omega_n T} + 2a \cdot e^{-\omega_n T}) \cdot z - a \cdot e^{-2\omega_n T}$$

$$\text{Exp3} = z^3 - (a + e^{-\delta\omega_n T - \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T} + e^{-\delta\omega_n T + \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T}) \cdot z^2 + (e^{-2\delta\omega_n T} + a \cdot (e^{-\delta\omega_n T - \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T} + e^{-\delta\omega_n T + \sqrt{\delta^2-1}\omega_n T})) \cdot z - a \cdot e^{-2\delta\omega_n T}$$

Para las especificaciones elegidas de s.o.<1% y tiempo de subida $t_r < 1.2$ s. se tiene que $\delta > 0.826$ y $\omega_n > 3.76$ rad/s., lo que conduce aplicando la Ecuación 3.8, a que el polinomio característico ha de ser $P_d(z) = z^2 - 0.980z + 0.289$. Se ha comprobado que la frecuencia de muestreo ($2\pi/T$) es mucho mayor que ω_d , condición para que el período de muestreo recoja toda la dinámica.

De la Ecuación 3.9 se concluye que el polo adicional a modifica los coeficientes de la dinámica en el mismo decimal que su primera cifra significativa, es decir, si se toma un valor de $a=0.01$ dichos coeficientes diferirán de los originales del polinomio de segundo orden en el segundo decimal. Adicionalmente se han realizado pruebas con *Simulink* de las que se resume que añadiendo $a \leq 0.01$ la variación de la respuesta es inapreciable, incluso con $a=0.1$ no hay apenas diferencia. Por tanto, de ahora en adelante se asignará a a el valor de 0.01. Con este polo resulta $P_d(z) = z^3 - 0.990z^2 + 0.299z - 0.0029$.

3.4.1 Control P de azimut

En azimut como el denominador de la función de transferencia en bucle cerrado es de orden 3 se tienen (los coeficientes de z^3 son iguales a 1) tres ecuaciones de las cuales la única incógnita, K , aparece sólo en la ecuación que resulta de igualar los coeficientes de z^0 . La resolución del sistema de ecuaciones, que aparece en la Ecuación 3.10, es complicada. Además con el valor de a elegido se obtendría una ganancia negativa, por lo que se va a buscar otro camino para sintonizar el controlador.

$$\begin{cases} 1 = a + 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \\ 0 = e^{-2\delta\omega_n T} + 2a \cdot e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \\ K \cdot K_s = -a \cdot e^{-2\delta\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.10}$$

Una segunda forma de calcular la K que permita un cierto comportamiento específico del sistema una vez realimentado es emplear el método gráfico del Lugar de las Raíces, que permite conocer la posición de los polos en bucle cerrado al variar la ganancia. Mediante el comando de *Matlab rlocus*, que recibe el numerador y el denominador de la función de transferencia del sistema en bucle abierto, se puede obtener el lugar de las raíces y el comando *rlocfind* a su vez proporciona el valor de K para una ubicación de los polos especificada.

En la Figura 3.3 se representa el lugar de las raíces del eje azimut. Presenta tres asíntotas, dos a ± 60 grados y una a 180 grados, al existir en bucle abierto tres polos y ningún cero. Al aumentar K los polos se van desplazando como indican las flechas.

También se ha representado en trazo más fino la circunferencia unidad, que marca el límite de la situación de los polos (en bucle cerrado) para que el control sea estable.

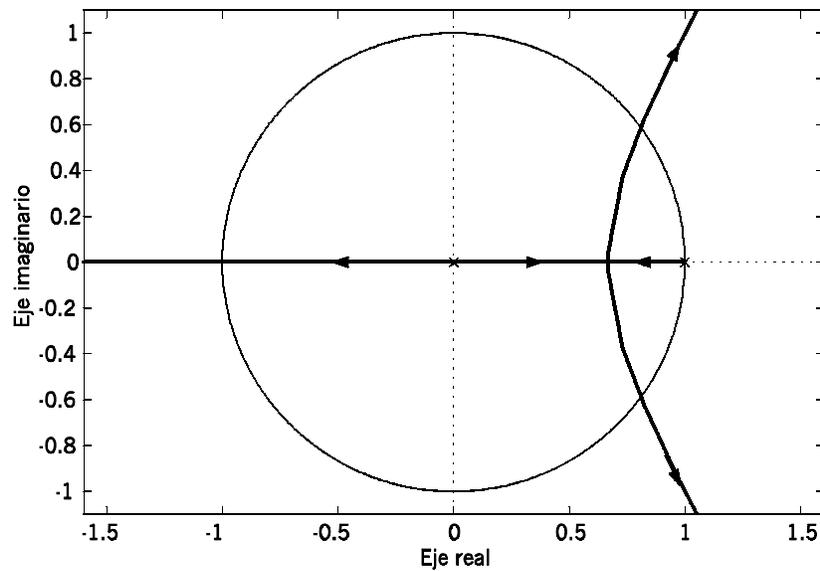


Figura 3.3

Localizando los puntos de corte de las tres asíntotas con la circunferencia y empleando el comando *rlocfind* se llega por un lado a que la K ha de ser menor o igual a 4444.44 para $z = -1$ y por el otro que $K \leq 1373.33$ para $z = 0.809 \pm 0.588j$. Tomando el caso más desfavorable se concluye que a partir de una ganancia de 1373.33 el sistema se hace inestable. Esto mismo se podía haber deducido aplicando el criterio de Jury, resultando 1373.33, idéntico al anterior. En la Figura 3.4 de la siguiente página, se muestra el resultado de la simulación del control proporcional $K = 1373.33$ y una referencia de 10 grados. No se ha probado en el sistema real por precaución ya que puede ser perjudicial para este adquirir un comportamiento inestable.

Se comprueba que para ese valor de la ganancia la oscilación es de amplitud constante. Para ganancias superiores la oscilación se hace creciente y por tanto el eje de azimut se vuelve inestable. En las simulaciones mientras no se diga lo contrario siempre se emplea el sistema con saturación en la actuación, ya que es esta la situación real. La influencia de la saturación se explicará en el Apartado correspondiente de cada regulador, como se indicó en el Apartado 3.3.

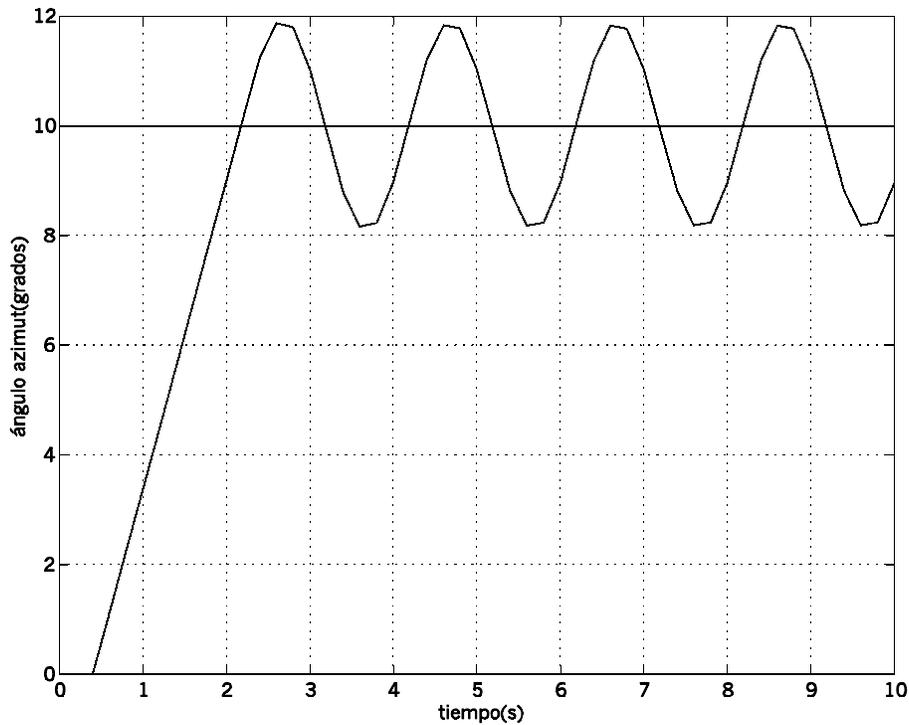


Figura 3.4

3.4.1.1 Respuesta críticamente amortiguada

En primer lugar, empleando de nuevo el lugar de las raíces se va a calcular el valor de la ganancia para la cual el proceso es críticamente amortiguado. Se sabe que la respuesta en sobreamortiguada mientras todos los polos estén en el eje real. En esta situación, de los tres polos del bucle cerrado dos están situados sobre el eje real por última vez (el tercero lo está para todo K), en el punto $z=2/3$, con lo que aplicando *rlocfind* la ganancia es de $K=329.11$. Ésta será la respuesta más rápida posible sin que el sistema sobreoscile.

En este caso se muestra en la Figura 3.5 el resultado de la simulación con *Simulink*, que aparece en línea continua, y del control con el sistema real, en forma escalonada debido al mantenedor de orden cero. La tercera línea de valor constante e igual a 10 corresponde a la referencia. Este criterio de representación se va a seguir a lo largo de esta memoria. También se comparan en la Figura 3.6 las secuencias de actuaciones empleadas en el control.

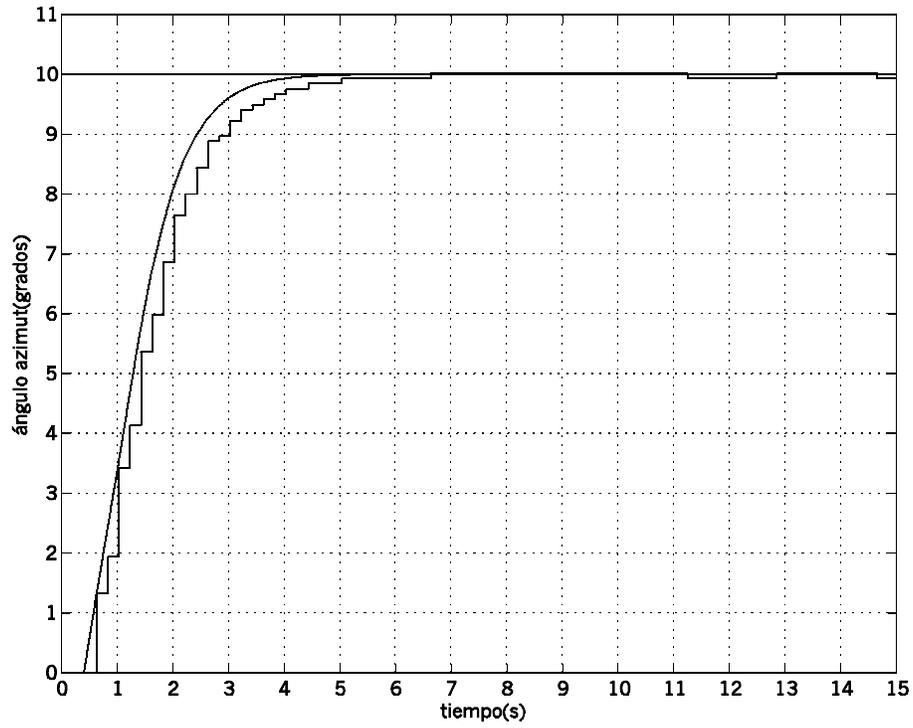


Figura 3.5

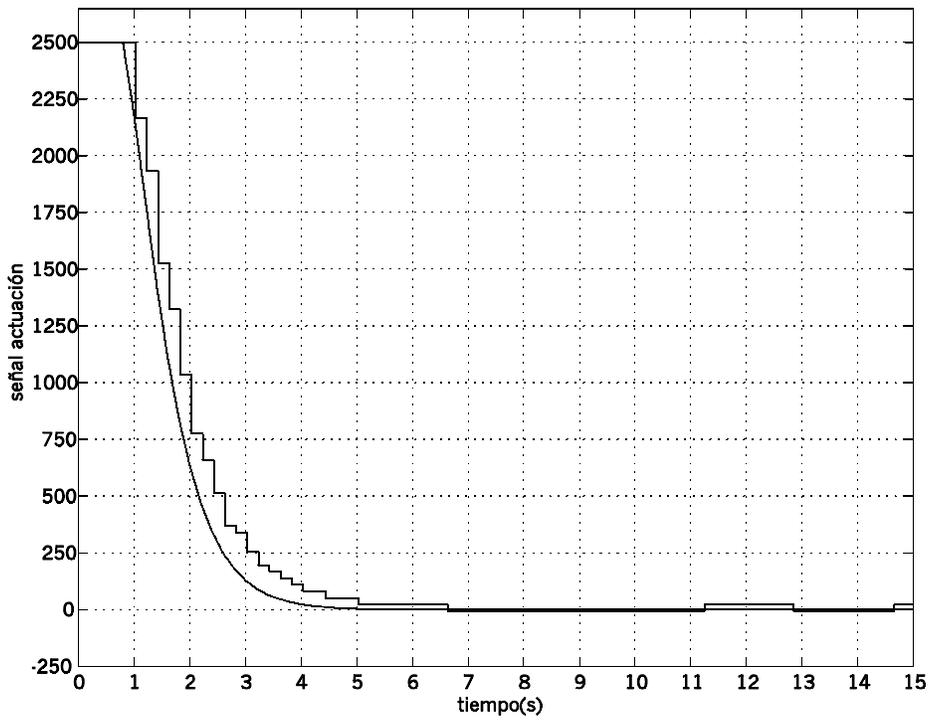


Figura 3.6

3.4.1.2 Consideraciones generales

Antes de proseguir es conveniente hacer varios comentarios para explicar las diferencias existentes entre el sistema real y la simulación de las gráficas anteriores. Estas comparaciones están basadas en el Apartado 2.6 del Capítulo precedente y serán extensibles a cualquier otra figura comparativa presentada en el Proyecto.

Lo primero que se observa es que mientras que el modelo alcanza la referencia en un tiempo finito (a los 5 segundos está en 9.99 grados), el sistema real permanece de forma indefinida oscilando en torno a la referencia. Esto es debido a que como se explicó en el Apartado 2.6 el paso mínimo de los motores es de 0.08789 grados, con lo cual es imposible que se alcance exactamente la referencia, al no ser ésta múltiplo de dicho paso. En las 5 pruebas efectuadas para la ganancia anterior, el eje de azimut oscila siempre entre 9.931641 grados (113 veces el paso) y 10.019531 grados (114 veces).

También se ve en las figuras anteriores que prácticamente existe coincidencia en las trayectorias descritas por la simulación y el comportamiento real en los primeros instantes y en el permanente, y en cambio para el transitorio cercano a la referencia las diferencias se acentúan. La explicación es que, según lo visto en el Apartado 2.3.2, el retardo ante señales de actuación pequeñas no sigue una media clara, de hecho se hace cada vez menor y más imprevisible al ir disminuyendo la actuación desde 2500 a 50. En cambio en *Simulink* al fijar el modelo de azimut con un retardo de 400 ms. todas las señales van a tardar ese tiempo en ser recibidas por el sistema.

En conclusión, como el retardo del sistema real tiene tendencia a disminuir al acercarse a la referencia, se hará más estable y por ese motivo crece de forma más controlada, quedando siempre por debajo de la simulación. No hay que olvidar que, según se explicó en la Figura 3.2, cada 200 milisegundos se está enviando al sistema una actuación que conllevará una velocidad y un retardo, lo que dificulta el control.

Otro factor, que se considera como el menos influyente pero que existen casos en los que sí ha modificado la respuesta esperada de forma reseñable es que el modelo supone una velocidad constante para cada actuación, esto es, que el eje se desplaza un número fijo de grados para un tiempo fijo (200 ms. en este caso). En cambio según se explicó en el Apartado 2.6 en el sistema real existen intervalos de tiempo en los que el

eje gira una cantidad de grados muy cercana a la media, otros en los que esta cantidad está muy por encima de la media y otros en los que está por muy por debajo. Como cada 200 ms. se asigna una consigna distinta sólo se deja avanzar al sistema a cada velocidad durante 0.2 s., con lo que habrá situaciones en las que el sistema responderá con una velocidad distinta a la esperada, provocando desplazamientos superiores o inferiores a los teóricos. En cualquier caso como se dijo al principio del párrafo, este factor no es muy influyente puesto que en promedio quedan compensados los desplazamientos mayores de lo previsto con los que son menores.

Por último existen otros motivos que pueden provocar diferencias con el modelo teórico, aunque se consideran menos influyentes que las comentadas en los párrafos anteriores. Uno es la velocidad mínima para actuaciones inferiores a 50 que se comprobó en el Apartado 2.3.4 del Capítulo 2 y que el modelo no contempla. Esto influirá más cuanto mayor sea el número de consignas con módulo inferior a 50 en una misma secuencia de actuaciones, y por tanto en situaciones en las que la ganancia K elegida para el control sea muy pequeña.

3.4.1.3 Respuesta subamortiguada

Prosiguiendo con la sintonización del regulador, se va a buscar ahora una respuesta con sobreoscilación en torno al 1% y tiempo de subida de 1.2 segundos, especificaciones fijadas en el Apartado 3.3. Estas especificaciones suponen un valor de $\delta > 0.826$ y $\omega_n > 3.76$ rad/s.

Según se ha visto en la Figura 3.3 las especificaciones sobre δ y ω_n no pueden ser cualesquiera, sino que han de situar los polos complejos en el lugar de las raíces teniendo en cuenta además que el tercer polo no esté muy alejado del origen para no modificar dichas restricciones. Por tanto para cumplir que $\delta > 0.826$ y $\omega_n > 3.76$ rad/s., sustituyendo en la Ecuación 3.8 dos de los polos deberían ser $0.4900 \pm 0.2211i$, que están muy alejados del lugar de las raíces, con lo que se concluye que para este sistema no es posible conseguir esos valores.

Como ya se ha expresado en otras ocasiones, la idea del control es la de conseguir una respuesta rápida y con poca sobreoscilación. Por tanto observando la Figura 3.7 de distribuciones de δ y ω_n , interesa que los polos conjugados estén lo más a la izquierda posible para una mayor frecuencia natural, y cercanos al eje real para un factor de amortiguamiento próximo a la unidad. Si se eligen los puntos pertenecientes al lugar de las raíces $0.6816 \pm 0.1740i$ se obtiene un valor de $\delta = 0.808$ y $\omega_n = 2.17$ rad/s, que suponen una sobreoscilación del 1.3% y un tiempo de subida de 2 s., valores no muy alejados de los que inicialmente se perseguían. Aplicando *rlocfind* a dicho punto la ganancia necesaria es de 398.97. El polo real para esta K se encuentra en $z = -0.3446$, pudiendo modificar ligeramente las especificaciones, aunque no de forma significativa. En cualquier caso la ubicación del tercer polo para obtener una respuesta subamortiguada, según *rlocfind* no puede ser inferior a -0.33 , con lo que se tiene esa limitación.

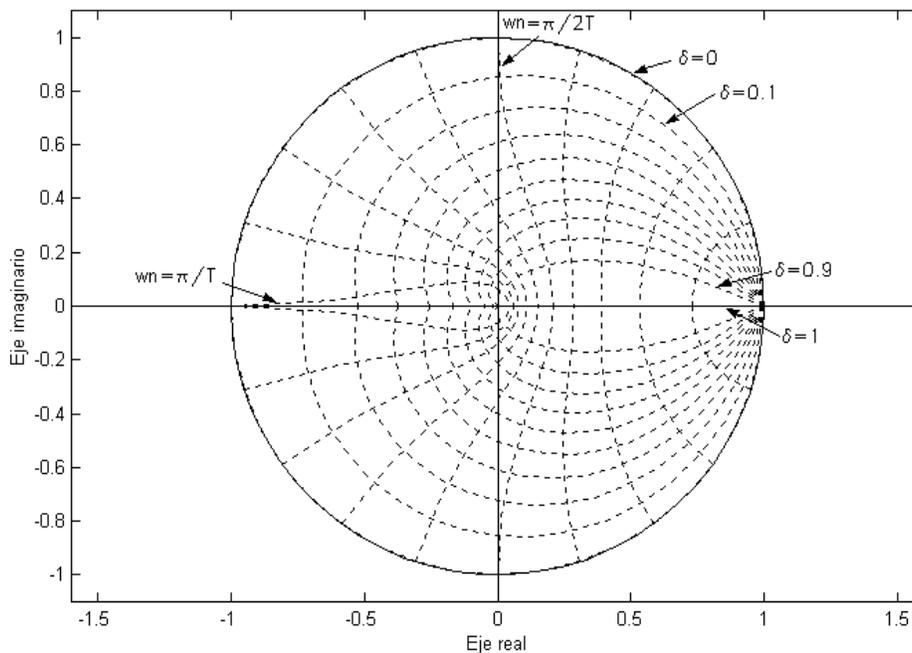


Figura 3.7

La simulación llevada a cabo sin tener en cuenta la saturación en la señal de control presenta una s.o. del 1.24% y un tiempo de subida de 2.26 s. (valor obtenido por interpolación entre 2.2 s. y 2.4 s.), muy cercano a las especificaciones establecidas de 1.3% y 2 segundos. Se pone de manifiesto la escasa influencia de la ubicación del polo

adicional, que inevitablemente está introduciendo un retraso adicional, por lo que la especificación del tiempo pasa de 2 s. a 2.2 segundos. Todos los tiempos en este Proyecto se obtendrán por interpolación lineal entre los dos instantes de muestreo correspondientes. Al hacer la misma simulación incluyendo el bloque *Saturation* se tiene una s.o. de 0.76% y un $t_r = 2.94$ segundos, resultado lógico puesto que al limitar el valor de la actuación la respuesta será más lenta y sobreoscilará menos.

En la Figura 3.8 aparecen los resultados para la última ganancia obtenida. Nuevamente se observa que a medida que se acerca a la referencia, la diferencia entre el caso real y el simulado se acrecienta, atenuándose luego conforme se acerca al permanente. Al ser la ganancia mayor que en la Figura 3.5 en este caso la variación es también mayor puesto que provoca una sobreoscilación que, para retardos menores, y en consecuencia, más estables, no aparece.

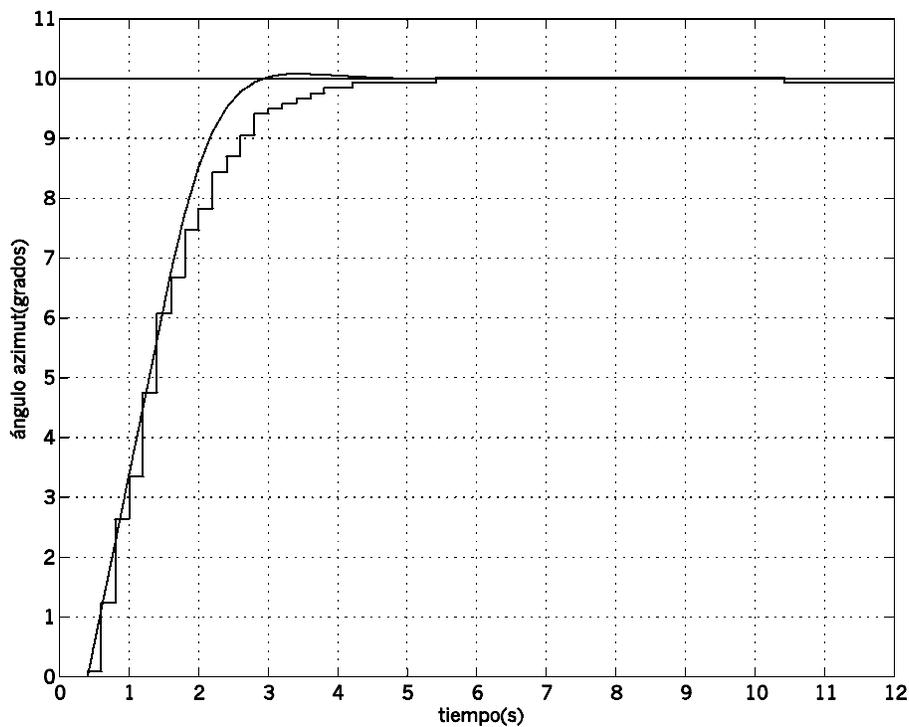


Figura 3.8

Antes de concluir este Apartado hay que hacer unas observaciones sobre la limitación de la actuación. En lo que sigue y salvo que se diga lo contrario sólo se representarán gráficamente las salidas reales y simuladas con dicha limitación, dado que ese es el caso real. Se hará referencia a simulaciones sin saturación exclusivamente para

comprobar que se cumplen las especificaciones para los parámetros de los controladores, calculados sin tener en cuenta dicha restricción.

3.4.2 Control P de elevación

Al igual que en caso de azimut lo primero que se ha obtenido es el valor de K tal que el sistema se hace inestable. Para ello se ha aplicado el criterio de estabilidad de Jury, del que se desprende que el valor límite a partir del cual la respuesta pasa de ser oscilatoria decreciente a oscilatoria creciente es 2221.24. La Figura 3.9 de la simulación corrobora este resultado.

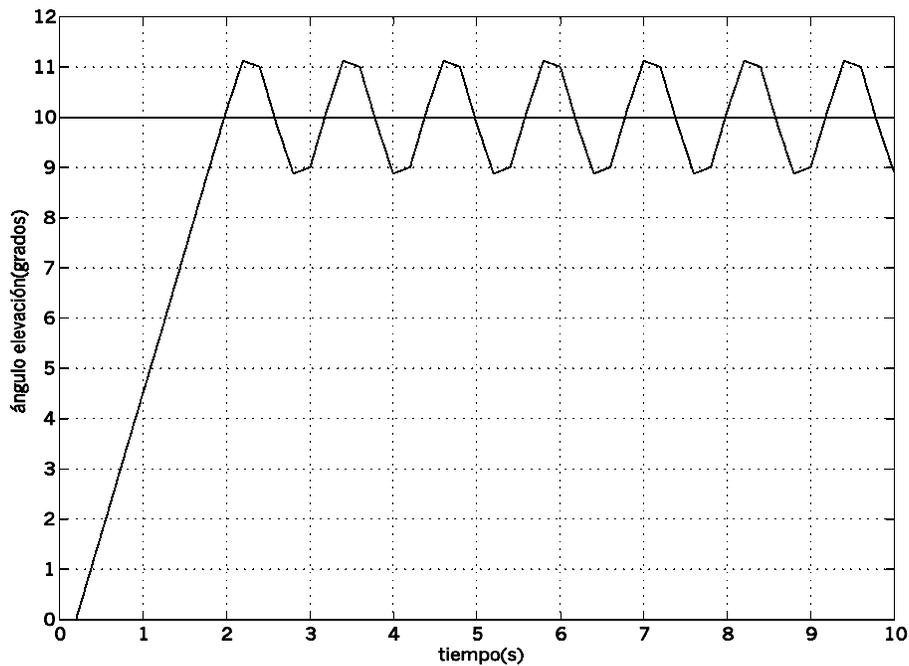


Figura 3.9

Si se compara con el eje de azimut en el que K debía ser menor o igual a 1373.33 (ver Apartado 3.4.1), se observa que ahora la máxima ganancia permitida es mayor. Este resultado es coherente ya que al ser el retardo la mitad el sistema se hace más estable y permite unas pendientes mayores.

Por otra parte en el eje de elevación el sistema de ecuaciones que se obtenía de igualar polinomio deseado con la Ecuación 3.8 queda más simple y se va a resolver para los dos tipos de respuesta que se exigen en las especificaciones. Se tienen dos ecuaciones con una sola incógnita, ya que los coeficientes de z^2 son iguales a 1.

3.4.2.1 Respuesta críticamente amortiguada

Para una respuesta críticamente amortiguada, las ecuaciones quedan como aparece en la Ecuación 3.11.

$$\begin{cases} 1 = 2e^{-\omega_n T} \\ K \cdot K_s = e^{-2\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.11}$$

De una de las ecuaciones se obtiene el único valor posible para la frecuencia natural, que es de $\omega_n = 3.46$ rad/s y de la otra el valor $K = 555.31$. Si se emplea *Simulink* se comprueba que es críticamente amortiguado, obteniéndose la salida que aparece en la Figura 3.10.

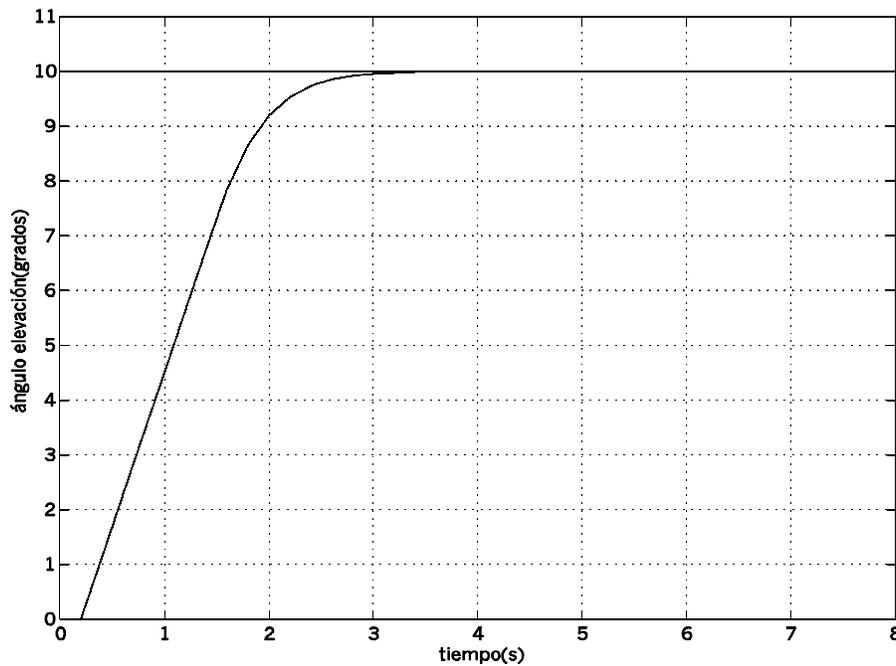


Figura 3.10

3.4.2.2 Respuesta subamortiguada

En este caso al igualar los coeficientes del polinomio deseado con los de la Ecuación 3.8 se llega a la Ecuación 3.12 que aparece a continuación. De este sistema de ecuaciones se ve que habrá que elegir convenientemente una pareja de valores de factor de amortiguamiento y frecuencia natural tales que cumplan la primera ecuación. Una vez obtenidos se sustituirán en la segunda ecuación para calcular K .

$$\begin{cases} 1 = 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \\ K \cdot K_s = e^{-2\delta\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.12}$$

Con las especificaciones de sobreoscilación del 1% respecto al valor final ($\delta=0.826$) y t_r de 1.2 s. ($\omega_n=3.76$ rad/s) se tenía $P_d(z) = z^2 - 0.980z + 0.289$, con lo que la primera ecuación queda $1 \cong 0.98$ y de la segunda $K=641.94$. De la simulación sin saturación sale s.o.=0.6% y $t_r=1.5$ s, algo lejos de las originales. Esto puede deberse a que la primera ecuación no se cumple exactamente.

Tras varias pruebas si se adopta una s.o.<1% y un tiempo de subida de 1.23 s. (ahora $\omega_n=3.67$ rad/s.) el polinomio queda $P_d(z) = z^2 - 0.999z + 0.297$, que cumple mejor la primera ecuación y se obtiene que $K=660.66$. Si se realiza la oportuna simulación sin saturación se obtiene una s.o. del 1.03% y un tiempo de subida de 1.35 s., condiciones más próximas a las de partida. Se pone de manifiesto como, debido a la presencia de funciones exponenciales, una pequeña diferencia en la primera ecuación afecta de forma importante a la dinámica deseada. Ejecutando la misma simulación con actuación limitada se tiene s.o.=0.36% y $t_r = 2.49$ s., que se presenta en la Figura 3.11.

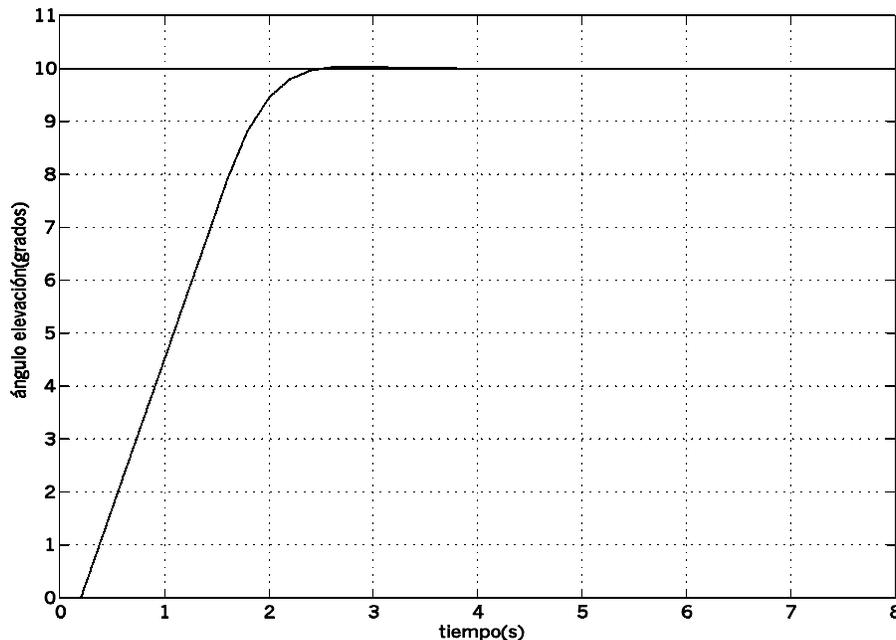


Figura 3.11

3.4.3 Control P mediante Ziegler-Nichols

Otra opción para sintonizar el controlador P es aplicar los métodos de Ziegler-Nichols ([4] Aström, “PID Controllers: Theory, design and tuning”). El primero de ellos, en su versión para sistemas inestables en bucle abierto, permite obtener el valor de K a partir de la respuesta en bucle abierto del sistema ante una entrada constante, midiendo el valor del retardo, θ , y de la pendiente de la respuesta normalizada (respuesta ante una entrada unitaria), $S = \Delta Y / \Delta t$ (Figura 3.12). Con estos parámetros, Ziegler-Nichols recomienda calcular las constantes de los controladores P, PI y PID aplicando las expresiones de la Tabla 3.1.

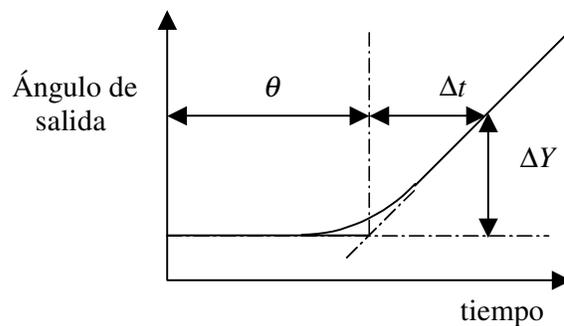


Figura 3.12

	K	T_i	T_d
P	$1/(S \cdot \theta)$	—	—
PI	$0.9/(S \cdot \theta)$	$3 \cdot \theta$	—
PID	$1.2/(S \cdot \theta)$	$2 \cdot \theta$	$0.5 \cdot \theta$

Tabla 3.1

Ya se obtuvo en el modelado que $\theta=0.395$ s. y $S=0.002250$ para azimut y $\theta=0.208$ s. y $S=0.002251$ en elevación, por lo que al controlador P se le asigna una constante de proporcionalidad de valor $K=1125.2$ y $K=2135.8$ respectivamente. La Figura 3.13 corresponde al eje azimut. En esta gráfica se observa un fenómeno que ya se mencionó en el Apartado 2.3.4 y es que cuando se somete al sistema a cambios de sentido se produce un retraso superior al calculado en la identificación, durante el cual el motor permanece parado antes de comenzar a moverse en el sentido contrario. Esto provoca que la sobreoscilación dure más tiempo que en *Simulink*. Además como ya se comentó en el Apartado 3.4.1.2, para señales pequeñas el sistema parece que deja de

comportarse como uno de retardo 400 ms. para presentar un retardo inferior y hacerse más estable. Para el eje de elevación el resultado es muy parecido.

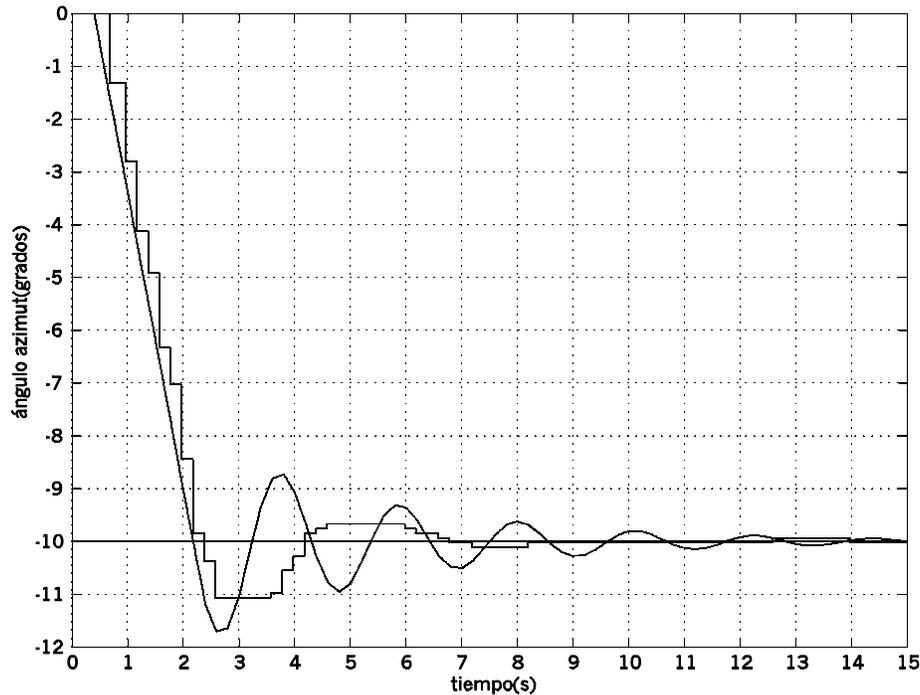


Figura 3.13

El segundo método de Ziegler-Nichols sirve para ajustar los parámetros de los mismos controladores estudiando la salida del sistema en bucle cerrado ante una entrada también en escalón. La idea es, partiendo de un valor moderado de K , ir aumentándolo hasta que el sistema se vuelva críticamente oscilatorio, llamando a ese caso concreto de la ganancia K_U y al período de la oscilación T_U . Con estas constantes se construye una Tabla 3.2 análoga a la anterior.

	K	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot K_U$	—	—
PI	$0.45 \cdot K_U$	$T_U/1.2$	—
PID	$0.6 \cdot K_U$	$T_U/2$	$T_U/8$

Tabla 3.2

El inconveniente de este segundo procedimiento es que hay que someter al sistema a una condiciones críticas que pueden resultar perjudiciales para el mismo, con lo que no siempre será posible realizarlo. La única alternativa sería simular el comportamiento mediante *Simulink*, en cuyo caso se han obtenido los valores de $K_U=1375$ y $T_U=2$

segundos para azimut, con lo que el controlador deberá proporcionar una ganancia $K=687.5$. En elevación los resultados son $K_U=2225$, $T_U=1.2$ s. y $K=1112.5$. La Figura 3.14 muestra el resultado de emplear los valores que recomienda este método para el eje de azimut. En elevación el resultado es muy similar por lo que no se pone.

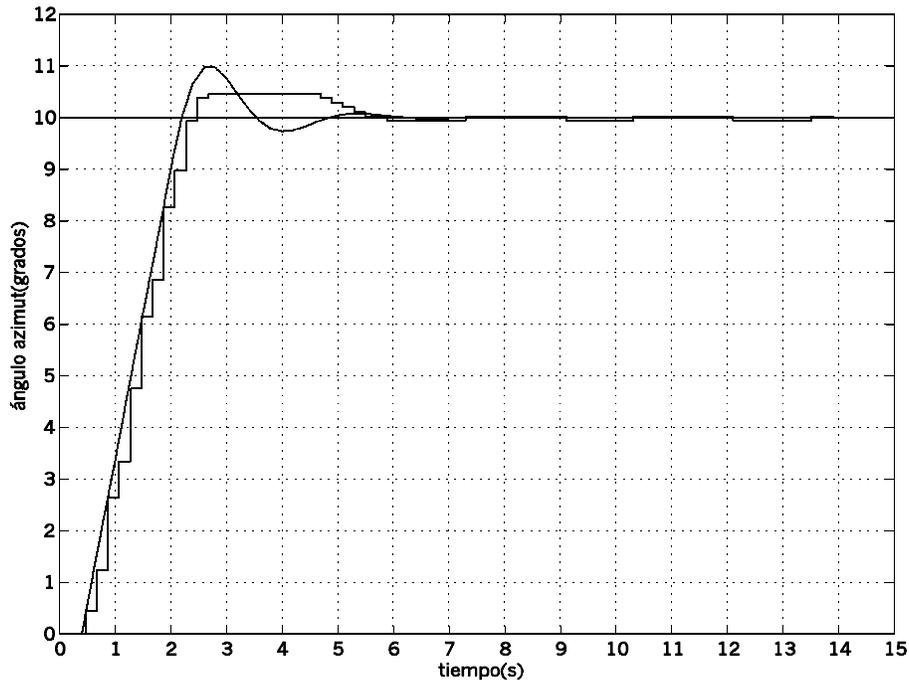


Figura 3.14

De los resultados se puede concluir que ninguno de los dos métodos dados por Ziegler-Nichols se ajustan bien a los modelos del sistema, si bien es cierto que el segundo de ellos proporciona unos valores de partida bastante razonables. Esto puede deberse a que el primer procedimiento no ha tenido en cuenta la presencia de saturación en la actuación mientras que para obtener los valores del segundo se han realizado las simulaciones con el modelo completo, y por tanto incluyendo el bloque *Saturator*.

También hay que decir por último que según la configuración que se tenga, habrá situaciones en las que será más práctico emplear el segundo, porque esté toda la estructura de control ensamblada y no sea posible aislar el sistema para realizar las pruebas en bucle abierto que necesita el primer método. Y habrá otros casos en los que se tenga únicamente el sistema siendo entonces más directo aplicar el primer método ya que para el segundo habría que constituir el bucle cerrado.

3.4.4 Otras referencias

Para comenzar este punto se va a comprobar que, como se explicaba en el Apartado 3.3, siempre que no se alcancen la saturación, la salida va a presentar la misma dinámica con independencia del valor de la referencia. La Figura 3.15 muestra las salidas simuladas para un control P en elevación con una $K=800$ con consignas de 1.2 y 3 grados. Ambas tienen un tiempo de subida de 0.9 s. (interpolando) y una s.o. del 6.9% .

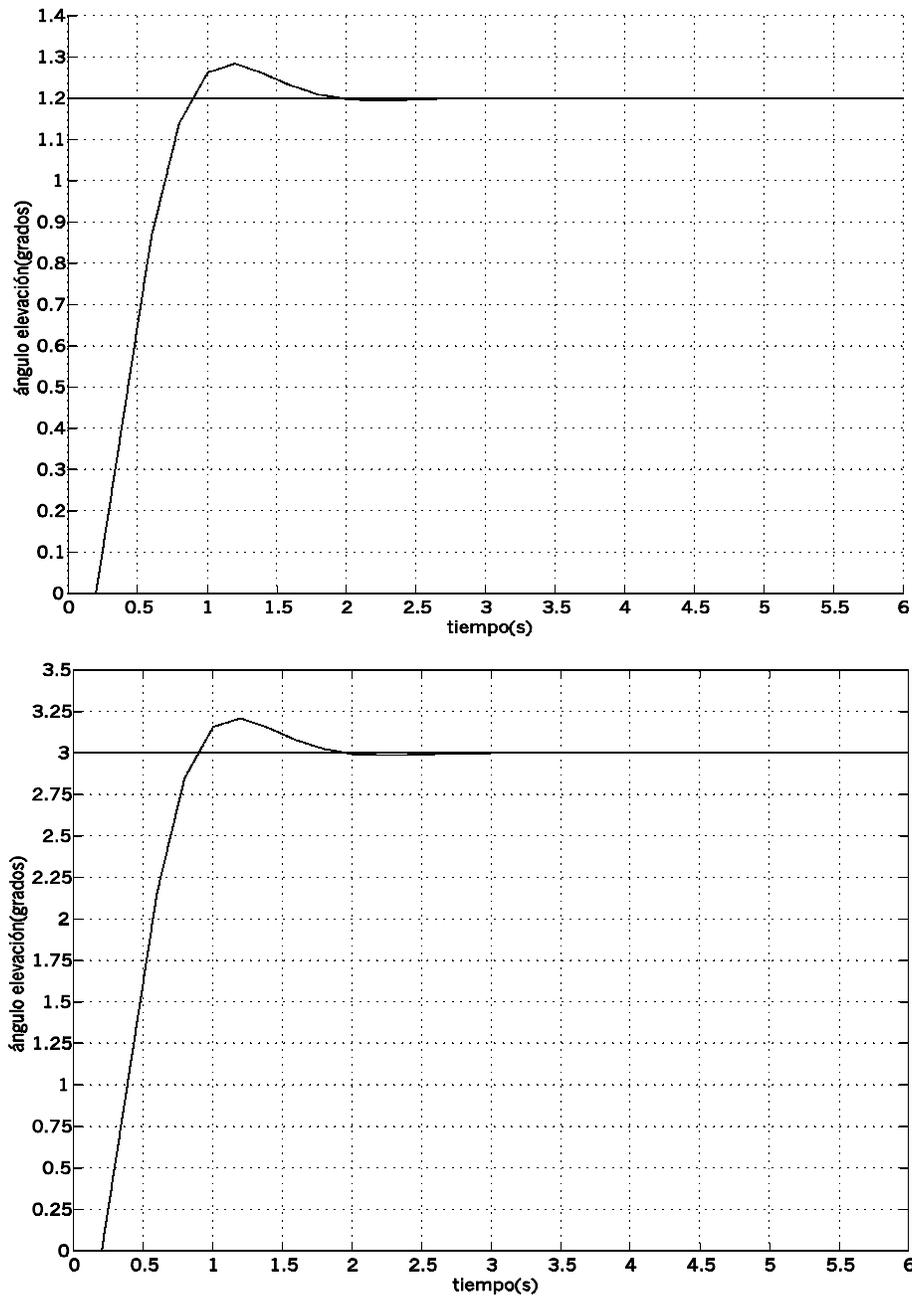


Figura 3.15

Concretando para el control proporcional, la primera característica es que, como se mencionó en el Apartado 3.3, si la referencia es tal que no satura al actuador, la respuesta cumplirá las especificaciones para las que fue diseñada y en cambio si satura dichas especificaciones se verán modificadas. Esto se debe a que ninguno de los métodos que se han desarrollado para sintonizar el regulador P dependen del valor de la referencia y por tanto no contemplan que para unas referencias sature y para otras no. Es importante hacer hincapié en que la saturación va a tener influencia en el aspecto cuantitativo de la respuesta, y no en el cualitativo, es decir, que si la respuesta es críticamente amortiguada para unos parámetros, lo va a ser independientemente del valor de consigna.

El primer efecto de la saturación en el control proporcional sobre la dinámica del sistema será un aumento de los tiempos característicos dado que el sistema se va a desplazar a una velocidad por debajo de la que fue diseñada. Además el tiempo empleado en alcanzar la referencia será proporcionalmente menor conforme ésta aumenta, dado que se encuentra más tiempo desplazándose a la velocidad máxima.

El otro efecto está en la sobreoscilación ya que para una ganancia fija, siempre que la referencia provoque una saturación inicial del regulador, el número de grados que sobreoscila el sistema va a ser muy parecido en valor absoluto (esto deja de ser así para valores que estén en la frontera). La explicación es que en el regulador P la actuación en un instante depende sólo del error en ese instante y no del pasado. Para una constante de proporcionalidad fija, el error a partir del cual deja de encontrarse saturado el actuador es constante e independiente de la referencia y por tanto el siguiente error será parecido en todas ellas, con lo que la secuencia de señales de actuación una vez por debajo del límite de 2500 va a ser similar. Dicho error no es exactamente el mismo ya que en función de la consigna el sistema habrá avanzado un número u otro de escalones de 1.125 grados cada 200 ms. En resumen, para una misma K al aumentar la referencia disminuirá la sobreoscilación en %, alejándose cada vez más de las especificaciones para las que fue deducida.

Estos dos efectos se ponen de manifiesto en la Figura 3.16, que corresponde a un control del eje azimut con una ganancia de 398.97. Así, si para una referencia de 10

grados el tiempo de establecimiento del 2% es de 2.8 s, para 50 grados el mismo tiempo vale 9.4 s. (y no $2.8 \cdot 5$ s.). En ambos casos la sobreoscilación es de 0.077 grados.

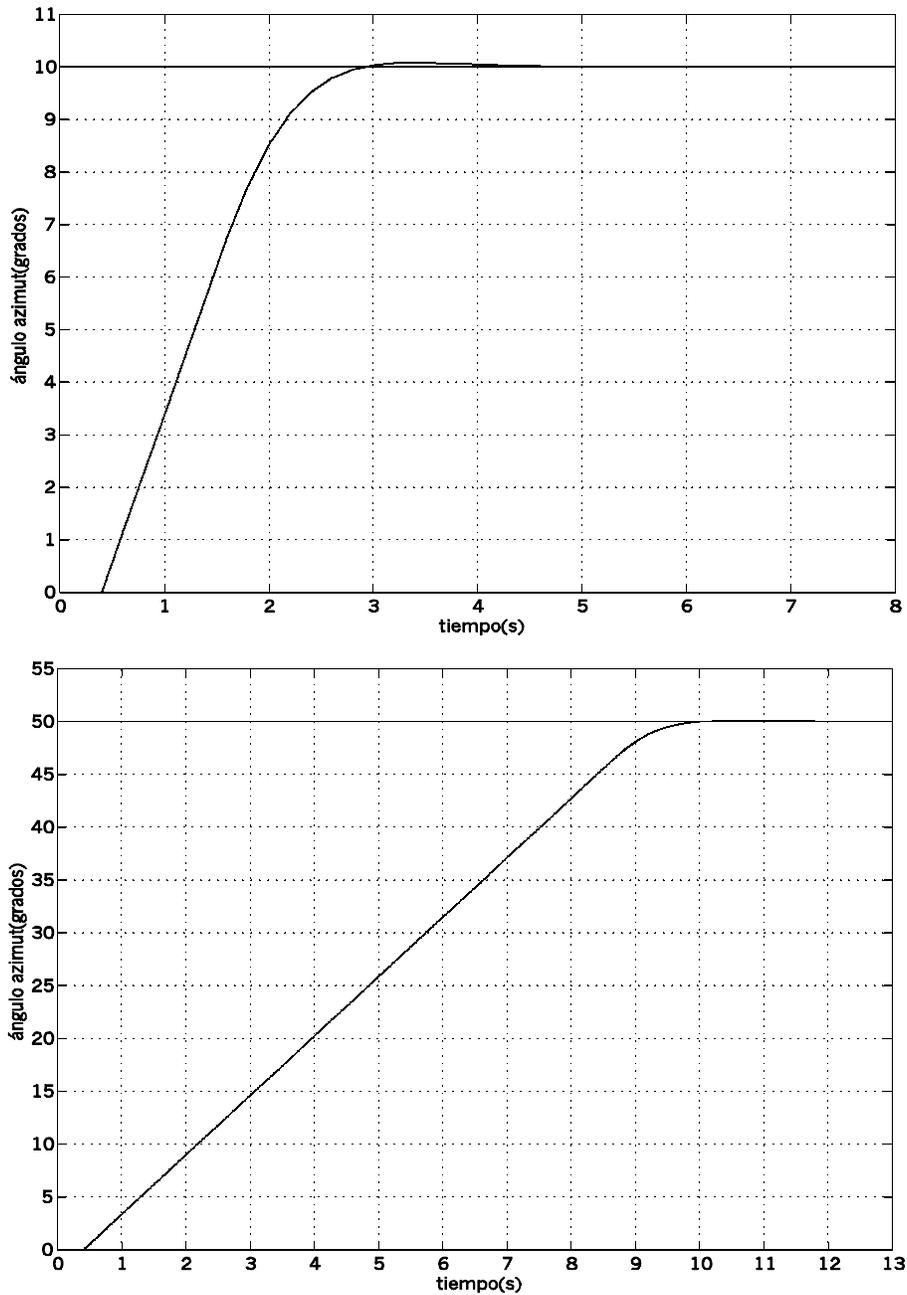


Figura 3.16

Para el sistema real, si se toman unas referencias de 10 y 80 grados y se realiza el control proporcional de $K = 700$, se consiguen unas salidas como las representadas en la Figura 3.17. Si se le ordena un movimiento de 10 grados, sobreoscila 0.46 grados

siendo el tiempo de subida 2.40 segundos mientras que ante una referencia de 80 grados sobrepasa a ésta en 0.60 grados empleando un $t_r=14.71$ segundos, de modo que se cumple el razonamiento de párrafos anteriores.

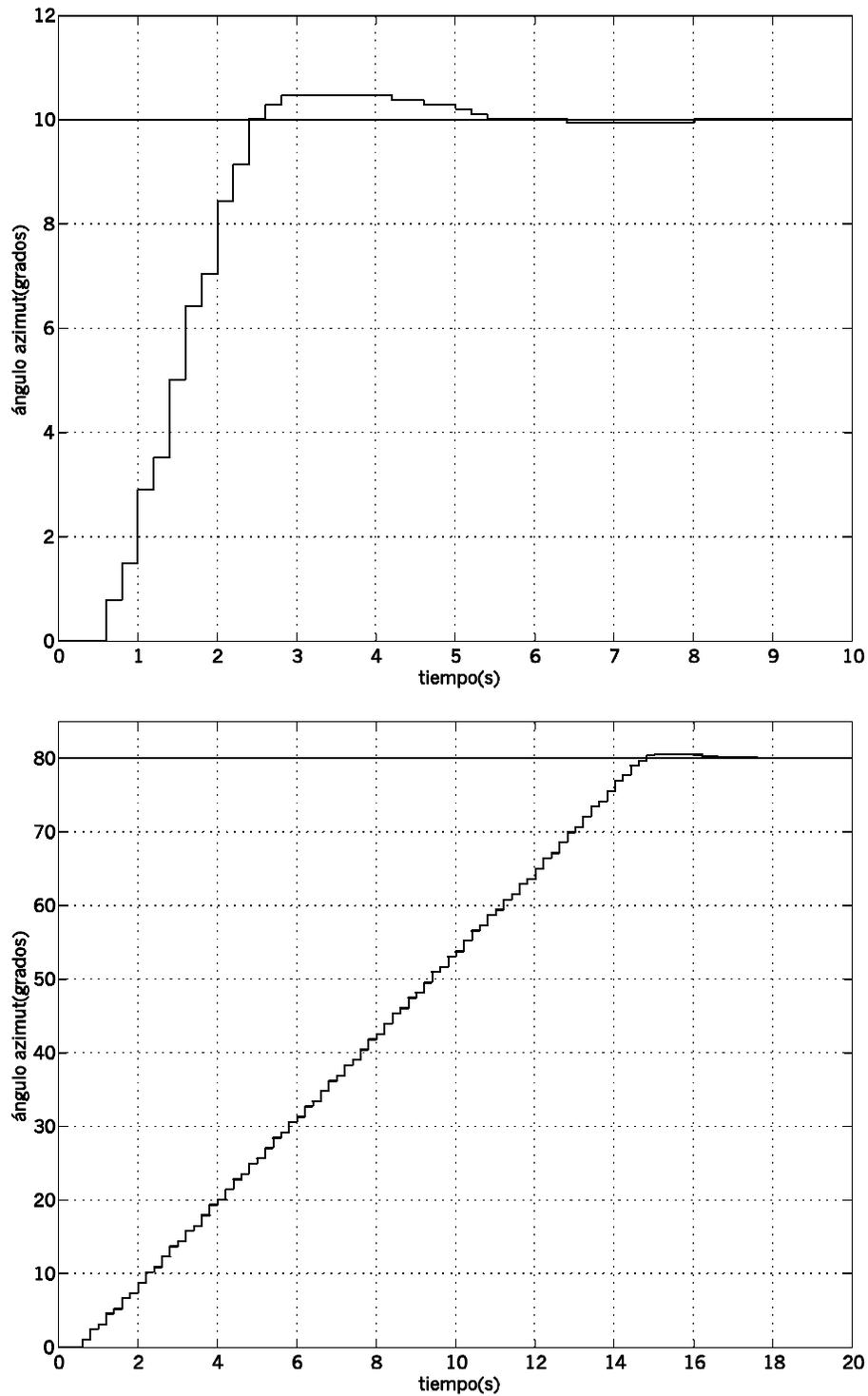


Figura 3.17

Aunque se han realizado muchas comparaciones no ha sido posible determinar ningún factor claro que haga aumentar o disminuir la diferencia entre sobreoscilaciones, dependiendo incluso de si se trabaja con el eje de azimut o de elevación. Lo que si se ha conseguido es plantear unas condiciones bajo las cuales el ángulo rebasado es exactamente el mismo. Estas son que las referencias sean múltiplos de 1.125 grados y que el cociente entre 2500 y la ganancia también lo sea, con lo que se obtendría una familia de ganancias. Se basa en la idea comentada anteriormente de que si el error justo después de la última actuación saturada es el mismo, la siguiente actuación también lo será y así sucesivamente de forma que el movimiento será idéntico. Este método es independiente del eje.

3.4.5 Conclusión

Como resumen del Apartado de control proporcional se pueden hacer varias observaciones. La primera es que con esta estructura tan simple la dinámica de la respuesta no puede ser cualquiera, ya que según se vio en la ecuación 3.7 la ganancia K sólo actúa sobre el término independiente del denominador. De hecho se comprobó con el lugar de las raíces (Apartado 3.4.1) como sólo existe un conjunto de puntos donde se pueden ubicar los polos del bucle cerrado. Será necesario buscar controladores más complejos que permitan mayor libertad y fiabilidad en la elección de $P_d(z)$.

El eje de azimut tiene el inconveniente de ser más inestable debido a su mayor retardo, con lo que el rango de variación de K es más reducido que para el eje de elevación.

3.5 Control proporcional derivativo (PD)

Ahora el controlador calcula la actuación en un instante determinado empleando el error en ese instante y el error en el instante anterior, de forma que aplicando la transformada de Laplace se llega a que su función de transferencia es la que aparece en la Ecuación 3.13. K sigue siendo la constante proporcional, T_d es el tiempo diferencial y T el período de muestreo. El propósito de este control es el de mejorar el régimen transitorio de la respuesta, puesto que tiene presente la velocidad de variación del error produciendo una corrección antes de que dicho error se haga excesivo, de manera que aumenta la estabilidad del sistema. Al igual que en el diseño del regulador P, se estudiarán los ejes azimut y elevación por separado.

$$G_{PD}(z) = K \left(1 + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad \text{Ecuación 3.13}$$

3.5.1 Control PD de azimut

Para poder calcular los parámetros que se ajusten a las especificaciones dadas lo primero es obtener la función de transferencia en bucle cerrado del conjunto, Ecuación 3.14.

$$G_{PD\text{BC}}(z) = \frac{K \cdot K_s \cdot [(T + T_d) \cdot z - T_d]}{z^4 - z^3 + K \cdot K_s \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T} \right) \cdot z - K \cdot K_s \cdot \frac{T_d}{T}} \quad \text{Ecuación 3.14}$$

En este caso el denominador es de orden 4, con lo que al polinomio que recoge la dinámica deseada $P_d(z)$ habrá que añadirle dos polos no influyentes. Por simplificar se van a considerar estos dos polos iguales de valor a . La Ecuación 3.15 es la expresión de este nuevo polinomio deseado, en el que se escribe el caso genérico, no se va a particularizar en función del tipo de respuesta. Como ya se razonó en el Apartado 3.4 un polo ubicado en $z=0.01$ no afecta, por lo que se sigue empleando dicho valor para a .

$$z^4 - (2a + 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot T)) \cdot z^3 + (4a \cdot e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) + e^{-2\delta\omega_n T}) \cdot z^2 - (2a \cdot e^{-2\delta\omega_n T} + 2a^2 \cdot e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot T)) \cdot z + a^2 \cdot e^{-2\delta\omega_n T} = P_d(z) \quad \text{Ecuación 3.15}$$

3.5.1.1 Respuesta críticamente amortiguada

Para una respuesta críticamente amortiguada, la Ecuación 3.15 se simplifica puesto que $\delta = 1$. Igualando coeficientes (no se incluyen los de mayor orden por ser iguales) se tiene en la Ecuación 3.16 cuatro ecuaciones con dos incógnitas que sólo aparecen en las correspondientes a z y z^0 . Por tanto habrá que elegir valores de δ y ω_n que satisfagan las dos primeras ecuaciones y con eso resolver las otras dos, lo que resulta muy complicado. Además la última ecuación da valores negativos para la K .

$$\begin{cases} 1 = 2a + 2e^{-\omega_n T} \\ 0 = 4a \cdot e^{-\omega_n T} + e^{-2\omega_n T} \\ K \cdot K_s \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) = 2a \cdot e^{-2\omega_n T} + 2a^2 \cdot e^{-2\omega_n T} \\ K \cdot K_s \cdot \frac{T_d}{T} = a^2 \cdot e^{-2\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.16}$$

Ante esta situación se contemplan dos alternativas. La primera consiste en sintonizar el regulador PD para un sistema idéntico al que se tiene sin tener en cuenta el retardo y dado que el caso real es más inestable relajar esos parámetros (reduciendo la ganancia y el tiempo diferencial). La segunda opción es ir probando valores y a base de prueba y error llegar a la respuesta deseada. Lo más razonable es optar por la primera vía porque implica realizar menos experimentos y además porque el eje de elevación sí se puede resolver analíticamente con lo que ya se tiene el punto de partida buscado, no es necesario efectuar más cálculos. El inconveniente es que del estudio del eje de elevación se concluye que no es posible obtener un regulador PD con un tiempo diferencial apreciable. Finalmente se ha decidido sintonizar el controlador a partir de las pruebas.

De la experimentación con el eje de azimut la primera conclusión a la que se llega es que no es posible efectuar controles con T_d superior a 0.2 segundos, dado que la secuencia de actuaciones que se genera presenta oscilaciones inesperadas que someten al eje de azimut a cambios bruscos en su movimiento. La Figura 3.18 representa las consignas de velocidad correspondientes a una de estas situaciones, para $K=700$ y $T_d=0.2$ s.

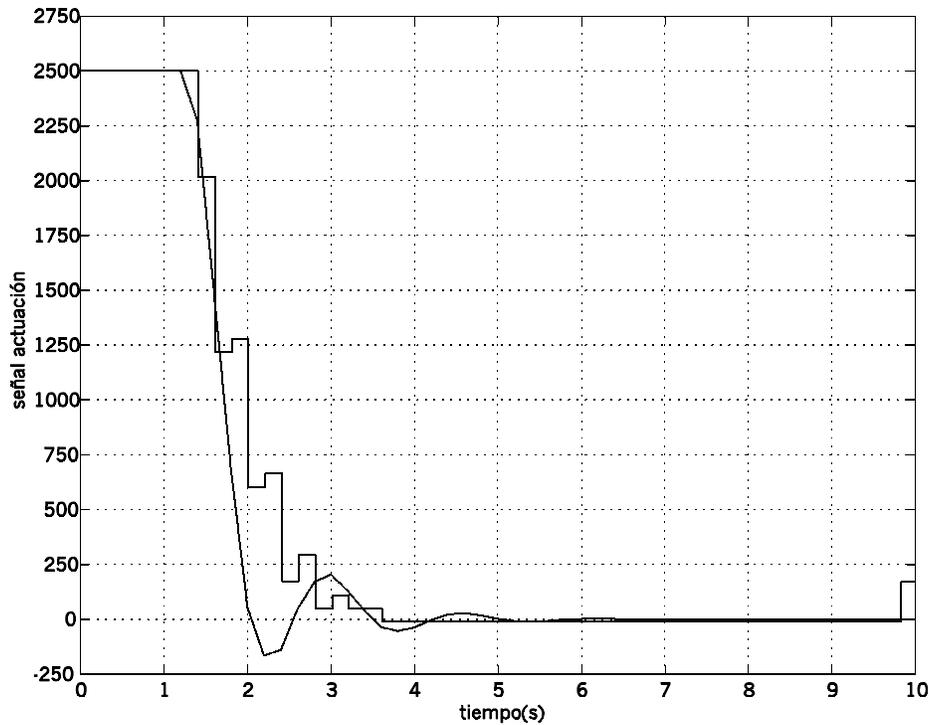


Figura 3.18

La explicación a este suceso se proporciona a partir de la ley de control de este tipo de reguladores (Ecuación 3.17). A medida que el sistema se desplaza se tiene que el error en el instante anterior (e_{K-1}) es mayor que el del ciclo actual (e_K), de forma que si $T_d=0.2$ s. el peso del error anterior es la mitad que el del error actual, y por tanto del mismo orden. Si a esto se le añade que, como ya se explicó en el Apartado 2.6, el sistema real no avanza siempre la misma cantidad de grados ante una misma actuación, el valor de la actuación va a estar sometido a variaciones ciertamente aleatorias. De hecho, es inmediato deducir que siempre que el error anterior sea superior al doble del error actual, la actuación se hará negativa. Es importante señalar que si el sistema no fuese un integrador puro no se presentaría de forma tan importante este fenómeno, puesto que el decrecimiento del error en cada período sería menos significativo.

$$u_K = \frac{K}{T} ((T + T_d) \cdot e_K - T_d \cdot e_{K-1}) \quad \text{Ecuación 3.17}$$

Una solución a este problema podría estar en aumentar la duración del período de control, con el objeto de quitarle peso a e_{K-1} frente a e_K . En este caso no es posible ya

que se corre el riesgo de no recoger toda la dinámica del sistema. La decisión que se ha tomado es la de reducir T_d , aunque eso realmente lo que implica es transformar el control PD en un control P. De las pruebas se ve que para valores de T_d inferiores a 0.1 s. se tienen garantías de que no van a presentarse secuencias de actuación extrañas, aunque se han detectado casos en los que si aparecen. En cambio en el sistema ideal implementado en *Simulink* este problema no se presenta hasta $T_d = 0.6$ s. (para una ganancia de 400), ya que la evolución del error es más uniforme.

Teniendo en cuenta las limitaciones sobre el tiempo diferencial se han buscado unos parámetros que consigan una respuesta rápida sin sobreoscilación. Por precaución se ha tomado $T_d = 0.05$ s, valor con el cual sería necesario que el error del ciclo fuese cuatro veces inferior a su predecesor. La Figura 3.19 representa la salida para dicho tiempo diferencial y una ganancia de $K = 400$.

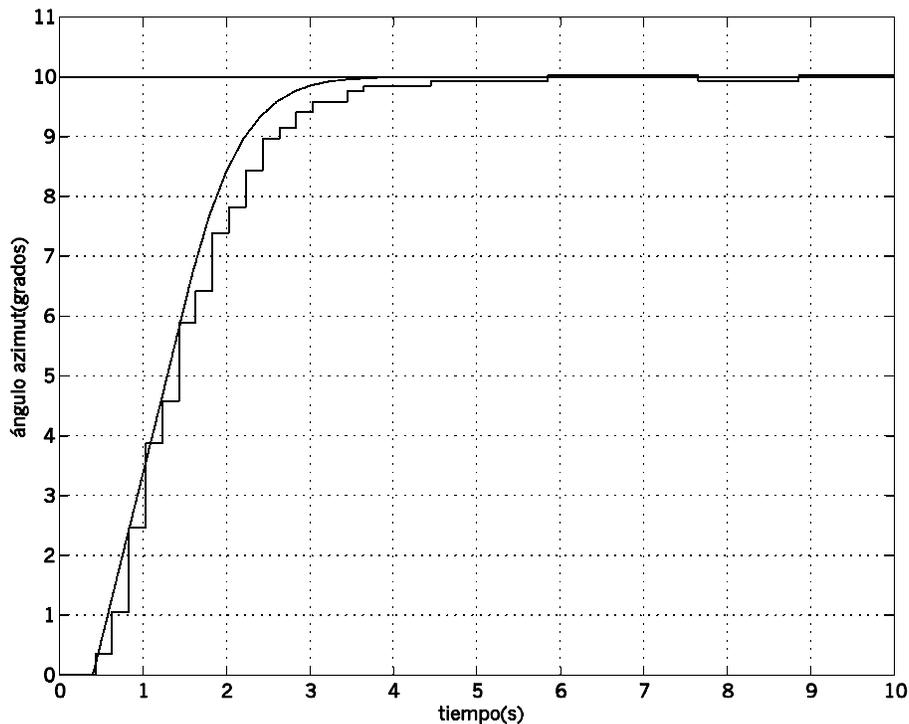


Figura 3.19

3.5.1.2 Respuesta subamortiguada

Ante los problemas que presenta el regulador PD, se ha desistido de calcular el controlador para estas especificaciones.

3.5.2 Control PD de elevación

En elevación el polinomio en bucle cerrado resulta de menor orden puesto que su retraso teórico es también menor, obteniéndose la Ecuación 3.18

$$G_{PDBC}(z) = \frac{K \cdot K_s \cdot [(T + T_d) \cdot z - T_d]}{z^3 - z^2 + K \cdot K_s \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) \cdot z - K \cdot K_s \cdot \frac{T_d}{T}} \quad \text{Ecuación 3.18}$$

Por tanto el polinomio deseado ha de ser de orden tres, el mismo que aparece en la Ecuación 3.9. Ahora identificando los términos de las Ecuaciones 3.9 y 3.18 se tienen 3 ecuaciones y dos incógnitas, la ganancia y el tiempo diferencial, ya que los coeficientes de orden 3 coinciden.

3.5.2.1 Respuesta críticamente amortiguada

El sistema de ecuaciones cuando $\delta=1$ resulta el que aparece en la Ecuación 3.19, en la que el polo adicional sigue siendo $a=0.01$.

$$\begin{cases} 1 = a + 2e^{-\omega_n T} \\ K \cdot K_s \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) = e^{-2\omega_n T} + 2a \cdot e^{-\omega_n T} \\ K \cdot K_s \cdot \frac{T_d}{T} = a \cdot e^{-2\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.19}$$

De la primera ecuación $\omega_n=3.52$ rad/s y de las otras dos $K=560.97$ y $T_d=0.0019$ s., habiéndose constatado que produce una salida igual a la que proporcionaba el control P con ganancia de 555.31. En la Figura 3.20 de la siguiente página aparece el resultado de la simulación.

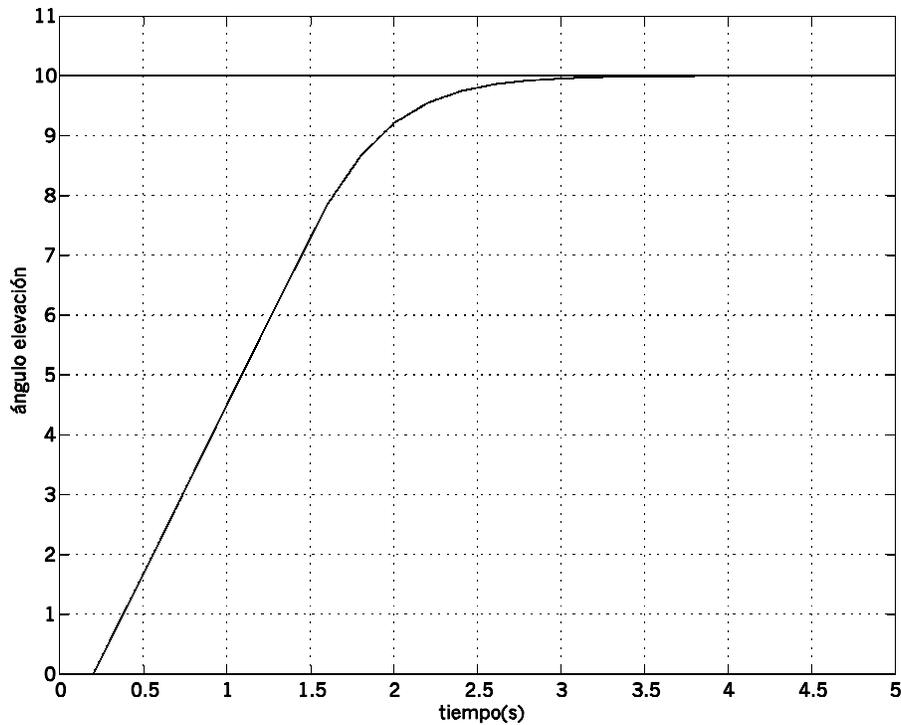


Figura 3.20

3.5.2.2 Respuesta subamortiguada

Ahora el sistema de ecuaciones se plantea con la *Exp1* de la Ecuación 3.9, y se llega a la Ecuación 3.20. Como lo que se pretende es una s.o.=1% y $t_r=1.2$ s, que implican los valores $\delta=0.826$ y $\omega_n=3.76$ rad/s., debe comprobarse que éstos satisfacen la primera ecuación del sistema y con las otras dos se calculan los parámetros. En este caso sí que la satisfacen con más exactitud que en el Apartado 3.4.2.2, queda $1\cong 0.99$. De la resolución de las otras se llega a que el controlador ha de tener una K de 656.63 y un T_d de 0.00195 segundos.

$$\begin{cases} 1 = a + 2e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \\ K \cdot K_S \cdot \left(1 + \frac{T_d}{T}\right) = e^{-2\delta\omega_n T} + 2a \cdot e^{-\delta\omega_n T} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1-\delta^2} \cdot T) \\ K \cdot K_S \cdot \frac{T_d}{T} = a \cdot e^{-2\delta\omega_n T} \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Realizando la simulación sin limitar la actuación se obtiene una respuesta con s.o.=0.8% y $t_r=1.39$ s. (el polo adicional añade 0.2 s) y teniendo presente la saturación estos valores se transforman en s.o.=0.30% y $t_r=2.54$ s. La Figura 3.21 representa este último resultado.

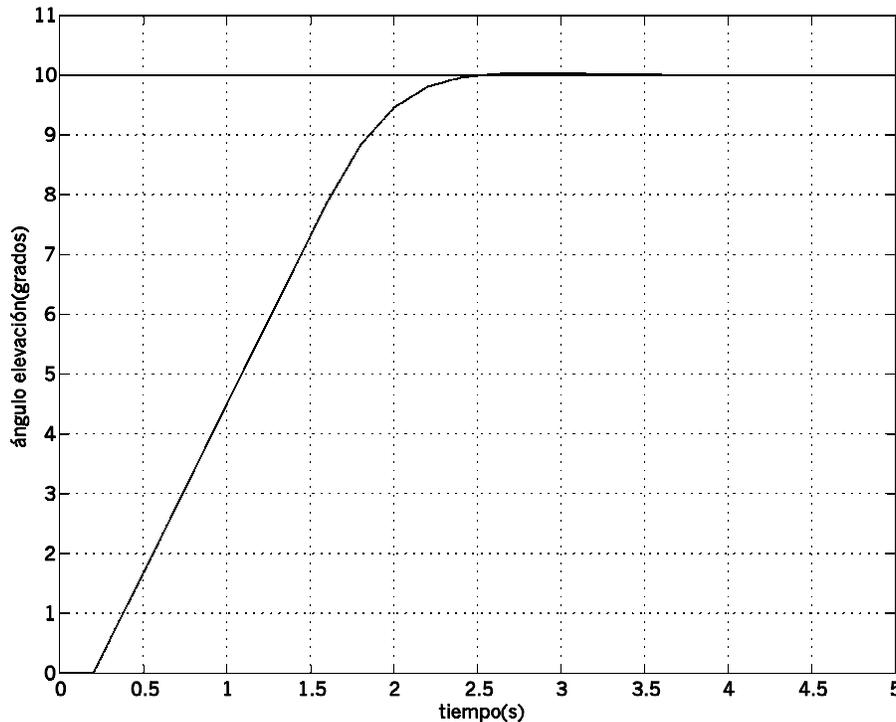


Figura 3.21

Ante los resultados obtenidos en ambos subpartados se concluye que los tiempos diferenciales son tan pequeños que prácticamente se trata de controles proporcionales. Se ha intentado buscar soluciones con un mayor tiempo diferencial. Si se añade como polo adicional $a=0.1$, que tampoco afecta a la dinámica deseada y sigue cumpliendo prácticamente la primera ecuación de la Ecuación 3.20, se consiguen parámetros mayores. Así para $\delta=0.826$ y $\omega_n=3.7$ rad/s sale $K=808.03$ y $T_d=0.016$ s, un tiempo pequeño aunque un orden de magnitud mayor que con $a=0.01$. Si se emplea *Simulink* se tiene que sin saturación ahora la s.o. es del 5% y el tiempo de subida de 1 s, lo que no se considera válido por estar muy lejos de las especificaciones de partida.

También se ha probado a resolver la Ecuación 3.20 empleando mayores períodos de muestreo con $a=0.01$. De esta forma se consigue aumentar T_d , aunque a costa de

disminuir la frecuencia natural, haciendo más lento al sistema y en consecuencia incumpliendo las especificaciones. Así, para un tiempo de muestreo de 10 segundos se tiene $K=11.29$ y $T_d=0.08$ s., por lo que se ve que de seguir en esa línea se conseguirían valores de T_d significativos. Como ya se ha dicho en el sistema posicionador no es posible emplear tan elevados tiempos de control.

3.5.3 Otras referencias

El control PD no funciona bien para el sistema con el que se está trabajando con lo que no se va estudiar la influencia de la referencia. En cualquier caso la actuación sólo depende del error y el error anterior por lo que las conclusiones son análogas a las efectuadas en el control proporcional.

3.5.4 Conclusión

La conclusión para el controlador PD es que no es posible emplear tiempos diferenciales mayores de 0.1 s. para el sistema real y 0.6 s. para el modelo. El motivo es que no funciona bien para el sistema que se está tratando, dando lugar a secuencias de actuación con crecimientos y decrecimientos inesperados que pueden resultar perjudiciales para el sistema. De hecho en los intentos que se han efectuado para sintonizar el controlador conforme a las especificaciones dadas se han obtenido siempre valores demasiado bajos para T_d .

3.6 Control proporcional integral (PI)

Con la red PI se persigue perfeccionar el régimen permanente de la respuesta. Para ello se introduce un polo en $z=1$ que aumenta el tipo del sistema e integra la señal del error. Su expresión es la que aparece en la Ecuación 3.21, siendo K la ganancia, T el período de muestreo y T_i el tiempo integral.

$$G_{PI}(z) = K \left(1 + \frac{T}{2 \cdot T_i} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right) \quad \text{Ecuación 3.21}$$

Como sucedía en Apartados anteriores, para conseguir unos parámetros conforme a las especificaciones, hay que obtener previamente las funciones de transferencia en bucle cerrado del conjunto.

3.6.1 Control PI de azimut

En la Ecuación 3.22 aparece el bucle cerrado para el eje de azimut. Como el denominador es de orden 4 el polinomio deseado ha de ser igualmente de orden 4, por lo que habrá que añadir dos polos a $P_d(z)$.

$$G_{PIBC}(z) = \frac{\frac{K \cdot K_s}{2T_i} \cdot [(T + 2T_i) \cdot z + (T - 2T_i)]}{z^4 - 2z^3 + z^2 + \frac{K \cdot K_s}{2T_i} (T + 2T_i) \cdot z + \frac{K \cdot K_s}{2T_i} (T - 2T_i)} \quad \text{Ecuación 3.22}$$

Como ya se hizo en el Apartado 3.4 se emplean dos polos iguales y resulta la misma expresión de la Ecuación 3.15. Si se identifican términos quedan 4 ecuaciones con dos incógnitas complejas de resolver. Pero el problema fundamental para este caso es que se ha detectado en las primeras simulaciones que, independientemente de los valores asignados a K y T_i , la respuesta del sistema siempre va a ser subamortiguada. Es esencial señalar que este inconveniente se presenta también para el mismo sistema sin retardo y sin saturación, por lo que puede ser debido a la naturaleza del sistema, que es ya de tipo 1 y el controlador PI aumenta en uno dicho tipo. De hecho si se elimina el retardo la Ecuación 3.22 se simplifica enormemente y es posible su resolución. Así, escogiendo unos valores de $K=1944.44$ y $T_i=0.7$ s., la función de transferencia en bucle cerrado resulta la expresada en la Ecuación 3.23, que a pesar de presentar un polo

doble en $z=0.5$, lo que implicaría respuesta de sobreoscilación nula, sigue saliendo subamortiguada con una s.o. del 25% (sin saturación, 80% con).

$$G_{PIBC}(z) = \frac{z - 0.75}{z^2 - z + 0.25} \quad \text{Ecuación 3.23}$$

3.6.1.1 Demostración

Antes de seguir, se procede en este subapartado a demostrar matemáticamente que un sistema integrador puro siempre sobreoscila ante un control PI, independientemente del valor que tomen K y T_i . Como se explicó en el párrafo anterior, esto no depende del retardo, por lo que con objeto de simplificar, la demostración se ha desarrollado para el caso sin retardo. Por otra parte una vez demostrado se puede hacer extensible a la misma planta con retraso, dado que al ser más inestable tiene una mayor tendencia a la sobreoscilación. También se hace necesario trabajar con el sistema en su versión continua con objeto de llegar a una expresión de la salida en el dominio del tiempo.

La demostración se va a llevar a cabo para un sistema de primer orden en general, con un polo ubicado en $s = p$. La idea es poner de manifiesto que el control PI es siempre subamortiguado debido a la naturaleza del sistema, que introduce un segundo integrador en el bucle abierto.

Para el caso continuo el controlador PI y el sistema son los que aparecen en la Ecuación 3.24. Por comodidad y dado que no afecta a la demostración a partir de este momento se va a englobar la constante del sistema en la del control, denominando a todo el conjunto K .

$$G_{PI}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right) \quad G(s) = \frac{0.00225}{s - p} \quad \text{Ecuación 3.24}$$

La Ecuación 3.25 expresa la función de transferencia del bucle cerrado y la de la referencia, que es la transformada de Laplace de un escalón de amplitud R . Despejando es inmediato obtener la transformada de la respuesta, $Y(s)$. Para poder realizar la transformada inversa se ha reordenado la expresión de $Y(s)$ como aparece en la

Ecuación 3.26, definiendo las variables a y w , constantes para cada pareja K y T_i . De esta forma se van a poder usar las expresiones del seno y coseno exponenciales.

$$G_{PIBC}(s) = \frac{K \cdot (s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + (K - p) \cdot s + \frac{K}{T_i}} = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad R(s) = \frac{R}{s} \quad \text{Ecuación 3.25}$$

$$Y(s) = \frac{R \cdot K \cdot (s + \frac{1}{T_i})}{s \cdot ((s + a)^2 + w^2)} \quad a = \frac{K - p}{2} \quad w = \pm \sqrt{\frac{K}{T_i} - \frac{(K - p)^2}{4}} \quad \text{Ecuación 3.26}$$

Para antitransformar se descompone el numerador de $Y(s)$ en dos partes, que se denotarán como $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$, ver Ecuación 3.27. La transformada inversa de $Y_1(s)$ al simplificarse es casi inmediata y aparece en la Ecuación 3.28.

$$Y_1(s) = \frac{R \cdot K}{(s + a)^2 + w^2} \quad Y_2(s) = \frac{R \cdot K \cdot \frac{1}{T_i}}{s \cdot ((s + a)^2 + w^2)} \quad \text{Ecuación 3.27}$$

$$Y_1(t) = \frac{R \cdot K}{w} \cdot e^{-at} \cdot \text{sen}(wt) \quad \text{Ecuación 3.28}$$

Para resolver $Y_2(s)$ hay que descomponer en fracciones simples. Identificando numeradores y calculando las constantes de la descomposición se llega finalmente a la Ecuación 3.29.

$$Y_2(s) = \frac{R}{s} - \frac{R \cdot (s + 2a)}{(s + a)^2 + w^2} = \frac{R}{s} - \frac{R \cdot (s + a)}{(s + a)^2 + w^2} - \frac{R \cdot a}{w} \cdot \frac{w}{(s + a)^2 + w^2} \quad \text{Ecuación 3.29}$$

Con esta expresión se pueden ya emplear las fórmulas de la transformada de Laplace, consiguiéndose la dependencia de $Y_2(t)$, que aparece en la Ecuación 3.30. Finalmente sumando $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ se tiene en la Ecuación 3.31 la variación con el

tiempo de la respuesta del sistema ante una entrada en escalón y un control PI, en función de p , R , K y T_i .

$$Y_2(t) = R - R \cdot e^{-at} \cdot \cos(\omega t) - \frac{R \cdot (K - p)}{2\omega} \cdot e^{-at} \cdot \text{sen}(\omega t) \quad \text{Ecuación 3.30}$$

$$Y(t) = R - R \cdot e^{-at} \cdot \cos(\omega t) + \frac{R \cdot (K + p)}{2\omega} \cdot e^{-at} \cdot \text{sen}(\omega t) \quad \text{Ecuación 3.31}$$

Ante esta expresión se pueden hacer varios comentarios. El primero es que según sea el valor de p , la variable a será positiva o negativa. Si es positiva, para lo cual $p < K$, la exponencial se hará negativa de manera que cuando el tiempo tiende a infinito las exponenciales se anulan convergiendo la respuesta a la referencia. En concreto para el sistema que se estudia $p = 0$ y al ser K siempre positiva siempre va a haber convergencia a la referencia, como ya se anticipó en el Apartado 3.2. En caso de que $p > K$ se tiene una exponencial creciente que puede dar lugar a inestabilidades.

Por otro lado para determinar si esta función en el tiempo supera o no a la referencia hay que distinguir dos situaciones debido a la forma de w , según sea la raíz cuadrada real o imaginaria. Habrá que estudiar el signo del radicando, como se ve en la Ecuación 3.32, de la que se concluye que w es un número real si $4K - T_i \cdot (K - p)^2 \geq 0$ y $w \notin \Re$ en caso contrario. Particularizando para el sistema w es real si $K \cdot T_i \leq 4$ y es imaginario si $K \cdot T_i > 4$.

$$w = \pm \sqrt{\frac{K}{T_i} - \frac{(K - p)^2}{4}} \rightarrow \frac{K}{T_i} - \frac{(K - p)^2}{4} \geq 0 \leftrightarrow 4K - T_i \cdot (K - p)^2 \geq 0 \quad \text{Ecuación 3.32}$$

En el caso de que w sea real la expresión $Y(t)$ se mantiene tal y como se presenta en la anterior Ecuación 3.31. Se tiene en consecuencia la diferencia entre un seno y un coseno del mismo período, atenuadas por el mismo valor exponencial. Para saber la amplitud relativa del seno con respecto al coseno basta efectuar el cociente de la

Ecuación 3.33 llegándose a una expresión que puede tomar valores mayores, iguales o menores que uno, ya sea p igual o distinto a 0.

$$\frac{\frac{R \cdot (K + p)}{2w}}{R} = \frac{\sqrt{T_i} \cdot (K + p)}{\sqrt{4K - T_i} \cdot (K - p)^2} \quad \text{Ecuación 3.33}$$

Pero lo realmente significativo es que al ser el período el mismo, siempre va a existir, con independencia de la amplitud de cada uno, un punto en el que se produzca la intersección el seno y el coseno, momento en el que la salida alcanza la referencia. En instantes posteriores el seno será positivo y mayor que el coseno, por lo que va a sumar a R y va a sobreoscilar. Por tanto siempre que los parámetros del regulador hagan w real la respuesta va a ser subamortiguada. La máxima desviación respecto a la referencia aparecerá en general cuando el coseno se haga negativo y el seno sea aún mayor que cero (wt entre $\pi/2$ y π radianes). En la Figura 3.22 se explica gráficamente lo razonado en este párrafo, con las tres posibilidades de amplitudes relativas entre el seno y el coseno. No se debe olvidar que estos valores están todos reducidos por la exponencial, que al ser igual en ambas curvas no afecta a la reflexión realizada.

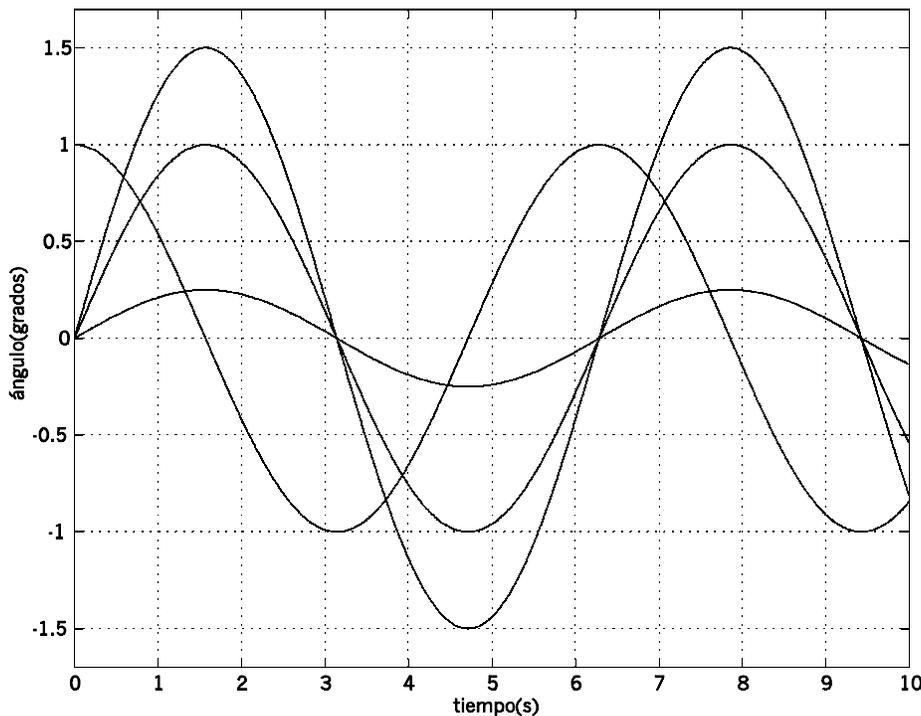


Figura 3.22

Para completar la demostración es preciso estudiar el segundo caso, cuando $4K - T_i \cdot (K - p)^2 < 0$ ó $K \cdot T_i > 4$. Como w es ahora un número imaginario, se va a escribir de la forma que aparece en la Ecuación 3.34. Esto implica que en la Ecuación 3.31 se están manejando senos y cosenos de números complejos, que transforman dicha ecuación en otra de magnitudes trigonométricas hiperbólicas, la Ecuación 3.35.

$$w = i \cdot w^* = i \cdot \sqrt{\frac{(K - p)^2}{4} - \frac{K}{T_i}} \quad \text{Ecuación 3.34}$$

$$Y(t) = R - R \cdot e^{-at} \cdot \cosh(w^* t) + \frac{R \cdot (K - p)}{2w^*} \cdot e^{-at} \cdot \sinh(w^* t) \quad \text{Ecuación 3.35}$$

El seno y coseno hiperbólicos son funciones exponenciales que en el instante inicial valen cero y uno respectivamente y que al final siempre acaban convergiendo en una única curva. Cuanto mayor sea el valor de w^* antes se produce dicha convergencia. Por otro lado el cociente entre amplitudes de seno y coseno resulta idéntico a la expresión de la Ecuación 3.33 cambiando de signo el denominador, como se ve en la Ecuación 3.36. De esta ecuación se concluye que para el sistema integrador puro, independientemente del valor que adopten K y T_i , el término del seno (que suma) es mayor que el del coseno (que está restando) y por tanto siempre se sobrepasa la referencia. En cambio si el polo es distinto de cero puede darse el caso de que el cociente sea menor que uno, siendo en consecuencia el coseno mayor que el seno y no produciéndose sobreoscilación alguna en la respuesta. La Figura 3.23 es la evolución gráfica del seno y coseno hiperbólicos para una $w^* = 1.25$ rad/s en trazo grueso y $w^* = 0.5$ rad/s en trazo más fino.

$$\frac{\frac{R \cdot (K + p)}{2w^*}}{R} = \frac{\sqrt{T_i} \cdot (K + p)}{\sqrt{T_i \cdot (K - p)^2 - 4K}} \quad \text{si } p = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{T_i \cdot K}{T_i \cdot K - 4}} \quad \text{Ecuación 3.36}$$

Sobre el \pm de la raíz cuadrada en w hay que decir que no altera la demostración, ya que el término del coseno no cambiaría de signo y el cambio de signo del seno se cancela con el del propio w que lo va multiplicando.

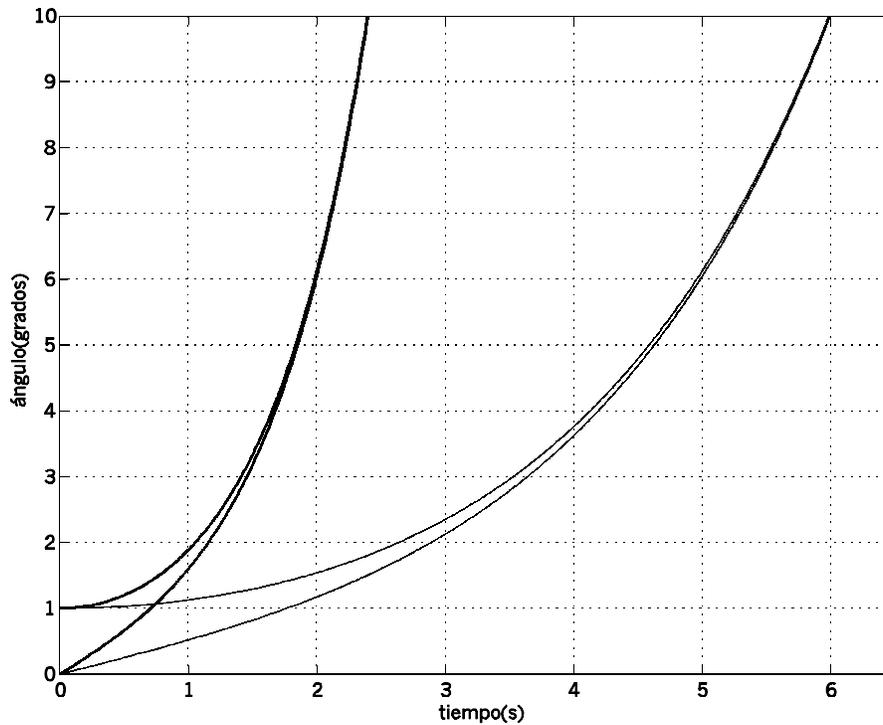


Figura 3.23

Finalmente la conclusión de esta demostración es que para el sistema que se trata en este Proyecto, por el hecho de ser un integrador puro, no es posible diseñar un regulador PI que cumpla unas especificaciones de $\delta \geq 1$.

Ante este hecho, y una vez demostrado convenientemente, se concluye que la única opción para sintonizar el controlador es emplear *Simulink*. Tras desarrollar múltiples experimentos se ha detectado que, para conseguir respuestas sobreamortiguadas o con poca s.o. mediante el control PI, es necesario emplear tiempos de integración del orden de 80 segundos (y ganancias pequeñas), valor que no es en ningún caso propio de esta familia de reguladores.

La Figura 3.24 es el resultado de una prueba con $K=300$ y $T_i=300$ s. Se muestra como para esta situación el sistema sobrepasa ligeramente la referencia convergiendo lentamente hasta el permanente. Se recuerda que en esta figura aparecen en línea continua la referencia de 10 grados y la simulación, mientras que la línea escalonada es la respuesta real a la que se le ha aplicado el mantenedor de orden cero.

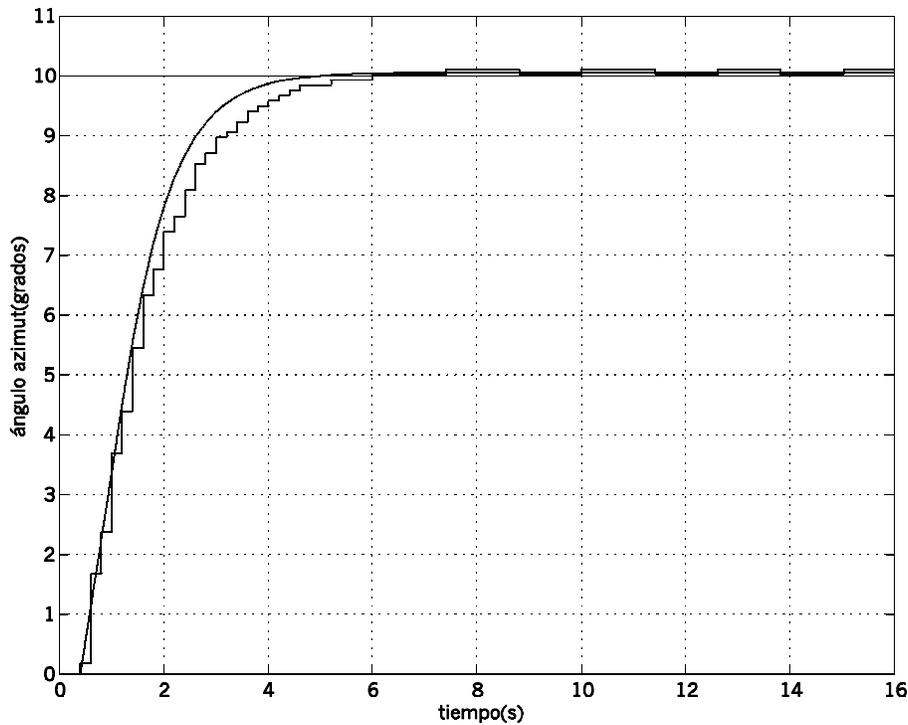


Figura 3.24

3.6.1.2 Efecto *Windup*

Por otro lado y dado que se trata de un control con limitación en la señal de actuación va a aparecer el fenómeno indeseado del *Windup* o crecimiento incontrolado del término integral. Esto se produce cuando la señal de control satura al actuador, ya que un incremento de la actuación a la salida del PI no conduce a una respuesta más rápida del sistema, de forma que la acción integral sigue aumentando sin producir ningún efecto en la salida del sistema. Como consecuencia la señal del error deberá mantenerse mucho tiempo con signo contrario para llevar al integrador a su valor estacionario, lo que conlleva la aparición de sobreoscilaciones y tiempos de establecimiento o asentamiento elevados.

La Figura 3.25 muestra un ejemplo de *Windup*, para una $K = 400$ y $T_i = 4$ s. en el eje azimut. Existe similitud entre la simulación y el sistema real salvo en la zona de máxima desviación respecto a la referencia, debido a que como ya se ha comentado el retardo para señales pequeñas es bastante aleatorio y en general menor de 400 ms. Se aprecia como debido en parte al *Windup* la sobreoscilación se dispara, siendo del 31% (33.6% con el modelo de *Simulink*). El tiempo de subida es de 2.27 s. (2.18 s. en la

simulación). En estos casos y dada la forma de las respuestas (con gran sobreoscilación) puede resultar más interesante conocer el valor del tiempo de establecimiento del 2%, que resulta ser de 10.58 s. (11.48 s. en simulación).

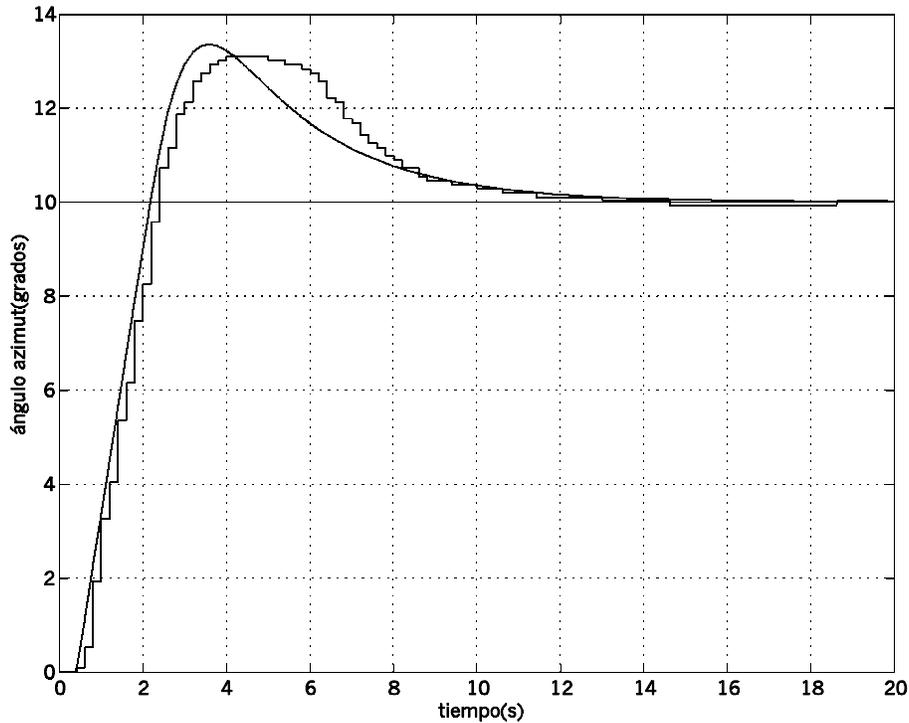


Figura 3.25

Antes de proseguir es conveniente comentar la forma de la respuesta real en este último experimento. Como ya se explicó en los Apartados 2.6 y 3.4.3 el retardo ante un cambio en el sentido de movimiento puede ser mayor que el teórico. También se dijo que no es posible enviar una nueva señal de actuación si el sistema no ha detectado el cambio en la posición. En el control proporcional esto sólo provocaba que la sobreoscilación fuese más lenta. En el control PI en cambio es mucho más perjudicial puesto que la señal de actuación se va actualizando (sin poderse enviar) en cada ciclo a pesar de no cambiar el ángulo, de forma que crece más de lo previsto, sería como un efecto *Windup* localizado en la sobreoscilación. Por este motivo en el momento que cambia el ángulo y se le manda la actuación el sistema se acelera.

Además, como en general la primera actuación en sentido contrario en el tramo de sobreoscilación es pequeña, independientemente de que el retraso sea algo mayor que el

teórico, va a tardar del orden de 1 s. (para 100 la velocidad es de 1.1 grados por segundo) en recorrer el paso mínimo. Durante todo ese tiempo no deja de crecer la actuación integral. Este efecto será más notable cuanto menor sea el tiempo de integración, al ser el crecimiento más pronunciado.

Prosiguiendo con el *Windup*, cuanto menor sea el valor de T_i más importancia cobra el término integral y por tanto más acusado será el *Windup*, como se muestra en la Figura 3.26 en la que $K=400$ y $T_i=2$ s. En este caso el hecho de reducir a la mitad el tiempo integral provoca que la sobreoscilación se eleve hasta el 54.7% (61% en el caso teórico). Ahora $t_r=2.15$ s. (2.18 s.) y $t_{s2\%}$ no existe para el caso real por el problema explicado en el párrafo anterior, ya que en cada s.o. la actuación crece tanto que se acelera y sobrepasa demasiado la referencia, de forma que el transitorio se alarga.

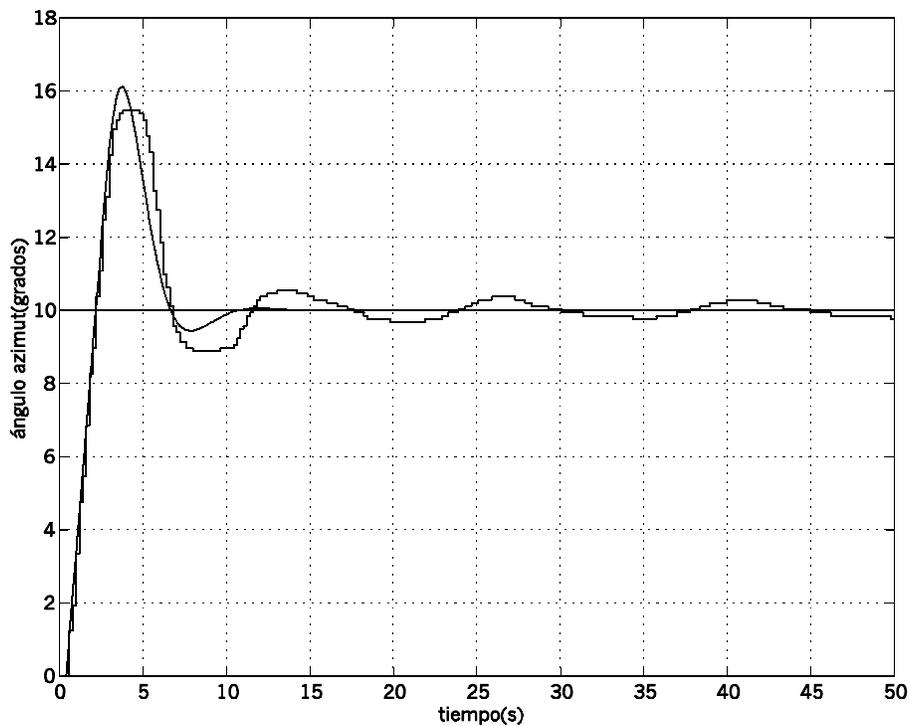


Figura 3.26

Hay que señalar que lo que provoca este tipo de respuestas tan lentas y de gran sobreoscilación es tanto el *Windup* como la naturaleza del sistema, que ya se demostró que es tal que no existen parámetros para el regulador PI que consigan una salida sobreamortiguada.

3.6.1.3 Métodos *Anti-Windup*

Existen varios métodos para corregir este efecto (*métodos Anti-Windup*). En la literatura consultada se han estudiado 3: limitación del término integral, integración condicional y seguimiento integral. De estos 3 el del seguimiento integral se emplea para reguladores PI variantes en el tiempo, cosa que no sucede en este caso. Tras efectuar simulaciones con las otras dos técnicas se ha optado por realizar el control con limitación del término integral porque es la que mejor funciona. El método consiste, como indica la Figura 3.27, en acotar el valor de la parte integral del regulador. La dificultad está en decidir qué valor es el más idóneo para dicha acotación, lo que se conseguirá empleando las simulaciones.

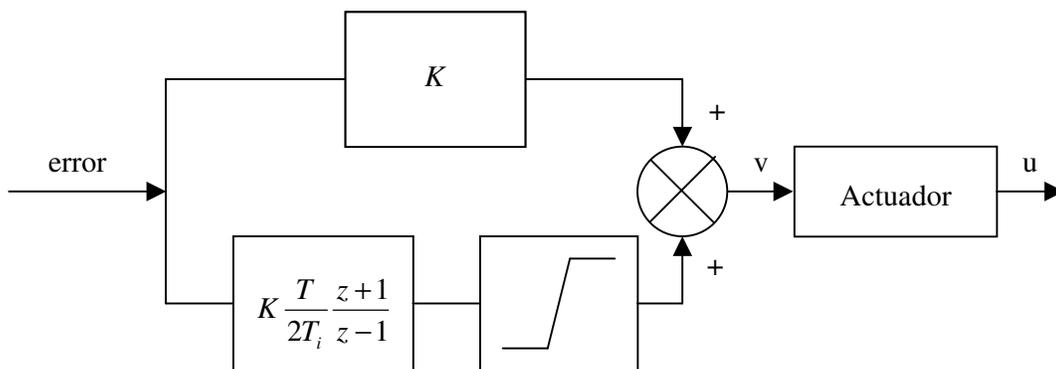


Figura 3.27

Los resultados de aplicar la limitación del término integral se muestran en la Figura 3.28, para un control con $K=400$ y $T_i=2$ s. Tras numerosas pruebas se ha comprobado que la mejoría en el control empieza a ser sensible a partir de 600, aunque en la figura se representa, para que sea más evidente, una acotación entre -150 y 150 . En este caso la sobreoscilación se reduce de un 54.7% (61% de simulación) a un 4.6% (3.75%). El tiempo de subida pasa a ser de 2.88 segundos (2.54 s). Como se puede observar la respuesta presenta una forma un tanto peculiar, permaneciendo oscilante entre los 10.37 y 10.46 grados durante cierto tiempo hasta que decrece a la referencia. En *Simulink* al no existir paso mínimo sí se queda fija a 10.375 grados hasta que se mueve para converger hacia el valor deseado.

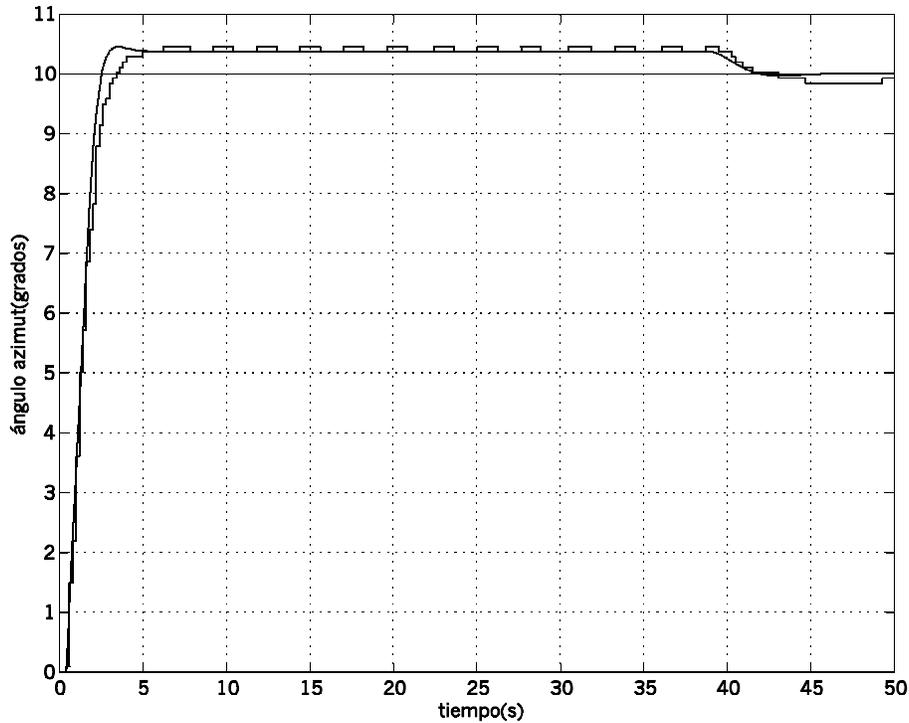


Figura 3.28

Se va a explicar este fenómeno que conlleva un falso régimen permanente. Cuando el sistema sobreoscila, la parte de la actuación correspondiente al control proporcional cambia de signo y comienza a crecer. La parte integral por su parte permanece positiva y de valor 150, de manera que cuando el error es tal que la acción proporcional se hace -150 , la actuación total es nula y en consecuencia deja de moverse el eje. Por otro lado aunque el sistema permanece parado, a medida que pasa el tiempo la actuación integral va decreciendo, puesto que el error es negativo. Llegará por tanto un momento en que dicha actuación sea inferior a 150 y por tanto la actuación global será negativa con lo que el sistema se desplaza hacia la referencia. Para este ejemplo se podría decir que la situación real debería comenzar a descender antes que la ideal ya que mientras que en esta la reducción del término integral es de 15 unidades en cada ciclo, constante, para el real cuando el ángulo es de 10.37 este valor es de 14.8 y cuando se encuentra en 10.46 es 18.4, con lo que el global (la media) es mayor que 15. Pero existen otros factores, como el tiempo que está en uno u otro ángulo o el valor máximo que alcanza la acción integral antes de empezar a decrecer. Así, se han encontrado pruebas en las que el tiempo es mayor y otras menor que el teórico.

Por lo explicado en el párrafo anterior, se deduce que el tiempo que transcurre con el sistema parado será mayor cuanto menor sea el límite elegido, por lo que en la elección de éste será necesario llegar a un compromiso entre la reducción de la sobreoscilación y dicho tiempo. Así, si se hacen pruebas para el mismo regulador de la figura anterior pero con un límite de 50, se obtiene que aunque la s.o. pasa a ser 1.95%, el sistema empieza a convergir a la referencia al cabo de 120 s. y en cambio si el límite es de 600 la salida presenta una s.o. del 15% y un tiempo de 10.5 s.

En las simulaciones efectuadas se observa que en el caso de que el sistema no fuese un integrador puro la técnica de *Anti-Windup* funcionaría mejor, reduciéndose la presencia de este falso permanente.

3.6.2 Control PI de elevación

En elevación la función resultante es la que se muestra en la Ecuación 3.37.

$$G_{PIBC}(z) = \frac{\frac{K \cdot K_s}{2T_i} \cdot [(T + 2T_i) \cdot z + (T - 2T_i)]}{z^3 - 2z^2 + \left[1 + \frac{K \cdot K_s}{2T_i} (T + 2T_i)\right] \cdot z + \frac{K \cdot K_s}{2T_i} (T - 2T_i)} \quad \text{Ecuación 3.37}$$

Conforme a lo explicado en el Apartado precedente, no tiene utilidad práctica intentar resolver las ecuaciones que proporcionan los parámetros para unas especificaciones dadas, con lo que se recurre a la sintonización mediante simulaciones.

Al igual que en azimut para obtener respuesta sin sobreoscilación es necesario recurrir a tiempos de integración enormes, del orden de 200 segundos. A continuación se representa en la Figura 3.29 el resultado en *Simulink* de emplear $K=300$ y $T_i=300$ s. Aparece un pequeño error que puede parecer permanente pero que en realidad desaparece de forma muy lenta.

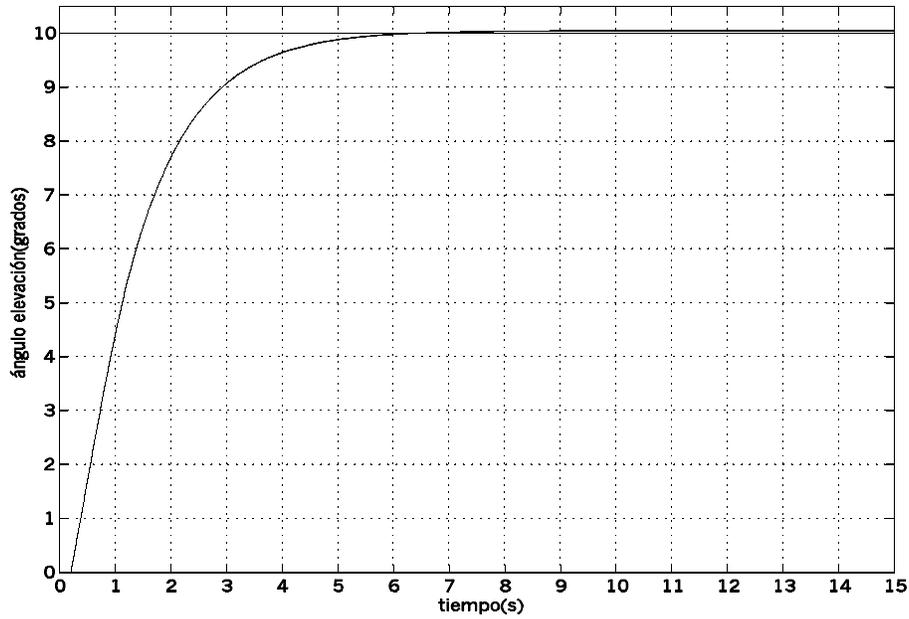


Figura 3.29

Para valores típicos de T_i , la salida presenta una gran sobreoscilación, aunque algo inferior al del eje de azimut, por poseer un retardo menor y en consecuencia ser un sistema más estable. La Figura 3.30 corresponde a $K = 400$ y $T_i = 2$ s. Con estos parámetros resulta una s.o.=45% (en azimut era 61.2%), un $t_r = 1.98$ s. y $t_{s,2\%} = 9.96$ s.

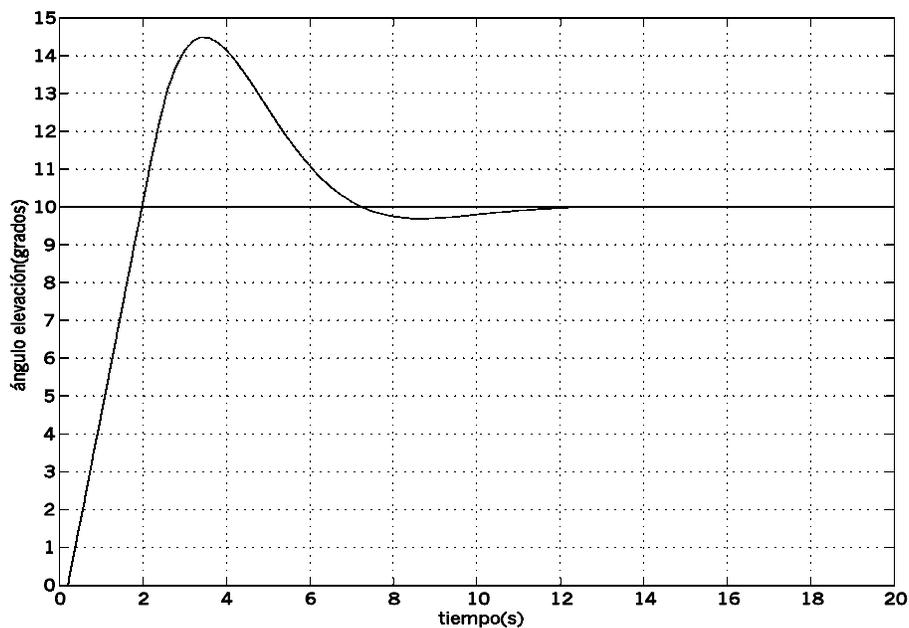


Figura 3.30

Si se emplea la técnica de limitación del término integral con el propósito de corregir el efecto *Windup*, los comentarios son los mismos que se hicieron en el Apartado 3.6.1.3. Existe un estado intermedio durante el cual el sistema no se mueve, y una vez la acción integral haya decrecido por debajo del límite impuesto, comienza a desplazarse. En este caso la duración de dicho estado será menor puesto que al tratarse de un sistema más estable la parte integral ha crecido menos. La Figura 3.31 representa al caso de regulador PI con $K = 400$ y $T_i = 2$ s. y un límite de 150, idéntico al que se hizo en azimut, para poner de manifiesto la disminución en la duración de ese aparente régimen permanente. Ahora el ángulo comienza a disminuir a los 36.6 segundos, mientras que en azimut disminuía a los 38.8 s. (ver Figura 3.28). Lo que sí coincide en ambos casos es el valor del permanente (10.375 grados), debido a que este sólo depende del valor de la cota máxima impuesta a la actuación integral.

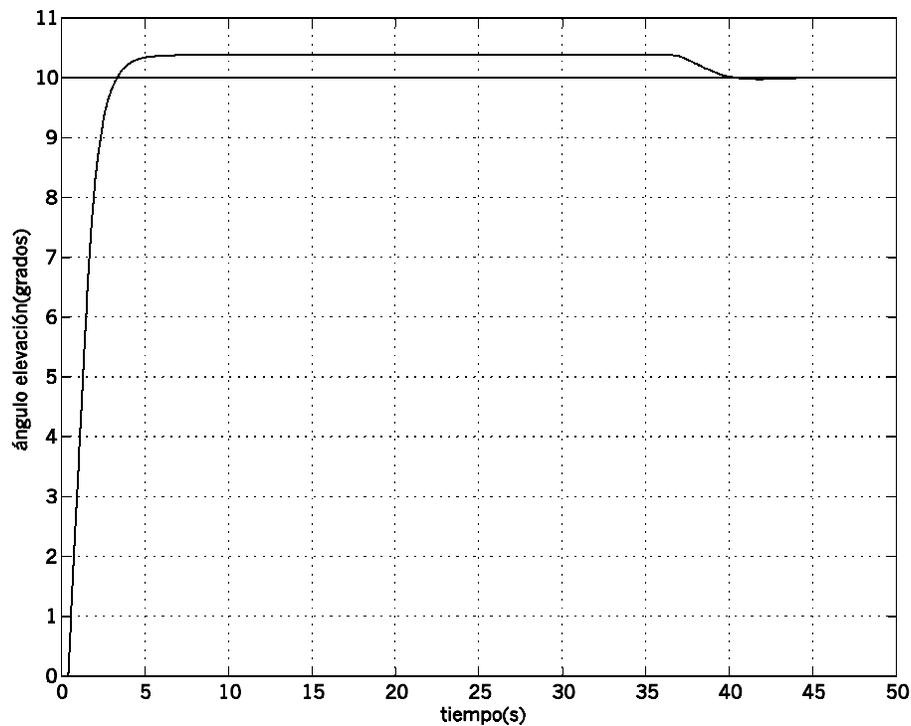


Figura 3.31

3.6.3 Control PI mediante Ziegler-Nichols

Otra opción para sintonizar el PI es emplear los métodos de Ziegler-Nichols (ya explicados en el Apartado 3.4.3) y que para este caso recomiendan adoptar, según el primer método, en el caso de azimut $K = 1012.7$ y $T_i = 1.185$ s. y para el eje de

elevación (Tabla 3.1) $K=1922.2$ y $T_i=0.624$ s. Como ocurrió con el control proporcional, el resultado no es muy bueno, de hecho se hace casi inestable, con una sobreoscilación del 100%. La Figura 3.32 muestra este primer método para azimuth, en elevación es muy similar. Para evitar someter al sistema a condiciones críticas se ha renunciado a implementar estos parámetros.

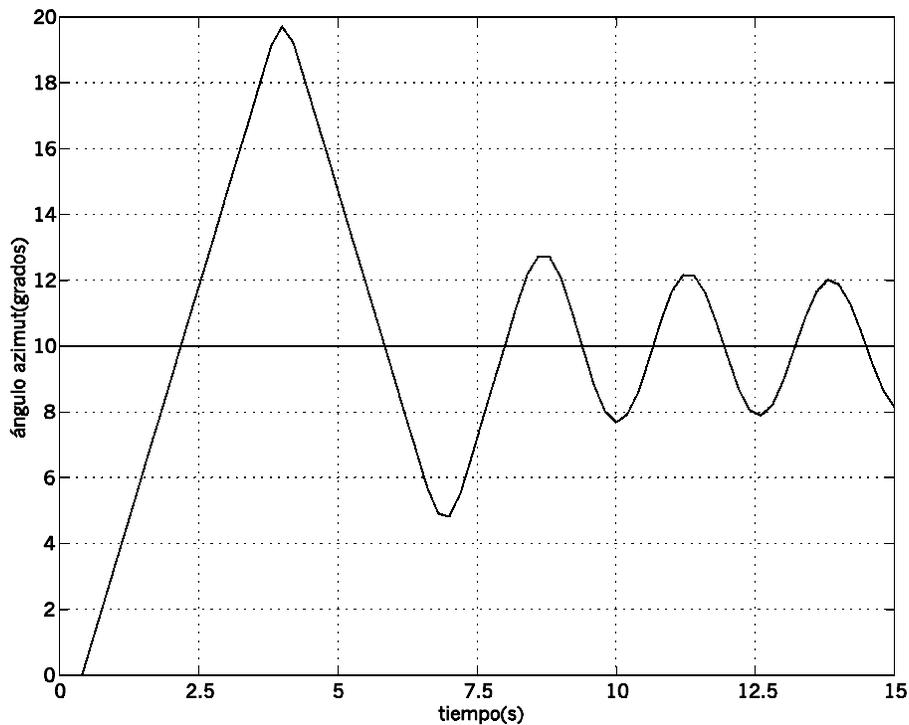


Figura 3.32

El segundo procedimiento por su parte concluye que han de emplearse los parámetros $K=618.75$, $T_i=1.67$ s. para azimuth y $K=1001.3$, $T_i=1$ s. para elevación (Tabla 3.2). La Figura 3.33 representa a una prueba real con el eje de azimuth. En elevación el resultado es análogo. Se comprueba como al disminuir el tiempo integral, el problema explicado en el Apartado 3.6.1.2 se agrava, hasta el punto de que para esta prueba el sistema permanece sobreoscilando de forma indefinida entre los 9.5 y 10.5 grados.

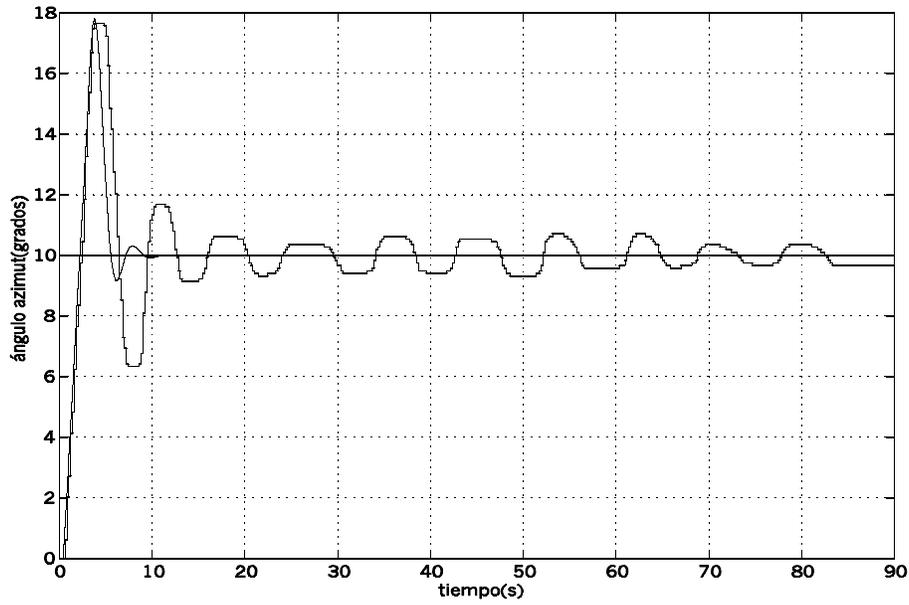


Figura 3.33

3.6.4 Otras referencias

Antes de comenzar con un análisis de la influencia de la saturación, se ha creído conveniente realizar unas pruebas reales para reiterar que en caso de que no se alcance el valor máximo de la actuación, las respuestas para unos parámetros dados presentan las mismas características dinámicas. La Figura 3.34 muestra los resultados para referencias de 3 y 5 grados con un control PI de parámetros $K=400$ y $T_i=4$ s. Se obtiene una sobreoscilación del 23.05% y un tiempo de subida de 2.01 segundos en el caso de referencia de 3 grados y una s.o. del 23.05% y $t_r=1.79$ segundos para 5 grados.

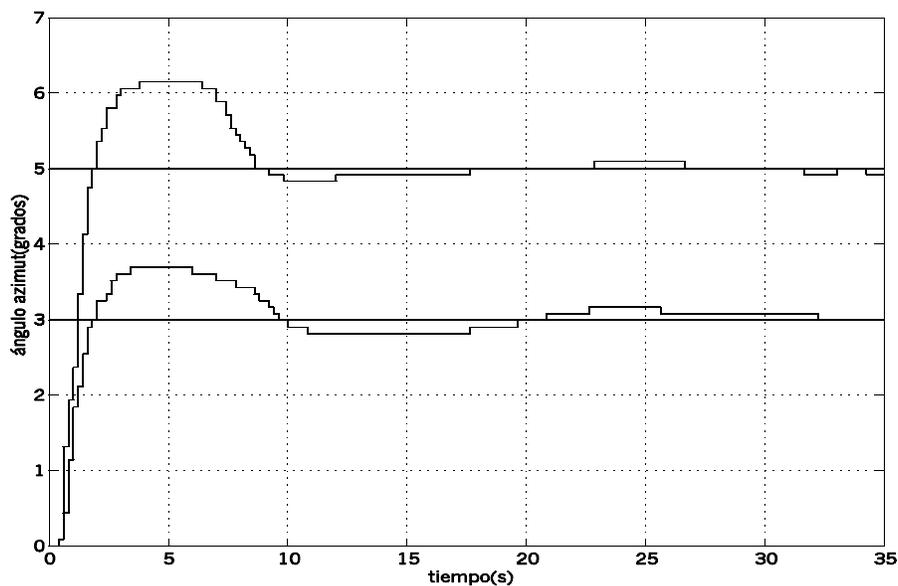


Figura 3.34

Para el control PI, la característica determinante ahora es que, como en la ley de control se van sumando la secuencia de actuaciones anteriores, la saturación en la salida del actuador provoca el crecimiento incontrolado del término integral o *Windup* (ver Apartado 3.6.1.2). Por tanto cuanto mayor sea la referencia, durante más tiempo se producirá este fenómeno, resultando más perjudicado el control y más inestable la salida. Los tiempos siguen siendo proporcionalmente menores a pesar de todo, al estar más tiempo desplazándose a la máxima velocidad, como se explicó en al Apartado 3.4.4.

Las Figuras 3.35 y 3.36 muestran respectivamente las salidas y las señales de actuación (antes de acotarlas) con un control PI azimuth con $K=300$ y $T_i=5$ s. para unas referencias de 10 y 50 grados. De dichas gráficas se desprende que al aumentar la referencia la sobreoscilación también aumenta, en concreto de un 25% a un 66%. La Figura 3.36 muestra como el crecimiento de la actuación para 50 grados es mucho más pronunciado que con 10 grados.

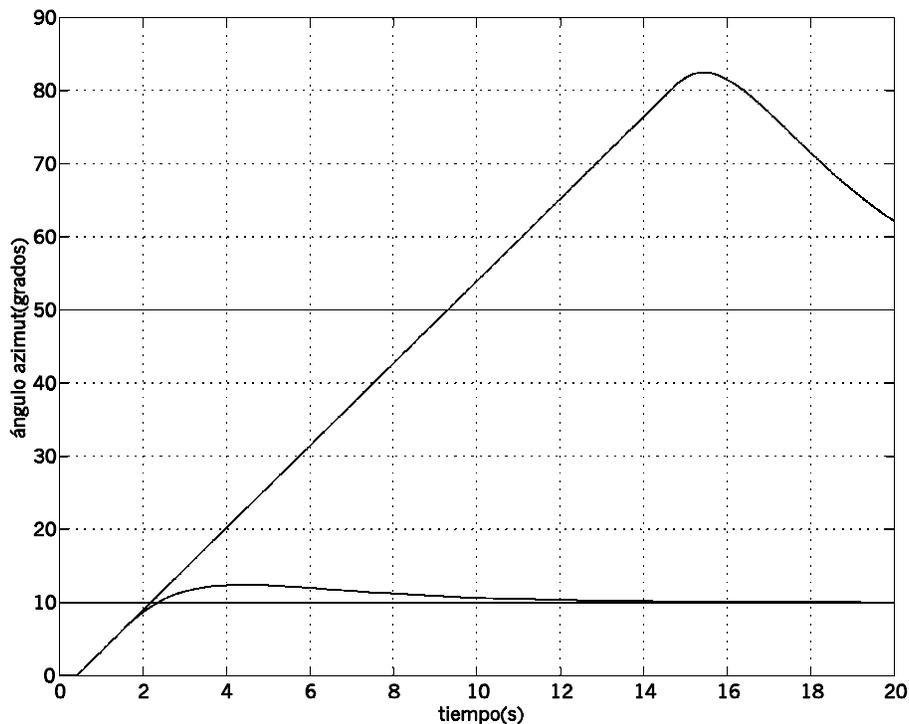


Figura 3.35

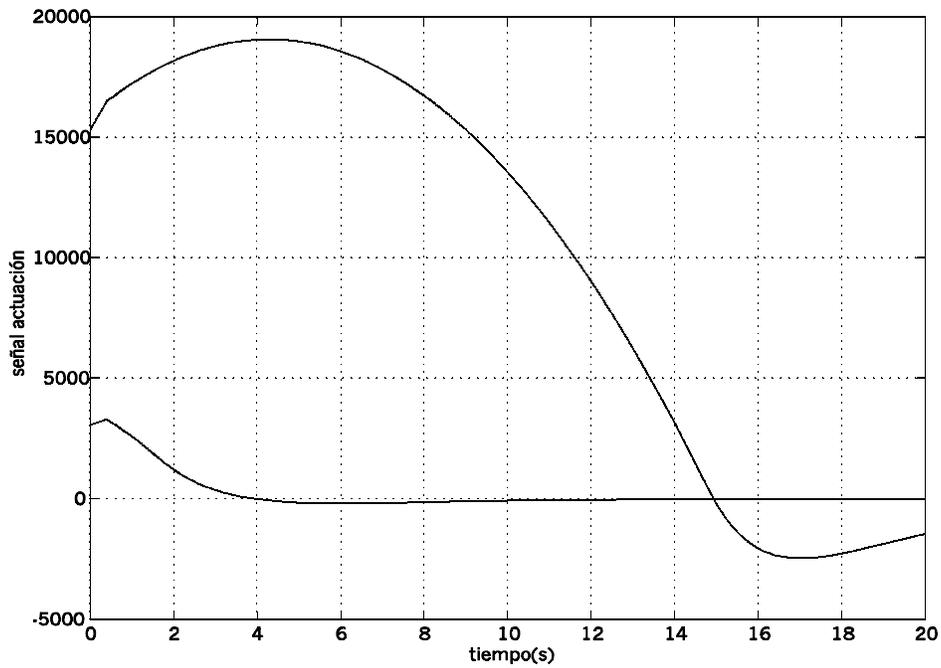


Figura 3.36

Para elevación el movimiento no describirá unas desviaciones tan acentuadas, al ser más estable. La Figura 3.37 muestra conjuntamente las salidas para un control PI en azimut real con $K=400$ y $T_i=4$ s. y unas referencias de 10 y 50 grados. Para la primera la sobreoscilación es del 29.1% y para la segunda un 71.9%, muy superior.

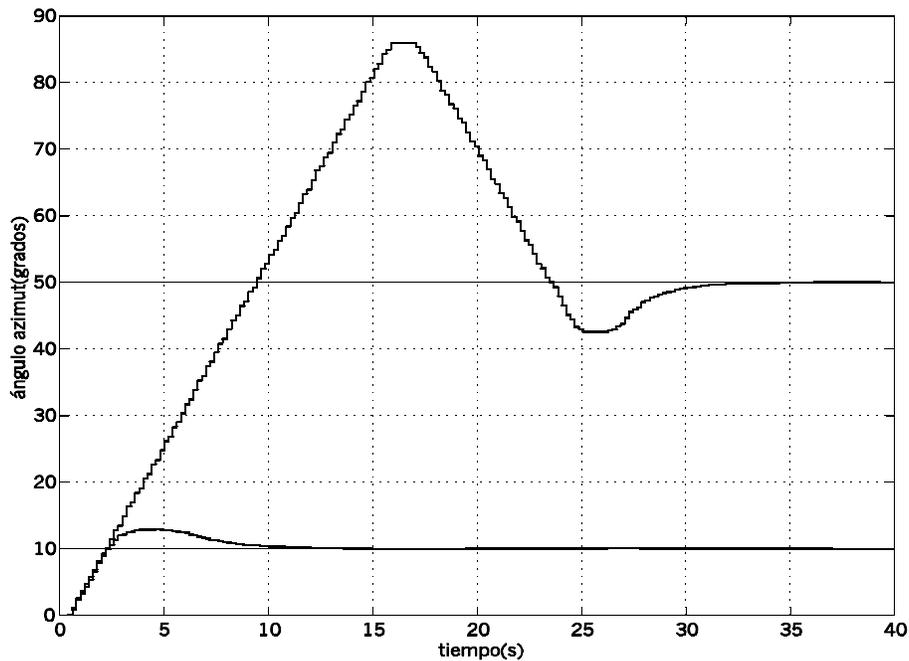


Figura 3.37

3.6.5 Conclusión

La conclusión más importante y que se ha demostrado matemáticamente, es que por ser el sistema objeto del Proyecto un integrador puro, no es posible sintonizar el controlador PI para conseguir unas determinadas especificaciones, ya que siempre se obtiene una salida subamortiguada. Por otro lado aunque se puede emplear la simulación para sintonizarlo, con unos valores típicos de T_i siempre se obtiene una sobreoscilación elevada, lo cual no es nada deseable. Por supuesto la existencia de retardos amplifica dicha s.o.

Ante esta situación y dado que tanto el retardo como la naturaleza del sistema son inevitables, se ha actuado con técnicas *Anti-Windup* sobre la presencia de la saturación en el actuador, para intentar mejorar la respuesta, hecho que se ha conseguido parcialmente.

Si se compara con los controladores P y PD, se considera que el control PI no aporta ninguna mejoría. La idea de dicho control es la de introducir un polo en $z=1$ aumentando el tipo del sistema y mejorando el permanente, pero en este caso como el sistema es de por sí de tipo uno no es necesario para una entrada en escalón. Otros resultados bien distintos se obtendrían en el caso de realizar un control en velocidad, con entrada en rampa, en el que sería necesario que el conjunto tuviese tipo dos para anular el error en régimen permanente.

3.7 Control proporcional integral derivativo (PID)

La idea es reunir los beneficios de las redes PD y PI, modificando tanto la respuesta temporal como el permanente. La función de transferencia queda reflejada en la Ecuación 3.38.

$$G_{PID}(z) = K \left(1 + \frac{T}{2 \cdot T_i} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad \text{Ecuación 3.38}$$

Se presentan los mismos problemas que en el regulador PI, ya que de nuevo se tiene un doble integrador en bucle abierto. La demostración realizada en el Apartado 3.6.1.1 se puede extender al control PID. Ante esta circunstancia se han contemplado dos opciones para sintonizar esta clase de reguladores: apoyándose en *Simulink* o empleando la técnica de Ziegler-Nichols.

3.7.1 Control PID de azimut

En primer lugar hay que recordar que la parte derivativa del regulador sigue provocando que aparezcan secuencias de actuaciones con crecimientos y decrecimientos inesperados, por lo que se ha optado por elegir un valor para el tiempo diferencial de 0.05 segundos, como se hizo en el Apartado 3.5.1.1 del presente Capítulo. A partir de ahí y dado que esta elección para T_d hace prácticamente nula la contribución de la parte diferencial, lo que se ha hecho es tomar parámetros similares a los obtenidos para el control PI.

La Figura 3.38 muestra la salida ante un control de parámetros $K = 400$, $T_d = 0.05s$ y $T_i = 4$ s. Se ha elegido este valor para el tiempo integral porque presenta menos problemas en el permanente. Como era de esperar la diferencia con el PI de idénticos parámetros es prácticamente inapreciable, y en *Simulink* la s.o. del PID es algo menor que en el PI, del 31.8% frente al 33.6%. También se tiene que $t_r = 2.31$ s. (en modelo 2.18 s.) y $t_{s2\%} = 10.39$ s. (11.46 s.). Esta leve reducción de la sobreoscilación se explica porque la parte derivativa al restar el error anterior corrige al sistema antes, mejorando el transitorio.

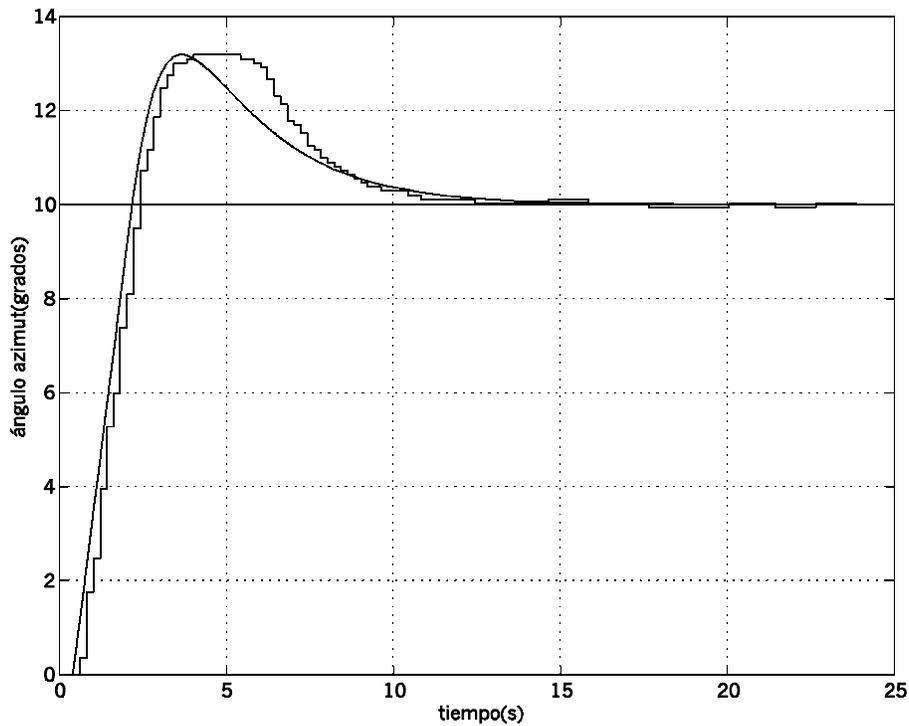


Figura 3.38

Si se emplea el método de limitación del término integral para corregir el efecto *Windup* los resultados son muy parecidos a los vistos para el regulador PI. La Figura 3.39 representa un experimento para $K = 400$, $T_d = 0.05$ s. y $T_i = 4$ s. y un límite sobre la acción integral de 600. Para esta situación el modelo de *Simulink* se mantiene parado a un valor de 11.5 grados mientras que el sistema real oscila entre 10.43 y 11.51 grados.

Por el razonamiento efectuado en el Apartado 3.6.1.3 ahora en promedio la acción integral decrece a menos velocidad, de ahí que tarde algo más en empezar a decrecer. Por otro lado se observa como al aumentar el límite, el tiempo en alcanzar el permanente disminuye a costa de una mayor sobreoscilación, del 15%.

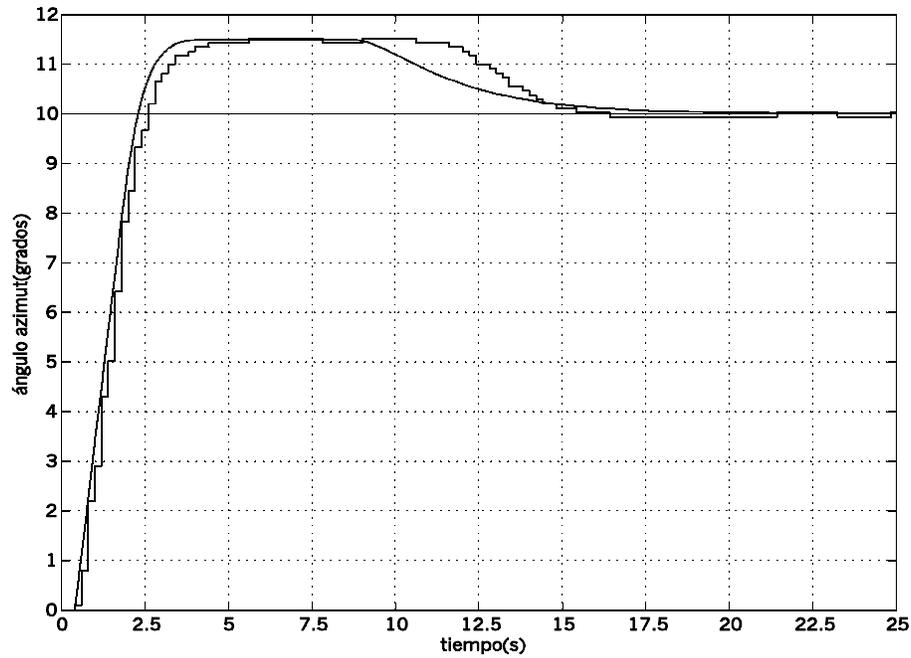


Figura 3.39

3.7.2 Control PID de elevación

El análisis es idéntico al caso del eje azimut, con la salvedad de que al ser el retardo del sistema menor, el comportamiento resulta más estable. Por este motivo sólo se va a efectuar una simulación. La Figura 3.40 muestra la salida para $K = 400$, $T_d = 0.05$ s. y $T_i = 4$ s. y la actuación integral limitada a 400.

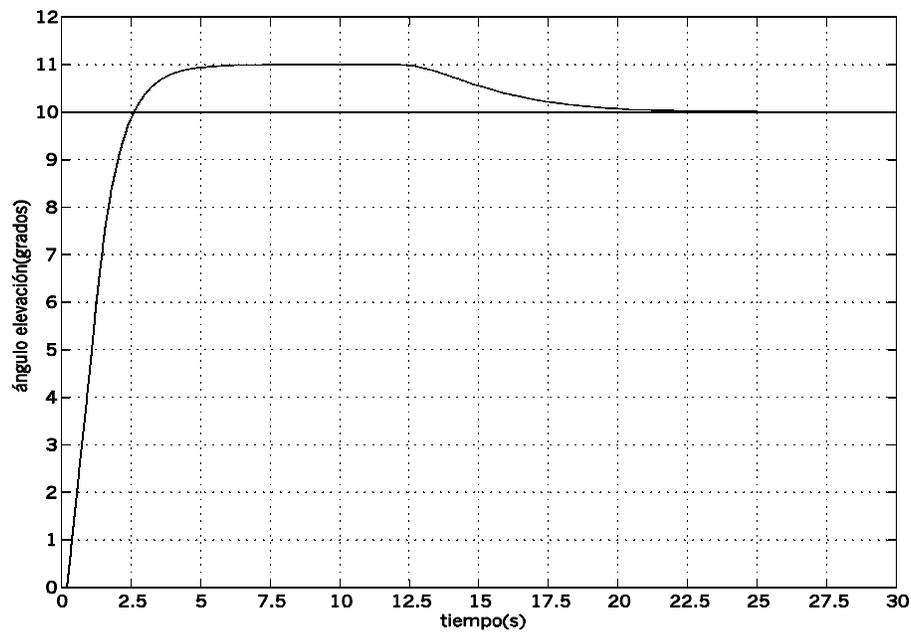


Figura 3.40

3.7.3 Control PID mediante Ziegler-Nichols

Para el controlador PID si se emplea la técnica de ajuste de parámetros de Ziegler-Nichols en sus dos formas, resultan los valores que se muestran en la Tabla 3.3.

	Primer método		Segundo Método	
	Azimut	Elevación	Azimut	Elevación
K	1350.2	2563	825	1335
T_i (s)	1.079	0.416	1	0.60
T_d (s)	0.198	0.104	0.25	0.15

Tabla 3.3

En este caso a la vista de los valores de los parámetros que proporcionan ambos métodos de Ziegler-Nichols, es inviable efectuar experimentos con el sistema real. Por otro lado, para estos parámetros sí hay diferencias importantes entre los ejes de azimut y elevación, por lo que se ha considerado necesario representar los resultados para ambos ejes. De esta forma en las Figuras 3.41 y 3.42 aparecen los resultados de las simulaciones en azimut para el primer y segundo métodos respectivamente.

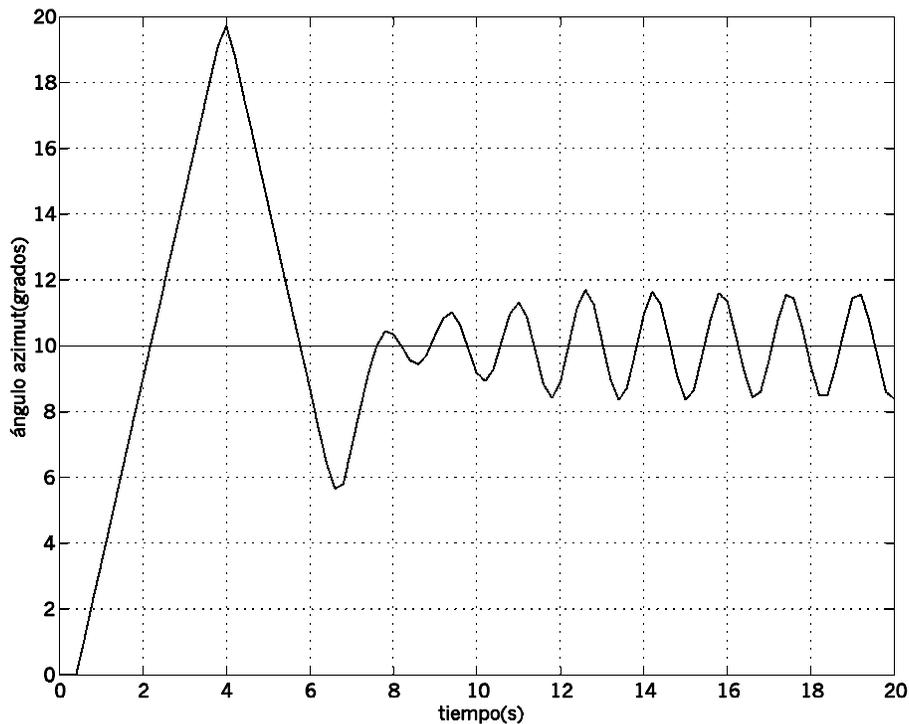


Figura 3.41

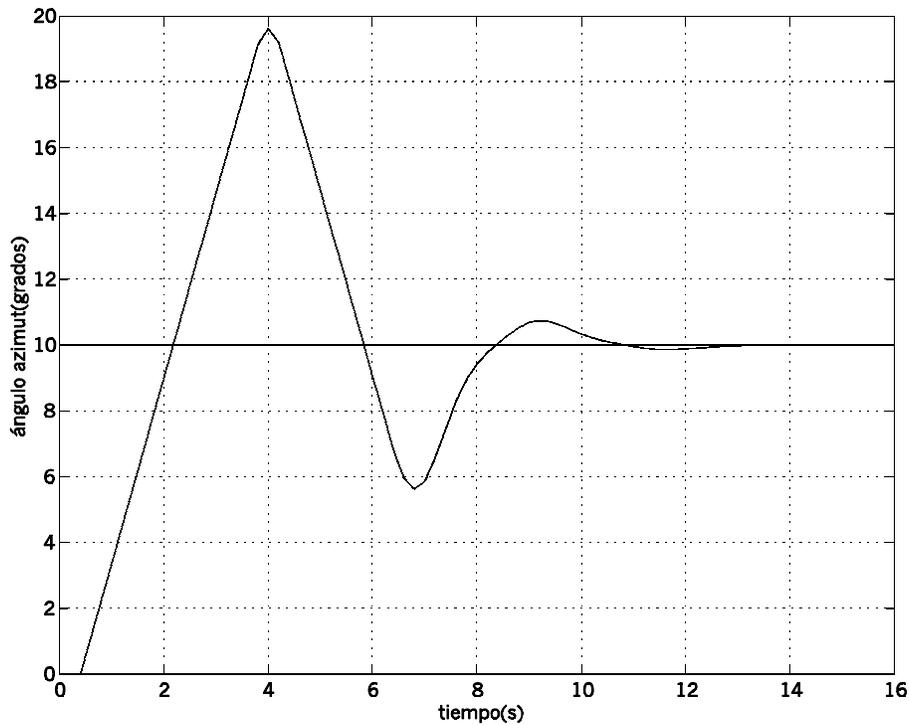


Figura 3.42

Como se ha destacado en otras ocasiones, el segundo procedimiento proporciona unos resultados más razonables (aunque siguen siendo malos, s.o. del 96%) debido a que tiene en cuenta al sistema tal y como es, con la saturación y todo. El inconveniente es que necesita efectuar pruebas con el mismo. El primer procedimiento proporciona una salida críticamente estable.

Para el eje de elevación la Figura 3.43 es la consecuencia de aplicar el primer método de Ziegler-Nichols, con $K = 2563$, $T_i = 0.416$ s. y $T_d = 0.104$ s. y la respuesta de la Figura 3.44 surge tras emplear los parámetros recomendados por el segundo procedimiento, $K = 1335$, $T_i = 0.60$ s. y $T_d = 0.15$ s.

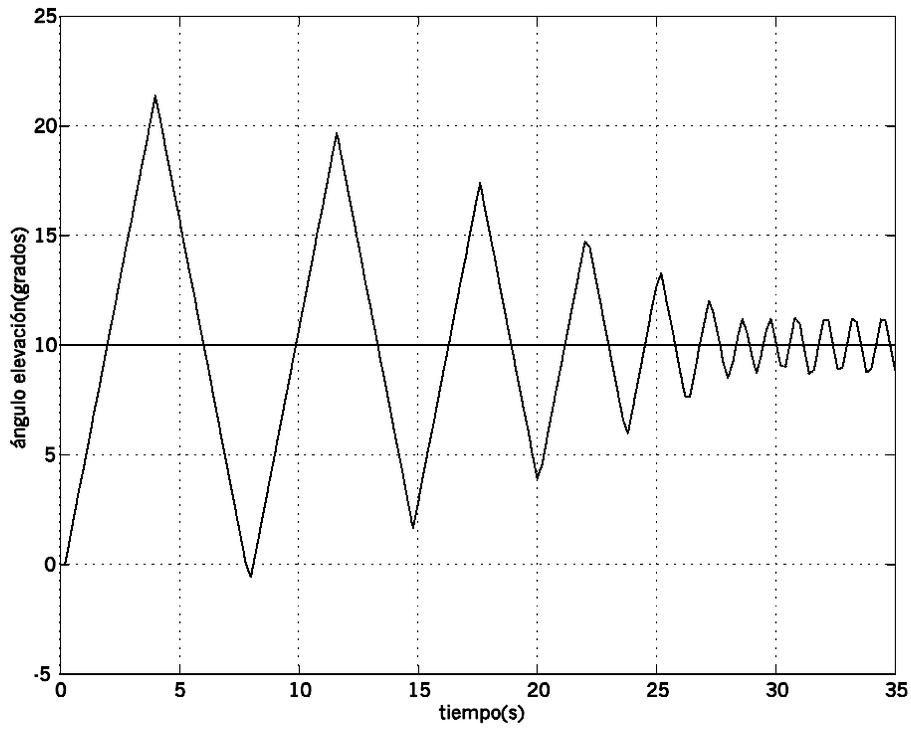


Figura 3.43

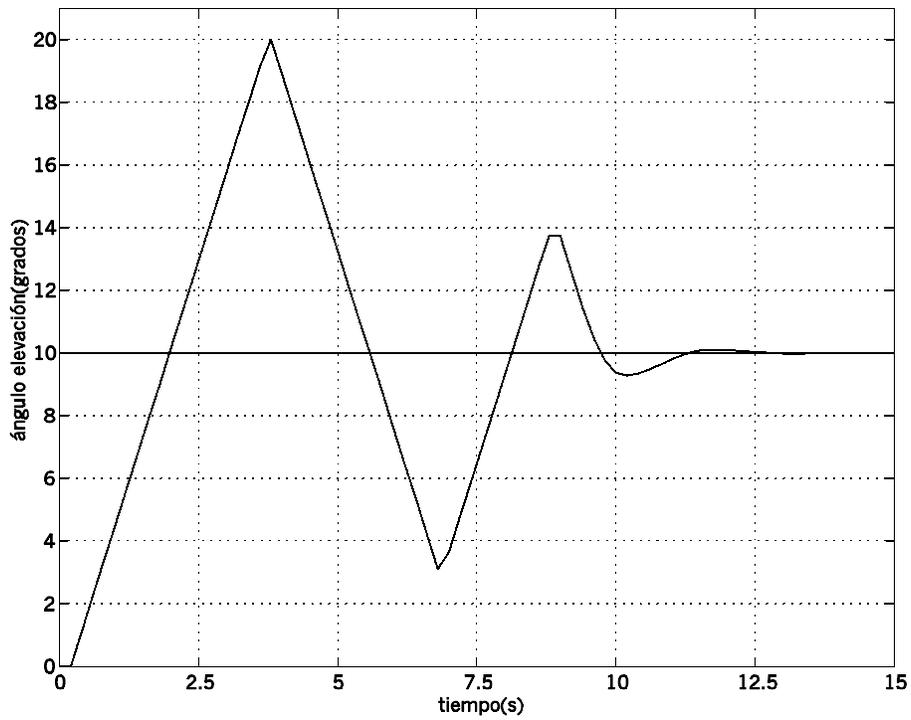


Figura 3.44

3.7.4 Otras referencias

Los comentarios que se pueden hacer son idénticos a los realizados para el control PI, ya que al aparecer en la ley de control del PID la actuación anterior de nuevo aparece el *Windup*. Al exigir una referencia mayor la saturación durará más tiempo con lo que al final la sobreoscilación será más importante.

3.7.5 Conclusión

La conclusión es análoga a la expresada en el Apartado 3.6.5. De hecho, debido a los inconvenientes que plantea la parte diferencial del PID y que obligan a anular prácticamente su contribución, el controlador PID queda reducido a un control PI de manera que no aporta nada nuevo. Lo único reseñable es que, como se comprobó en el Apartado 3.7.1 se consigue una pequeña disminución de la sobreoscilación.

3.8 Predictor de Smith

El Predictor de Smith es un esquema de control destinado a sistemas con retardos, como el que se trata en este Proyecto. Su objetivo es el de eliminar el retardo del denominador, que perjudica al sistema inestabilizándolo puesto que reduce el margen de fase, para trasladarlo al numerador, donde implica simplemente un retraso inherente al proceso. La idea está basada en que, al conocer el retardo, es posible predecir el comportamiento del proceso. Para poder aplicar esta técnica hay que verificar la hipótesis de que se puede separar al sistema del retardo, cosa que si ocurre. Este tipo de control es característico del control por computador y no se suele emplear en control continuo dado que resultaría muy complicado simular el retardo.

La estructura del Predictor de Smith se muestra en la Figura 3.45. Nuevamente $G(z)$ es el proceso real y $G_c(z)$ el controlador, que suele ser un PI o un PID. $G_{mr}(z)$ y $G_m(z)$ son respectivamente el modelo de la planta con y sin retardo. Ahora la señal e_K se construye con el error respecto a la referencia y las entradas y_{m-dm} e y_m que están prediciendo la salidas esperadas ante cada señal de actuación u_K . Esta estrategia de control funcionará correctamente si la identificación del sistema está bien hecha, pudiendo dar lugar a inestabilidades en caso contrario.

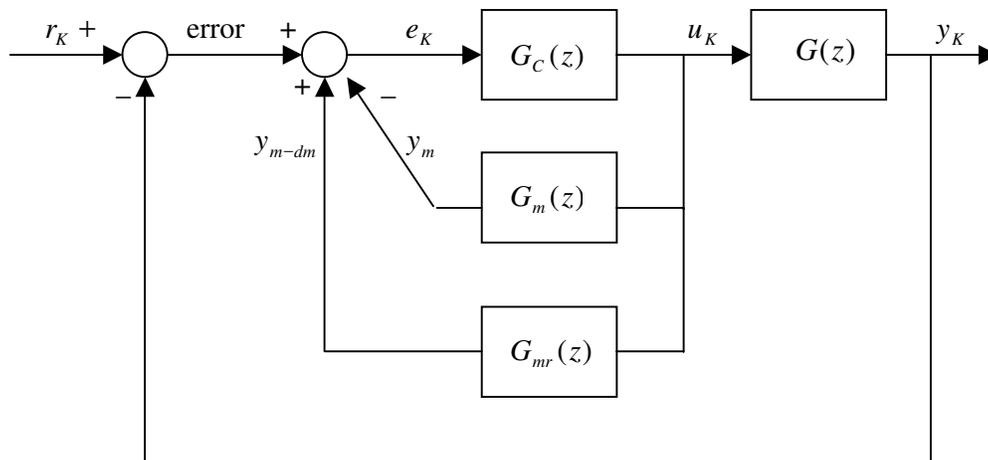


Figura 3.45

3.8.1 Predictor de Smith con un PI

Tras realizar varios experimentos se comprueba que ahora el sistema se vuelve más estable, es decir, empleando los mismos parámetros la sobreoscilación y el tiempo empleado en alcanzar el permanente se reducen. De hecho en *Simulink* la respuesta del sistema es idéntica al caso en que no tuviese retardo, con la diferencia inevitable de que está desplazada en el tiempo una cantidad igual a dicho retraso, por lo que se ha conseguido el objetivo y la estructura funciona correctamente. La Figura 3.46 muestra el resultado de emplear el Predictor de Smith para un retraso teórico de 400 ms. y control PI de valores $K = 400$ y $T_i = 2$ s. Se observa una clara mejoría respecto al mismo control sin el predictor siendo la sobreoscilación ahora del 32.7% (32.8 en el teórico), muy inferior al 54.7% (61.2% teórico). Además ahora el efecto del crecimiento de la actuación en cada cambio de sentido que se explicó en el Apartado 3.6.1.2 es menos perjudicial, consiguiendo llegar a la referencia.

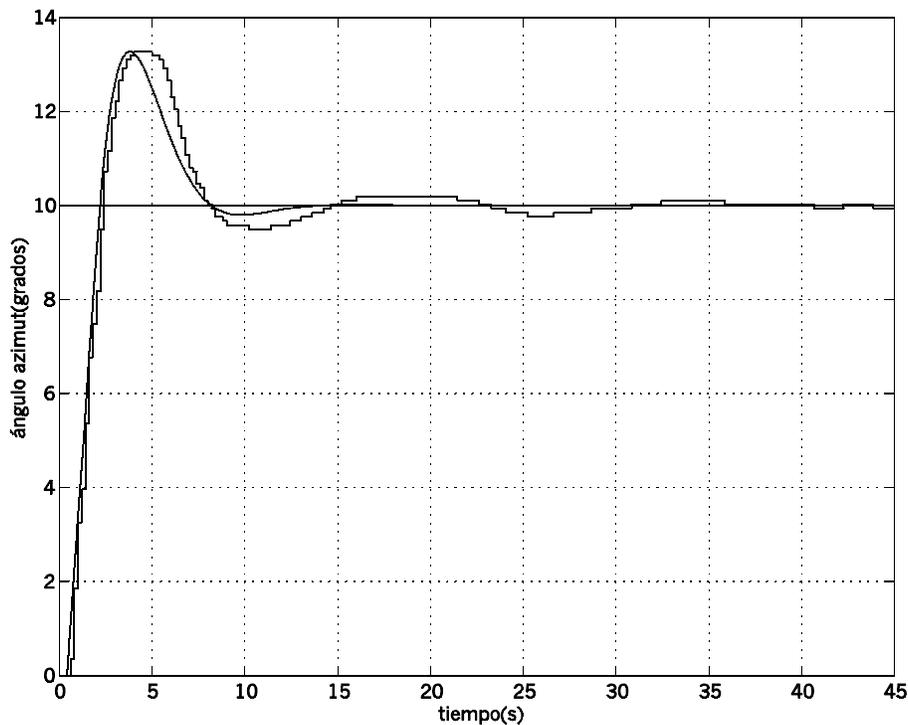


Figura 3.46

Por otro lado se ha creído conveniente realizar pruebas orientadas a estudiar qué sucede en caso de que el retraso real sea mayor que el teórico y viceversa. El motivo es que, como se vio en el Capítulo 2 de identificación, el retardo presenta variaciones que

pueden llegar a ser importantes en algunos casos, y según se ha dicho al principio de este Apartado, el Predictor de Smith puede provocar inestabilidades ante errores en el modelado. Así, la Figura 3.47 representa de derecha a izquierda la simulación (en línea continua) y el resultado real (con mantenedor de orden cero) para un retraso teórico de 0.6 segundos, 0.4 s. y 0.2 s., siendo en todos ellos el retraso real aproximadamente 0.4 s. También aparece la referencia de 10 grados. En todos el control lo realiza un regulador PI con $K = 400$ y $T_i = 4$ s.

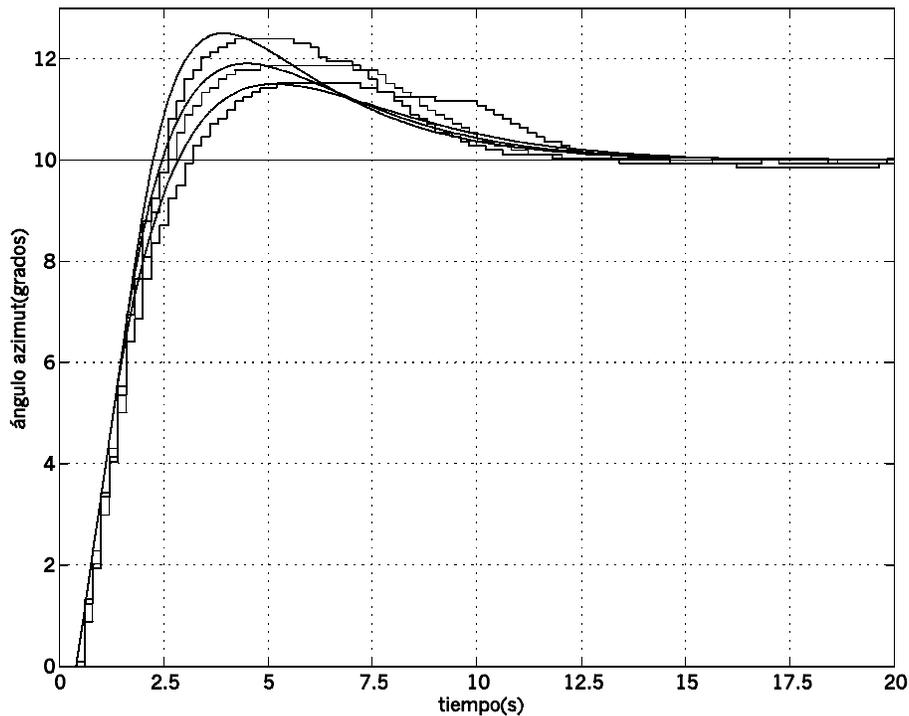


Figura 3.47

De esta última figura se concluye que si el retraso teórico es mayor que el real la respuesta es más lenta. Este resultado es lógico puesto que el controlador está suponiendo que el sistema es más inestable de lo que realmente es. En cambio cuando el retardo esperado es menor que el real se hace más rápido (más inestable) porque no se cancela totalmente el retardo del denominador.

En este caso no se representa ningún resultado para el eje de elevación puesto que, al trasladar el retardo al numerador las respuestas van a ser idénticas, excepto por el desplazamiento en el tiempo. Esto se explica porque el Predictor de Smith traslada el

retardo al numerador de forma que deja de tener sentido afirmar que uno es más estable que el otro, la única diferencia va a estar en un desplazamiento en el tiempo de 200 ms. De hecho se observa como ahora el parecido entre la simulación y el caso real es mayor, ya que no va a afectar tanto que, según se explicó en el Capítulo 2, el retardo para señales pequeñas se hacía menor de 400 ms. y aleatorio.

También se ha observado que si se asigna al retraso teórico un valor por encima de 0.9 segundos tanto en el sistema real como en las simulaciones empiezan a presentarse secuencias de actuación no esperadas, con crecimientos y decrecimientos inesperados. La razón de este suceso se puede dar observando la Figura 3.45. La salida y_m entra en el controlador restando mientras que y_{m-dm} va sumando. Ambas señales son idénticas salvo por el tiempo desplazado. Si el desfase entre ambas es demasiado grande la suma va a ser siempre negativa y de valor elevado (son crecientes) provocando una disminución en la actuación de salida que puede incluso ocasionar que esta última sea inferior a cero. La Figura 3.48 corresponde a las secuencias de actuación en azimut para un regulador PI con $K = 400$ y $T_i = 4$ s. y un retardo teórico de 1 segundo.

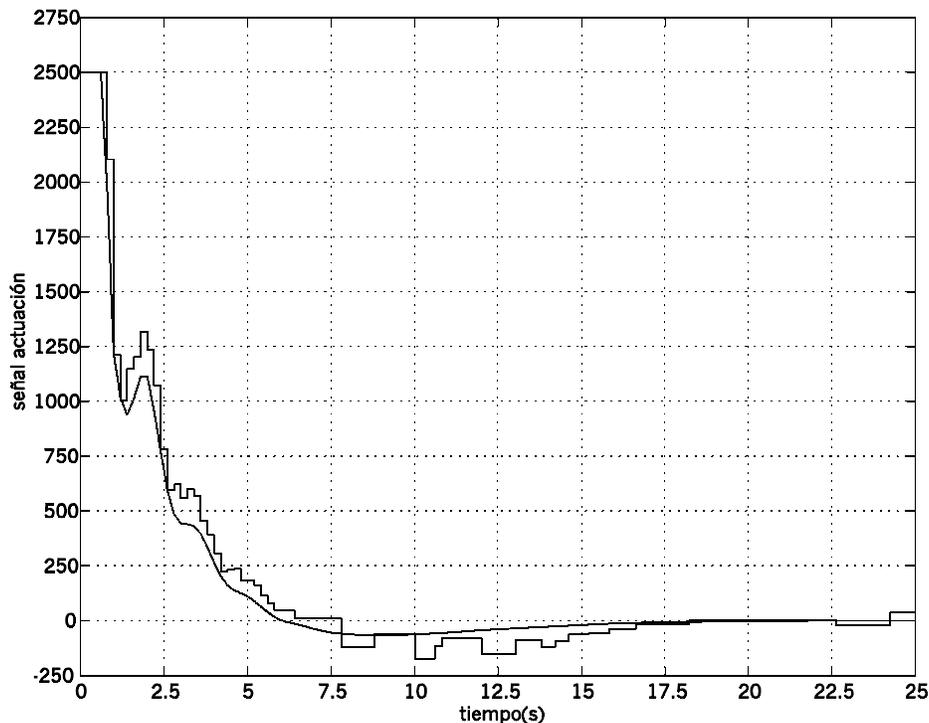


Figura 3.48

3.8.2 Predictor de Smith con un PID

Para el control PID los resultados son análogos, como ya se razonó a lo largo del Apartado 3.7. La Figura 3.49 es la salida resultante de aplicar al eje de azimut los parámetros $K = 400$, $T_i = 4$ s. y $T_d = 0.05$ s. con el retraso de 0.4 segundos. De nuevo se mejora respecto al PID sin predictor, ahora la s.o. es del 18.6% (19% en *Simulink*) , inferior al 31.8% (31.8%). Igualmente no se presentan resultados para el eje de elevación con el fin de no ser redundantes.

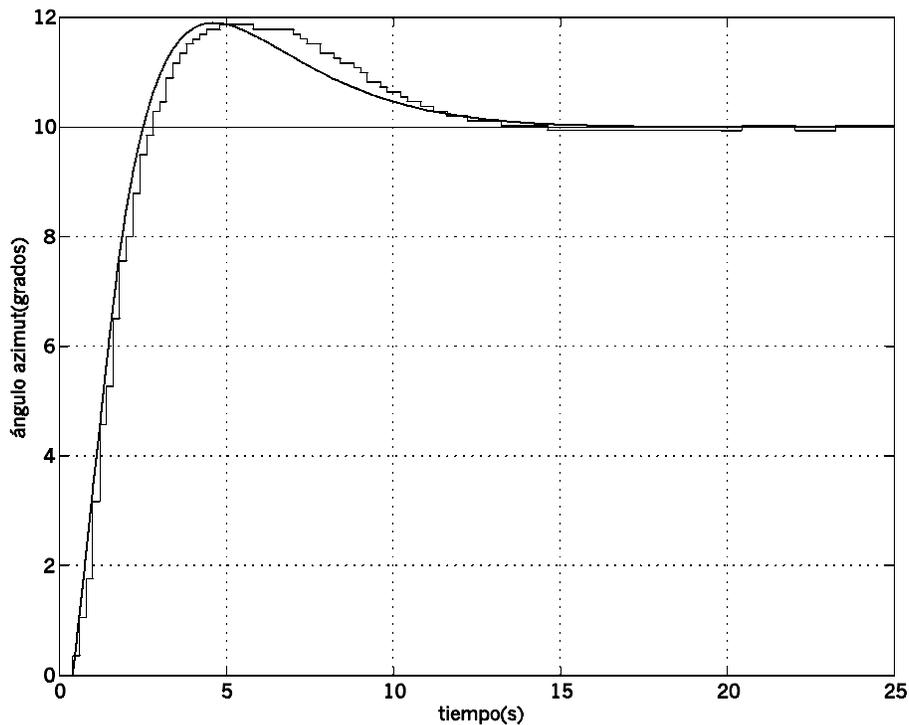


Figura 3.49

Existen otras técnicas de control para tratar los procesos con retardo. La más simple consiste en desintonizar el controlador, es decir, relajar los parámetros del regulador (disminuyendo la ganancia y aumentando el tiempo integral). En este caso no se ha podido aplicar puesto que el tiempo muerto (dinámica) del sistema en general no es menor que el doble del período de muestreo. Tampoco es posible emplear el Predictor PI por no ser el retardo muy grande, mucho mayor que la dinámica. El predictor analítico en principio sí, aunque es muy parecido al de Smith y se ha considerado menos importante.

3.8.3 Otras referencias

En el caso del control mediante el Predictor de Smith los comentarios son iguales a los realizados para los reguladores PI y PID, puesto que este es el tipo de control empleado en la estructura del Predictor. La única diferencia es que en todos los casos la salida posee mejores prestaciones.

3.8.4 Conclusión

La estructura de control con Predictor de Smith consigue eliminar el problema de inestabilidad asociado al retardo, de forma que al emplear los mismos parámetros que en un control PI la s.o. se reduce. Lógicamente esta reducción será más notable cuanto mayor sea el retraso del sistema. Lo que no se consigue es eliminar el problema propio de emplear los controladores PI y PID con un sistema integrador puro.

Una ventaja que se presenta al trasladar el retardo al numerador es que si el PI o el PID se pudiesen sintonizar adecuadamente, los mismos parámetros serían válidos para ambos ejes, sin necesidad de efectuar dos veces los cálculos como ocurre en el resto de controladores. De hecho bastaría con sintonizar el sistema sin retardo, que es el más simple. El principal problema de este controlador es que es muy sensible a errores de modelado, por lo que siempre que se emplee habrá que tener especial cuidado en la obtención del modelo.

3.9 Control por inversión del modelo

La idea del control por inversión es la de calcular la función de transferencia que ha de tener el controlador para que el conjunto en bucle cerrado tenga una dinámica deseada, dada por el polinomio del denominador, como ya se razonó en el Apartado 3.4. Si se denomina $G_d(z)$ a la función deseada en bucle cerrado, es inmediato llegar a la Ecuación 3.39, que expresa como obtener el controlador necesario, siendo G el modelo de la planta.

$$G_C = \frac{G_d}{G \cdot (1 - G_d)} \quad \text{Ecuación 3.39}$$

Llamando $N_d(z)$ al numerador de la función de transferencia deseada, $P_d(z)$ al denominador, $N(z)$ al numerador del sistema y $D(z)$ al denominador la ecuación anterior se transforma en la Ecuación 3.40.

$$G_C = \frac{N_d \cdot D}{N \cdot (P_d - N_d)} \quad \text{Ecuación 3.40}$$

El problema que se presenta es que al tratarse de un sistema con retardo en ambos ejes, el grado del numerador de G_C puede ser superior al del denominador, con lo cual el control no sería realizable. De hecho según la Ecuación 3.40 para que el control sea realizable la suma del grado del numerador de la función deseada y el denominador del sistema ha de ser a lo sumo igual a la suma del grado del numerador del citado sistema con el mayor de los grados de $N_d(z)$ y $P_d(z)$.

3.9.1 Control por inversión para eje de azimut

3.9.1.1 Respuesta críticamente amortiguada

En el caso críticamente amortiguado ya se calculó en el Apartado 3.4 que la expresión era $P_d(z) = z^2 - 2e^{-\omega_n T} \cdot z + e^{-2\omega_n T}$. Esto implica un polo real doble en función de ω_n . Se va a tomar $\omega_n = 3.47$ rad/s., por ser el mismo que aparecía en el control P de elevación (Apartado 3.4.2). Por tanto queda $P_d(z) = (z - 0.5)^2$ y $N_d = K_d = 0.25$ para que la ganancia en bucle cerrado sea unitaria. En consecuencia, el eje de azimut no se

cumple la condición enunciada anteriormente, por lo que en principio no se va a poder realizar el controlador, como se ve en la Ecuación 3.41.

$$G_C(z) = \frac{550 \cdot z^2 \cdot (z-1)}{z^2 - z + 0.25} \quad \text{Ecuación 3.41}$$

Ante esta situación caben dos opciones. La primera es eliminar uno de los ceros (o añadir un polo) de la función anterior para que el grado del numerador sea igual al del denominador y por tanto sí sea implementable el control. Tras realizar las simulaciones pertinentes se concluye que esto modifica sensiblemente las especificaciones, por lo que no se considera válido. La segunda consiste en añadir un polo no influyente a $P_d(z)$, un polo cercano al origen como se ha hecho en otras ocasiones. Si se añade un polo en $z=0.01$ queda $P_d(z) = z^3 - 1.01z^2 + 0.26z - 0.0025$ y $N_d = K_d = 0.2475$ y se llega a la función de transferencia del controlador de la Ecuación 3.42, que sí es realizable. Con esta solución se consiguen los resultados deseados, como aparece en la Figura 3.50, en la que la línea continua es la simulación y el mantenedor de orden cero el resultado real.

$$G_C(z) = \frac{550z^2 \cdot (z-1)}{z^3 - 1.01z^2 + 0.26z - 0.25} \quad \text{Ecuación 3.42}$$

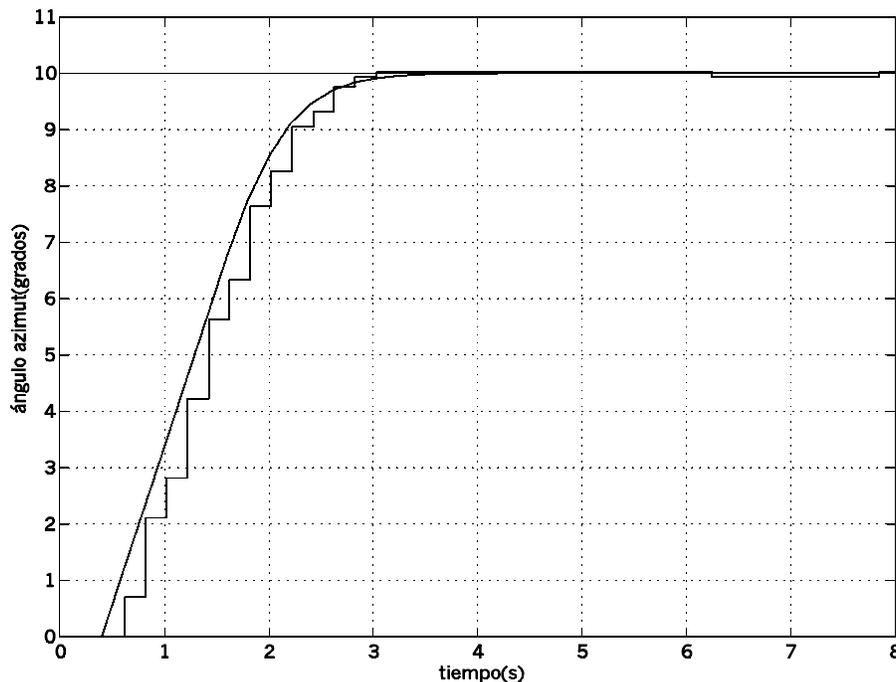


Figura 3.50

Ante esta Figura hay que decir que ahora el parecido entre el modelo teórico y el sistema real es mayor que en otros controladores. El motivo es el mismo que se expuso en el Predictor de Smith. El controlador está cancelando la función de transferencia del sistema, de forma que la respuesta va a depender únicamente de $P_d(z)$. Y la dinámica que implica dicho polinomio, al exigir que el polo adicional no la modifique, va a ser igual salvo por el desplazamiento en el tiempo. Por tanto ahora no importa que el retraso para señales pequeñas sea aleatorio, como se comentó en el Apartado 2.6.

3.9.1.2 Respuesta subamortiguada

Si se elige como siempre una respuesta deseada con sobreoscilación del 1% y tiempo de subida de 1.2 s. se tiene que $P_d(z) = z^2 - 0.980z + 0.289$ y $N_d = K_d = 0.309$. Siguiendo el mismo método que en el Apartado anterior, para que sea realizable es preciso añadir un polo adicional en $z=0.01$, quedando $P_d(z) = z^3 - 0.990z^2 + 0.299z - 0.0029$ y $N_d = K_d = 0.306$.

La función de transferencia del controlador se muestra en la Ecuación 3.43. Con esta solución se consiguen los resultados deseados. En Simulink se tiene una s.o.=1.07% y $t_r=1.52$ s. (el polo adicional introduce 0.2 s.) y con saturación s.o.=0.29% y $t_r=2.77$ s., como aparece en la Figura 3.51. Para el sistema real la s.o. es del 1.07% y el tiempo de subida de 2.59 segundos.

$$G_c(z) = \frac{680z^2 \cdot (z-1)}{z^3 - 0.99z^2 + 0.299z - 0.309} \quad \text{Ecuación 3.43}$$

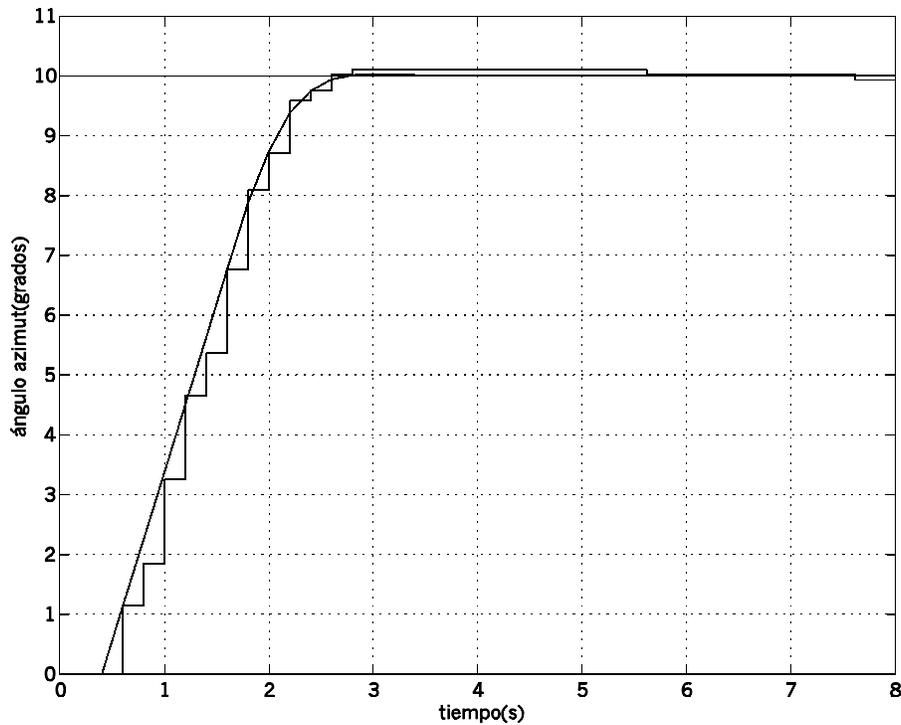


Figura 3.51

3.9.2 Control por inversión para eje de elevación

3.9.2.1 Respuesta críticamente amortiguada

Como la regla expuesta se cumple para el eje de elevación, es posible obtener directamente un regulador por el procedimiento descrito en este punto. Tras realizar las oportunas operaciones, y empleando nuevamente $P_d(z) = (z - 0.5)^2$ y $N_d = 0.25$ se llega a que la función de transferencia para el controlador es la de la Ecuación 3.44, que sí es implementable.

$$G_c(z) = \frac{555.31 \cdot z \cdot (z - 1)}{z^2 - z} \quad \text{Ecuación 3.44}$$

Se observa que si se simplifica este controlador resulta el mismo controlador P que se calculó en el Apartado 3.4.2.1, por lo que el resultado de la Figura 3.52 es idéntico al que se obtuvo en ese caso. Esto se debe a que se ha elegido la misma frecuencia natural que en el citado Apartado.

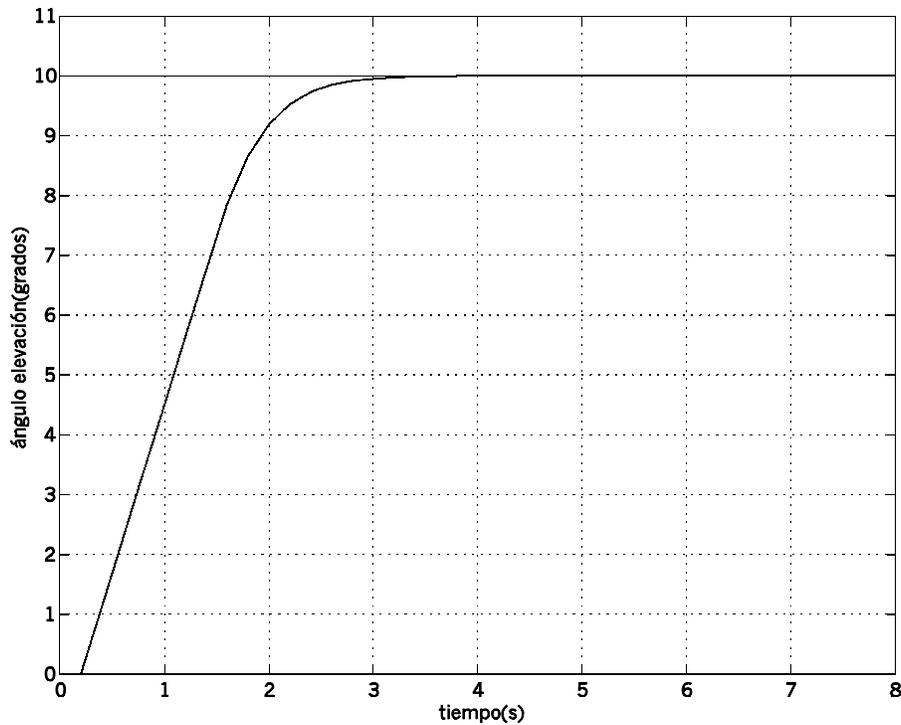


Figura 3.52

3.9.2.2 Respuesta subamortiguada

Ahora $P_d(z) = z^2 - 0.980z + 0.289$ con $N_d = 0.309$, ya que no es necesario añadir ningún polo adicional, llegándose al controlador de la Ecuación 3.45.

$$G_c(z) = \frac{686.36 \cdot z \cdot (z-1)}{z^2 - 0.98 \cdot z - 0.02} \quad \text{Ecuación 3.45}$$

Empleando *Simulink* se desprende que sin saturación el sistema cumple las especificaciones, con una s.o.=1.07% y un tiempo de subida de 1.32 s. Este resultado es lógico dada la naturaleza del control por inversión, que cancela el sistema quedándose sólo con la función deseada. Si se añade el bloque de saturación las prestaciones se ven modificadas, con s.o.=0.36% y $t_r=2.47$ s. La Figura 3.53 de la siguiente página muestra el resultado de esta última simulación.

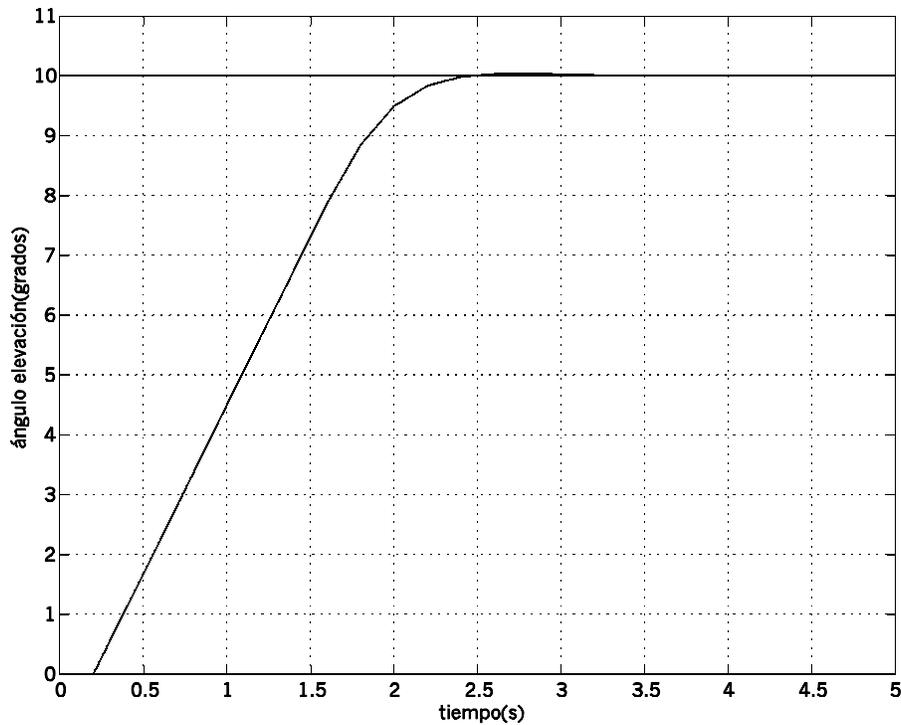


Figura 3.53

3.9.3 Otras referencias

Para conocer la influencia de una variación de la referencia en las características de la respuesta del sistema hay que estudiar como siempre la ley de control. En este caso se va a considerar la ley consecuencia del controlador de la Ecuación 3.45, y que se muestra en la Ecuación 3.46.

$$u_K = 0.98 \cdot u_{K-1} + 0.02 \cdot u_{K-2} + 686.36 \cdot e_K - 686.36 \cdot e_{K-1} \quad \text{Ecuación 3.46}$$

De esta última ecuación se ve que por un lado aparecen actuaciones anteriores, como en el caso del PI, por lo que debería aparecer un cierto efecto *Windup* y en consecuencia a mayor referencia más sobreoscilación. Pero por otra parte el peso de dichas actuaciones es menor que el de los errores. En consecuencia, en primera aproximación la actuación sólo depende del error y se tiene de nuevo el caso del control P, en el que a pesar de variar la referencia, la s.o. (en valor absoluto) se mantenía prácticamente constante. Si se hacen simulaciones se confirma lo que se acaba de explicar, y en las pruebas reales también aunque no tan claramente, debido a que ahora se ha razonado de forma aproximada.

3.9.4 Conclusión

La técnica de control por inversión del modelo es muy intuitiva y permite, a partir de la Ecuación 3.39, obtener el controlador necesario para cualquier tipo de especificación. En sistemas con retraso, para que sea implementable basta añadir tantos polos no influyentes como sea necesario. Puede decirse como desventaja que la ley de control resulta algo artificial y complicada, lo que se traduce en un controlador con muchas variables que almacenar y ganancias para cada variable.

Por otra parte en el control por inversión el regulador está introduciendo los ceros en el origen necesarios para cancelar los polos del sistema que originan el retraso. Por esta razón, para un mismo polinomio deseado, la diferencia entre las respuestas en azimut y elevación es tan sólo un desplazamiento en el tiempo, motivado por el polo adicional que se ha necesitado en azimut.

3.10 Conclusión

Si se hace un resumen de los esquemas de control estudiados, de los controles proporcionales, esto es, controles P, PD, PI y PID el único que funciona con cierta garantía es el Proporcional. El problema de éste último es que no siempre va a ser posible obtener las especificaciones deseadas, ya que sólo proporciona un grado de libertad. El control PD da problemas en la actuación debido al comportamiento de la diferencia entre el error y el error anterior. Por su parte el control PI y PID proporcionan siempre salidas subamortiguadas, debido a que el sistema posee un integrador puro.

En cuanto al Predictor de Smith, consigue eliminar el problema del retardo en el denominador, trasladándolo al numerador aunque la mejora no es completa por los problemas que presentan el PI y el PID. Asimismo, también se ha comprobado que el Predictor de Smith es muy sensible a errores de modelado.

En lo referente al control por inversión, es el que da mejores resultados de todos los de este Capítulo, porque a través de una sencilla fórmula algebraica permite calcular el controlador en función de la dinámica deseada. Adicionalmente, al eliminar la influencia del retardo en el denominador, soluciona en parte la dificultad que se ha

tenido en la identificación de dicho retardo. Esto permite predecir con más precisión la evolución del sistema real a partir de la simulación.

Todos los controladores presentan varios problemas. El primero es que los distintos métodos de control no tienen en cuenta la presencia de la saturación en la señal de actuación. Sólo en el caso de que la referencia sea tal que no se alcance la saturación, se cumplirán satisfactoriamente las condiciones pretendidas. Y en cambio, cuanto mayor sea la referencia más se alejará de dichas condiciones.

Otra dificultad de la saturación, que se presenta en los controles PI y PID es el del crecimiento ilimitado del término integral ó *Windup*, que se ha corregido empleando la técnica *Anti-Windup* que se ha considerado más adecuada entre las existentes.

Para concluir, como ya se anticipó en el Capítulo 2, el sistema presenta ciertas peculiaridades que no se han contemplado en el modelo. Esto provoca en algunos casos diferencias significativas entre la salida simulada y la real. Las mayores diferencias se producen en respuestas sobreamortiguadas con el control PI y PID.