Capítulo 4. Control basado en la descripción interna

4.1 Introducción

A lo largo de este Capítulo se van a desarrollar técnicas de control basadas en la descripción interna del sistema, es decir, en el espacio de estados. Para ello lo primero será calcular, en el Apartado 4.2, dicha descripción interna a partir del modelo obtenido en el Capítulo 2. A continuación se estudiará, en el Apartado 4.3 la necesidad de emplear estimadores de los estados y por último se diseñarán controladores según distintas técnicas (Apartados 4.4 a 4.6). Adicionalmente se llevará a cabo un análisis de la influencia de la referencia elegida, que en este caso y dado que la estructura de todos los controladores es la misma, se hará al final del Capítulo (Apartado 4.7).

Al igual que en el Capítulo 3, se va a tomar un desplazamiento de 10 grados como referencia, para que se pueda alcanzar la saturación. En cuanto a las especificaciones de nuevo se persiguen dos clases de respuestas:

- una críticamente amortiguada.

- una subamortiguada con una sobreoscilación menor o igual al 1% y un tiempo de subida de 1.5 s. Se ha cambiado el tiempo de subida con la idea de emplear otro polinomio deseado.

4.2 Obtención de la descripción interna

Lo primero es calcular las matrices $A(k)$, $B(k)$ y $C(k)$ que permiten conocer el estado y la salida en cada instante de muestreo a través de la Ecuación 4.1.

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)\cdot x(k) + B(k)\cdot u(k) \\ y(k) = C(k)\cdot x(k) \end{cases} \qquad \text{Ecuación 4.1}$$

Eligiendo la descomposición en estados para cada eje que se muestra en la Figura 4.1, las matrices son finalmente las que se expresan en la Ecuación 4.2.

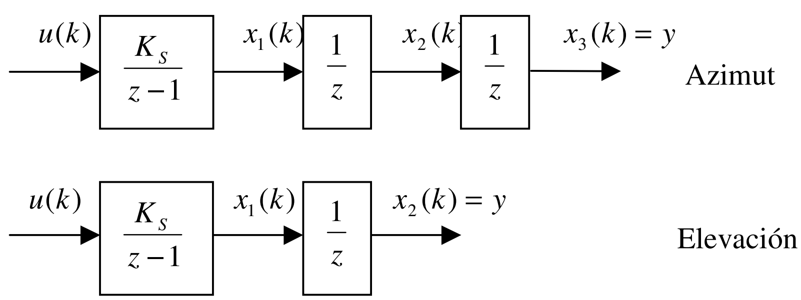

Figura 4.1

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) \qquad y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Ecuación 4.2

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) \qquad y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Con esta descripción se han calculado para ambos casos las matrices de observabilidad *M* y controlabilidad *N* (Ecuación 4.3) con la intención de conocer las propiedades de la planta, al ser dichas matrices independientes de la descomposición en el espacio de estados elegida. Del estudio del rango de cada una de estas matrices se puede afirmar que tanto el eje de azimut como el de elevación son completamente observables y controlables.

$$M=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}K_S&K_S&K_S\\0&K_S&K_S\\0&0&K_S\end{bmatrix}\quad M=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad N=\begin{bmatrix}K_S&K_S\\0&K_S\end{bmatrix}\qquad \text{Ecuación 4.3}$$

4.3 Obtención de observadores

Antes de estudiar las posibles formas de regular el sistema se hace indispensable calcular un observador adecuado, dado que no todos los estados que se definieron en la Figura 4.1 son accesibles físicamente. De hecho, sólo se puede medir el estado que coincide con la salida (valor del ángulo proporcionada por los codificadores ópticos), con lo que el valor del resto de estados se consigue a partir de la señal de actuación y de la salida. En concreto se va a desarrollar el cálculo del observador de orden completo y el observador de orden mínimo, con el propósito de establecer comparaciones entre ambos.

4.3.1 Observador de orden completo

En este punto se va a calcular el observador de orden completo, suponiendo todos los estados no accesibles. Para poder aplicar el Principio de Separación y que el observador no afecte a la planta, la dinámica deseada del error en la observación ha de ser mucho más rápida que la del sistema en lazo cerrado. En muchos textos se recomienda que sea al menos tres veces más rápido. Por este motivo, y dado que en los dos ejes el polo más lento en bucle cerrado es z=0.9995, se elegirán todos los polos situados en z=0.1, de forma que las dinámicas deseadas para el error son $P_d=(z-0.1)^3$ para azimut y $P_d=(z-0.1)^2$ para elevación.

No se ha considerado la existencia de perturbaciones ni de ruidos en las señales y el proceso, por lo que no es necesario emplear como estimador de los estados el filtro de Kalman. Calculando previamente los vectores de observación en la base canónica de observación (L_0) y empleando las correspondientes matrices de transformación se llega finalmente a que los observadores son los que se expresan en la Ecuación 4.4. La ecuación del observador sería como aparece en la Ecuación 4.5.

$$L = T^{-1} \cdot L_0 = \begin{bmatrix} 0.729 \\ 0.730 \\ 0.700 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0.810 \\ 0.800 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación 4.4}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) + L \cdot \left(y(k) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} \right)$$

Ecuación 4.5

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_S \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) + L \cdot \left(y(k) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix} \right)$$

4.3.2 Observador de orden mínimo

Para simplificar al máximo los cálculos en los programas en los que se implementarán los reguladores, se ha creído conveniente obtener también la expresión del observador de orden mínimo. En este tipo de observadores se hace coincidir los estados con variables medibles directamente del proceso (con lo que resultaría redundante estimar esos estados). En este caso la única opción es asociar un estado con la salida del sistema. Además al haber despreciado la existencia de ruidos, no va a haber problemas por emplear este tipo de observador.

Aunque con la descomposición elegida ya se tiene un estado ligado a la salida, la dinámica que presentaría el observador no es la deseada, por lo que es necesario obtener una nueva base, que se denominará $\overline{x}_i$. Así, eligiendo nuevamente como polinomios deseados para azimut y elevación $P_d = (z-0.1)^2$ y $P_d = z - 0.1$ quedarían las matrices de la Ecuación 4.6, que establecen la transformación entre las nueva base y la base canónica de observación.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.01 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 4.6

Empleando esta matriz y su inversa se construyen las matrices que determinan la ecuación del observador de orden mínimo, que resulta tras efectuar los cálculos para cada eje como figura en la Ecuación 4.7. Como era de esperar resulta más sencillo que la Ecuación 4.5.

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1(k+1) \\ \hat{\hat{x}}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1(k) \\ \hat{\hat{x}}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.008 \\ 0.17 \end{bmatrix} \cdot y(k) + \begin{bmatrix} 0.00045 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

Ecuación 4.7

$$\hat{\hat{x}}_1(k+1) = 0.1 \cdot \hat{\hat{x}}_1(k) + 0.09 \cdot y(k) + 0.0004502 \cdot u(k)$$

Una vez estimados los estados en la nueva base, sólo queda antitransformar para obtener los de la descomposición elegida al comienzo de este Apartado, mediante las matrices que se muestran a continuación en la Ecuación 4.8.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.81 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1(k+1) \\ \hat{\hat{x}}_2(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}$$

Ecuación 4.8

Antes de comenzar con el control hay que destacar que se han realizado pruebas en *Simulink* comparando las salidas de un control cualquiera suponiendo todos los estados accesibles con las correspondientes a emplear los observadores y la diferencia es mínima. Esto confirma la bondad de los polinomios elegidos para el error en la observación.

4.4 Control por realimentación del vector de estados

Se basa en realimentar el vector de estados multiplicado por ciertos coeficientes, de forma que todo el sistema en bucle cerrado tenga un comportamiento deseado que vendrá dado por el polinomio $P_d(z)$, ya explicado en el Apartado 3.4. La ley de control es la que aparece en la Ecuación 4.9.

$$u(k) = r(k) - K \cdot x(k) \qquad \text{Ecuación 4.9}$$

Como se dijo en la introducción se van a considerar dos casos, uno con respuesta críticamente amortiguada y otro de respuesta más rápida, con s.o.<1% y t_r<1.5 s. Para la respuesta críticamente amortiguada ya se calculó en el Apartado 3.4 que la expresión era $P_d(z) = z^2 - 2e^{-\omega_n T} \cdot z + e^{-2\omega_n T}$. Esto implica un polo real doble en función de ω_n.

Mientras que en el Capítulo 3 el valor de ω_n venía impuesto al igualar la última expresión con el denominador del conjunto en bucle cerrado, ahora no existe esta restricción por lo que se puede elegir libremente. Se ha decidido tomar ω_n=3.47 rad/s., por ser el mismo que aparecía en el control P de elevación (Apartado 3.4.2). Esta elección da lugar a un polo real doble en $z = 0.5$. Por tanto en elevación $P_d(z) = (z - 0.5)^2$. En el eje azimut es necesario incluir un polo adicional que no afecte por lo que se añade z=0.01 y se obtiene $P_d(z) = z^3 - 1.01z^2 + 0.26z - 0.0025$

Por otro lado las especificaciones de s.o.<1% y t_r<1.5 s. suponen adoptar los valores de factor de amortiguamiento $\delta > 0.826$ y frecuencia natural $\omega_n > 3$ rad/s llegando finalmente a que $P_d(z) = z^2 - 1.148z + 0.370$. El eje de azimut es igual añadiendo el polo z=0.01, y sale $P_d(z) = z^3 - 1.158z^2 + 0.381z - 0.0037$.

A partir de los coeficientes del polinomio deseado es sencillo calcular el vector de realimentación en la base canónica de control. Con la pertinente matriz de transformación, resulta finalmente que los estados han de realimentarse negativamente con los vectores de la Ecuación 4.10 para una salida críticamente amortiguada y la Ecuación 4.11 para la respuesta con sobreoscilación.

$$K = K_C \cdot T = \begin{bmatrix} -22.22 & 577.78 & -5.56 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & 555.31 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación 4.10}$$

$$K = \begin{bmatrix} -351.11 & 846.67 & -8.22 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -328.74 & 821.86 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación 4.11}$$

En la Figura 4.2 se muestra el diagrama de bloques general del control con el observador de orden completo calculado en el Apartado 4.3.1, para el eje de azimut. Este esquema se va a repetir en todos los reguladores diseñados en el espacio de estados, variando únicamente las constantes que los realimenta, por lo que se expresan simbólicamente mediante K1, K2 y K3. El valor de la constante K que multiplica a la referencia ha de ser igual a la suma de las tres constantes anteriores, para que la ganancia en permanente sea unitaria.

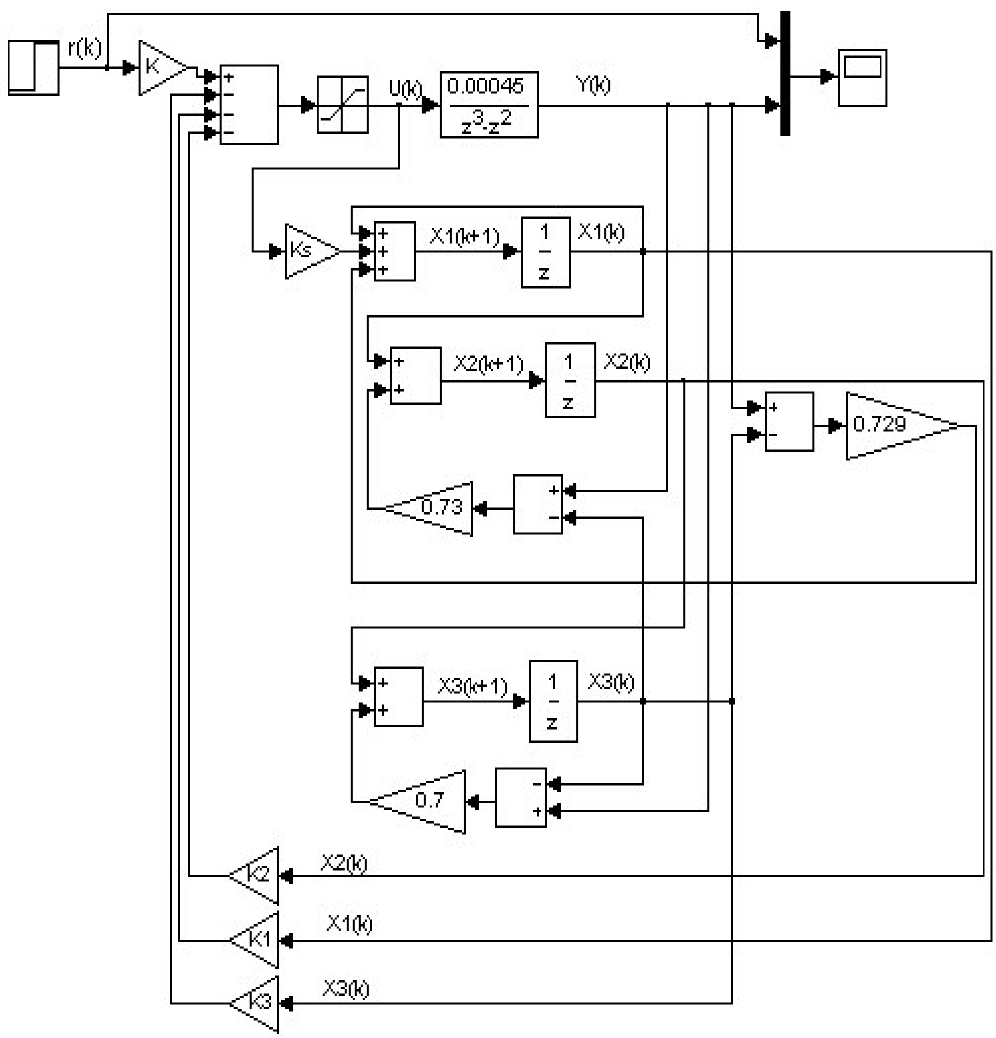

Figura 4.2

Al igual que se hizo en el Capítulo 3, los resultados se van a exponer en subapartados distintos en función del eje y del tipo de respuesta, para que quede más claro.

4.4.1 Realimentación del vector de estados de azimut

4.4.1.1 Respuesta críticamente amortiguada

Se representan en la Figura 4.3 el resultado de la simulación y de un experimento real en el eje de azimut para el caso críticamente amortiguado (Ecuación 4.10), con el observador de orden mínimo. Como siempre la curva continua corresponde a la simulación y la escalonada al sistema real con el mantenedor de orden cero. Adicionalmente se ha dibujado la referencia de 10 grados. En este Capítulo, los comentarios sobre los factores que provocan la diferencia entre la simulación y el eje real son los mismos que se expusieron en el Apartado 3.4.1.2, por lo que no se van a repetir

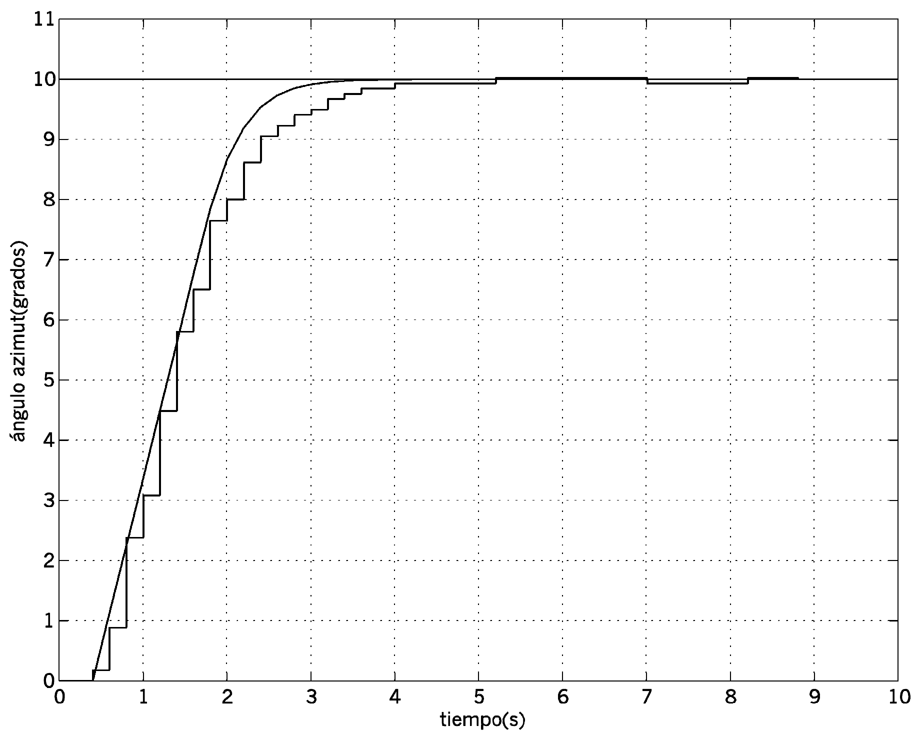

Figura 4.3

Se ha detectado que mientras que en *Simulink* es indiferente emplear el observador de orden completo o el de orden mínimo, en cambio en el sistema real las señales de actuación presentan ciertas diferencias, como se observa en la Figura 4.4. La línea de trazo más grueso representa al observador de orden completo, mientras que la de trazo fino se corresponde con el observador de orden mínimo. La diferencia está en que para el de orden mínimo la secuencia de actuaciones es siempre monótona decreciente, y en cambio en el de orden completo suelen aparecer actuaciones mayores que sus predecesoras.

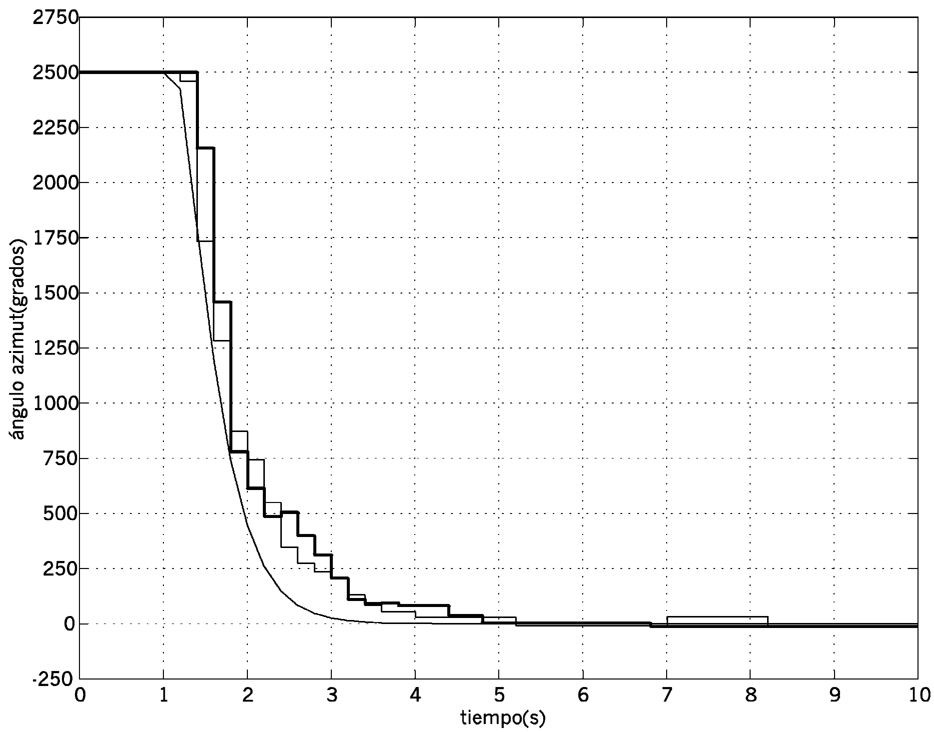

Figura 4.4

Si se hace un estudio de varios experimentos, calculando los tres estados en cada ciclo se puede explicar qué es lo que ocurre en el observador de orden completo. La clave está en que los estados se obtienen suponiendo que el número de grados que avanza el sistema para una determinada señal de actuación es siempre el mismo, y como se vio en la identificación esto no es realmente así. Por esta razón estos problemas no aparecen en el control simulado.

En la Ecuación 4.5 se ve que en el caso de que el valor estimado de x_3 sea mayor que la salida, el término $L \cdot (y - \hat{x}_3)$ va a restar al valor de $\hat{x}_1$ (y por tanto del resto de estados). Aún así, como en la expresión de $\hat{x}_1$ también aparece sumando $K_s \cdot u$, si la consigna es grande el estado no deja de crecer. Pero para actuaciones pequeñas, puede ocurrir que dicho sumando valga menos que $L \cdot (y - \hat{x}_3)$ y finalmente los estados decrecen provocando un crecimiento inesperado de la consigna de velocidad, efecto nada deseable en un regulador. Cuanto mayor sea la ganancia de cada estado en el control mayor variación producirá en la actuación.

En el observador de orden mínimo en cambio no se presenta esta complicación dado que la salida coincide con el estado x_3. Si se observa la Ecuación 4.7 y 4.8 y se realiza el mismo estudio, al disminuir la actuación disminuyen los estados en la base auxiliar, pero como los coeficientes son muy pequeños esta disminución no es tan importante. Además al ser la salida siempre creciente (hasta la referencia) y de mayor orden que los estados auxiliares, queda compensada y no aparecen reducciones en los estados, evitándose así las secuencias de actuación extrañas a las que se hacía referencia en el párrafo anterior.

De todo esto se concluye que el observador de orden mínimo funciona mejor para el sistema con el que se trabaja que el de orden completo. Aún así, se ha detectado que al aumentar la ganancia (y por tanto la velocidad) del regulador, crecen las probabilidades de que la salida no sea capaz de compensar la reducción de los estados auxiliares, dado que a velocidades altas es más imprevisible la cantidad que aumenta la salida en cada período.

4.4.1.2 Respuesta subamortiguada

Cuando lo que se pretende es una respuesta con tiempo de subida inferior a 1.5 segundos y s.o. menor del 1%, en la Figura 4.5 (observador de orden mínimo) se muestra el resultado de azimut. De nuevo aparece el matiz entre secuencias de consignas según se emplee el observador de orden completo o el de orden mínimo. Sin limitación en el actuador se tiene en simulación s.o.=1% y t_r=1.82 s. (no olvidar que el polo añadido introduce 200 ms.) con lo que se demuestra que se cumplen las especificaciones. Una vez incluido el bloque *Saturator* la dinámica de los ejes pasa a presentar una s.o.=0.44% y t_r=2.78 s.

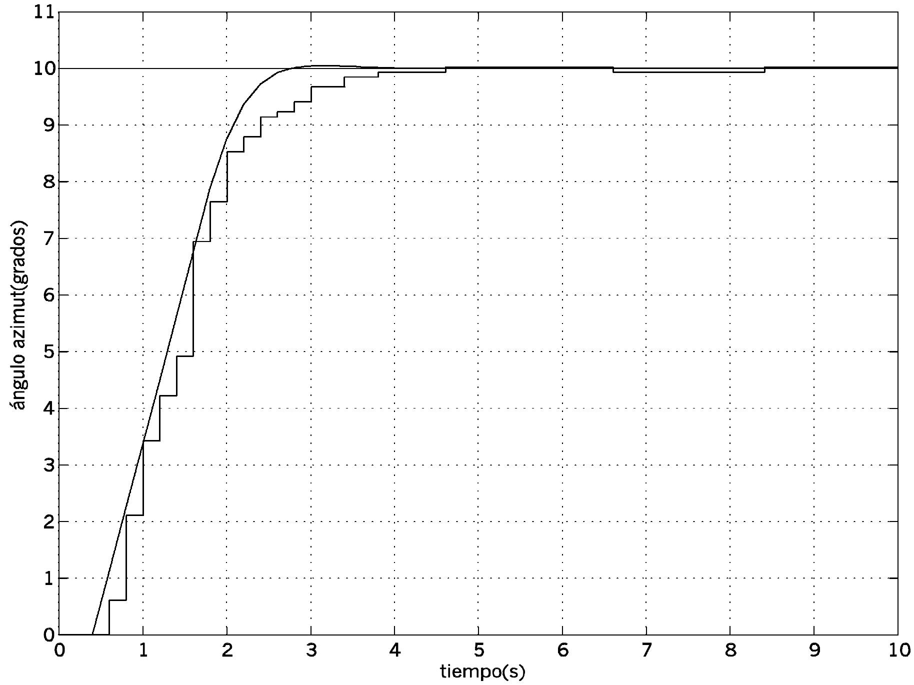

Figura 4.5

4.4.2 Realimentación del vector de estados de elevación

4.4.2.1 Respuesta críticamente amortiguada

La Figura 4.6 se corresponde a la simulación para elevación, con la condición de factor de amortiguamiento unidad. Como en este caso la única componente distinta de cero es la que realimenta al segundo estado (que coincide con la salida), se puede decir que es equivalente al control proporcional estudiado en el Apartado 3.4.2.1. El valor de K2=555.31 es idéntico al calculado en ese caso debido a la elección de ω_n realizada.

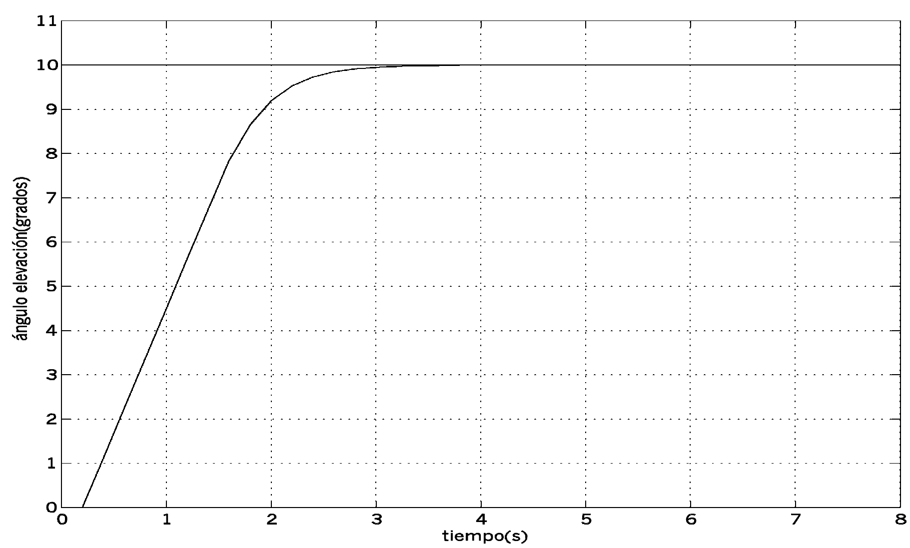

Figura 4.6

4.4.2.2 Respuesta subamortiguada

En cuanto a las especificaciones de tiempo de subida inferior a 1.5 segundos y s.o. menor del 1%, en la Figura 4.7 se muestra el resultado con un observador de orden mínimo. Sin saturación se tiene s.o.=1% y t_r=1.6 s. (aquí no hay polo adicional). Una vez incluida la saturación, la salida presenta una s.o.=0.44% y t_r=2.57 s, más lenta y estable, dado que se desplaza a velocidades menores.

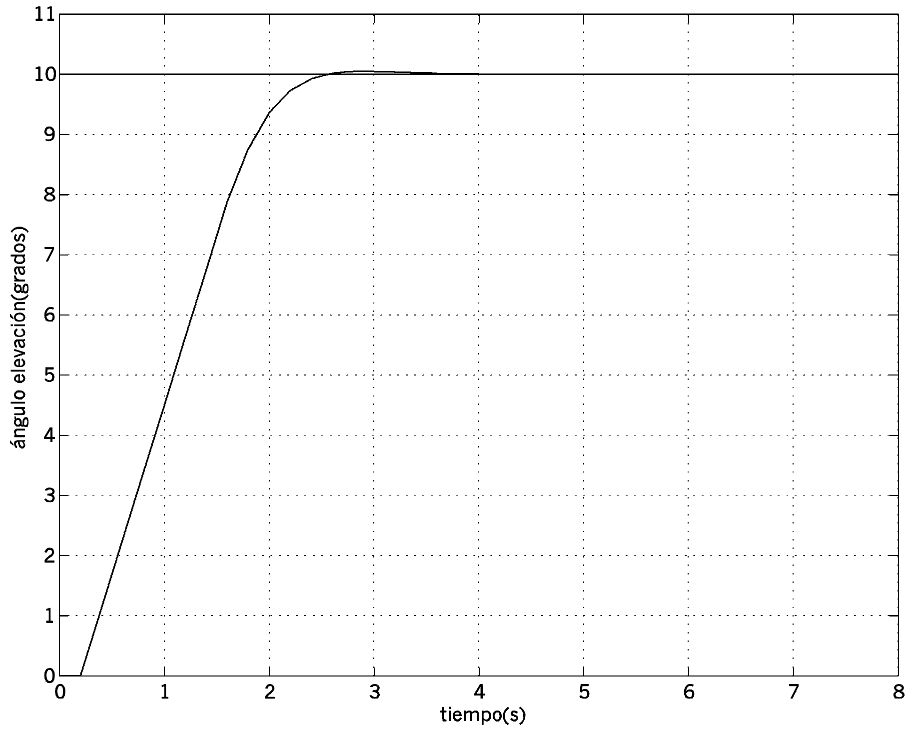

Figura 4.7

4.4.3 Conclusión

Lo primero que hay que decir es que en comparación con los controladores del Capítulo 3 (excepto el control por inversión), que daban lugar a complejos sistemas de ecuaciones, ésta técnica de control que se acaba de estudiar resulta más sencilla de calcular, puesto que todo se reduce a operaciones entre matrices.

La desventaja que presenta frente al control de descripción externa es que ahora el esquema de control es más complicado. También es importante elegir el observador más apropiado para el sistema, para que no aparezcan los efectos explicados en el Apartado 4.4.1

4.5 Control en un número mínimo de pasos (*dead-beat*)

La idea ahora es la de llevar al sistema al estado deseado en un número mínimo de pasos, que va a ser igual al orden del sistema. Para ello se adopta (una vez aplicado el teorema de Cayley-Hamilton) como polinomio deseado $P_d(z) = z^n$, siendo n el orden del sistema (3 para azimut y 2 para elevación). La ley de control es análoga a la del Apartado anterior. Efectuando los cálculos oportunos se tiene en la Ecuación 4.12 los vectores que han de realimentar a los estados para los ejes azimut y elevación respectivamente. Son casi iguales porque resultan de emplear la inversa de las constantes de proporcionalidad obtenidas en la identificación, que eran 0.00045 y 0.0004502.

$$K = [2222.22 \quad 0 \quad 0] \quad , \quad K = [2221.24 \quad 0] \qquad \text{Ecuación 4.12}$$

Este control tan rápido trae como consecuencia que las señales de actuación han de ser muy elevadas y como la planta objeto de este proyecto presenta saturación en el actuador puede ser perjudicial. Por este motivo sólo se representarán las simulaciones.

4.5.1 Control en un número mínimo de pasos de azimut

Se verifica que en caso de no existir la limitación de la actuación, el eje de azimut alcanza la referencia en 0.6 segundos (las salidas son escalones), cumpliéndose el objetivo del control *dead-beat*. En cambio con el saturador este control se hace más lento, como se observa en la Figura 4.8, en la que el tiempo de subida es de 2.2 s.

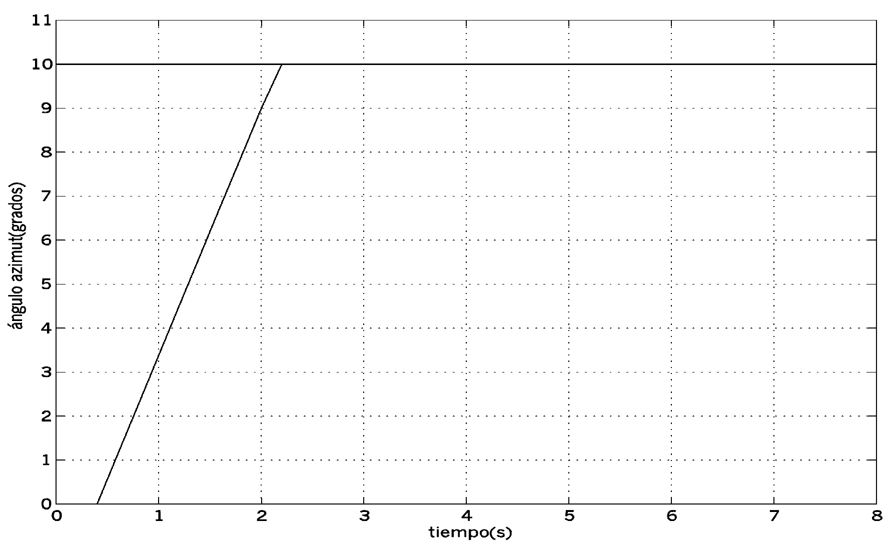

Figura 4.8

4.5.2 Control en un número mínimo de pasos de elevación

Para el eje de elevación sucede lo mismo, sin saturación la salida es un escalón de 10 grados desplazado 0.4 s. en el tiempo y en la situación real este tiempo crece hasta los 2 s., como aparece en la Figura 4.9

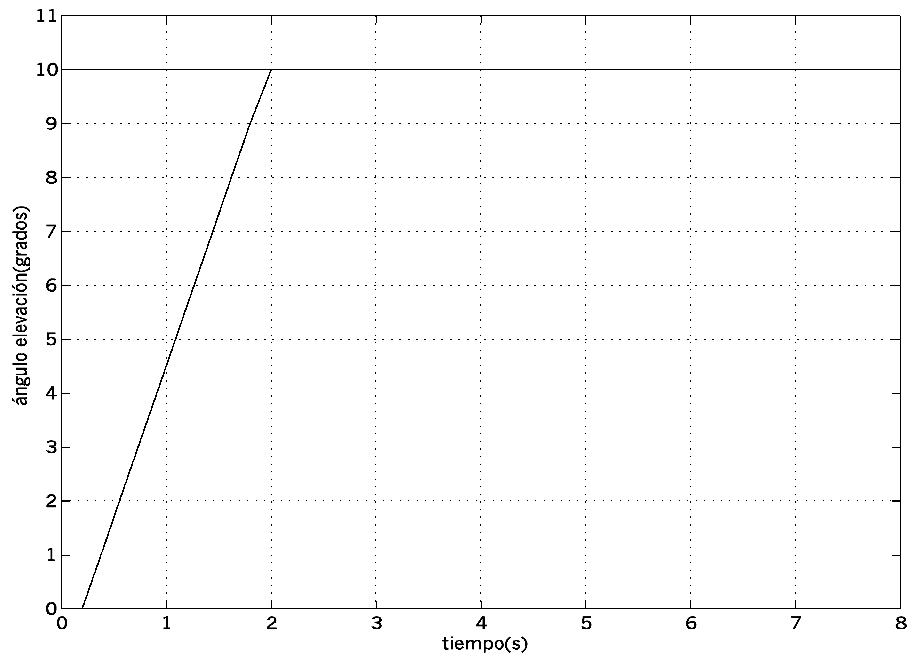

Figura 4.9

4.5.3 Conclusión

En este caso se consigue el control más rápido posible, hasta el punto de que de no haber saturación la salida sería idéntica a la referencia, desplazada en el tiempo lo mínimo posible, esto es, el asociado al orden del sistema. La principal desventaja es que este tipo de control conlleva una señal de actuación que se mantiene saturada prácticamente todo el tiempo que dura el control, para caer luego bruscamente a cero. Esto será en algunos casos perjudicial tanto para el actuador como para el sistema, por lo que no es muy recomendable su uso.

4.6 Regulador lineal óptimo cuadrático (LQR)

Para concluir el Capítulo del control en el espacio de estados se ha realizado el control LQR, que consiste en calcular la secuencia de señales de actuación tal que minimiza el índice J detallado en la Ecuación 4.13. Hacer mínimo a J implica minimizar tanto el primer término, que es una medida del error respecto a la referencia, como el segundo término que penaliza la señal de actuación. Esto último puede ser de utilidad para el sistema objeto de este Proyecto, puesto que el actuador está limitado.

En este caso y dado que las matrices de la descripción interna $A(k)$, $B(k)$ y $C(k)$ son constantes se va a desarrollar en control LQR con horizonte infinito, que desprecia el transitorio pero es más simple de calcular, puesto que considera las matrices Q y R constantes y el índice J se transforma como figura en la Ecuación 4.14.

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left(x^T(k+1) \cdot Q(k+1) \cdot x(k+1) + u^T(k) \cdot R(k) \cdot u(k) \right) \qquad \text{Ecuación 4.13}$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^T(k+1) \cdot Q \cdot x(k+1) + u^T(k) \cdot R \cdot u(k) \right) \qquad \text{Ecuación 4.14}$$

Para diseñar este regulador será necesario elegir convenientemente unos valores para las matrices de ponderación Q y R. El resultado final es un vector H que realimenta a los estados del mismo modo que en los Apartados 4.4 y 4.5. Dicho vector es consecuencia del algoritmo iterativo que se explica en el diagrama de flujo de la Figura 4.10. Partiendo de un valor inicial de matriz identidad para la matriz P, se calcula H y se actualiza el valor de P_{ant}. Con P_{ant} y H se obtiene un nuevo valor para P de manera que si la diferencia entre P y P_{ant} es menor que cierto límite se considera que el algoritmo ha convergido. Se va a considerar que el algoritmo de la Figura 4.10 ha convergido cuando el error sea del 1%, o lo que es lo mismo, $|P - P_{ant}| \leq 0.01 \cdot |P_{ant}|$.

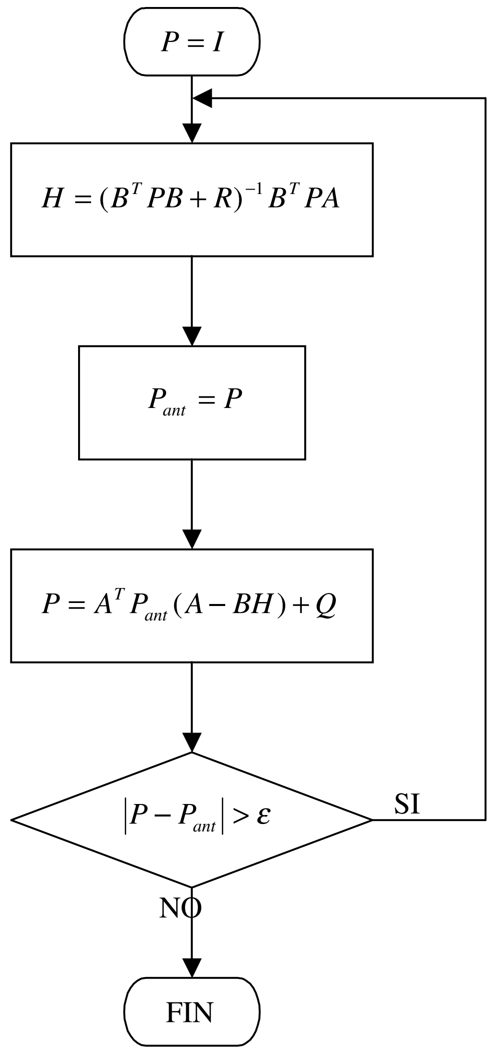

Figura 4.10

En cuanto a la sintonización de las matrices Q y R de forma adecuada, en primer lugar se observa que físicamente los tres estados de azimut (dos para elevación) representan a la salida, variando únicamente en el tiempo por cada retraso. Por consiguiente y partiendo de las recomendaciones de varios autores se eligen matrices diagonales dado que a priori todos los estados tienen la misma importancia. Además siguiendo el libro "Control por computador" de A. Ollero [1], como punto de partida se tomarán los elementos diagonales considerando las máximas desviaciones para cada variable como se indica en la Ecuación 4.15.

$$q_i = \frac{1}{(x_{i\max})^2} \quad i = 1,...,n \qquad r_j = \frac{1}{(u_{j\max})^2} \quad j = 1,..., p \qquad \text{Ecuación 4.15}$$

En este sistema como ya se ha dicho todos los estados son equivalentes a la salida, y dado que el posicionador puede recorrer en general un ángulo máximo de 338 grados para azimut y 90 para elevación (ver Anexo A), es inmediato que en azimut $\forall i \quad x_{i\max} = 338$ y en elevación $\forall i \quad x_{i\max} = 90$. Por otro lado también se ha mencionado que en ambos ejes el actuador está limitado a un valor máximo de 2500, con lo que $u_{j\max} = 2500$. Dado que las matrices Q difieren según el eje, se hará el estudio del LQR por separado.

4.6.1 Regulador lineal óptimo cuadrático de azimut

Aplicando el razonamiento anterior, los parámetros Q y R del regulador quedan como se expresa en la Ecuación 4.16. Para estos valores iniciales la iteración concluye a los 58 pasos en el resultado de $H = [40.01 \quad 0 \quad 0]$.

$$Q = \begin{bmatrix} 8.8e-6 & 0 & 0 \\ 0 & 8.8e-6 & 0 \\ 0 & 0 & 8.8e-6 \end{bmatrix} \qquad R = 1.6e-7 \qquad \text{Ecuación 4.16}$$

Este control resulta muy lento y sobreamortiguado, por lo que se va a aumentar el peso relativo de Q frente a R para así permitir señales de actuación mayores. Tras varias pruebas, se llega a que multiplicando la matriz Q por 10e5 ahora sí converge mucho antes, a las 6 iteraciones con un vector de control $H = [1790.5 \quad 0 \quad 0]$, siendo el control más rápido que antes y sobreamortiguado. Por precaución, se ha decidido realizar pruebas reales con un vector de menor módulo, en concreto $H = [965.85 \quad 0 \quad 0]$, que se obtiene multiplicando Q por 10e4. La Figura 4.11 de la siguiente página recoge una de estos experimentos y la simulación, con observador de mínimo orden.

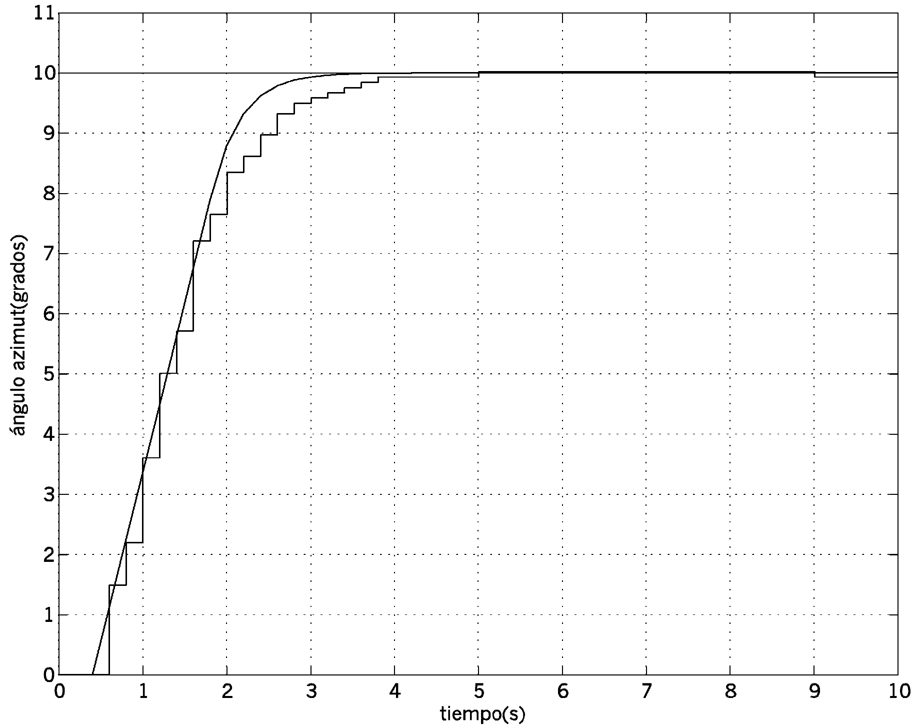

Figura 4.11

Ahora aparecen actuaciones irregulares en los dos tipos de observadores, aunque menos acusadas en el de orden mínimo, tal y como se muestra en la Figura 4.12. Como ya se dijo en el Apartado 4.4.1.1, el efecto de la disminución en el valor de un estado sobre la actuación, será más destacado cuanto mayor sea la constante que multiplica a dicho estado. Para pruebas efectuadas con $H = [965.85 \quad 0 \quad 0]$, las anomalías se traducen en saltos no muy importantes en la actuación, pero en el caso de $H = [1790.5 \quad 0 \quad 0]$ se dan situaciones en las que incluso hay un repentino cambio de signo en la actuación. Esto es peligroso porque puede provocar averías en los ejes del sistema, por lo que se ha desistido de efectuar más experimentos con ganancias elevadas.

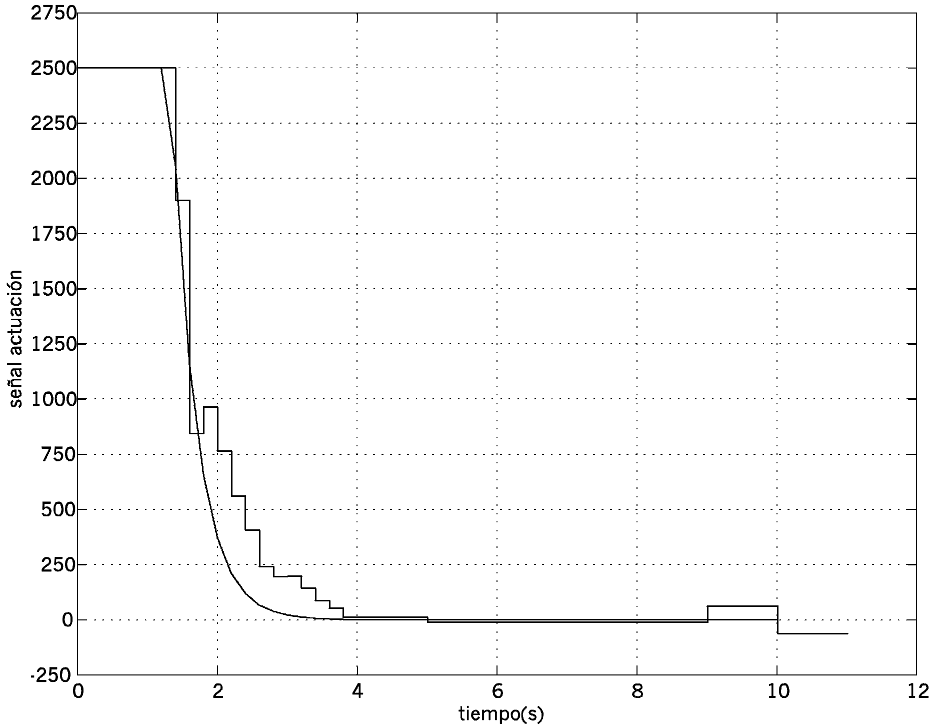

Figura 4.12

También se ha observado que, por mucho que aumente el valor de Q, no es posible obtener un valor del primer término de H superior a 2222.2, el cual provoca una salida sobreamortiguada. En consecuencia si se pretende conseguir una respuesta subamortiguada, es preciso hacer distintos de cero los elementos no diagonales de dicha matriz.

Después de efectuar varias pruebas, se llega a que si se emplean los parámetros de la Ecuación 4.17 se obtiene, tras 8 iteraciones, el vector H que aparece en la misma ecuación y que provoca una salida simulada con una sobreoscilación del 1.2% y un tiempo de subida de 2.18 s. Como las componentes de este vector son muy elevadas la Figura 4.13 refleja únicamente el resultado de la simulación.

$$Q = \begin{bmatrix} 88 & 8 & 8 \\ 8 & 88 & 8 \\ 8 & 8 & 88 \end{bmatrix} \qquad R = 1.6e-7 \qquad H = \begin{bmatrix} 2346.3 & 67.2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación 4.17}$$

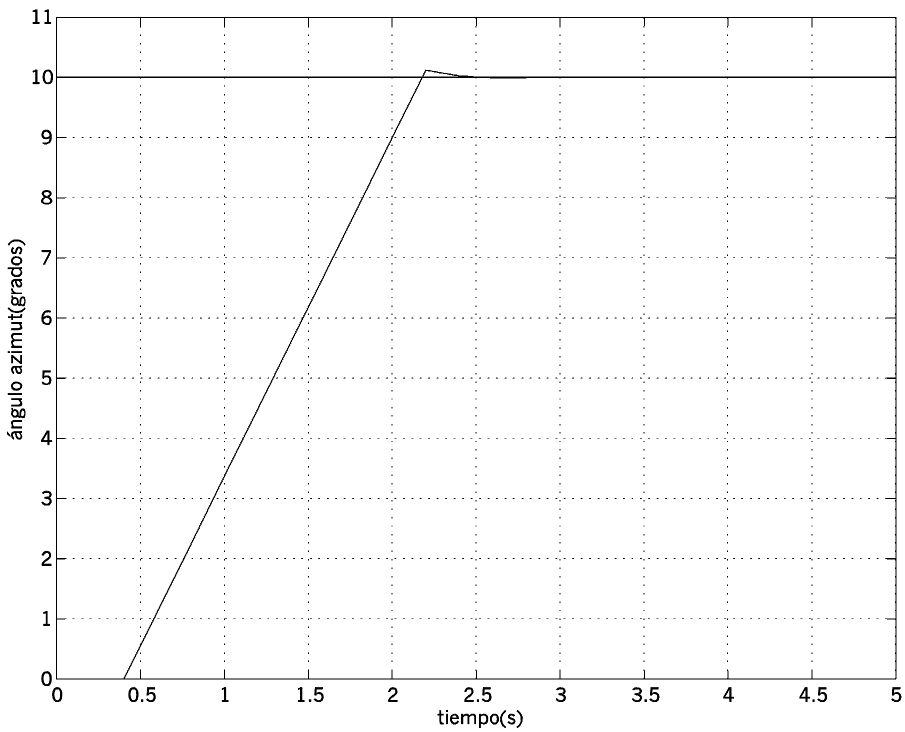

Figura 4.13

4.6.2 Regulador lineal óptimo cuadrático de elevación

En este caso resultan las matrices de ponderación de la Ecuación 4.18. De manera análoga a como ocurría en el eje de azimut, con esos valores el proceso se hace muy lento, convergiendo ahora a los 50 ciclos de iteración y resultando el vector $H = [54.44 \quad 0]$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.2e-4 & 0 \\ 0 & 1.2e-4 \end{bmatrix} \qquad R = 1.6e-7 \qquad \text{Ecuación 4.18}$$

De las simulaciones se llega a que si se aumenta la matriz Q multiplicándola por 10e4 se consigue un control más potente, sale $H = [1761.7 \quad 0]$ a los 4 pasos. La Figura 4.14 expresa la variación del ángulo frente al tiempo en la simulación para estos parámetros.

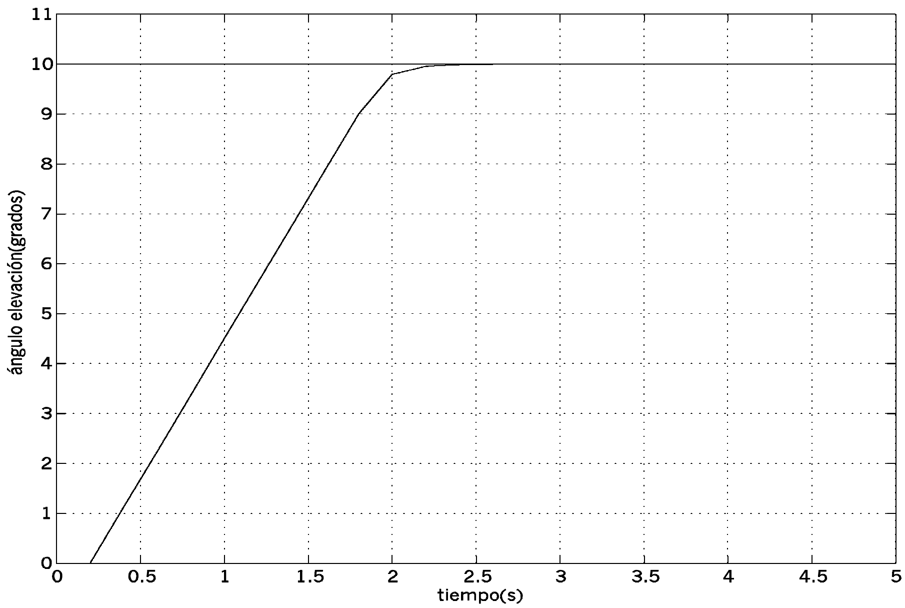

Figura 4.14

Al igual que en el Apartado anterior, la única forma de obtener una respuesta subamortiguada es con una matriz Q no diagonal. Con los parámetros de la Ecuación 4.19 y la H resultante tras 4 etapas, se llega a una respuesta con 1% de s.o. y un t_r=2.18 s., como se aprecia en la Figura 4.15

$$Q = \begin{bmatrix} 1200 & 240 \\ 240 & 1200 \end{bmatrix} \qquad R = 1.6e-7 \qquad H = \begin{bmatrix} 2444.7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación 4.19}$$

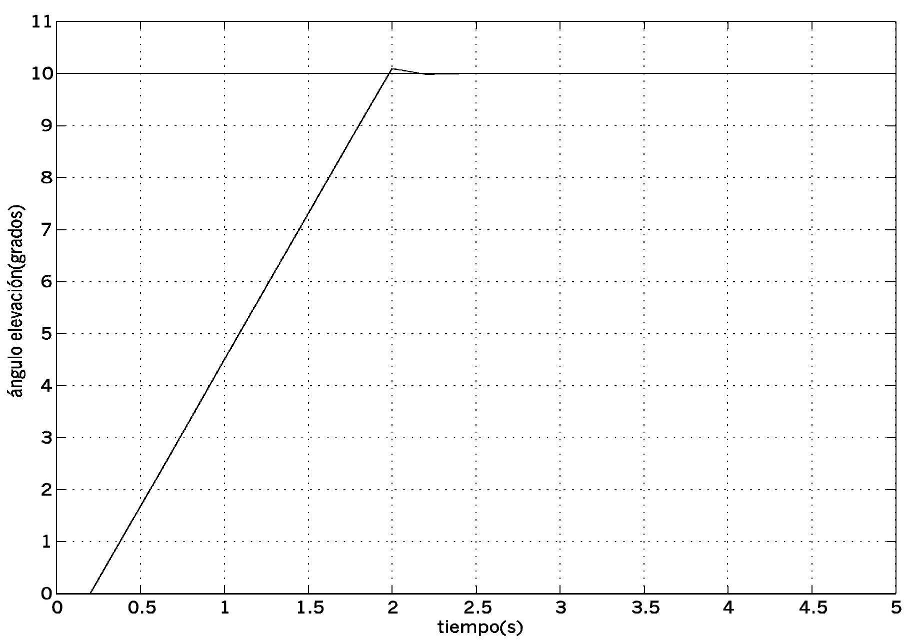

Figura 4.15

4.6.3 Conclusión

Si se compara con las otras dos técnicas vistas hasta ahora, llama la atención que el coste computacional de la obtención de los parámetros del LQR es mucho mayor debido a las iteraciones. Otra desventaja es que no se puede obtener un vector H en base a unas especificaciones, sino que necesita de la simulación y la experiencia para sintonizarlo correctamente. Como ventaja hay que decir que permite penalizar tanto cada estado por separado como la actuación, lo que en ocasiones es muy útil, puesto que permite dar más o menos peso a las variables. Así, en este caso se ha tenido que disminuir la importancia de la señal de actuación frente a la salida para conseguir un control más rápido y más potente.

4.7 Otras referencias

Si se emplean referencias distintas, si no existiese saturación las respuestas serían idénticas. Dado que tanto en el control por realimentación en el espacio de estados, en el dead-beat y en el LQR los estados elegidos para la descomposición son físicamente la salida, con uno u otro retraso, al final son análogos a un control proporcional. En consecuencia los comentarios realizados en el regulador P (Apartado 3.4.4) son extensibles al espacio de estados, hecho este último que se ha comprobado. Efectivamente tras llevar a cabo múltiples simulaciones se ha detectado que la s.o. para distintas referencias sigue siendo del mismo orden.

4.8 Conclusión

Por lo visto a lo largo de este Capítulo, se puede decir que el método más interesante para el sistema que se trata es el de realimentación del vector de estados. La razón es que es el más directo y mecánico para conseguir las especificaciones pretendidas. El inconveniente es que, como en todos los controles del Capítulo, no tiene en cuenta la presencia de la saturación, modificando sus prestaciones. El comportamiento será más satisfactorio para referencias que no impliquen dicha saturación.

El control en un número mínimo de pasos es demasiado brusco y precisaría de un comportamiento real exacto al modelo, ya que este control se basa en mantener al sistema a la máxima velocidad durante el tiempo suficiente para que, teniendo en cuenta el retardo, llegue justo a la referencia. Esto no sucede en este caso puesto que como se ha comentado en varias ocasiones, el sistema real cuando se mueve a una velocidad fija, no avanza siempre el mismo número de grados. Por tanto va a haber muchas posibilidades de que fracase el control, dando lugar a errores en permanente.

En cuanto al control LQR, tiene el inconveniente de que no se calcula en base a unas especificaciones y la ventaja de poder asignar distintas importancias a cada una de las variables de estado y la actuación. Además requiere de un proceso iterativo para su obtención.

Por último insistir en la elección correcta del observador y de los estados, lo que simplifica los cálculos y puede evitar errores con el sistema real. Es fundamental hacer coincidir el mayor número de estados posible con salidas físicamente accesibles del sistema.