



*ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

PROYECTO FIN DE CARRERA:

# **Análisis dinámico de un mecanismo de estabilización automático de rotores excéntricos**

Realizado por:

Alberto Mendoza Muñoz

para la obtención del título de Ingeniero Industrial intensificación Mecánica-Máquinas

Director del proyecto:

Jorge Galán Vioque

Sevilla, Julio 2005



Este documento corresponde a una versión resumida y traducida al español del proyecto fin de carrera '**Dynamic analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors**'.

#### AGRADECIMIENTOS

Este proyecto no podría haberse llevado a cabo sin la ayuda y el apoyo de numerosas personas. Particularmente, me gustaría dar las gracias a los siguientes:

Drs Alan R. Champneys, de la 'University of Bristol', y Jorge Galán Vioque, de la Universidad de Sevilla, por sus consejos, ayuda, y apoyo mostrado a lo largo del año como mis supervisores;

Kirk Green por sus explicaciones, y por haberme autorizado la consulta de sus trabajos acerca del tema, que tan útil me han sido para el desarrollo del proyecto;

Victor Blanco y Sebastian Carlsson por su paciencia durante el desarrollo del proyecto a lo largo de todo el año;

y finalmente mi familia y amigos por su apoyo, y por saber estar siempre donde los necesito.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estabilizadores automáticos de rotores excéntricos (ADB) . . . . .	1
1.2. Historia de los ADBs . . . . .	2
1.3. Trabajos previos . . . . .	3
1.4. Objetivos del proyecto . . . . .	3
1.5. Estructura del proyecto . . . . .	4
<b>2. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción Lagrangiana . . . . .	5
2.2. Adimensionalización . . . . .	8
2.3. Ecuaciones autónomas . . . . .	9
<b>3. Soluciones de equilibrio</b>	<b>11</b>
<b>4. Análisis de bifurcación del sistema ADB</b>	<b>17</b>
4.1. Diagramas de bifurcación para el ADB con dos bolas . . . . .	18
4.2. Diagramas de bifurcación para el ADB con tres bolas . . . . .	20
4.3. Diagramas de bifurcación para el ADB con cuatro bolas . . . . .	26
<b>5. Análisis de la respuesta transitoria del ADB</b>	<b>33</b>
5.1. Efecto de las condiciones iniciales . . . . .	33
5.1.1. Posición y velocidad inicial del centro de rotación . . . . .	33
5.1.2. Posiciones iniciales de las bolas . . . . .	34
5.1.3. Velocidad inicial de las bolas . . . . .	42
5.2. Efecto de los parámetros . . . . .	44
5.2.1. Exploración en el diagrama $(\Omega, \mu)$ . . . . .	44
5.2.2. Efecto de las amortiguaciones $\beta$ y $\zeta$ . . . . .	48
5.2.3. Simulación para rangos de $\Omega$ y de $\delta$ . . . . .	52
<b>6. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>A. Ecuaciones en MATLAB</b>	<b>63</b>
<b>Bibliography</b>	<b>66</b>



# Índice de figuras

1.1. Fotografía de un mecanismo ADB con dos bolas utilizado en laboratorio para la realización de ensayos experimentales. . . . .	2
2.1. Esquema de un ADB. . . . .	6
3.1. Representación de la función $K^2$ y de la expresión $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{n\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$ para valores de los parámetros fijados en $\mu = 0,05$ , $\delta = 0,01$ y $\zeta = 0,01$ y para $n = 3$ bolas. . . . .	15
3.2. Representación de la función $K^2$ y de la expresión $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{(2m-n)\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$ para los valores de los parámetros $\mu = 0,05$ , $\delta = 0,01$ y $\zeta = 0,01$ , para $n = 3$ bolas con $m = 2$ bolas coincidentes. . . . .	16
4.1. Diagrama de bifurcación del sistema ADB con dos bolas en el plano $(\Omega, \mu)$ para $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . . . . .	19
4.2. Diagramas de bifurcación del sistema ADB con dos bolas en los planos $(\Omega, \delta)$ , $(\Omega, \zeta)$ , y $(\Omega, \beta)$ , para $\mu = 0,05$ , y $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . . . . .	21
4.3. Diagrama de bifurcación del sistema ADB con tres bolas en el plano $(\Omega, \mu)$ para $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . . . . .	22
4.4. Diagramas de bifurcación del sistema ADB con tres bolas en los planos $(\Omega, \delta)$ , $(\Omega, \zeta)$ , y $(\Omega, \beta)$ , para $\mu = 0,05$ , y $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . . . . .	24
4.5. Diagramas de bifurcación del sistema ADB con tres bolas en los planos $(\zeta, \beta)$ y $(\Omega, \zeta)$ para $\delta = 0,01$ , $\mu = 0,05$ , $\Omega = 4$ , y $\beta = 0,25$ . . . . .	25
4.6. Diagrama de bifurcación del sistema ADB con cuatro bolas en el plano $(\Omega, \mu)$ para $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . . . . .	27
4.7. Diagramas de bifurcación del sistema ADB con cuatro bolas en los planos $(\Omega, \delta)$ , $(\Omega, \zeta)$ , y $(\Omega, \beta)$ , para $\mu = 0,05$ , y $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . . . . .	29
4.8. Diagramas de bifurcación del sistema ADB con cuatro bolas en los planos $(\zeta, \beta)$ y $(\Omega, \zeta)$ para $\delta = 0,01$ , $\mu = 0,05$ , $\Omega = 4$ , y $\beta = 0,25$ . . . . .	31
5.1. Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros $\Omega = 4,0$ , $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. . . . .	35
5.2. Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros $\Omega = 4,0$ , $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. . . . .	36

5.3. Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros $\Omega = 4,0$ , $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. . . . .	37
5.4. Máxima amplitud de la vibración radial $r_{max}$ en función de $\phi_1(0)$ para el sistema ADB con dos bolas. . . . .	38
5.5. Máxima amplitud de la vibración radial $r_{max}$ en función de $\phi_1(0)$ para el sistema ADB con tres bolas. . . . .	39
5.6. Máxima amplitud de la vibración radial $r_{max}$ en función de $\phi_1(0)$ para el sistema ADB con cuatro bolas. . . . .	41
5.7. Máxima amplitud de la vibración radial $r_{max}$ en función de $\phi_1(0)$ para el ADB con dos, tres, y cuatro bolas, cuando empiezan con una velocidad inicial $\dot{\phi}_i(0) = -\Omega$ , $i = 1 \dots n$ . . . . .	43
5.8. Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y cuatro pares de valores de $(\Omega, \mu)$ . . . . .	45
5.9. Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y cuatro pares de valores de $(\Omega, \mu)$ . . . . .	46
5.10. Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros $\zeta = 0,01$ , $\beta = 0,01$ , $\delta = 0,01$ , y cuatro pares de valores de $(\Omega, \mu)$ . . . . .	47
5.11. Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros $\delta = 0,01$ , $\mu = 0,05$ , y cuatro diferentes conjuntos de valores para $(\Omega, \zeta, \beta)$ . . . . .	49
5.12. Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros $\delta = 0,01$ , $\mu = 0,05$ , y cuatro diferentes conjuntos de valores para $(\Omega, \zeta, \beta)$ . . . . .	50
5.13. Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros $\delta = 0,01$ , $\mu = 0,05$ , y cuatro diferentes conjuntos de valores para $(\Omega, \zeta, \beta)$ . . . . .	51
5.14. Simulación del sistema ADB para dos, tres, y cuatro bolas, para el rango $0 < \Omega < 20$ , y los otros parámetros fijos en $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ , y $\mu = 6\mu_c$ . . . . .	54
5.15. Simulación numérica del sistema ADB con dos, tres, y cuatro bolas, para el rango $0 < \delta < \tilde{m}$ , con $\tilde{m} = 0,03$ , y los otros parámetros fijados en $\Omega = 4$ , $\zeta = \beta = 0,01$ , y $\mu = \tilde{m}/n$ . . . . .	56
5.16. Simulación numérica del sistema ADB con dos, tres, y cuatro bolas, para el rango $0 < \delta < \tilde{m}$ , con $\tilde{m} = 0,12$ , y los otros parámetros fijados en $\Omega = 4$ , $\zeta = \beta = 0,01$ , y $\mu = \tilde{m}/n$ . . . . .	57

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Estabilizadores automáticos de rotores excéntricos (ADB)

En la actualidad existen un gran número de máquinas que están constituidas por un sistema rotor, como por ejemplo helicópteros, turbinas, tornos de mecanizado, lavadoras, taladradoras, etc. Un desequilibrio en los rotores de estas máquinas supone una aparición de vibraciones y la generación de esfuerzos no deseables. Estos esfuerzos son transmitidos a las diferentes partes de la máquina, lo cual puede causar daos en todo el sistema. Generalmente, este desequilibrio es debido a las inevitables imperfecciones en la fabricación y ensamblaje de los rotores. Por tanto, el equilibrado de los rotores es un aspecto muy importante, y se considera como un requerimiento fundamental para el correcto funcionamiento de las actuales mquinas rotativas de baja y alta velocidad de giro.

Si el sistema tiene un desequilibrio fijo, es decir, que no vara con el tiempo, es fácil equilibrarlo usando masas estáticas adicionales (equilibrado estático). Sin embargo, en un gran número de casos, la posición del desequilibrio, esto es, el lugar en el cual se encuentra el centro de masa del rotor desplazado con respecto al centro de rotación, puede que varíe con el tiempo. Por tanto, resultaría complicado predecir a priori dónde y cuándo aparecería el desequilibrio. Este hecho motiva el uso de estabilizadores automáticos (en inglés ‘Automatic Dynamic Balancer’, de ahí sus siglas ADB), es decir, mecanismos de equilibrado que son controlados pasivamente, no requiriendo fuerzas externas para conseguir el balance dinámico del sistema.

El uso de ADBs tiene muchas ventajas en un gran número de aplicaciones físicas; por ejemplo, en el equilibrado de lectores ópticos de discos, para conseguir un funcionamiento correcto a más altas velocidades de giro sin la aparición de saltos durante la lectura [5, 13, 16, 25], y la estabilización de máquinas de herramientas de mecanizado tales como tornos, esmeriladoras, y herramientas de corte [20]. Debido a la reducción de las vibraciones y del consecuente efecto de fatiga, el uso de ADB podrá alargar el tiempo de vida de tales máquinas de mecanizado. En particular, el uso de ADB para reducir las vibraciones en las máquinas de herramientas tiene un gran efecto económico, debido a que una máquina equilibrada puede ser utilizada por el trabajador durante períodos de tiempos más prolongados sin que aparezcan problemas de salud tales como el ‘síndrome del brazo vibratorio’ (en inglés ‘Hand-arm vibration syndrome’, con siglas HAVS) [12].

## 1.2. Historia de los ADBs

Uno de los primeros ADB de la historia fue el propuesto por William Seller and Co. de Filadelfia, en 1904. Esta compañía realizó una serie de pruebas sobre una turbina de gas experimental en la que se incorporó el ADB descrito por Olsen en una publicación de Thearle (1932) [24]. El estabilizador que fue propuesto consistía en tres finos discos excéntricos montados sobre el eje de la turbina, y apoyados sobre un disco solidario al eje. Los discos estaban insertados en el eje, por lo que existiría fricción entre los discos y el eje, y entre los propios discos. Mientras el sistema alcanzaba su velocidad de giro de operación, los discos excéntricos se movían gradualmente hasta que alcanzaban una posición que conseguía el balance del sistema.

Desde aquella temprana investigación hasta el presente, se han otorgado numerosas patentes a varios tipos de mecanismos ADB que fueron propuestos para un amplio rango de aplicaciones. Una lista de las patentes estadounidenses se encuentra en el estudio llevado a cabo por Lee y Van Moorhen [18]. Tanto los mecanismos como los métodos por los cuales se consigue el balance dinámico en tales patentes son extremadamente similares. La idea clave de un ADB es desplegar dos o más masas que pueden moverse libremente sobre un canal relleno con un fluido viscoso, manteniéndose a una distancia fija con respecto al centro de rotación del rotor; ver Figura 1.1. Esta simple disposición motivó el estudio teórico de Sharp [21], Bövik y Högfors [3], y Majewski [19]. Otra característica común de estos mecanismos es la casi completa ausencia de detalladas investigaciones teóricas y experimentales bajo las condiciones de operación que existirían en aplicaciones prácticas.



Figura 1.1: Fotografía de un mecanismo ADB con dos bolas utilizado en laboratorio para la realización de ensayos experimentales.

Thearle (1932) [24] y Den Hartog (1956) [11] discutieron por qué tales mecanismos no funcionan correctamente si un fluido es usado en lugar de masas sólidas. Alexander (1964) [2] presentó los resultados de un análisis teórico del concepto de un ADB. Su configuración consistía en una serie de  $n$  contrapesos con forma de cojinetes esféricos insertados en canales que eran colocados en un cuerpo rotativo esbelto desequilibrado. En sus simulaciones, el sistema partía inicialmente del reposo y era llevado a su velocidad de rotación final por la aplicación de un par motor. Las fuerzas laterales debidas al desequilibrio dinámico incre-

mentaban hasta que la velocidad de giro final era alcanzada, y a continuación estos esfuerzos decaían hasta desaparecer gracias a la acción de los contrapesos. Sin embargo, no era indicado cómo se movían dichos contrapesos y cómo era el movimiento del cuerpo rotativo esbelto. Cade (1965) [4] propuso los requerimientos necesarios para el funcionamiento del ADB, pero la procedencia de estas sugerencias no está clara.

### 1.3. Trabajos previos

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a las bolas del mecanismo ADB fueron obtenidas mediante el método de Lagrange en [7, 18]. En particular, Chung y Ro [7] llevaron a cabo un análisis de estabilidad lineal usando métodos de perturbación, e identificaron regiones de estabilidad del problema no-lineal usando un método de acercamiento dispersión-pistola ('scatter-gun'). Adolfsson [1] aplicó un análisis de estabilidad lineal similar e identificó regiones de operación de equilibrio estables con la consideración del mayor de los autovalores reales. La simulación numérica se ha empleado para verificar la estabilidad del ADB. Sin embargo, debido a alta no-linealidad del problema, estos estudios muestran que el mecanismo ADB puede tener una respuesta catastróficamente peor para determinados valores de parámetros [7]; es por ello por lo que sólo han tenido éxito un limitado número de aplicaciones comerciales del ADB [23]. Por otra parte, un análisis de estabilidad lineal es una herramienta inadecuada para entender un comportamiento tan fuertemente no-lineal. Por último, se han llevado a cabo algunos estudios experimentales para verificar la validez de los modelos matemáticos; ver Refs.[13, 18]. Muy recientemente, Green presentó el primer análisis detallado de bifurcación no-lineal del mecanismo ADB con dos bolas usando técnicas de continuación numérica [9]. Este trabajo profundiza en los aspectos que afectan a la respuesta transitoria del sistema, lo cual es estudiado con más detalle en [10].

### 1.4. Objetivos del proyecto

El propósito fundamental de este proyecto es comparar y contrastar el comportamiento dinámico del mecanismo de estabilización automático (ADB) con dos, tres, y cuatro masas rectificadoras. Para ello se lleva a cabo un análisis de bifurcación y un análisis del transitorio, utilizando las ecuaciones de movimiento que modelan el mecanismo. A través de los resultados obtenidos en estos análisis, se conocerán los requerimientos de diseño necesarios para que los ADBs consigan equilibrar el sistema, y se estudiarán los efectos de la amortiguación y de las posiciones iniciales de las bolas sobre la respuesta transitoria. Así, se recomendarán posiciones iniciales de las bolas desde las cuales deberían comenzar asegurarse de que el balance dinámico del sistema es alcanzado, y de que las vibraciones durante el transitorio son lo más pequeñas posibles.

Utilizando los resultados obtenidos para cada caso (dos, tres y cuatro bolas), se hará una comparación entre ellos. Debido a que ya se han hecho otros estudios del mecanismo ADB con dos bolas, el principal objetivo de este proyecto será descubrir cualquier similitud entre los tres casos, y profundizar en las mejoras o posibles defectos que puedan aparecer en los mecanismos ADB con tres y cuatro bolas comparados con el mecanismo ADB con dos bolas. Es decir, se intentará averiguar si el uso del ADB con más de dos bolas está justificado.

Un último objetivo del proyecto será comprobar los resultados obtenidos con `MATCONT`, el paquete de continuación numérica de `Matlab` que ha sido usado para llevar a cabo el análisis de bifurcación. En [9] se desarrolló un detallado análisis de bifurcación del ADB con dos bolas con el uso de `AUTO`. Por tanto, será posible comparar nuestros resultados en el caso de dos bolas, con aquellos obtenidos en [9] para estar seguros de que la computación ejecutada por `MATCONT` es correcta.

## 1.5. Estructura del proyecto

El proyecto está organizado como sigue. En el Capítulo 2 se obtienen las ecuaciones de movimiento del mecanismo ADB con un número genérico de bolas  $n$ . Concretamente, en la Sección 2.1 se formula la descripción Lagrangiana del sistema; a continuación, se adimensionalizan las ecuaciones en la Sección 2.2. En la Sección 2.3 las ecuaciones de movimiento son reescritas en un sistema de referencia rotativo solidario al rotor, lo que da lugar a un sistema autónomo, esto es, independiente del tiempo. En el Capítulo 3 se obtienen las soluciones estacionarias, y se identifican varias condiciones de existencia de dichos equilibrios. Técnicas de continuación numérica son empleadas en el Capítulo 4 para realizar un análisis de bifurcación del mecanismo ADB con dos bolas (Sección 4.1), tres bolas (Sección 4.2), y cuatro bolas (Sección 4.3). En el Capítulo 5 se lleva a cabo un análisis del transitorio, en el cual se investiga la dinámica del transitorio mediante simulación numérica de las ecuaciones de movimiento. En la Sección 5.1 analizamos la sensibilidad de la respuesta del sistema a las condiciones iniciales. De este modo, primero se muestran resultados numéricos para diferentes posiciones y velocidades iniciales del centro de rotación del sistema en la Subsección 5.1.1. En la Subsección 5.1.2 se estudia el comportamiento del sistema para diferentes posiciones iniciales de las bolas, y se intenta hallar una posición inicial óptima desde la cual las bolas deberían ser lanzadas para obtener el mejor transitorio posible. Por último en la Subsección 5.1.3 se discute el efecto que produce sobre el sistema el hecho de que las bolas empiecen inicialmente estacionarias con respecto al un sistema de referencia externo. En la Sección 5.2 se estudian los efectos de los parámetros. En la Subsección 5.2.1 se comparan los resultados obtenidos de la simulación numérica con los diagramas de bifurcación obtenidos en el Capítulo 4; en la Subsección 5.2.2 se estudia cómo la amortiguación afecta al comportamiento del sistema, y en la Subsección 5.2.3 numerosos resultados son mostrados para un rango de valores de la velocidad de rotación y de la excentricidad del rotor. Por último, en el Capítulo 6 se detallan las conclusiones del proyecto, y se proponen trabajos futuros. Así, se enumeran las similitudes y las diferencias encontradas en los análisis de bifurcación y del transitorio entre los tres casos estudiados (ADB con dos, tres, y cuatro bolas). También se dan algunas recomendaciones para aplicaciones prácticas de mecanismos ADB.

## Capítulo 2

# Ecuaciones de movimiento

Nuestro objeto de estudio es un disco rotativo excéntrico con un mecanismo de estabilización dinámica automático (ADB) consistente en dos o más bolas que son libres de moverse en una acanaladura rellena con un líquido viscoso y colocadas a una distancia fija del centro de rotación del disco. Este montaje es mostrado esquemáticamente en la Figura 2.1. El punto  $W$  representa el centro de masa del disco (sin las bolas) y se encuentra situado a una distancia  $\epsilon$  del centro de rotación  $C$ . En este modelo se supone que el disco está insertado en un eje no flexible sobre el punto  $C$ . Para el estudio de rotores excéntricos con un eje flexible ver por ejemplo la Referencia [6].

En la siguiente sección se obtendrán las ecuaciones de movimiento de un ADB usando el método de Lagrange, donde supondremos que todo el movimiento del sistema se produce en el plano  $(X, Y)$ . También asumiremos que no hay interacciones entre las bolas. Esta suposición puede ser considerada como un modelo con múltiples raíles colocados en diferentes posiciones axiales sobre el eje, con cada bola moviéndose en su propio canal [14]. El siguiente análisis es válido tanto para modelos con un solo canal, como para modelos con múltiples canales, siempre que cada canal esté colocado a la misma distancia radial del huso del rotor. Nuestro análisis sigue inicialmente la descripción Lagrangiana considerada en Ref.[18]. Adicionalmente, desarrollamos un modelo adimensional sobre un sistema de referencia rotativo solidario al rotor; ver, por ejemplo, Ref.[1].

### 2.1. Descripción Lagrangiana

Las ecuaciones de movimiento del sistema ADB con  $n$  bolas pueden ser obtenidas mediante el uso de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad (2.1)$$

con  $k = 1, \dots, 3 + n$ , donde  $T$  es la energía cinética,  $V$  es la energía potencial,  $q_k$  son las coordenadas generalizadas, y  $Q_k$  son las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema. Asumiendo que el disco está obligado a moverse en el plano  $(X, Y)$ , las coordenadas generalizadas serán

$$\mathbf{q} = (X, Y, \psi, \phi_i), \quad (2.2)$$

donde el índice  $i = 1 \dots n$  representa la  $i$ -ésima bola.

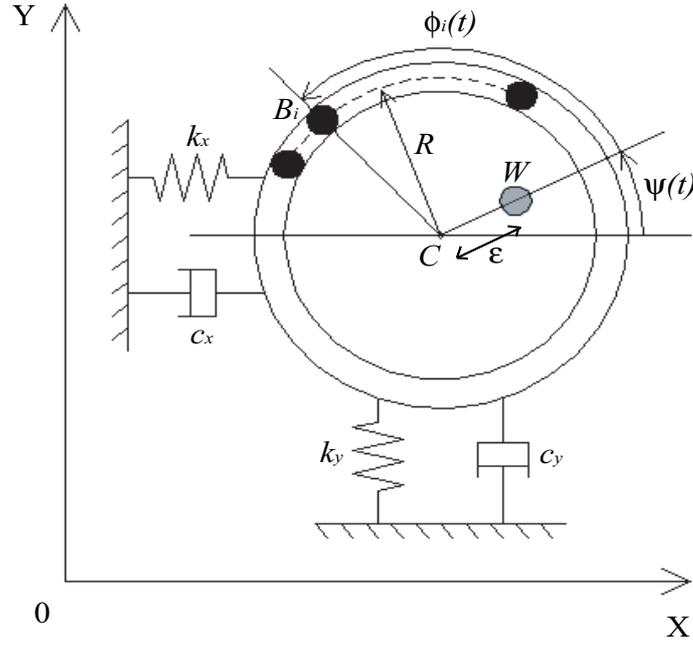


Figura 2.1: Esquema de un ADB; consultar el texto para las definiciones de las variables.

El vector de posición del centro de masa  $W$  del disco es

$$\mathbf{r}_{OG} = (X + \epsilon \cos \psi)\mathbf{i} + (Y + \epsilon \sin \psi)\mathbf{j}, \quad (2.3)$$

y el vector de posición de la bola  $i$ -ésima es

$$\mathbf{r}_{OB_i} = (X + R \cos(\psi + \phi_i))\mathbf{i} + (Y + R \sin(\psi + \phi_i))\mathbf{j}. \quad (2.4)$$

Por otra parte, las respectivas velocidades vienen dadas por

$$\dot{\mathbf{r}}_{OG} = (\dot{X} - \epsilon \dot{\psi} \sin \psi)\mathbf{i} + (\dot{Y} + \epsilon \dot{\psi} \cos \psi)\mathbf{j}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{OB_i} = (\dot{X} - R(\dot{\psi} + \dot{\phi}_i) \sin(\psi + \phi_i))\mathbf{i} + (\dot{Y} + R(\dot{\psi} + \dot{\phi}_i) \cos(\psi + \phi_i))\mathbf{j}. \quad (2.6)$$

La energía cinética total del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2}I_z \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{\mathbf{r}}_{OG} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{OG}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\mathbf{r}}_{OB_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{OB_i}), \quad (2.7)$$

donde  $M$  es la masa del disco,  $m_i$  es la masa de la  $i$ -ésima bola, e  $I_z$  es el momento de inercia del rotor alrededor de  $C$ . La energía potencial del sistema viene dada por

$$V = \frac{1}{2}k_X X^2 + \frac{1}{2}k_Y Y^2 + Mg(Y + \epsilon \sin \psi) + \sum_{i=1}^n m_i g(Y + R \sin(\psi + \phi_i)), \quad (2.8)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $k_X$  y  $k_Y$  son las constantes lineales de los muelles que actúan sobre el eje del rotor en las direcciones  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Por último, las fuerzas generalizadas, esto es, las fuerzas que no provienen de un potencial, son modeladas por términos de amortiguación viscosa

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = (-c_X \dot{X}, -c_Y \dot{Y}, \tilde{M}, -D_i \dot{\phi}_i), \quad (2.9)$$

donde  $c_X$  y  $c_Y$  son las constantes lineales de la amortiguación que actúa sobre el eje del rotor en las direcciones  $X$  e  $Y$  respectivamente,  $F$  es la función de disipación de Rayleigh, y  $\tilde{M}$  es el par motor del sistema.

Sustituyendo (2.7), (2.8) y (2.9) en (2.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento no lineales del sistema. Así, las ecuaciones de movimiento correspondientes al centro de rotación son

$$\begin{aligned} M\ddot{X} - M\epsilon\dot{\psi}^2 \cos \psi - M\epsilon\ddot{\psi} \sin \psi + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \ddot{X} - R(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}_i) \sin(\psi + \phi_i) \right. \\ \left. - R(\dot{\psi} + \dot{\phi}_i)^2 \cos(\psi + \phi_i) \right\} + k_X X = -c_X \dot{X}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

y

$$\begin{aligned} M\ddot{Y} - M\epsilon\dot{\psi}^2 \sin \psi + M\epsilon\ddot{\psi} \cos \psi + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \ddot{Y} + R(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}_i) \cos(\psi + \phi_i) \right. \\ \left. - R(\dot{\psi} + \dot{\phi}_i)^2 \sin(\psi + \phi_i) \right\} + k_Y Y + Mg + \sum_{i=1}^n m_i g = -c_Y \dot{Y}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La ecuación de movimiento de rotación alrededor de dicho centro es

$$\begin{aligned} I_z \ddot{\psi} - M\epsilon \ddot{X} \sin \psi + M\epsilon \ddot{Y} \cos \psi + M\epsilon^2 \ddot{\psi} - \sum_{i=1}^n m_i \left\{ R \left[ \ddot{X} \sin(\psi + \phi_i) - \right. \right. \\ \left. \left. \ddot{Y} \cos(\psi + \phi_i) \right] - R^2(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}_i) \right\} + Mg\epsilon \cos \psi + \sum_{i=1}^n m_i g R \cos(\psi + \phi_i) = \tilde{M}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y por último, la ecuación de movimiento correspondiente a la bola  $i$ -ésima es

$$\begin{aligned} -m_i R \left[ \ddot{X} \sin(\psi + \phi_i) - \ddot{Y} \cos(\psi + \phi_i) \right] + m_i R^2(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}_i) \\ + m_i g R \cos(\psi + \phi_i) = -D_i \dot{\phi}_i, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $i = 1 \dots n$ .

Las ecuaciones (2.10)-(2.13) pueden ser simplificadas asumiendo que todas las bolas en el mecanismo tienen la misma masa  $m$ , ejercen la misma resistencia viscosa  $D$ , y que el sistema está forzado a girar a una velocidad angular constante  $\Omega$ , esto es,

$$m_i = m, \quad D_i = D, \quad \dot{\psi} = \omega. \quad (2.14)$$

donde  $i = 1 \dots n$ .

## 2.2. Adimensionalización

Las (2.10)-(2.13) pueden ser escritas de forma adimensional utilizando las coordenadas adimensionales  $\bar{X}$  y  $\bar{Y}$ , y el tiempo adimensional  $\bar{t}$ , dado por

$$\bar{X} = \frac{X}{R}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{R}, \quad \bar{t} = \omega_n t, \quad (2.15)$$

junto con los parámetros adimensionales

$$\mu = \frac{m}{M}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \delta = \frac{\epsilon}{R}, \quad G = \frac{g}{\epsilon\omega_n^2}, \quad (2.16)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural del disco rotativo, dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (2.17)$$

Para obtener esta expresión de  $\omega_n$ , y en el consiguiente análisis, supondremos una suspensión isotrópica del rotor, esto es,

$$\{c, k\} = \{c_X, k_X\} = \{c_Y, k_Y\}. \quad (2.18)$$

Es más, se introducen los siguientes parámetros adimensionales

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}, \quad \beta = \frac{D}{mR^2\omega_n}, \quad (2.19)$$

que describen adimensionalmente la amortiguación del sistema de suspensión del rotor  $\zeta$ , y la amortiguación viscosa que actúa sobre las bolas  $\beta$ . Observar que se asume que todos los parámetros son positivos. Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, debido a que una excentricidad  $\delta$  negativa implica que el centro de masa del disco se encuentra en el eje  $X$  negativo, lo cual puede sustituirse por un cambio de sistema de referencia que convierta a dicha excentricidad en otra con el mismo valor absoluto, pero con signo positivo.

Consecuentemente, asumiendo (2.14), las ecuaciones (2.10),(2.11) y (2.13) pueden ser escritas adimensionalmente como

$$(1 + n\mu)\ddot{\bar{X}} + 2\zeta\dot{\bar{X}} + \bar{X} = \delta\Omega^2 \cos \Omega t + \mu \sum_{i=1}^n \left[ \ddot{\phi}_i \sin(\Omega t + \phi_i) + (\Omega + \dot{\phi}_i)^2 \cos(\Omega t + \phi_i) \right], \quad (2.20)$$

$$(1 + n\mu)\ddot{\bar{Y}} + 2\zeta\dot{\bar{Y}} + \bar{Y} = \delta\Omega^2 \sin \Omega t - \mu \sum_{i=1}^n \left[ \ddot{\phi}_i \cos(\Omega t + \phi_i) - (\Omega + \dot{\phi}_i)^2 \sin(\Omega t + \phi_i) \right] - G(1 + n\mu), \quad (2.21)$$

$$\ddot{\phi}_i - \ddot{\bar{X}} \sin(\Omega t + \phi_i) + \ddot{\bar{Y}} \cos(\Omega t + \phi_i) + \delta G \cos(\Omega t + \phi_i) = -\beta\dot{\phi}_i. \quad (2.22)$$

Observar que, por simplicidad, no utilizamos la 'barra' para la notación de las coordenadas adimensionales usadas en (2.15). Además, como no estamos interesados en la variación del par motor  $\tilde{M}$  necesario para que el rotor gire con un velocidad angular constante igual a  $\omega$ , no consideramos la tercera ecuación de movimiento (2.12).

### 2.3. Ecuaciones autónomas en un sistema de referencia rotativo

La parte final de nuestra formulación convierte las ecuaciones adimensionales (2.20)-(2.22) en ecuaciones autónomas en un sistema de referencia rotativo, ligado al eje, ver [7, 1]. Para este fin, se consideran las siguientes sustituciones

$$X = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, \quad (2.23)$$

$$Y = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t. \quad (2.24)$$

Además, despreciamos los efectos de la gravedad, esto es, suponemos  $G=0$  en (2.22). Esta suposición está justificada porque, en la práctica y para velocidades angulares altas, las fuerzas centrífugas son mucho mayores que los efectos gravitacionales. La gravedad puede ser también no tenida en cuenta si se supone que el eje del rotor está colocado en dirección vertical. Considerando estas suposiciones se obtiene el siguiente sistema dinámico autónomo

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1+n\mu & 0 \\ 0 & 1+n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\zeta & -2\Omega(1+n\mu) \\ 2\Omega(1+n\mu) & 2\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} K & -2\Omega\zeta \\ 2\Omega\zeta & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \delta\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\Omega + \dot{\phi}_i)^2 & \ddot{\phi}_i \\ -\ddot{\phi}_i & (\Omega + \dot{\phi}_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

y

$$\ddot{\phi}_i + \beta\dot{\phi}_i = (\ddot{x} - \Omega^2 x - 2\Omega\dot{y}) \sin \phi_i - (\ddot{y} - \Omega^2 y + 2\Omega\dot{x}) \cos \phi_i, \quad (2.26)$$

donde  $i = 1, \dots, n$  y

$$K = 1 - \Omega^2(1 + n\mu). \quad (2.27)$$

Podemos observar que si el lado derecho de la ecuación (2.25) es igual a cero, se recuperan las ecuaciones de movimiento de un rotor isotrópico amortiguado en un sistema de referencia rotativo. Del mismo modo, si se impone  $\mu = 0$ , (2.25) se obtienen las ecuaciones de movimiento de un rotor Jeffcott [15]. El resultado de añadir un ADB a un rotor es la aparición de fuerzas adicionales provocadas por el movimiento de las bolas. Estas fuerzas están acopladas al movimiento del centro de masa del rotor, de tal forma que se obtiene un sistema no lineal completamente acoplado. En el caso en el que  $\mu$  es pequeño, el acoplamiento puede que sea bajo, pero la no linealidad no es débil, debido a que por efectos geométricos la no linealidad del seno está involucrada en los términos debidos al acoplamiento.



## Capítulo 3

# Soluciones de equilibrio

Para obtener las soluciones de equilibrio del sistema, es necesario igualar a cero todas las derivadas con respecto al tiempo en (2.25). De este modo tenemos

$$\begin{pmatrix} K & -2\Omega\zeta \\ 2\Omega\zeta & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

y

$$0 = (-\Omega^2 x) \sin \phi_i - (-\Omega^2 y) \cos \phi_i, \quad (3.2)$$

donde el índice  $i = 1, \dots, n$ . Reescribiendo estas ecuaciones,

$$Kx - 2\Omega\zeta y - \delta\Omega^2 - \mu \sum_{i=1}^n \Omega^2 \cos \phi_i = 0, \quad (3.3)$$

$$2\Omega\zeta x + Ky - \mu \sum_{i=1}^n \Omega^2 \sin \phi_i = 0, \quad (3.4)$$

$$x \sin \phi_i - y \cos \phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Discutamos ahora dos tipos de soluciones diferentes de estas ecuaciones: *equilibrios de balance* y *equilibrios fuera de balance*.

Un equilibrio de balance se obtiene cuando el centro de rotación del sistema  $C$  está en el origen, por lo que las coordenadas  $x$  e  $y$  en (3.3)-(3.5) serán iguales a cero. Después de hacer esto, (3.5) se verifica para cualquier valor de las coordenadas  $\phi_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , por lo que tendremos un conjunto de dos ecuaciones (3.3) y (3.4) con  $n$  incógnitas  $\phi_i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Esto es, para esta solución de equilibrio de balance, hay  $n - 2$  grados de libertad, y se tendrán que cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x = y = 0, \\ \sum_{i=1}^n \cos \phi_i = -\frac{\delta}{\mu}, \\ \sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Debido a esto, cuando  $n > 2$ , existen infinitos equilibrios de balance. En lo que sigue, nos referiremos a (3.6) como el conjunto de equilibrios de balance **1**.

Hablemos ahora de las soluciones estacionarias en las que no se consigue el balance dinámico del sistema. En estas se cumplirá que  $x, y \neq 0$ . En este caso, (3.5) nos da

$$\frac{y}{x} = \tan \phi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

es decir, cada ángulo  $\phi_i$  tiene la misma tangente. Debido a esto, las coordenadas  $\phi_i$  tienen que cumplir

$$\phi_i = \phi_1 + k_i \pi, \quad i = 2 \dots n, \quad (3.8)$$

donde  $k_i$  es cualquier número entero, sin pérdida de generalidad 0 o 1. De esta forma, cuando  $k_i = 0$ , la coordenada  $\phi_i$  es igual que la coordenada  $\phi_1$ , esto es, las bolas 1 e  $i$  coinciden (recalquemos que no estamos modelando interacciones entre las bolas). Cuando  $k_i = 1$  las bolas 1 e  $i$  están situadas en lados opuestos, y en línea con el centro de rotación  $C$ . Diferenciemos ahora dos tipos distintos de equilibrios que no consiguen equilibrar dinámicamente sistema:

- Equilibrios fuera de balance en los que todas las bolas son coincidentes. En este caso  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n$ . Resolviendo (3.3) y (3.4) se pueden obtener expresiones de  $x$  y  $y$  en función de  $\phi_1$ , y sustituyendo estas en (3.5) se consigue una expresión explícita de  $\phi_1$  en función de los parámetros del problema. Específicamente, se tiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{K\Omega^2(n\mu \cos \phi_1 + \delta) + 2n\mu\Omega^3\zeta \sin \phi_1}{K^2 + (2\Omega\zeta)^2}, \\ y &= \frac{nK\mu\Omega^2 \sin \phi_1 - 2\Omega\zeta(\delta\Omega^2 + n\mu\Omega^2 \cos \phi_1)}{K^2 + (2\Omega\zeta)^2}, \\ \phi_1 &= \pm \arccos \left( \frac{-2n\mu\zeta\Omega}{\sqrt{(2\Omega\zeta\delta)^2 + (K\delta)^2}} \right) - \arctan \left( \frac{-K}{2\Omega\zeta} \right), \\ \phi_1 &= \phi_2 = \dots = \phi_n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En lo que sigue, nos referiremos a (3.9) como los equilibrios coincidentes **2 $\pm$** , con el signo  $+$  o  $-$  según el signo que es tomado para el arcocoseno en la expresión de  $\phi_1$ .

- Equilibrios fuera de balance en los que hay  $m$  bolas coincidentes en la misma posición y las otras  $n - m$  están situadas en el lado opuesto y en línea con el centro de rotación  $C$ . Resolviendo en este caso (3.3) y (3.4), se consigue el siguiente equilibrio:

$$\begin{aligned} x &= \frac{K\Omega^2((2m - n)\mu \cos \phi_1 + \delta) + 2(2m - n)\mu\Omega^3\zeta \sin \phi_1}{K^2 + (2\Omega\zeta)^2}, \\ y &= \frac{(2m - n)K\mu\Omega^2 \sin \phi_1 - 2\Omega\zeta(\delta\Omega^2 + (2m - n)\mu\Omega^2 \cos \phi_1)}{K^2 + (2\Omega\zeta)^2}, \\ \phi_1 &= \pm \arccos \left( \frac{-2(2m - n)\mu\zeta\Omega}{\sqrt{(2\Omega\zeta\delta)^2 + (K\delta)^2}} \right) - \arctan \left( \frac{-K}{2\Omega\zeta} \right), \\ \phi_i &= \phi_1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \phi_j &= \phi_1 + \pi, \quad j = m + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En lo que sigue, nos referiremos a (3.10) como los equilibrios en línea  $\mathbf{3(n-m)\pm}$ . Es decir, serán equilibrios del ADB con  $n$  bolas en el que hay  $m$  bolas coincidentes en la misma posición  $\phi_1$ , y las otras  $n - m$  están en el lado opuesto y en línea con el centro de rotación  $C$ . El signo  $+$  o  $-$  dependerá del signo que es tomado para el arcocoseno en la expresión de  $\phi_1$ .

Inicialmente, en un sistema ADB con  $n$  bolas, existirían  $2(n-1)$  diferentes equilibrios en línea  $\mathbf{3(n-m)\pm}$ . Sin embargo, algunos de ellos son físicamente los mismos. Veamos cuántos existirán específicamente para el sistema con dos, tres, y cuatro bolas. En el caso  $n = 2$ , el único posible valor para  $m$  es 1. Aunque deberían existir dos diferentes equilibrios en línea,  $\mathbf{3(2-1)+}$  y  $\mathbf{3(2-1)-}$ , demostraremos que de hecho son los mismos. Después de sustituir  $m = 1$  en la expresión de  $\phi_1$  en (3.10), nos queda

$$\phi_{1_{3(2-1)+}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-K}{2\Omega\zeta}\right), \quad (3.11)$$

para el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)+}$ , y

$$\phi_{1_{3(2-1)-}} = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-K}{2\Omega\zeta}\right), \quad (3.12)$$

para el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)-}$ . Observar que la diferencia entre (3.11) y (3.12) es igual a  $\pi$ , por lo que la coordenada  $\phi_2$  para el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)-}$  es la misma que la coordenada  $\phi_1$  para el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)+}$ ,

$$\phi_{2_{3(2-1)-}} = \phi_{1_{3(2-1)+}} + \pi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-K}{2\Omega\zeta}\right) = \phi_{1_{3(2-1)+}}. \quad (3.13)$$

Por tanto, debido a que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están en línea, la coordenada  $\phi_2$  en el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)+}$  es equivalente a la coordenada  $\phi_1$  del equilibrio  $\mathbf{3(2-1)-}$ . Por consiguiente, el equilibrio  $\mathbf{3(2-1)+}$  es equivalente al equilibrio  $\mathbf{3(2-1)-}$  (y viceversa), obteniéndose uno a partir del otro si se intercambian las posiciones de las dos bolas  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Sin embargo, físicamente estos corresponden al mismo equilibrio debido a que se asumió que las bolas eran idénticas, y por tanto, se puede considerar que existe un único equilibrio en línea asumiendo sin pérdida de generalidad que  $-\pi \leq \phi_2 \leq \phi_1 \leq \pi$ . Consecuentemente, cuando  $n = 2$ , existe un único equilibrio en línea llamado  $\mathbf{3}$ .

En el caso  $n = 3$ , hay dos posibilidades para el número de bolas coincidentes,  $m = 1$  o  $m = 2$ . Sin embargo, estos dos equilibrios en línea resultan ser el mismo. Efectivamente, debido a que las tres bolas son idénticas, es físicamente lo mismo que las dos bolas coincidentes sean las correspondientes a las coordenadas  $\phi_2$  y  $\phi_3$  (caso  $m = 1$ ) a que sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  (caso  $m = 2$ ). Por tanto, nos referiremos a los equilibrios en línea para el sistema ADB con tres bolas como  $\mathbf{3\pm}$ , con el signo  $+$  o  $-$  dependiendo del signo que se elija para el arcocoseno en la expresión de  $\phi_1$  en (3.10). Para  $n = 4$  bolas, el número de bolas coincidentes podría ser  $m = 1$ , 2 o 3. Los casos  $m = 1$  y  $m = 3$  son equivalentes por la misma razón que se acaba de explicar en el ADB con tres bolas. Es decir, debido a que las cuatro bolas son iguales, es lo mismo que las tres bolas coincidentes sean  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_4$  (caso  $m = 1$ ), a que sean  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  (caso  $m = 3$ ). Por lo tanto, llamaremos equilibrios  $\mathbf{3B\pm}$  a estos estados  $\mathbf{3(4-1)\pm}$  y  $\mathbf{3(4-3)\pm}$ . Para los equilibrios en línea  $\mathbf{3(4-2)\pm}$  ocurre lo mismo que para  $\mathbf{3(2-1)\pm}$ . De este modo, el equilibrio  $\mathbf{3(4-2)+}$  es equivalente al equilibrio  $\mathbf{3(4-2)-}$ , y en lo que sigue nos

referiremos a ellos como equilibrio en línea **3A**.

Resumiendo, para  $n = 2$  bolas se tiene un único equilibrio en línea llamado **3**; para  $n = 3$  se consideran dos equilibrios en línea **3+** y **3-**; y para  $n = 4$  existe un equilibrio en línea con dos bolas coincidentes llamado **3A**, y otros dos equilibrios en línea con tres bolas coincidentes, llamados **3B+** y **3B-**.

Estudiamos las condiciones de existencia de estos equilibrios. Hay que observar que existen varias condiciones que gobiernan la existencia de las diferentes soluciones estacionarias. En el caso de los equilibrios de balance **1** dados por (3.6), su segunda ecuación implica que la razón  $\delta/\mu$  está limitada. Esto es, debido a que  $|\cos \phi_i| \leq 1$ , el módulo del sumatorio de los cosenos  $\cos \phi_i$  tiene que ser siempre menor o igual que  $n$ . Esto implica que el módulo de la razón  $\delta/\mu$  no puede ser mayor que  $n$  para que el equilibrio de balance pueda existir. Por tanto se tiene que  $\frac{\delta}{\mu} \leq n$ , lo que implica que una condición necesaria para que el equilibrio de balance exista es

$$\mu \geq \mu_c := \frac{\delta}{n}. \quad (3.14)$$

Físicamente, esto quiere decir que, para conseguir el equilibrio del sistema, la masa de las bolas tiene que ser lo suficientemente grande como para contrapesar la excentricidad  $\delta$ . Cuando se cumple la igualdad en (3.14), el equilibrio de balance **1** se convierte en uno de los equilibrios coincidentes **2±** con  $\phi_i = \pi, \forall i$ . La variación del parámetro  $\mu$  a través de este valor  $\delta/n$  se corresponde con una bifurcación pitchfork entre los equilibrios de balance **1** y uno de los coincidentes **2±**; este hecho se verá con más detalle en el Capítulo 4. Hay que tener en cuenta que la expresión (3.14) solamente es válida para el sistema ADB con dos bolas, y para el equilibrio de balance en el ADB con  $n$  bolas en el que las  $n - 2$  bolas libres están situadas en el lado opuesto al centro de masa  $W$  y en línea con el centro de rotación  $C$  ( $\phi_i = \pi$  for  $i = 3, \dots, n$ ). En otro caso, el equilibrio de balance pudiera no existir incluso si se satisface (3.14).

Los dos equilibrios coincidentes **2±** existirán siempre que el módulo del argumento del arcoseno de la expresión de  $\phi_1$  en (3.9) sea menor que 1. De este modo, es necesario que se satisfaga

$$\sqrt{(2\Omega\zeta\delta)^2 + (K\delta)^2} \geq 2n\mu\zeta\Omega. \quad (3.15)$$

Reescribiendo esta expresión, se tiene

$$K^2 \geq (2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{n\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right) = (2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{\mu}{\mu_c} \right)^2 - 1 \right). \quad (3.16)$$

Cuando  $\mu < \mu_c$  el lado derecho de la inecuación (3.16) es siempre negativo, por lo que los equilibrios coincidentes **2±** existen para cualquier valor del resto de los parámetros. Si  $\mu > \mu_c$  tendríamos que hacer un estudio más detallado para saber cuando los equilibrios **2±** pueden existir. Como ejemplo, tomaremos unos determinados valores de los parámetros  $\mu$ ,  $\delta$  y  $\zeta$ , y del número de bolas  $n$  en la inecuación (3.16) para saber en qué rango de valores de  $\Omega$  se satisficaría la condición de existencia de los equilibrios **2±**. Si se fija  $\mu = 0,05$ ,  $\delta = 0,01$ ,  $\zeta = 0,01$  y  $n = 3$ , se puede ver en la Figura 3.1 que la inecuación (3.16) se cumple para

un rango de valores de  $\Omega$ : para  $\Omega < \Omega_{c1}$  y  $\Omega > \Omega_{c2}$ . Sin embargo, existe un rango intermedio de valores de  $\Omega$  para los que el discriminante es negativo ( $\Omega_{c1} < \Omega < \Omega_{c2}$ ). Por lo tanto, los dos equilibrios coincidentes  $\mathbf{2}\pm$  existen para valores pequeños de  $\Omega$ , desapareciendo cuando se alcanza  $\Omega_{c1}$ , y reapareciendo de nuevo para valores mayores a  $\Omega_{c2}$ . Esta situación es típica de bifurcaciones de tipo silla-nodo, tal y como se confirmará en el siguiente capítulo. Los valores de  $\Omega_{c1,c2}$  dependen de los parámetros  $\delta, \zeta$  y  $\mu$ , y del número de bolas  $n$  de una manera no trivial. En este ejemplo  $\Omega_{c1} = 0,8114$  y  $\Omega_{c2} = 1,0717$ .

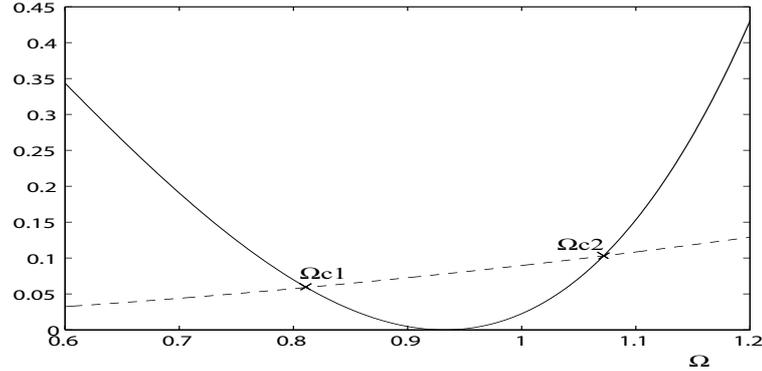


Figura 3.1: Representación de la función  $K^2$  (línea continua) y de la expresión  $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{n\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$  (línea discontinua) para valores de los parámetros fijados en  $\mu = 0,05$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\zeta = 0,01$  y para  $n = 3$  bolas. Los puntos de intersección de las dos curvas ( $\Omega_{c1} = 0,8114$  y  $\Omega_{c2} = 1,0717$ ) definen el rango de  $\Omega$  en el que  $K^2$  es menor que  $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{n\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$ , esto es, cuando los equilibrios coincidentes  $\mathbf{2}\pm$  no existen.

Consideremos ahora los equilibrios en línea  $\mathbf{3}(\mathbf{n-m})\pm$ . Estos existirán sólo si el módulo del argumento del arcocoseno de la expresión de  $\phi_1$  en (3.10) es menor que 1. Esto es,

$$\sqrt{(2\Omega\zeta\delta)^2 + (K\delta)^2} \geq 2(2m - n)\mu\zeta\Omega. \quad (3.17)$$

Removiendo esta expresión, se tiene

$$K^2 > (2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{(2m - n)\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right). \quad (3.18)$$

Para el ADB con dos bolas ( $n = 2$ ), el único posible valor de  $m$  es 1, y en este caso la inecuación (3.18) se satisface siempre. Por tanto, cuando  $n = 2$  el equilibrio en línea  $\mathbf{3}$  existe para todos los valores posibles de los parámetros. En el caso del sistema ADB con más de dos masas rectificadoras ( $n > 2$ ), cuando  $\mu < \frac{\delta}{2m-n}$  los equilibrios  $\mathbf{3}(\mathbf{n-m})\pm$  siempre existen, debido a que el lado derecho de (3.18) es negativo, y por tanto se satisface dicha inecuación. Si  $\mu > \frac{\delta}{2m-n}$  necesitamos un análisis más detallado para saber cuando existen los equilibrios  $\mathbf{3}(\mathbf{n-m})\pm$ . Veremos un ejemplo similar al que hemos visto para los equilibrios  $\mathbf{2}\pm$ . Ahora sólo dos de las bolas serán coincidentes ( $m = 2$ ), y la tercera estará en línea. De este modo, se puede ver en la Figura 3.2 que al igual que para los equilibrios  $\mathbf{2}\pm$  también existe una región de valores medios de  $\Omega$  para los que la inecuación (3.18) no se satisface. Esta región está delimitada por  $\Omega_{c1}$  y  $\Omega_{c2}$ , que en este ejemplo toman los valores 0,8909 y 0,9761 respectivamente. En definitiva, los equilibrios  $\mathbf{3}(\mathbf{n-m})\pm$  existirán para  $\Omega < \Omega_{c1}$  y  $\Omega > \Omega_{c2}$ , donde  $\Omega_{c1}$  y  $\Omega_{c2}$  dependen de los parámetros del sistema de forma no trivial.

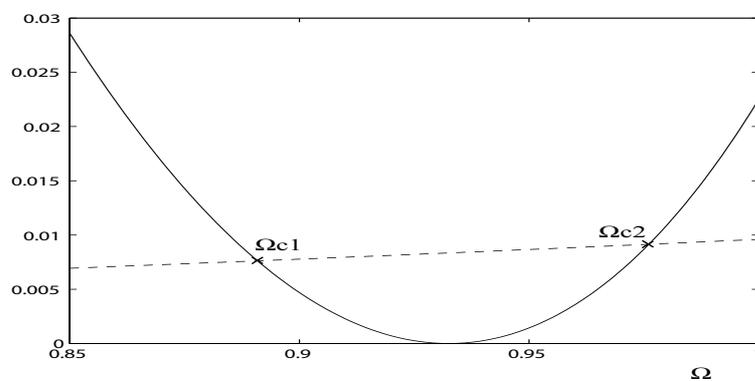


Figura 3.2: Representación de la función  $K^2$  (línea continua) y de la expresión  $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{(2m-n)\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$  (línea discontinua) para los valores de los parámetros  $\mu = 0,05$ ,  $\delta = 0,01$  y  $\zeta = 0,01$ , para  $n = 3$  bolas con  $m = 2$  bolas coincidentes. Los puntos de intersección  $\Omega_{c1} = 0,8909$  y  $\Omega_{c2} = 0,9761$  definen el rango de valores para los que  $K^2$  es menor que  $(2\Omega\zeta)^2 \left( \left( \frac{(2m-n)\mu}{\delta} \right)^2 - 1 \right)$ , esto es, cuando los equilibrios en línea  $\mathbf{3(n-m)}_{\pm}$  no existen.

## Capítulo 4

# Análisis de bifurcación del sistema ADB

En este capítulo llevamos a cabo un análisis de bifurcación del sistema ADB con dos, tres, y cuatro masas rectificadoras (es decir, para  $n = 2$ ,  $n = 3$ , y  $n = 4$ ). Para ello se ha utilizado MATCONT, el paquete de continuación numérica desarrollado en Matlab. En [9] se hizo un estudio detallado del sistema ADB con dos bolas. En este trabajo se utilizó AUTO, por lo que los resultados obtenidos en nuestro proyecto para el caso de dos bolas nos serán útiles para comprobar que MATCONT calcula correctamente diagramas de bifurcación, y que las ecuaciones del sistema están escritas correctamente. Los resultados para los casos de tres y cuatro bolas serán completamente nuevos. Además, trataremos de hallar cualquier similitud entre los tres casos estudiados, y recalcar cualquier mejora o efectos negativos que se dieran en los casos de tres y cuatro bolas comparados con el caso de dos bolas.

El principal objeto de interés del análisis de bifurcación llevado a cabo en este capítulo es identificar la región de estabilidad del estado de balance en diferentes planos de parámetros, es decir, hallar bajo que conjuntos de parámetros es posible conseguir el balance dinámico del sistema. También se generarán curvas de bifurcaciones en planos de dos parámetros. Para el sistema estudiado, identificaremos tres tipos de bifurcaciones:

- *Bifurcaciones silla-nodo*, que se caracterizan por el hecho de que a un lado de la bifurcación existen dos equilibrios, mientras que en el otro lado de la bifurcación estos dos equilibrios desaparecen. El instante de la bifurcación puede ser considerado como el instante en el que los dos equilibrios chocan. Este tipo de bifurcaciones pueden darse en cualquier sistema, y de hecho es muy típico que ocurra cuando un parámetro varía.
- *Bifurcaciones de pitchfork*, las cuales ocurren cuando el sistema tiene un equilibrio que existe para todos los valores de los parámetros, y nunca puede ser destruido; cuando este equilibrio colisiona con otro, los dos equilibrios cambian sus propiedades de estabilidad, pero continúan existiendo ambos antes y después de la bifurcación. Esta bifurcación existe sólo en los casos en los que hay simetría reflexional en el sistema.
- *Bifurcaciones de Hopf*, las cuales se caracterizan por la aparición de órbitas periódicas. El equilibrio existe a ambos lados de la bifurcación, pero puede cambiar su estabilidad. La amplitud de la órbita periódica es 0 en el momento de la bifurcación y crece cuando

el parámetro incrementa su valor. La frecuencia de la órbita periódica, en el instante de su aparición, es igual al valor absoluto de la parte imaginaria del autovalor del punto de equilibrio.

Las bifurcaciones estáticas (las de tipo silla-nodo y de pitchfork) aparecen cuando un autovalor real pasa a través del valor cero, y las bifurcaciones oscilatorias (las de tipo Hopf) ocurren cuando un par de autovalores cruzan el eje imaginario; ver, por ejemplo, Ref.[22, 17] para más información acerca de la teoría de bifurcaciones.

Explicemos la nomenclatura usada en los diagramas de bifurcación representados a lo largo de este capítulo. Las bifurcaciones de tipo silla-nodo se indican con las siglas SN, las bifurcaciones de pitchfork con PF, y las bifurcaciones de Hopf con H. Las soluciones estacionarias que están envueltas en la bifurcación se especifican con números. Específicamente, en los diagramas de bifurcación de dos parámetros, líneas discontinuas se corresponden con curvas de bifurcación de los equilibrios en línea  $\mathbf{3(n-m)}_{\pm}$ , y líneas continuas con curvas de los equilibrios de balance y coincidentes  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2}_{\pm}$ . Además, se identifican las regiones en las que las soluciones estacionarias son estables. De este modo, las zonas sombreadas con gris oscuro se corresponden con regiones de estabilidad del equilibrio de balance, las zonas sombreadas con gris claro se corresponden con regiones de estabilidad de los equilibrios coincidentes, y las zonas no sombreadas se corresponden con regiones en las que no hay ninguna solución estacionaria estable. Como veremos en las próximas secciones, los equilibrios en línea son siempre inestables.

#### 4.1. Diagramas de bifurcación para el ADB con dos bolas

En esta sección se obtienen diagramas de bifurcación de dos parámetros para el sistema ADB con  $n = 2$  bolas, con los cuales seremos capaces de ver cómo afecta la variación de los parámetros en la estabilidad de las soluciones estacionarias. En el caso del ADB con dos bolas, hay un único equilibrio de balance, el cual es la solución de (3.6) sustituyendo  $n = 2$ . Lo llamaremos equilibrio de balance  $\mathbf{1}$ . Para los equilibrios coincidentes existen dos soluciones  $\mathbf{2}_{\pm}$ , cuyo signo se corresponde con el signo del arcocoseno en la expresión de  $\phi_1$  en (3.9). Por último, como se dijo en el Capítulo 3, para el caso con dos bolas hay un solo equilibrio en línea que se llamará  $\mathbf{3}$ .

La Figura 4.1 muestra los resultados de un análisis de bifurcación en el plano de parámetros  $(\Omega, \mu)$ , considerando los otros parámetros fijos en  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Físicamente esto corresponde a una pequeña excentricidad y a una amortiguación pequeña en la suspensión del rotor y en las bolas. En el panel (b) se representa un zoom del panel (a) para valores pequeños de  $\mu$ , y en este, las letras  $s$  y  $u$  indican que las soluciones estacionarias son estables o inestables respectivamente. Se puede observar que para  $\mu < \mu_c := \delta/n = 0,01/2 = 0,005$ , la única solución estacionaria estable es el equilibrio  $\mathbf{2-}$ . Este es inestable dentro de la región definida por la curva de bifurcaciones de Hopf H2-. El equilibrio coincidente  $\mathbf{2+}$  existe, pero siempre es inestable para  $\mu < \mu_c$ ; ver Fig.4.1(b). El mismo hecho ocurre para el equilibrio en línea  $\mathbf{3}$ , el cual existe siempre cuando  $\mu < \mu_c$  pero es inestable. Como se dijo en el Capítulo 3, cuando el parámetro que define la masa de las bolas  $\mu$  es más pequeño que  $\mu_c$ , la masa equilibradora no es lo suficientemente grande como para contrarrestar el desequilibrio producido por la excentricidad del rotor. Por tanto, para  $\mu < \mu_c$ , el equilibrio de balance

no existe.

Para  $\mu > \mu_c$  el equilibrio de balance **1** siempre existe. La figura 4.1(b) muestra que para valores pequeños de  $\Omega$  el equilibrio coincidente **2-** es estable mientras que el equilibrio **2+** es inestable. Estas soluciones estacionarias coincidentes nacen en bifurcaciones de tipo silla-nodo en la frontera izquierda de la región delimitada por las curvas SN2+-. Dentro de esta región los equilibrios **2±** no existen, y las únicas soluciones estacionarias que existen son el equilibrio de balance **1** y el equilibrio en línea **3**, los cuales son inestables. Se puede observar que las fronteras izquierda y derecha de la región delimitada por las curvas SN2+- se corresponden respectivamente con los puntos críticos  $\Omega_{c1}$  y  $\Omega_{c2}$  identificados al final del Capítulo 3. Para valores crecientes de  $\Omega$ , el equilibrio coincidente inestable **2-** experimenta una bifurcación de Hopf en la curva H2-. Por último, para valores grandes de  $\Omega$  el estado de balance **1** se estabiliza en una bifurcación de Hopf H1. Observar que, para valores suficientemente elevados de  $\mu$ , aparecen también un par de bifurcaciones de Hopf H1 que estabilizan el equilibrio de balance **1** alrededor de la *velocidad crítica de rotación*  $\Omega = 1$ . El equilibrio en línea **3** para  $\mu > \mu_c$  tiene las mismas propiedades que para  $\mu < \mu_c$ , es decir, siempre existe pero es inestable.

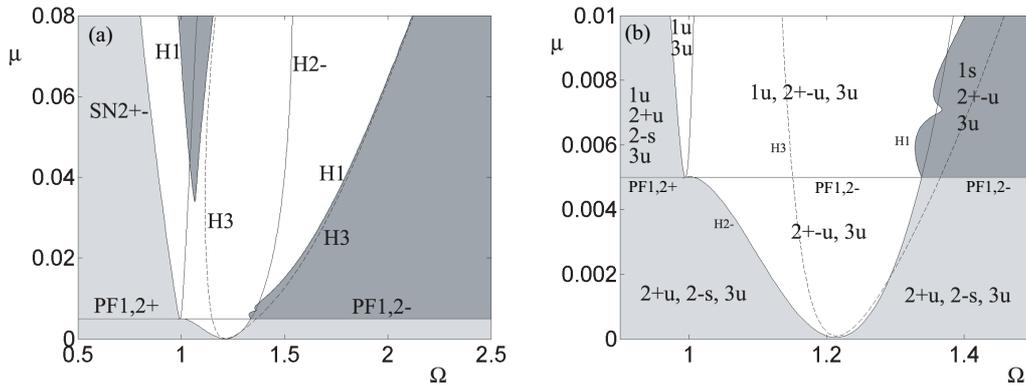


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación del sistema ADB con dos bolas en el plano  $(\Omega, \mu)$  para  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas discontinuas se corresponden con las curvas de bifurcación del equilibrio en línea **3**, y las líneas continuas con los equilibrios **1** y **2±**. El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance **1**, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio coincidente **2-**. El panel (b) muestra un zoom de (a) para valores pequeños de  $\mu$ . Se indica en cada región cuales de los equilibrios **1**, **2±** o **3** existen, y las letras *s* y *u* identifican si son estables o inestables respectivamente.

El panel (b) de Fig.4.1 muestra que la curva de las bifurcaciones de Hopf H2- termina en un punto de bifurcación pitchfork-Hopf de codimensión dos, el cual es dado precisamente por

$$(\mu, \Omega) = (\mu_c, \Omega_c) := (\delta/2, 1/\sqrt{1+2\mu}) = (0,005, 0,9950372). \quad (4.1)$$

El punto  $\Omega_c$  también se corresponde con el pico de la región en forma de cua delimitada por las curvas SN2+-, es decir, define el punto en el que  $\Omega_{c1}$  y  $\Omega_{c2}$  toman el mismo valor.

Además,  $\Omega_c$  se define por  $K = 0$  que es análogo a la velocidad crítica de rotación  $\Omega = 1$  en el caso del rotor sin el mecanismo ADB ( $\mu = 0$ ). Para valores crecientes de  $\Omega$ , la curva H2- se encuentra con la curva PF1,2- de nuevo, en otro punto de bifurcación pitchfork-Hopf de codimensión dos, dado por  $(\mu, \Omega) = (\mu_c, 1,338096)$ ; ver Fig.4.1(b).

Como ya se ha comentado, para los valores de los parámetros considerados, el equilibrio en línea **3** siempre es inestable, y por tanto de poco interés físico. Este equilibrio experimenta bifurcaciones de Hopf que aparecen en una región intermedia del plano  $(\Omega, \mu)$ , como se muestra en la Fig.4.1 con líneas discontinuas.

Consideremos ahora los diagramas de estabilidad representados en la Fig.4.2 en los que variamos los otros parámetros adimensionales  $\delta$ ,  $\zeta$ , y  $\beta$ . De aquí en adelante asumiremos que  $\mu \geq \mu_c$  por lo que la condición necesaria para conseguir el balance dinámico del sistema se cumple. Esta condición implica que  $\delta \leq n\mu$ , debido a que hemos definido la masa crítica de las bolas como  $\mu_c := \delta/n$ . Por tanto, solo consideraremos el rango de valores  $0 \leq \delta \leq n\mu = 2 \cdot 0,05 = 0,1$ . Las Figuras 4.2(a), (b) y (c) muestran la dependencia de los límites de las regiones de estabilidad bajo variación de los parámetros adimensionales que controlan la excentricidad  $\delta$ , la amortiguación del sistema de suspensión del rotor  $\zeta$ , y la amortiguación sobre las bolas  $\beta$ , mientras que la velocidad de rotación  $\Omega$  crece. En cada caso, el inicio de la inestabilidad del equilibrio coincidente **2-** aparece en una bifurcación de tipo silla-nodo SN2+-, y la estabilidad del equilibrio de balance **1** en una bifurcación de Hopf H1. Se observan las mismas particularidades que las mostradas en la Fig.4.1 para el plano  $(\Omega, \mu)$ , es decir, que el equilibrio coincidente **2-** es estable para valores suficientemente pequeños de  $\Omega$ , mientras que el equilibrio de balance **1** se hace estable para valores suficientemente grandes de la velocidad de rotación. Entre estas dos zonas, hay una región de inestabilidad donde ningún equilibrio es estable. Significativamente, el inicio de la estabilidad del equilibrio de balance **1** es sensible en cada uno de los diagramas representados, pero sin embargo es siempre estable cuando  $\Omega > 2,5$ . Además observamos en las Figs.4.2(a) y (b) que, los detalles de lo que ocurre para valores intermedios de  $\Omega$  (aproximadamente entre 1.0 y 2.0) puede ser bastante complejo. En resumen, como conclusión podemos decir que para  $\mu \geq \mu_c$  (lo que significa  $\delta \leq n\mu = 2\mu$ ), el equilibrio de balance **1** es estable para valores suficientemente elevados de  $\Omega$ , independientemente de los valores de  $\zeta$  y de  $\beta$ . Cuando la velocidad de rotación del rotor es pequeña, el equilibrio que es estable es el coincidente **2-**.

## 4.2. Diagramas de bifurcación para el ADB con tres bolas

En esta sección obtenemos diagramas de bifurcación de dos parámetros de forma similar a como los obtuvimos en la pasada sección, pero ahora se analizará el caso de tres bolas. Se comentarán todos los diagramas, y recalcaremos las diferencias con respecto a los diagramas del sistema ADB con dos bolas. Ahora para  $n = 3$  bolas, hay infinitas soluciones estacionarias de balance debido a que las ecuaciones de balance (3.6) tienen un grado de libertad. Para llevar a cabo el análisis de bifurcación del sistema, tan solo consideraremos un equilibrio de balance en el que la tercera bola está fija en la posición  $\phi_3 = \pi$ . Este equilibrio de balance será identificado como equilibrio **1**. Para las soluciones estacionarias coincidentes existen dos equilibrios **2±**, cuyo signo se corresponde con el signo del arcocoseno en (3.9). Para los equilibrios en línea hay dos posibilidades para el número de bolas coincidentes,

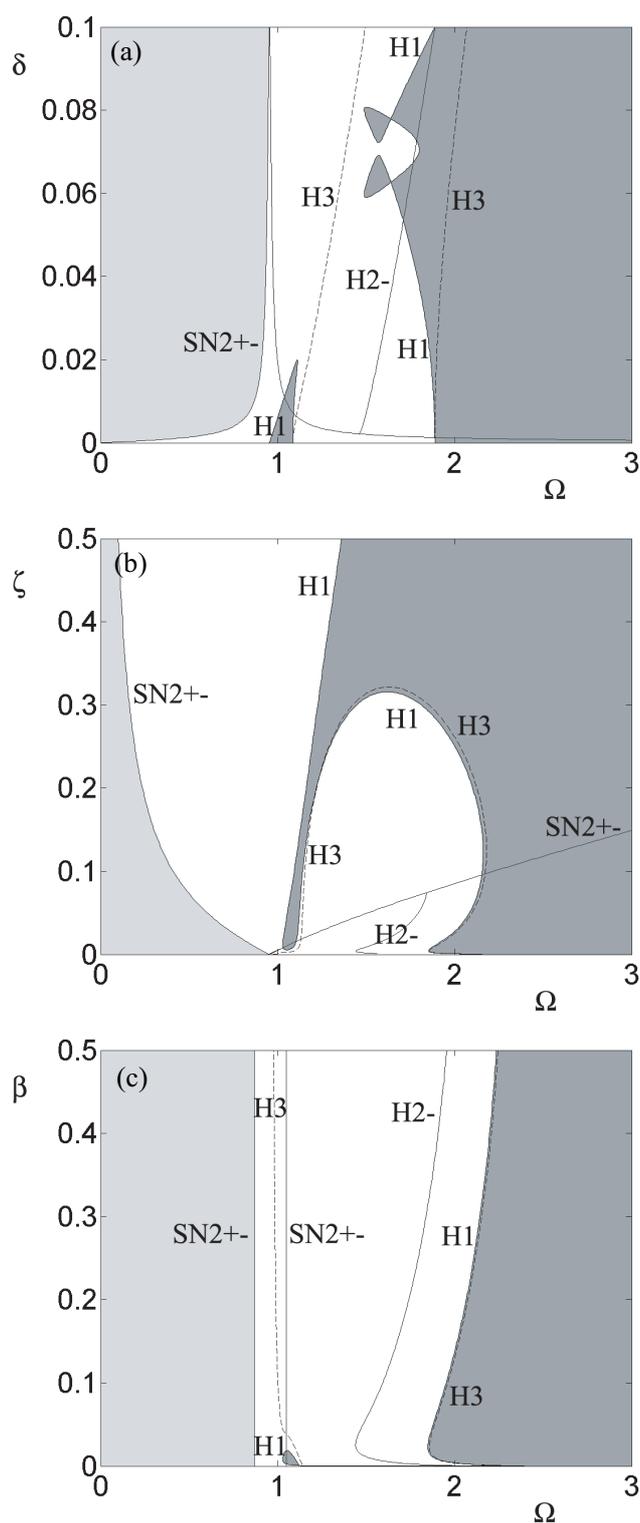


Figura 4.2: Diagramas de bifurcación del sistema ADB con dos bolas en planos de dos parámetros. Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas discontinúas se corresponden con las curvas de bifurcación del equilibrio en línea 3, y las líneas continuas con los equilibrios 1 y 2 $\pm$ . El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance 1, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio coincidente 2 $-$ . En cada panel los parámetros fijados son  $\mu = 0,05$ , y  $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . Los parámetros que varían son  $\delta$  y  $\Omega$  en (a),  $\zeta$  y  $\Omega$  en (b), y  $\beta$  y  $\Omega$  en (c).

$m = 1$  y  $m = 2$ . Sin embargo, como fue explicado en el Capítulo 3, estos casos son equivalentes porque estamos asumiendo que todas las bolas son idénticas. Por tanto, tendremos dos equilibrios en línea, y nos referiremos a ellos como equilibrios  $\mathbf{3}\pm$ , con el signo según qué signo se tome para el arcocoseno en (3.10).

La Figura 4.3 muestra un diagrama de bifurcación en el plano  $(\Omega, \mu)$ , con el resto de parámetros fijados en  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Comparando el panel (b) de esta figura con Fig.4.1(b), podemos observar que ahora la bifurcación de pitchfork PF1,2+ está posicionada en un valor de  $\mu$  más bajo. Efectivamente, esta curva PF1,2+ aparece en  $\mu = \mu_c$ , y este caso para tres bolas  $\mu_c := \delta/n = 0,01/3 = 0,003333$ , mientras que en el caso anterior para dos bolas teníamos  $\mu_c := \delta/n = 0,01/2 = 0,005$ . Igual que para  $n = 2$  bolas, cuando  $\mu < \mu_c$  el equilibrio  $\mathbf{1}$  no existe, y cuando  $\mu > \mu_c$  siempre existe. Ahora para  $n = 3$  bolas,  $\mathbf{1}$  alcanza la estabilidad sólo para altos valores de  $\Omega$ , es decir, a la derecha de la última curva de bifurcación de Hopf H1. Observar la diferencia con respecto a  $n = 2$  bolas. Ahora no existe una segunda región de estabilidad definida por una curva de bifurcación de Hopf para valores intermedios de  $\Omega$ . En vez de eso, hay un intersección entre dos curvas de Hopf H1. Estas curvas definen una única región de estabilidad del equilibrio  $\mathbf{1}$ . Los equilibrios coincidentes  $\mathbf{2}\pm$  nacen de nuevo en bifurcaciones de tipo silla-nodo SN2+-. Estos equilibrios tienen las mismas características que en el ADB con dos bolas. Para  $\mu < \mu_c$ , el equilibrio coincidente  $\mathbf{2}$ - siempre es estable excepto en el interior de la región definida por H2-; para  $\mu > \mu_c$  la estabilidad de  $\mathbf{2}$ - aparece para valores de  $\Omega$  pequeños, a la izquierda de la región en forma de cua definida por las curvas SN2+-. En el interior de esta región, ambos estados  $\mathbf{2}\pm$  dejan de existir. La estabilidad del estado  $\mathbf{2}+$  nunca se alcanza.

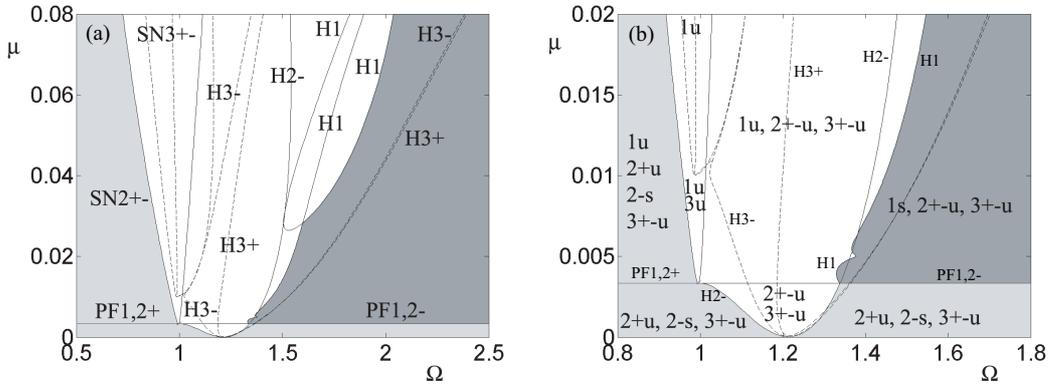


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación del sistema ADB con tres bolas en el plano  $(\Omega, \mu)$  para  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas discontinuas se corresponden con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea  $\mathbf{3}\pm$ , y las líneas continuas con los equilibrios  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2}\pm$ . El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance  $\mathbf{1}$ , y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio coincidente  $\mathbf{2}$ -. El panel (b) muestra un zoom de (a) para valores pequeños de  $\mu$ . Se indica en cada región cuales de los equilibrios  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{2}\pm$  o  $\mathbf{3}\pm$  existen, y las letras  $s$  y  $u$  identifican si son estables o inestables respectivamente.

La Figura 4.3(b) muestra que, al igual que en la pasada sección, la curva de bifurcación

de Hopf H2- termina en un punto pitchfork-Hopf de codimensión dos. Este punto también coincide con el pico de la región en forma de cua encerrada por las curvas SN2+-, es decir, en el punto en el que  $\Omega_{c1}$  y  $\Omega_{c2}$  coinciden. Por tanto, podemos obtener este punto analíticamente si la inecuación (3.16) se transforma en una ecuación en función de  $\Omega$ . Utilizando  $\mu = \mu_c$  en esta ecuación, se muestra que el primer punto de bifurcación pitchfork-Hopf de codimensión dos se define por  $K = 0$ . Por tanto, tenemos

$$(\mu, \Omega) = (\mu_c, \Omega_c) := (\delta/n, 1/\sqrt{1+n\mu_c}) = (\delta/n, 1/\sqrt{1+\delta}) = (0,0033333, 0,9950372) \quad (4.2)$$

Debemos observar que el valor de  $\Omega_c$  es en este caso el mismo que para  $n = 2$ . Es decir, debido a que  $n\mu_c = \delta$ , la expresión de  $\Omega_c$  no depende del número de bolas  $n$ , por lo que es lo mismo que para el sistema ADB con dos bolas, considerando que tomamos la excentricidad  $\delta = 0,01$  en ambos casos. El segundo punto de bifurcación de codimensión dos pitchfork-Hopf en el que la curva H2- se encuentra con la curva PF1,2- de nuevo es  $(\mu, \Omega) = (\mu_c, 1,338096)$ , es decir, el mismo valor de  $\Omega$  que para  $n = 2$ ; ver Fig.4.3(b).

Las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea  $\mathbf{3}\pm$  son las que presentan más diferencias con respecto a  $n = 2$ . Ahora existen dos curvas de bifurcación silla-nodo SN3+- en las que nacen. Dentro de la región definida por estas curvas, los equilibrios en línea  $\mathbf{3}\pm$  no existen. Podemos ver en la Fig.4.3(b) que estas curvas SN3+- colisionan en  $\mu = 0,01$ , y que para  $\mu < 0,01$  ambos equilibrios en línea  $\mathbf{3}\pm$  existen siempre. Este hecho coincide con las condiciones de existencia para los equilibrios  $\mathbf{3}\pm$  halladas al final del Capítulo 3. Efectivamente, allí vimos que para  $\mu < \delta/(2m - n)$  los equilibrios en línea  $\mathbf{3}\pm$  siempre existen. Imponiendo  $\delta = 0,01$ ,  $m = 2$ , y  $n = 3$  para este caso, tenemos que  $\delta/(2m - n) = 0,01$ , el cual coincide con el valor de  $\mu$  que se obtiene con el análisis de bifurcación numérica. Otra curva de bifurcaciones de Hopf H3- termina en el pico de la región con forma de cua definida por las curvas SN3+-. Este punto está definido por  $K = 0$ , y se puede obtener de la inecuación 3.18 imponiendo  $\mu = \delta/(2m - n)$ . Las coordenadas de este punto son

$$(\mu, \Omega) = (\delta/(2m - n), 1/\sqrt{1+n\mu}) = (0,01, 0,9853293). \quad (4.3)$$

La última cosa que mencionamos acerca de la Fig.4.3 es la existencia de otras dos curvas de bifurcaciones de Hopf H3+ y H3-. Estas cruzan por el medio de la región de parámetros, y se aproximan mucho la una a la otra cuando  $\Omega$  aumenta.

Consideremos otros análisis de bifurcación para el ADB con tres bolas. En la Figura 4.4 podemos ver los diagramas de bifurcación de dos parámetros en el plano  $(\Omega, \delta)$  en el panel (a), en el plano  $(\Omega, \zeta)$  en el panel (b), y en el plano  $(\Omega, \beta)$  en el panel (c). Los parámetros que se mantienen constantes están fijados en  $\mu = 0,05$ , y  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . En la Fig.4.4(a), se representa el rango de valores de  $\delta$  en el cual el equilibrio de balance existe, es decir  $0 \leq \delta \leq n\mu = 0,15$ . Efectivamente, para  $\delta > n\mu$  la excentricidad es demasiado grande, y las masas de las bolas no son lo suficientemente grandes como para conseguir el balance dinámico del sistema ( $\mu < \mu_c$ ). Podemos ver en este panel (a) que el inicio de la estabilidad de los equilibrios  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2-}$  son similares que en el ADB con dos bolas. El equilibrio coincidente  $\mathbf{2-}$  es estable cuando  $\Omega$  se encuentra a la izquierda de la frontera situada más a la izquierda de la región delimitada por SN2+-. Para valores más elevados de  $\Omega$ , esto es, a la derecha de la curva de bifurcación H1 situada más a la derecha, el equilibrio de balance es estable. La estabilidad de estos equilibrios son poco sensibles a  $\delta$ , excepto para valores bajos de  $\delta$ , en los que  $\mathbf{2-}$  pierde su estabilidad. El diagrama de bifurcación en el plano  $(\Omega, \zeta)$  que se

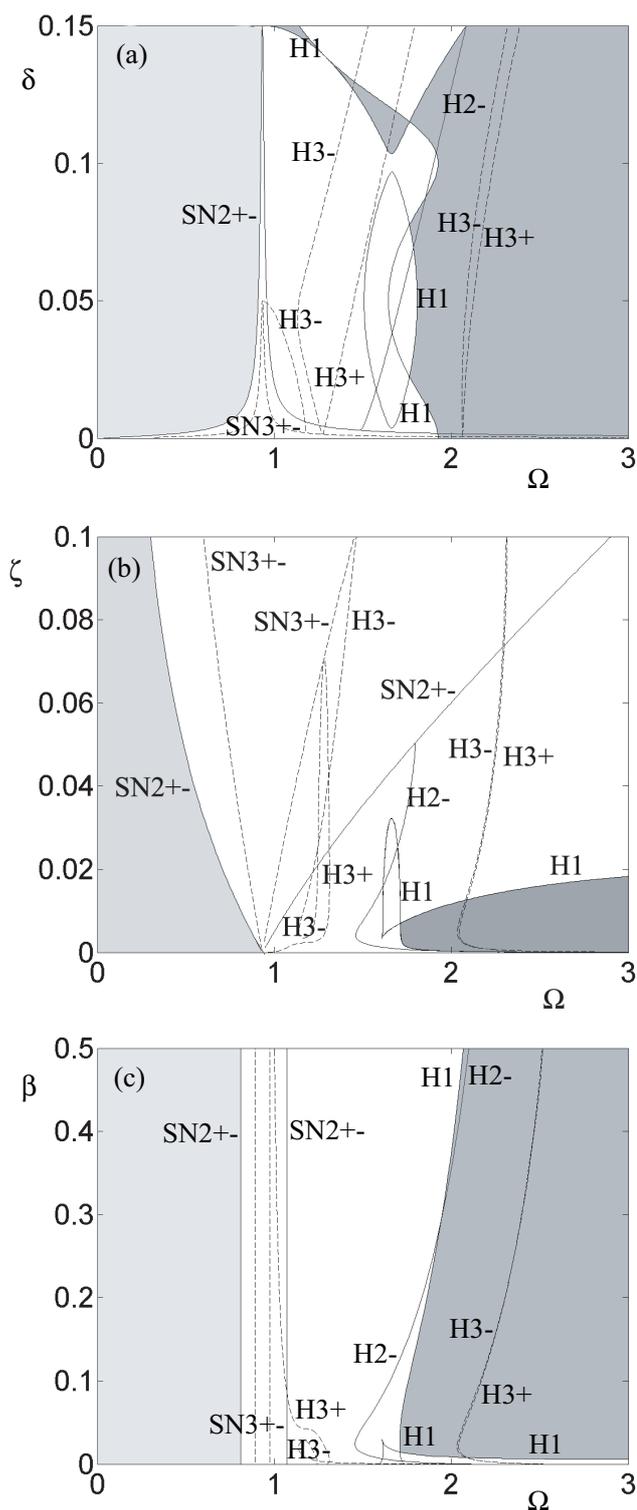


Figura 4.4: Diagramas de bifurcación del sistema ADB con tres bolas en planos de dos parámetros. Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas discontinuas se corresponden con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea  $3\pm$ , y las líneas continuas con los equilibrios  $1$  y  $2\pm$ . El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance  $1$ , y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio  $2-$ . En cada panel los parámetros fijados son  $\mu = 0,05$ , y  $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . Los parámetros que varían son  $\delta$  y  $\Omega$  en (a),  $\zeta$  y  $\Omega$  en (b), y  $\beta$  y  $\Omega$  en (c).

muestra en la Fig.4.4(b), presenta una gran diferencia con respecto al sistema ADB con dos bolas. En la Fig.4.2(b) para el caso de dos bolas, la estabilidad del equilibrio de balance era aproximadamente insensible a  $\zeta$  cuando  $\Omega > 2,5$ . Esto es, el equilibrio **1** era estable para todo el rango de valores de  $\zeta$  cuando  $\Omega > 2,5$ . Sin embargo, la Fig.4.4(b) muestra que en el sistema ADB con tres bolas, el equilibrio **1** es estable para  $\Omega$  grande, pero sólo para pequeños valores de  $\zeta$ . Por ejemplo, podemos ver que para  $\Omega = 3$ , el equilibrio de balance es estable sólo cuando  $\zeta < 0,02$ . Por tanto, una conclusión importante que podemos extraer es que el sistema ADB con tres bolas no es capaz de contrarrestar el desequilibrio del rotor cuando la amortiguación sistema de suspensión del rotor  $\zeta$  es demasiado elevada. La Fig.4.4(c) muestra que la estabilidad de **1** y de **2-** en el plano  $(\Omega, \beta)$  tiene el mismo comportamiento que en el plano  $(\Omega, \delta)$  para el ADB con dos bolas (ver Fig. 4.2(c)). La única diferencia es que para baja amortiguación sobre las bolas  $\beta$ , el equilibrio **1** se vuelve inestable.

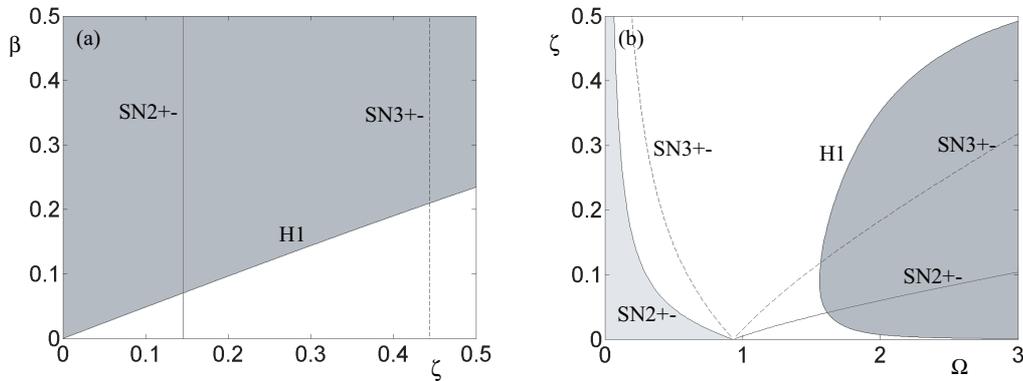


Figura 4.5: Diagramas de bifurcación en planos de dos parámetros para el sistema ADB con tres bolas. El panel (a) muestra un diagrama en el plano  $(\zeta, \beta)$ , con  $\Omega = 4$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . El panel (b) muestra un diagrama en el plano  $(\Omega, \zeta)$ , con  $\beta = 0,25$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas discontinuas se corresponden con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea **3±**, y las líneas continuas con los equilibrios **1** y **2±**. El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance **1**, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio **2-**.

Estudiemos más profundamente la pérdida de estabilidad del equilibrio de balance **1** para el caso de tres bolas que acabamos de ver en el diagrama de bifurcación sobre el plano  $(\Omega, \zeta)$  (Fig.4.4(b)). Se observó que el rango de valores de  $\zeta$  en el que la solución estacionaria de balance es estable era muy pequeño. En la Figura 4.5 analizamos cómo el parámetro  $\beta$  afecta en la estabilidad de **1**. El panel (a) muestra un diagrama de bifurcación en el plano  $(\zeta, \beta)$ , para  $\Omega = 4$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . Aquí se puede ver que el rango de valores de  $\zeta$  en el que **1** es estable crece linealmente al aumentar  $\beta$ . De esta forma, aproximadamente para  $\beta > 0,25$  el equilibrio de balance **1** resulta ser estable en todo el rango de  $\zeta$  representado  $0 < \zeta < 0,5$ . Al igual que en la Fig.4.4(c), las curvas de silla-nodo SN2+- y SN3+- son verticales. Esto significa que los equilibrios coincidentes **2±**, y los equilibrios en línea **3±** tiene poca sensibilidad a  $\beta$ . De hecho, se puede comprobar que  $\beta$  no aparece en las expresiones analíticas de los equilibrios **2±** y **3±** (ver (3.9), y (3.10), respectivamente). En la Fig.4.4(b) dibujamos otro diagrama de bifurcación en el plano

$(\Omega, \zeta)$ , para una amortiguación sobre las bolas  $\beta = 0,25$ , y para los valores fijos  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . Podemos reafirmar que, para valores de  $\beta$  más altos, la región de estabilidad del equilibrio de balance **1** es mucho mayor (comparar con Fig.4.4(b) en donde  $\beta = 0,01$ ). Ahora, para  $\Omega = 3$ , el equilibrio **1** es estable aproximadamente para  $\zeta < 0,5$ . También podemos ver que, al contrario que para el sistema ADB con dos bolas, para el ADB con tres bolas esta región de estabilidad crece cuando  $\Omega$  incrementa su valor. Por último, podemos concluir que, en aplicaciones prácticas de el ADB con tres bolas, se obtendrán mejores resultados (es decir, el equilibrado se conseguirá con mayor frecuencia) si se toma un valor alto de la amortiguación sobre las bolas. Confirmaremos esto en el Capítulo 5 con la ayuda de la simulación numérica de las ecuaciones de movimiento.

### 4.3. Diagramas de bifurcación para el ADB con cuatro bolas

En esta sección obtenemos algunos diagramas de bifurcación para el sistema ADB con cuatro bolas. Destacaremos las diferencias que se encuentren con respecto a los diagramas de bifurcación para los casos con dos y tres bolas. En el caso del sistema ADB con cuatro bolas, al igual que para el ADB con tres bolas, existen infinitos equilibrios de balance debido a que hay dos grados de libertad en las condiciones de balance (3.6). Para llevar a cabo el análisis de bifurcación del sistema, tan solo consideraremos un equilibrio de balance en el que la tercera y la cuarta bola están fijas en las posiciones  $\phi_3 = \pi$  y  $\phi_4 = -\pi$ . Lo llamaremos equilibrio **1**. Para las soluciones estacionarias coincidentes, existen dos equilibrios **2 $\pm$** , cuyo signo se corresponde con el signo del arcocoseno en (3.9). Para los equilibrios en línea hay tres posibles valores para el número de bolas coincidentes,  $m = 1$ ,  $m = 2$  y  $m = 3$ . Sin embargo, como se explicó en el Capítulo 3, los casos con  $m = 1$  y  $m = 3$  son equivalentes porque estamos asumiendo que todas las bolas son idénticas. Además, en el caso  $m = 2$ , el equilibrio 3(4-2)+ es físicamente el mismo que el equilibrio 3(4-2)-. Por tanto, se tendrá un equilibrio en línea con dos bolas coincidentes, llamado **3A**, y otros dos equilibrios en línea con tres bolas coincidentes, llamados **3B $\pm$** , cuyo signo se corresponde con el signo del arcocoseno en (3.10).

La Figura 4.6 muestra un diagrama de bifurcación en un plano de dos parámetros para el sistema ADB con cuatro bolas bajo variación de los parámetros adimensionales  $\Omega$  y  $\mu$ , con el resto de los parámetros fijos en  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Para evitar confusión en el diagrama, las curvas de bifurcaciones del equilibrio en línea **3A** se dibujan con líneas a puntos, las curvas de los equilibrios en línea **3B $\pm$**  se dibujan con líneas discontinuas, y las curvas de bifurcación del equilibrio de balance **1** y de los equilibrios coincidentes **2 $\pm$**  con líneas continuas.

Para el sistema ADB con cuatro bolas, la masa crítica de las bolas es menor que para el ADB con dos y tres bolas, si la excentricidad  $\delta$  se fija en un mismo valor en los tres casos. Para el valor de los parámetros seleccionados tenemos  $\mu_c := \delta/n = 0,01/4 = 0,0025$ . De esta forma, se puede ver en la Fig.4.6(b) que para  $\mu < \mu_c = 0,0025$  el equilibrio de balance **1** no existe. Por tanto, para contrarrestar el desequilibrio producido por una excentricidad fija  $\delta$ , el sistema ADB con cuatro bolas necesitaría bolas más pequeñas (es decir, valores más bajos de  $\mu$ ) que el ADB con dos y tres bolas. Desde otro punto de vista, se podría decir que, si tuviéramos bolas con una masa concreta, el ADB con cuatro bolas sería capaz de equilibrar el sistema con una excentricidad  $\delta$  mayor, la cual no podría ser equilibrada por el ADB con dos o tres bolas. Considerando la región de estabilidad del equilibrio de

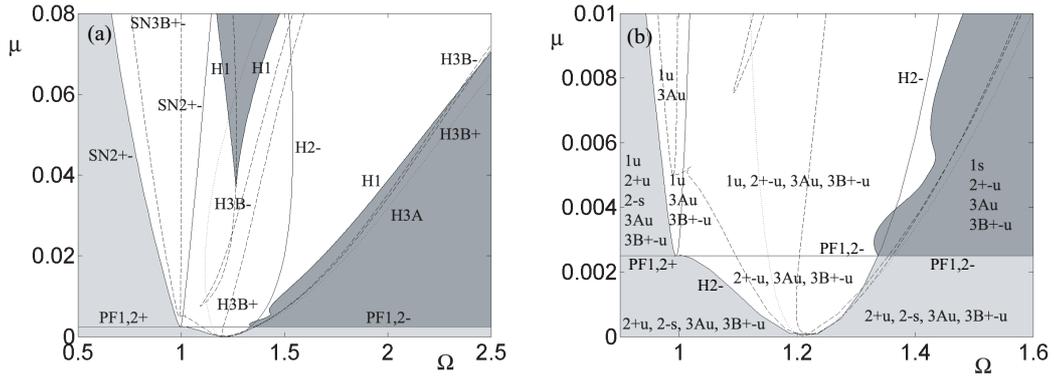


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación del sistema ADB con cuatro bolas en el plano  $(\Omega, \mu)$  para  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ . Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas a puntos se corresponden con las curvas de bifurcación del equilibrio en línea **3A**, las líneas discontinúas con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea **3B±**, y las líneas continuas con los equilibrios **1** y **2±**. El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance **1**, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio **2-**. El panel (b) muestra un zoom de (a) para valores pequeños de  $\mu$ . Se indica en cada región cuales de los equilibrios **1**, **2±**, **3A**, o **3B±** existen, y las letras *s* y *u* identifican si son estables o inestables respectivamente.

balance **1**, podemos observar en la Fig.4.6 que es similar al caso con dos bolas (ver Fig.4.1). Existen dos regiones diferentes, una para altos valores de  $\Omega$  a la derecha de la curva de Hopf H1 situada más a la derecha, y otra región delimitada por la curva H1 que existe para valores intermedios de  $\Omega$ . Sin embargo, como vimos en la Fig.4.3 para  $n = 3$ , esta región de estabilidad para valores intermedios de  $\Omega$  desaparece en el caso del ADB con tres bolas.

Los equilibrios coincidentes **2±** para cuatro bolas tienen curvas de bifurcación similares al ADB con dos y tres bolas, pero con una escala para  $\mu$  diferente. De hecho, si representáramos estas curvas en el plano  $(\Omega, n\mu)$ , las curvas de bifurcación de los equilibrios coincidentes serían las mismas para dos, tres, y cuatro bolas. Esto significa que el análisis de bifurcación del equilibrio coincidente es el mismo para sistemas ADB con distinto número de bolas, si la masa total  $n\mu$  es la misma en todos los sistemas. Efectivamente, un equilibrio coincidente para el ADB con  $n$  bolas consiste en  $n$  bolas coincidiendo en la misma posición; este equilibrio es físicamente equivalente a un equilibrio fuera de balance para un ADB con una bola con una masa igual a  $n\mu$ . Por tanto, todos los sistemas ADB con la misma masa total  $n\mu$  tienen los mismos equilibrios coincidentes.

Como se puede ver en la Fig.4.6, existe de nuevo una curva de Hopf H2- que colisiona con la curva de pitchfork PF1,2- en dos puntos de bifurcación pitchfork-Hopf de codimensión dos. Las coordenadas de  $\Omega$  de estos puntos son las mismas que para dos y tres bolas, aunque ahora para  $n = 4$  tenemos  $\mu_c = \delta/n = 0,0025$ , que es menor que para dos bolas (0.005), y que para tres bolas (0.003333). También se puede observar que la región de estabilidad de los equilibrios **2±** es similar a los casos de dos y tres bolas. El equilibrio **2-** es estable para  $\mu < \mu_c$  y para valores de  $\Omega$  a la izquierda de la región con forma de cua delimitada por las

curvas SN2+-, mientras que el equilibrio **2+** es siempre inestable.

Consideremos ahora las curvas de bifurcaciones de los equilibrios en línea. Las líneas punteadas en Fig.4.6 representan la única curva de Hopf del equilibrio **3A**. Esta curva es similar a la curva de Hopf H3 del equilibrio **3** para dos bolas (ver Fig.4.1). Es más, si representamos  $n\mu$  en lugar de  $\mu$ , estas dos curvas serían las mismas. De hecho, el equilibrio **3A** consiste en dos bolas que coinciden en una posición específica, mientras que las otras dos bolas son coincidentes en el lado opuesto del disco. Debido a que estamos asumiendo bolas idénticas, este equilibrio es físicamente el mismo que un equilibrio en línea para dos bolas con masas mayores (exactamente el doble). Por tanto, podemos decir que el equilibrio en línea **3A** para cuatro bolas es equivalente al equilibrio en línea **3** para dos bolas con doble masa. Las líneas discontinuas en la Fig.4.6 corresponden a las curvas de bifurcación de los equilibrios **3B±**. En estas soluciones estacionarias, hay tres bolas coincidiendo en la misma posición, y la otra bola está colocada en línea con el centro de rotación. Este equilibrio es similar a una solución estacionaria para dos bolas con diferentes masas. Este mismo hecho ocurre en los equilibrios en línea **3±** para tres bolas, que son también similares a un equilibrio en línea para dos bolas diferentes. Por tanto, hay una similitud entre los equilibrios **3B±** para cuatro bolas, y los equilibrios **3±** para tres bolas, como es posible ver comparando la Fig.4.6 para cuatro bolas con la Fig.4.3 para tres bolas. Efectivamente, al igual que para los equilibrios **3±** para tres bolas, para cuatro bolas existen dos curvas de bifurcaciones silla-nodo SN3B+- para los equilibrios **3B±**. Estas curvas se unen en  $\mu = \delta/(2m - n) = 0,01/(2 \cdot 3 - 4) = 0,005$ . Además de estas curvas, existen otras curvas de bifurcaciones de Hopf H3B+ y H3B- en medio del plano  $(\Omega, \mu)$ . Una de las curvas H3B- termina en el pico de la región en forma de cua delimitada por las curvas SN3B+-, en un valor de  $\Omega$  definido por  $K = 0$ . Específicamente tenemos

$$(\mu, \Omega) = \left( \frac{\delta}{2m - n}, 1/\sqrt{1 + n\mu} \right) = (0,005, 0,9901). \quad (4.4)$$

Los equilibrios en línea **3A** y **3B±** son todos inestables en todo el plano  $(\Omega, \mu)$ .

Como hicimos para el ADB con dos bolas, y para el ADB con tres bolas, ahora analizamos la estabilidad de las soluciones estacionarias en otros planos de parámetros. La Figura 4.7(a) muestra un diagrama de bifurcación en el plano  $(\Omega, \delta)$ . Representamos el rango de valores de  $\delta$  en el que el equilibrio de balance **1** existe, es decir,  $\delta < 0,2$ . Efectivamente, para  $\delta > 0,2$  tenemos  $\mu_c > 0,05$ , y por tanto el parámetro fijo  $\mu = 0,05$  no satisface  $\mu > \mu_c$ , que es la condición necesaria para que la masa de las bolas sea lo suficientemente grande como para equilibrar el sistema. La estabilidad de las soluciones estacionarias en este plano  $(\Omega, \delta)$  es similar a la estabilidad para el ADB con dos bolas (ver Fig.4.2(a)) y para el ADB con tres bolas (ver Fig.4.4(a)). De este modo, el equilibrio coincidente **2-** es estable para valores pequeños de  $\Omega$ , a la izquierda de la región delimitada por las curvas SN2+- . El equilibrio de balance **1** es estable para el rango de  $\delta$  representado, para  $\Omega$  elevado, aproximadamente cuando es mayor que 2,5. Existe otra pequeña región de estabilidad de **1** para valores intermedios de  $\Omega$ , y  $\delta$  grande y pequeño. En la Fig.4.7(b) podemos ver que, al igual que para el ADB con tres bolas, la región de estabilidad del equilibrio de balance **1** en el plano  $(\Omega, \zeta)$  es más pequeña que para el ADB con dos bolas. De esta forma, el equilibrio **1** es estable cuando  $\Omega$  es grande, pero sólo para pequeños valores de  $\zeta$ . Por ejemplo, cuando  $\Omega = 3$ , **1** es sólo estable para  $\zeta < 0,1$ . Comparando con el ADB con tres bolas (ver Fig.4.4(b)), la reducción de la región de estabilidad de **1** es ahora menor. La región de estabilidad del

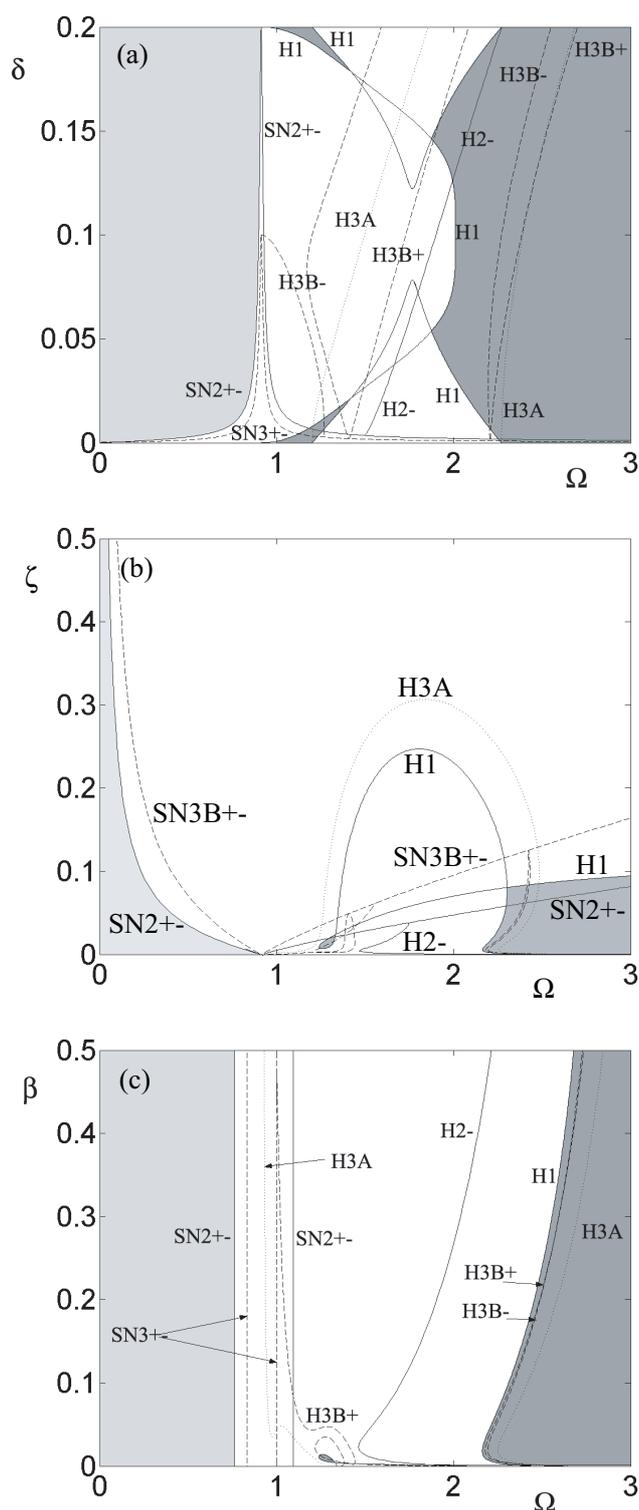


Figura 4.7: Diagramas de bifurcación del sistema ADB con cuatro bolas en planos de dos parámetros. Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas a puntos se corresponden con las curvas de bifurcación del equilibrio en línea **3A**, las líneas discontinuas con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea **3B $\pm$** , y las líneas continuas con los equilibrios **1** y **2 $\pm$** . El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance **1**, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio **2-**. En cada panel los parámetros fijados son  $\mu = 0,05$ , y  $\beta = \delta = \zeta = 0,01$ . Los parámetros que varían son  $\delta$  y  $\Omega$  en (a),  $\zeta$  y  $\Omega$  en (b), y  $\beta$  y  $\Omega$  en (c).

equilibrio coincidente **2-** resulta ser similar que la región para dos y tres bolas. El diagrama de estabilidad en el plano  $(\Omega, \beta)$  mostrado en la Fig.4.7(c) resulta ser muy similar que para el ADB con dos bolas, y para el ADB con tres bolas. El equilibrio coincidente **2-** es estable, como en los otros diagramas, para  $\Omega$  pequeño, a la izquierda de la primera curva SN2+-. Esta región de estabilidad no es sensible a  $\beta$ , como muestra el hecho de que las curvas SN2+- son verticales. La región de estabilidad del equilibrio de balance **1** tiene poca sensibilidad a  $\beta$ , y podemos afirmar que aproximadamente para  $\Omega > 2,5$  **1** es estable para todos los valores de  $\beta$ .

Además de las regiones de estabilidad de las soluciones estacionarias **1** y **2-**, los diagramas de bifurcación asociados a la Fig.4.7 muestran las curvas de bifurcación de todas las soluciones estacionarias. La línea a puntos corresponde a la curva de bifurcación de Hopf H3A del equilibrio en línea **3A**. Las curvas de bifurcaciones de tipo silla-nodo SN3B+-, y las curvas de Hopf H3B+ y H3-, están representadas por líneas discontinuas. Además de las curvas SN2+-, el equilibrio coincidente **2-** tiene una curva de bifurcación de Hopf H2- representado por línea continua. Estas curvas no son importantes en el sentido de que no cambian la estabilidad de los equilibrios que bifurcan, por lo que no requieren más comentarios.

La Figura 4.8 analiza el efecto que la amortiguación sobre las bolas  $\beta$  tiene sobre la estabilidad del equilibrio de balance **1** para el sistema ADB con cuatro bolas. En el panel (a), podemos ver un diagrama de estabilidad en el plano  $(\zeta, \beta)$ , manteniéndose los otros parámetros fijos en  $\Omega = 4$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . Observamos resultados cualitativamente similares a los obtenidos para el ADB con tres bolas (ver Fig.4.5(a)), es decir, el rango de  $\zeta$  para el cual **1** es estable crece linealmente mientras  $\beta$  aumenta su valor. Sin embargo, ahora para el ADB con cuatro bolas, la región de estabilidad de **1** es mayor que para el ADB con tres bolas. De esta forma, cuando  $\beta$  es aproximadamente mayor que 0,05, **1** es estable para todos los valores de  $\zeta$  en el rango representado ( $0 < \zeta < 0,5$ ), mientras que para el ADB con tres bolas, este valor de  $\beta$  es mayor (aproximadamente 0,2).

La Fig.4.8(b) representa un diagrama de bifurcación el plano  $(\Omega, \zeta)$  para un mayor valor de la amortiguación sobre las bolas  $\beta = 0,25$ , y para  $\delta = 0,01$  y  $\mu = 0,05$ . Se descubre que la región de estabilidad del equilibrio de balance **1** es mucho mayor que para  $\beta = 0,01$  (comparar con Fig.4.7(b)). Comparando con el ADB con tres bolas (ver Fig.4.5(b)), vemos de nuevo que esta región de estabilidad de **1** es mayor para el ADB con cuatro bolas. En resumen, concluimos que, al igual que para el ADB con tres bolas, una amortiguación sobre las bolas  $\beta$  elevada hace que el equilibrio de balance **1** sea estable en un rango de  $\zeta$  mayor. Por último, podemos recomendar que para asegurar la estabilidad del equilibrio de balance **1** para el mecanismo ADB con cuatro bolas, se deberían tomar una pequeña amortiguación para el sistema de suspensión  $\zeta$ , y una amortiguación sobre las bolas  $\beta$  elevada.

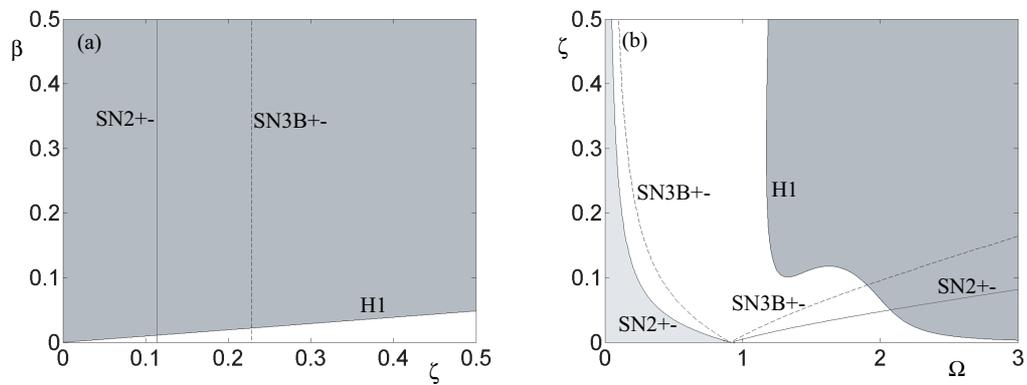


Figura 4.8: Diagramas de bifurcación en planos de dos parámetros para el sistema ADB con cuatro bolas. El panel (a) muestra un diagrama en el plano  $(\zeta, \beta)$ , con  $\Omega = 4$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . El panel (b) muestra un diagrama en el plano  $(\Omega, \zeta)$ , con  $\beta = 0,25$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ . Las siglas SN indican las bifurcaciones de tipo silla-nodo, PF las bifurcaciones de pitchfork, y H las de Hopf. Los números que están junto a estas siglas indican los equilibrios que están involucrados en la bifurcación. Las líneas a puntos se corresponden con las curvas de bifurcación del equilibrio en línea **3A**, las líneas discontinúas con las curvas de bifurcación de los equilibrios en línea **3B $\pm$** , y las líneas continuas con los equilibrios **1** y **2 $\pm$** . El sombreado oscuro corresponde a la región de estabilidad del equilibrio de balance **1**, y el sombreado claro a la región de estabilidad del equilibrio coincidente **2-**.



## Capítulo 5

# Análisis de la respuesta transitoria del ADB

En este capítulo se lleva a cabo un análisis de la respuesta transitoria del sistema ADB con dos, tres, y cuatro bolas. Mostramos los resultados obtenidos mediante la integración numérica de las ecuaciones de movimiento (2.25) y (2.26) deducidas en el Capítulo 2. En nuestros experimentos usamos la rutina `ode45` del programa `Matlab`.

El capítulo está dividido en dos secciones. En una de ellas se estudia cómo las condiciones iniciales afectan a la respuesta transitoria del sistema y a la estabilidad del equilibrio de balance. Para eso, se hacen varias integraciones de las ecuaciones, para un valor específico del conjunto de parámetros, y se comparan los resultados obtenidos para diferentes condiciones iniciales. En cada caso se analizan las posibles diferencias entre el ADB con dos, tres, y cuatro bolas, para una misma masa de las bolas  $\mu$ . En la segunda sección del capítulo se estudian los efectos sobre el sistema que produce la variación de los parámetros. Para ello se realizará la integración numérica de las ecuaciones con condiciones iniciales específicas para dos, tres, y cuatro bolas, con distintos valores de los parámetros, y se compararán los resultados obtenidos en cada caso.

### 5.1. Efecto de las condiciones iniciales

En esta sección se discutirá cómo las condiciones iniciales afectan a la respuesta del sistema. Para ello, se realiza la integración de las ecuaciones para muchas condiciones iniciales distintas, y para el conjunto de parámetros

$$\Omega = 4, \quad \zeta = \delta = \beta = 0,01, \quad \mu = 0,05. \quad (5.1)$$

Se ha elegido este valor particular de los parámetros debido a que en [9] se identificó en el sistema ADB con dos bolas una coexistencia entre el equilibrio de balance **1** y un ciclo límite estable.

#### 5.1.1. Posición y velocidad inicial del centro de rotación

En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, se representan con respecto al tiempo la amplitud de la vibración radial ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) y la posición de las bolas ( $\phi_i$ ) para el sistema ADB con dos,

tres, y cuatro bolas. Se usó una variable estadística normal con media  $\mu_s = 0$  y desviación típica  $\sigma_s = 0,1$  para elegir la posición inicial del centro de rotación y su velocidad inicial  $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))$ :  $(-0.0433, 0.0125, -0.1666, 0.0288)$  en los paneles (a1)-(a2),  $(-0.1146, 0.1189, 0.1191, -0.0038)$  en los paneles (b1)-(b2),  $(0.0327, -0.0187, 0.0175, 0.0726)$  en los paneles (c1)-(c2) y  $(-0.0588, -0.0136, 0.2183, 0.0114)$  en los paneles (d1)-(d2). Las posiciones iniciales de las bolas se fijaron en  $\phi_1(0) = \pi/2$  y  $\phi_2(0) = -\pi/2$  para el ADB con dos bolas (Figura 5.1),  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$  y  $\phi_3(0) = \pi$  para el ADB con tres bolas (Figura 5.2), y  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \pi$  y  $\phi_4(0) = 0$  para el ADB con cuatro bolas (Figura 5.3). En todos los casos la velocidad inicial de las bolas fue tomada igual a cero, es decir,  $\dot{\phi}_i(0) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

La Figura 5.1 muestra que las respuestas del ADB con dos bolas para diferentes valores de  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  y  $\dot{y}(0)$  son muy similares. En todos los casos el sistema alcanza el balance dinámico en un tiempo similar, aproximadamente igual a  $t = 600$ . Hay una pequeña diferencia en el valor de la máxima amplitud de la vibración radial entre los diferentes paneles, pero siempre tienen el mismo orden de magnitud. Para el sistema ADB con tres bolas (ver Figura 5.2), hay también similitudes en todos los paneles en el tiempo en el que se consigue el equilibrado, y en el orden de magnitud de la máxima amplitud de las vibraciones radiales durante el transitorio. Sin embargo, ahora las bolas alcanzan diferentes posiciones en cada panel después de que el transitorio haya finalizado. La razón de ello es que cuando el ADB tiene más de dos bolas, existen infinitas configuraciones que son capaces de alcanzar el equilibrado del sistema. En la Figura 5.3 es posible ver estos mismos hechos para el ADB con cuatro bolas.

Observemos que en las tres Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, (b1) es el panel en el que la máxima amplitud de la vibración radial es mayor. Este panel se corresponde con el valor de la vibración radial inicial más elevada. Por tanto, podemos decir que la posición inicial del centro de rotación y su velocidad inicial pueden afectar en el valor de la máxima amplitud de la vibración radial durante el transitorio. Sin embargo, como conclusión, ha sido demostrado que la respuesta del sistema tiene poca sensibilidad a  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $\dot{x}(0)$  y  $\dot{y}(0)$ , en el sentido de que siempre se consigue el balance dinámico del sistema, y que el tiempo de decaimiento del transitorio no varía significativamente. Por tanto, en lo que sigue consideraremos siempre  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

### 5.1.2. Posiciones iniciales de las bolas

Estudiemos ahora el efecto de las posiciones iniciales de las bolas, considerando que están inicialmente estacionarias con respecto al sistema de referencia rotativo, es decir,  $\dot{\phi}_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La Figura 5.4 muestra la máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  en función de la posición inicial de una bola  $\phi_1(0)$ , mientras que  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$  en el panel (a), y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  en el panel (b). Los puntos sealados con 'x' son los casos en los que el balance dinámico no se consigue, y en los puntos sealados con '.' el sistema sí alcanza el equilibrio de balance. En la Fig.5.4(a) podemos ver que existe un valor de  $\phi_1(0)$  para el que  $r_{max}$  es igual a cero. Esta posición inicial de las bolas coincide con la posición del equilibrio

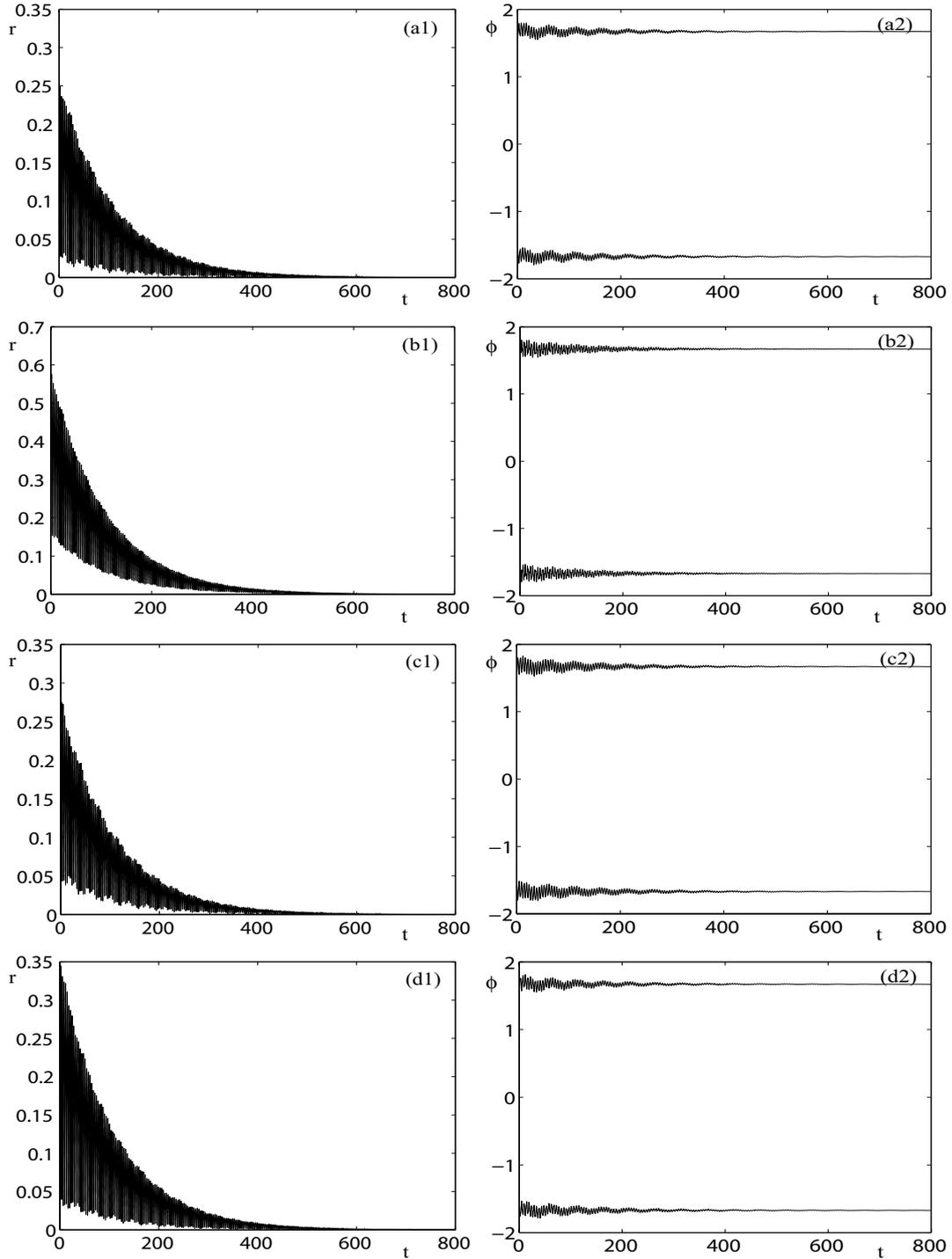


Figura 5.1: Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros  $\Omega = 4,0$ ,  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. La posición y la velocidad iniciales del centro de rotación  $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))$  se eligieron aleatoriamente con una variable estadística normal de media  $\mu_s = 0$  y desviación típica  $\sigma_s = 0,1$ ; sus valores fueron  $(-0,0433, 0,0125, -0,1666, 0,0288)$  para los paneles (a1)-(a2),  $(-0,1146, 0,1189, 0,1191, -0,0038)$  para (b1)-(b2),  $(0,0327, -0,0187, 0,0175, 0,0726)$  para (c1)-(c2), y  $(-0,0588, -0,0136, 0,2183, 0,0114)$  para (d1)-(d2). Las posiciones iniciales de las bolas y sus respectivas velocidades iniciales fueron fijadas en  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$  y  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$  en todos los paneles. Se representan la amplitud de la vibración radial  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (paneles (a1), (b1), (c1) y (d1)) y las posiciones de las bolas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  (paneles (a2), (b2), (c2) y (d2)) con el tiempo adimensional  $t$ .

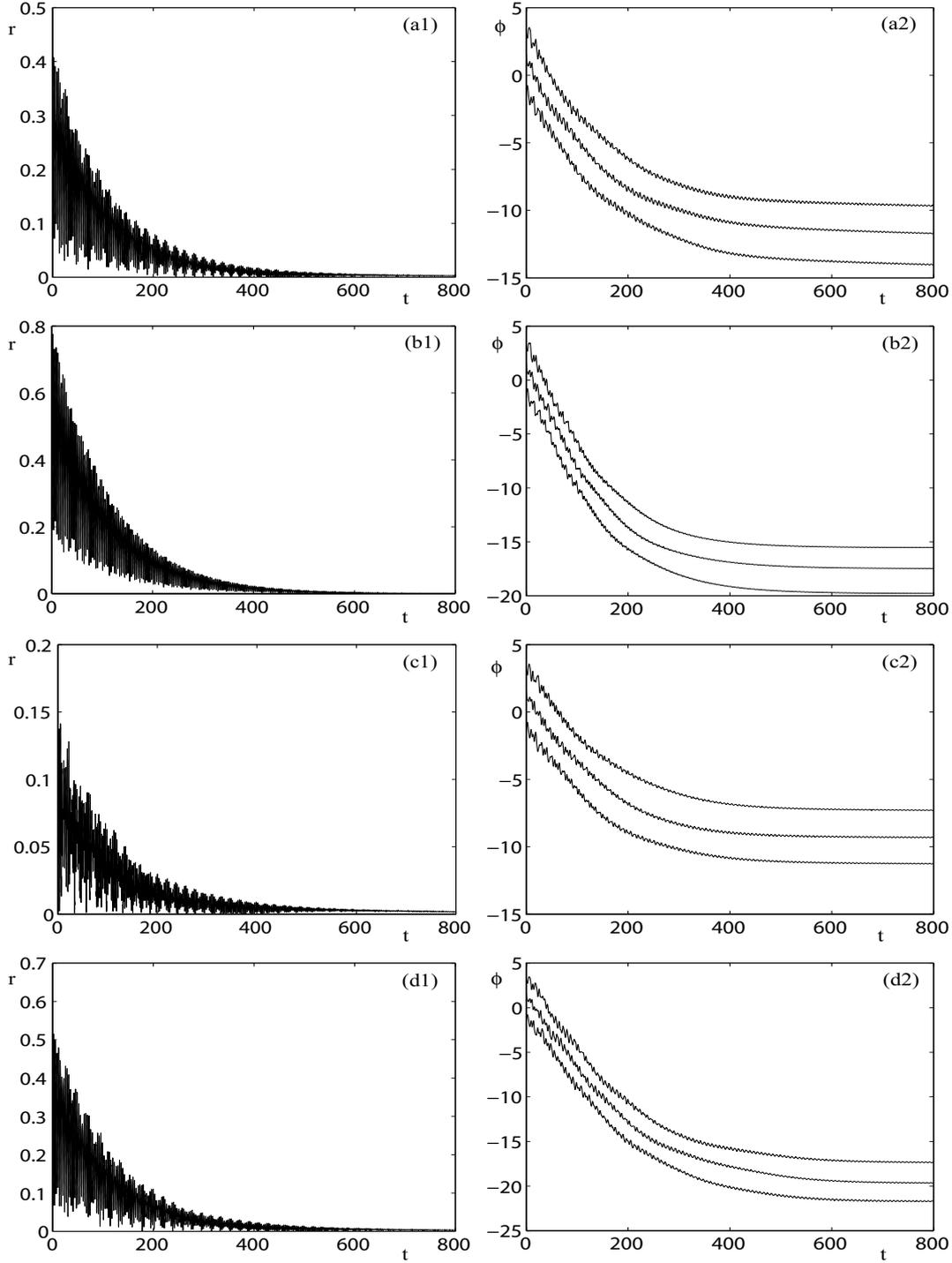


Figura 5.2: Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros  $\Omega = 4,0$ ,  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. La posición y la velocidad iniciales del centro de rotación  $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))$  se eligieron aleatoriamente con una variable estadística normal de media  $\mu_s = 0$  y desviación típica  $\sigma_s = 0,1$ ; sus valores fueron  $(-0,0433, 0,0125, -0,1666, 0,0288)$  para los paneles (a1)-(a2),  $(-0,1146, 0,1189, 0,1191, -0,0038)$  para (b1)-(b2),  $(0,0327, -0,0187, 0,0175, 0,0726)$  para (c1)-(c2), y  $(-0,0588, -0,0136, 0,2183, 0,0114)$  para (d1)-(d2). Las posiciones iniciales de las bolas y sus respectivas velocidades iniciales fueron fijadas en  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \pi$  y  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = 0$  en todos los paneles. Se representan la amplitud de la vibración radial  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (paneles (a1), (b1), (c1) y (d1)) y las posiciones de las bolas  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  (paneles (a2), (b2), (c2) y (d2)) con el tiempo adimensional  $t$ .

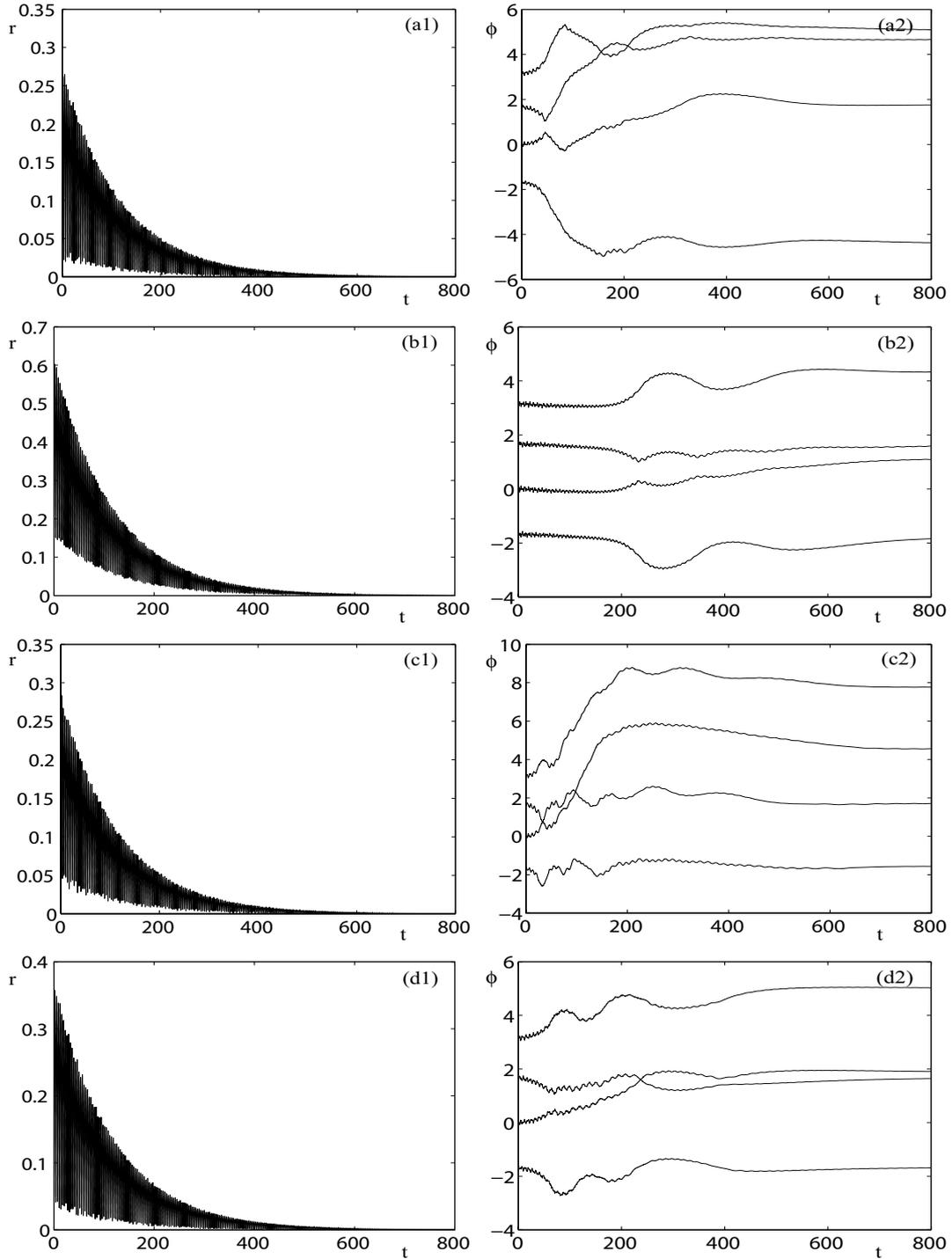


Figura 5.3: Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros  $\Omega = 4,0$ ,  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ ,  $\delta = 0,01$ , y  $\mu = 0,05$ , con condiciones iniciales aleatorias. La posición y la velocidad iniciales del centro de rotación  $(x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))$  se eligieron aleatoriamente con una variable estadística normal de media  $\mu_s = 0$  y desviación típica  $\sigma_s = 0,1$ ; sus valores fueron  $(-0,0433, 0,0125, -0,1666, 0,0288)$  para los paneles (a1)-(a2),  $(-0,1146, 0,1189, 0,1191, -0,0038)$  para (b1)-(b2),  $(0,0327, -0,0187, 0,0175, 0,0726)$  para (c1)-(c2), y  $(-0,0588, -0,0136, 0,2183, 0,0114)$  para (d1)-(d2). Las posiciones iniciales de las bolas y sus respectivas velocidades iniciales fueron fijadas en  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \pi$ ,  $\phi_4(0) = 0$  y  $\dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = \dot{\phi}_4(0) = 0$  en todos los paneles. Se representan la amplitud de la vibración radial  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (paneles (a1), (b1), (c1) y (d1)) y las posiciones de las bolas  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$  (paneles (a2), (b2), (c2) y (d2)) con el tiempo adimensional  $t$ .

de balance

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arccos \frac{\delta}{2\mu} = \arccos \frac{0,01}{2 \cdot 0,05} = 1,67096374795646, \\ \phi_2 &= -\phi_1 = -1,67096374795646.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Los valores de  $r_{max}$  aumentan hasta altos valores ( $r_{max} \approx 0,5$ ) cuando las bolas se alejan de esta posición de balance, y existe algunos casos en los que el sistema alcanza ciclos límites. Estos puntos se sealan en la Fig.5.4(a) con 'x'.

En la Fig.5.4(b) podemos ver que  $r_{max}$  no varía prácticamente con la posición inicial de las bolas. Si comparamos estos valores de  $r_{max}$  con los de la Fig.5.4(a), observamos son mucho menores en general. Otra diferencia para esta configuración es que ahora no se alcanza ningún ciclo límite. Por tanto, podemos concluir que cuando las bolas empiezan en lados opuestos y en línea con el centro de rotación ( $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ ), es más fácil conseguir el balance dinámico que cuando las bolas empiezan desde posiciones opuestas con respecto al eje  $x$  ( $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$ ), porque en el primer caso nunca se alcanza un ciclo límite. Además, la respuesta transitoria es más suave (los valores de  $r_{max}$  son menores) en el primer caso que en el segundo caso en casi todas las ocasiones, excepto cuando las bolas empiezan muy cerca a la posición de balance (5.2).

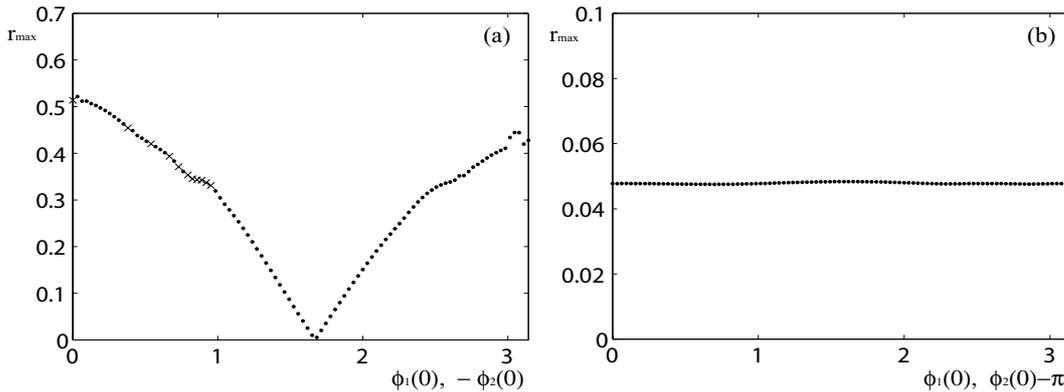


Figura 5.4: Máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  en función de  $\phi_1(0)$ , mientras que  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$  en (a), y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  en (b), para el sistema ADB con dos bolas. El resto de las condiciones iniciales son elegidas iguales a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ ), y el conjunto de parámetros tomado es  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$  y  $\mu = 0,05$ . Los puntos sealados con '·' se refieren a equilibrios de balance, y los puntos sealados con 'x' se refieren a ciclos límites.

En la Figura 5.5 la máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  es dibujada en función de la posición inicial de la bola  $\phi_1(0)$  para el sistema ADB con tres bolas, para el conjunto de parámetros mostrado en (5.1), y con el resto de condiciones iniciales iguales a cero. Los puntos marcados con '·' se refieren a los equilibrios de balance, y los puntos marcados con 'x' se refieren a los casos en los que no se alcanza el balance. Los paneles (a1)-(a2) muestran que cuando dos bolas son lanzadas simétricamente opuestas una a la otra tales que la línea que las une es ortogonal al eje  $x$  de la excentricidad ( $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$ ),  $r_{max}$  toma valores iguales a cero en una posición específica de las bolas, e incrementa su valor al alejarse de esta posición inicial. Esta posición inicial específica de las bolas coincide con una posición

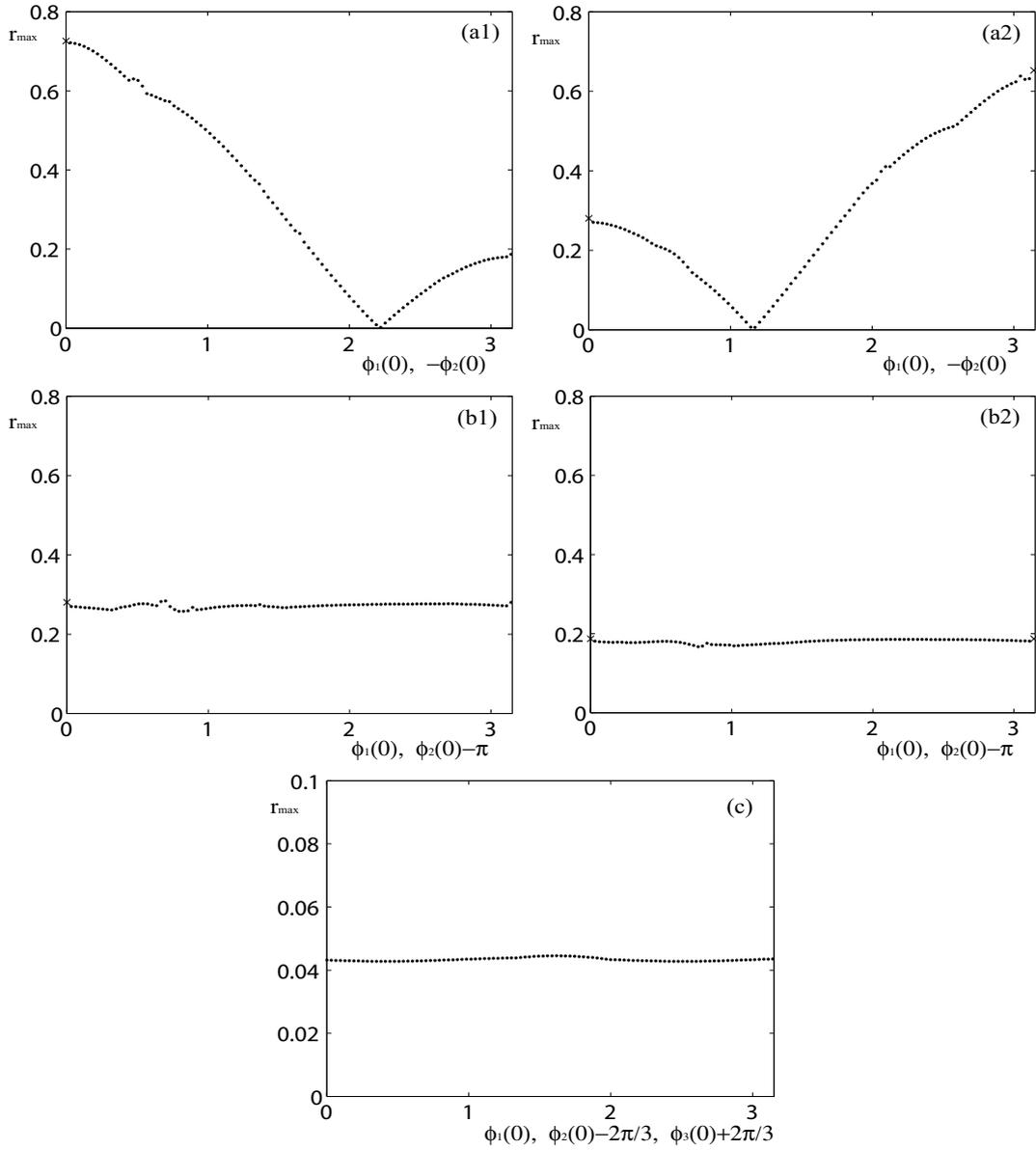


Figura 5.5: Máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  en función de  $\phi_1(0)$  para el ADB con tres bolas. En los paneles (a1)-(a2)  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$  con  $\phi_3(0) = 0$  en (a1), y con  $\phi_3(0) = \pi$  en (a2). En los paneles (b1)-(b2)  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  con  $\phi_3(0) = 0$  en (b1), y con  $\phi_3(0) = \pi$  en (b2). En el panel (c)  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - \pi/3$ . El resto de las condiciones iniciales se eligen iguales a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = 0$ ), y el conjunto de parámetros elegido es  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$  y  $\mu = 0,05$ . Los puntos marcados con '·' se refieren a los equilibrios de balance, y los puntos sealados con '×' se refieren a los casos en los que no se alcanza el balance dinámico.

de equilibrio de balance, como se puede comprobar utilizando  $n = 3$  en las condiciones para el equilibrio de balance (3.6). Efectivamente, en (a1), en el que la tercera bola empieza desde el lado del desequilibrio ( $\phi_3(0) = 0$ ), el equilibrio de balance está posicionado en  $\phi_1 = 2,21429743558818$ ,  $\phi_2 = -2,21429743558818$ , y  $\phi_3 = 0$ ; en (a2), en el que la tercera bola se lanza desde el lado opuesto al desequilibrio ( $\phi_3(0) = \pi$ ), el equilibrio de balance se encuentra en  $\phi_1 = 1,15927948072741$ ,  $\phi_2 = -1,15927948072741$ , y  $\phi_3 = \pi$ .

Las Figs.5.5(b1)-(b2) muestran que cuando dos de las bolas empiezan en lados opuestos y en línea con el centro de rotación,  $r_{max}$  varía muy poco con  $\phi_1(0)$ . En estos casos, los valores de  $r_{max}$  son mayores cuando la tercera bola se coloca en  $\phi_3(0) = 0$  (panel (b1)) que cuando se posiciona en  $\phi_3(0) = \pi$  (panel (b2)). Este hecho puede que se deba a que en el primer caso la tercera bola empieza desde el lado del desequilibrio ( $\phi_3(0) = 0$ ), y tendría que recorrer una trayectoria más larga para poder conseguir el balance dinámico del sistema, que si empezara desde el lado de balance ( $\phi_3(0) = \pi$ ). En general, el valor de  $r_{max}$  es menor en (b1)-(b2) que en (a1)-(a2), pero ahora esta diferencia no es tan grande como en la Fig.5.4 para el ADB con dos bolas. Por tanto, ahora no podemos afirmar que la posición inicial de las bolas en línea sea mejor que una posición inicial opuesta de las bolas, porque las Figs.5.5(a1)-(a2) (donde  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$ ) muestran un rango elevado de puntos  $\phi_1(0)$  en los que los valores de  $r_{max}$  son menores que en las Figs.5.5(b1)-(b2) (donde  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ ). Por último, en el panel (c), las bolas son lanzadas equidistantemente, es decir, la posición inicial de la segunda y de la tercera bola varían en función de la posición inicial de la primera como  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/3$  y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - \pi/3$ . Al igual que en los paneles (b1) y (b2),  $r_{max}$  se mantiene prácticamente constante. En este caso, podemos ver que  $r_{max}$  toma valores más pequeños que en las Figs.5.5(b1)-(b2), y que en general son menores que en las Figs.5.5(a1)-(a2) excepto para unos pocos puntos cercanos a  $r_{max} = 0$ . Por tanto, la mejor posición inicial relativa de las bolas para el ADB con tres bolas es aquella en la que las tres bolas empiezan equidistantemente. Una diferencia con respecto a los resultados que se obtuvieron para el ADB con dos bolas es que ahora la Fig.5.5 muestra sólo unos pocos casos en los que el balance dinámico no se alcanza.

Ahora trataremos de deducir qué configuraciones para las posiciones iniciales de las bolas serían mejores en un ADB con cuatro bolas. Para eso, comentaremos la Figura 5.6, en la que la máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  se dibuja en función de la posición inicial de la bola  $\phi_1(0)$ , mientras que las otras tres bolas empiezan desde diferentes posiciones. En las Figs.5.6(a1), (a2), y (a3), la segunda bola empieza en el lado opuesto a la primera, tal que la línea que las une es ortogonal al eje  $x$  ( $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$ ). Cuando la tercera y la cuarta bola empiezan desde  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = 0$ , podemos ver en Fig.5.6(a1) que  $r_{max}$  siempre disminuye cuando la primera y la segunda bola se alejan del lado donde se encuentra el desequilibrio, es decir, cuando  $\phi_1(0)$  aumenta. En este caso, no hay ninguna posición en la que  $r_{max}$  tome valor nulo porque la tercera y la cuarta bola empiezan en el lado del desequilibrio ( $\phi_3(0) = \phi_4(0) = 0$ ), y no existe una posición inicial de las otras dos bolas para alcanzar el balance dinámico. Cuando la tercera y la cuarta bola empiezan desde  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = \pi$  (panel (a2)), y desde  $\phi_3(0) = 0$  y  $\phi_4(0) = \pi$  (panel (a3)),  $r_{max}$  tiene un valor cero, alrededor del cual va aumentando su valor. Esta posición inicial corresponde a una posición del equilibrio de balance que satisface las condiciones (3.6) para  $n = 4$  ( $\phi_1 = -\phi_2 = 0,45102681179626$ ,  $\phi_3 = \phi_4 = \pi$  en el panel (a2), y  $\phi_1 = -\phi_2 = 1,67096374795646$ ,  $\phi_3 = 0$ ,  $\phi_4 = \pi$  en el panel (a3)). En estas Figs.5.6(a1), (a2) y (a3) podemos ver algunas posiciones iniciales de las bolas para las que no se consigue equilibrar el sistema.

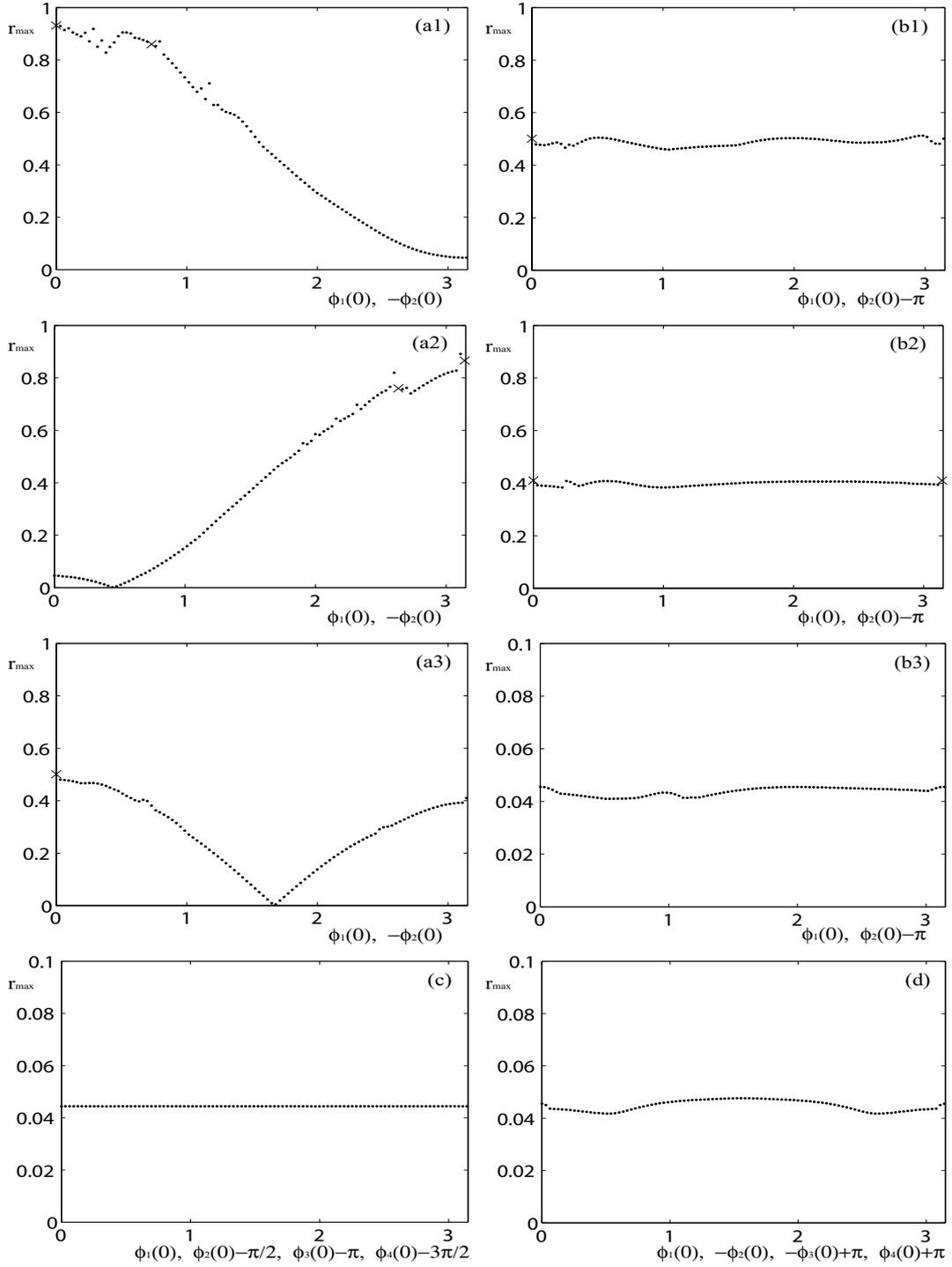


Figura 5.6: Máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  en función de  $\phi_1(0)$ , para  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$  en los paneles (a1), (a2) y (a3), y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  en (b1), (b2) y (b3), para el ADB con cuatro bolas. La tercera y la cuarta bola se fijaron en  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = 0$  en paneles (a1) y (b1),  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = \pi$  en (a2) y (b2), y  $\phi_3(0) = 0$  y  $\phi_4(0) = \pi$  en (a3) y (b3). En los paneles (c) y (d) todas las bolas siguen un correlación con respecto a  $\phi_1(0)$ :  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$  y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) + 3\pi/2$  en el panel (c), y  $\phi_2(0) = -\phi_1(0)$ ,  $\phi_3(0) = \pi - \phi_1(0)$  y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) - \pi$  en el panel (d). El resto de las condiciones iniciales en todos los paneles son elegidas igual a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = \dot{\phi}_4(0) = 0$ ), y el conjunto de parámetros tomados es  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$  y  $\mu = 0,05$ . Los puntos sealados con '.' se refieren a equilibrios de balance, y los puntos marcado con 'x' se refieren a los casos en los que el balance dinámico no se alcanza.

En las Figs.5.6(b1), (b2), y (b3) la segunda bola empieza desde un lado opuesto a la primera, y en línea con el centro de rotación ( $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ ), mientras que las posiciones iniciales de la tercera y de la cuarta bolas están fijadas en  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = 0$  para (b1), en  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = \pi$  para (b2), y en  $\phi_3(0) = 0, \phi_4(0) = \pi$  para (b3). En estos casos, los valores de  $r_{max}$  varían sólo un poco con  $\phi_1(0)$ . En el panel (b3), los valores de  $r_{max}$  tienen un orden de magnitud menor que en los paneles (b1) y (b2) (0,05 en comparación con 0,5). En este panel (b3), el sistema siempre alcanza el balance dinámico, mientras que en (b1) y (b2) hay tres posiciones iniciales de las bolas en las que el sistema tiende a equilibrios fuera de balance dinámico.

En la Fig.5.6(c), las cuatro bolas empiezan desde una posición relativa equidistante, esto es,  $\phi_1(0) = \phi_2(0) - \pi/2 = \phi_3(0) - \pi = \phi_4(0) - 3\pi/2$ . En este caso se puede observar que  $r_{max}$  es prácticamente constante con  $\phi_1(0)$ , y su valor es aproximadamente igual a 0,045, lo cual supone una mejora con respecto a los otros casos estudiados. Además de eso, el equilibrado del sistema se alcanza para todo valor de  $\phi_1(0)$ , es decir, no aparecen ciclos límites ni equilibrios fuera de balance. En la Fig.5.6(d), las bolas empiezan simétricamente colocadas con respecto a ambos eje  $x$  e  $y$ , esto es,  $\phi_1(0) = -\phi_2(0) = -\phi_3(0) + \pi = \phi_4(0) + \pi$ . En este panel (d) se pueden observar características similares a las vistas en el panel (c), pero con un poco más de variación de  $r_{max}$  con las posiciones iniciales de las bolas. Comparando las diferentes posiciones iniciales de las bolas que se han visto en la Fig.5.6, se podría decir que, para intentar obtener la mejor respuesta transitoria, tendríamos que evitar dos o más bolas empezando desde una misma posición. Como acabamos de ver, esta situación puede que lleve al sistema a un equilibrio fuera de balance o a ciclos límites en algunas ocasiones. Además da lugar en la mayoría de los casos a valores elevados de  $r_{max}$ . Por tanto, podemos concluir que, en aplicaciones prácticas del mecanismo ADB con cuatro bolas, la mejor configuración para las posiciones iniciales de las bolas sería aquella en la que empezaran equidistantes (panel (c)), o doblemente en línea, es decir,  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  y  $\phi_4(0) = \phi_3(0) + \pi$  (paneles (b3) y (d)).

### 5.1.3. Velocidad inicial de las bolas

Hasta ahora se han obtenido las respuestas del sistema ADB cuando las bolas parten de una posición estacionaria con respecto al sistema de referencia rotativo, esto es,  $\dot{\phi}_i(0) = 0, \forall i$ . Veamos cómo afecta la velocidad inicial de las bolas en el comportamiento del sistema. Para ello integraremos las ecuaciones de movimiento considerando que las bolas están inicialmente estacionarias con respecto a un sistema de referencia fijo, esto es, las bolas empezarán con una velocidad inicial con respecto al sistema de referencia rotativo igual a  $-\Omega$ . Se estudia esta configuración porque podría ser fácilmente realizable en situaciones prácticas. Para ello, tendríamos que mantener las bolas fijas en una posición con respecto a un sistema de referencia externo al rotor, hasta que el rotor alcanzase una velocidad de rotación estacionaria, y liberarlas en ese momento, por lo que empezarían con una velocidad  $\dot{\phi}_i(0) = -\Omega, \forall i$ .

En la Fig.5.7, los valores de  $r_{max}$  son representados en función de  $\phi_1(0)$  cuando las bolas empiezan con velocidad  $\dot{\phi}_i(0) = -\Omega, i = 1, \dots, n$ , para el sistema ADB con dos bolas (panel (a)), con tres bolas (panel (b)), y con cuatro bolas (panel (c)). El conjunto de parámetros

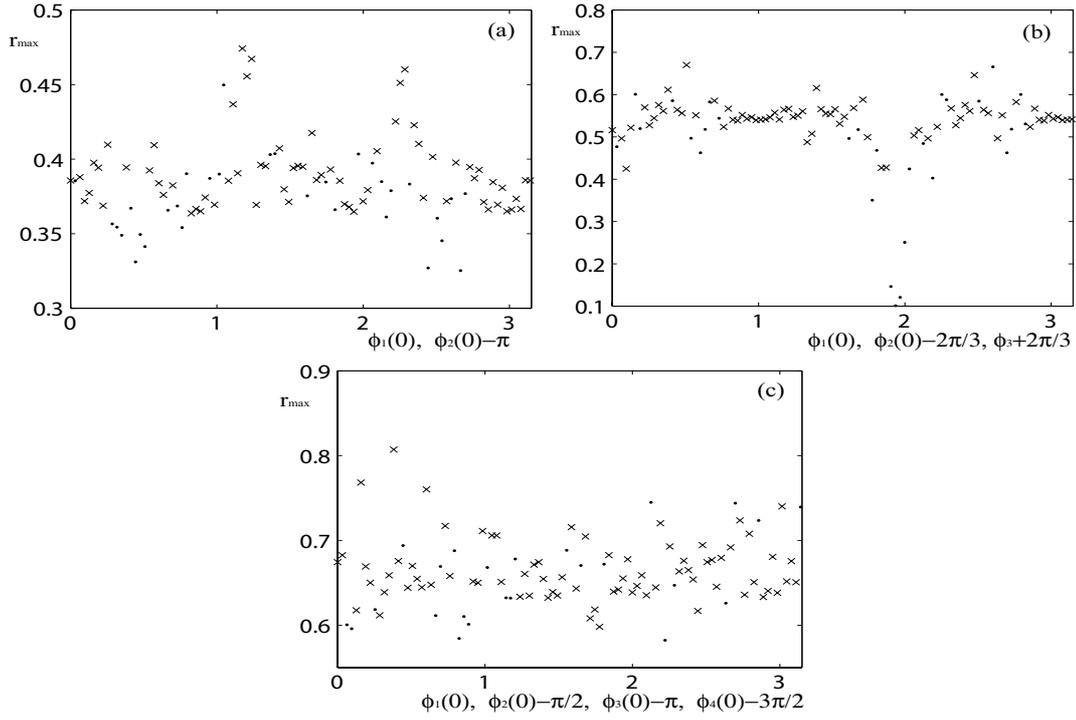


Figura 5.7: Máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  en función de  $\phi_1(0)$ , cuando las bolas empiezan con velocidad inicial  $\dot{\phi}_i(0) = -\Omega$ ,  $i = 1 \dots n$ , y la posición y velocidad iniciales del centro de rotación son iguales a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ ), para el conjunto de parámetros  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$  y  $\mu = 0,05$ . Las posiciones iniciales de las bolas son equidistantes:  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  para el ADB con dos bolas (panel (a)),  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + 2\pi/3$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - 2\pi/3$  para el ADB con tres bolas (panel (b)), y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$  y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) + 3\pi/2$  para el ADB con cuatro bolas (panel (c)). Los puntos sealados con '.' se refieren a los equilibrios de balance, y los puntos sealados con 'x' se refieren a los casos en los que el sistema tiende a un ciclo límite.

elegidos es (5.1) y la posición y velocidad iniciales del centro de rotación se toman iguales a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ ). Se eligieron posiciones iniciales de las bolas equidistantes, esto es,  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$  para dos bolas,  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + 2\pi/3$  y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - 2\pi/3$  para tres bolas, y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$  y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) + 3\pi/2$  para cuatro bolas. Se puede ver que existen algunos valores de  $\phi_1(0)$  para los que se consigue el equilibrado del sistema. Estos casos están sealados con '·'. Para las cien distintas posiciones iniciales de las bolas para las que se resolvió el problema, el ADB con dos bolas alcanza el balance dinámico en 32 ocasiones, el ADB con tres bolas en 28 ocasiones, y el ADB con cuatro bolas en 24 ocasiones. Como conclusión, se puede decir que las posiciones iniciales de las bolas estacionarias con respecto a un sistema de referencia fijo no dan buenos resultados, en el sentido de que es difícil conseguir el balance del sistema, y cuando lo hace, las vibraciones radiales durante el transitorio son elevadas.

## 5.2. Efecto de los parámetros

En el Capítulo 4 se llevó a cabo un análisis de bifurcación para investigar el efecto que tiene en la dinámica del ADB una variación de los parámetros adimensionales. Ahora en esta sección, se realizará la simulación numérica de las ecuaciones de movimiento para confirmar los resultados obtenidos mediante la teoría de bifurcaciones, y para estudiar más profundamente el efecto de los parámetros en la respuesta del ADB con dos, tres, y cuatro bolas. En todas las integraciones siguientes se tomará la posición y velocidad iniciales del centro de rotación igual a cero ( $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ ), y velocidad inicial de las bolas igual a cero ( $\dot{\phi}_i(0) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ ). Las posiciones iniciales de las bolas se toman como

$$\phi_1(0) = \pi/2, \quad \phi_2(0) = -\pi/2, \quad (5.3)$$

para el ADB con dos bolas,

$$\phi_1(0) = \pi/3, \quad \phi_2(0) = -\pi/3, \quad \phi_3(0) = \pi, \quad (5.4)$$

para el ADB con tres bolas, y

$$\phi_1(0) = \pi/2, \quad \phi_2(0) = -\pi/2, \quad \phi_3(0) = \pi, \quad \phi_4(0) = 0, \quad (5.5)$$

para el ADB con cuatro bolas. Es decir, elegimos una posición inicial de las bolas equidistante para cada caso.

### 5.2.1. Exploración en el diagrama $(\Omega, \mu)$

Las Figuras 5.8, 5.9, y 5.10 exploran la dinámica de diferentes regiones de los diagramas de bifurcación en el plano  $(\Omega, \mu)$  mostrados en las Figs.4.1, 4.3, y 4.6 para el ADB con dos, tres y cuatro bolas, respectivamente. Los paneles (a) en las Figuras 5.8, 5.9, y 5.10, muestran el caso para  $\Omega = 0,5$  y  $\mu = 0,05$ . Eventualmente, y para los tres casos (ADB con dos, tres, y cuatro bolas) el transitorio del el rotor con el ADB (mostrado en negro) se ve atraído al equilibrio coincidente **2-**, y los valores de  $\phi_i$ , para  $i = 1, \dots, n$  (no dibujado), convergen a la misma posición. Sin embargo, en los tres casos, para los valores de estos parámetros,

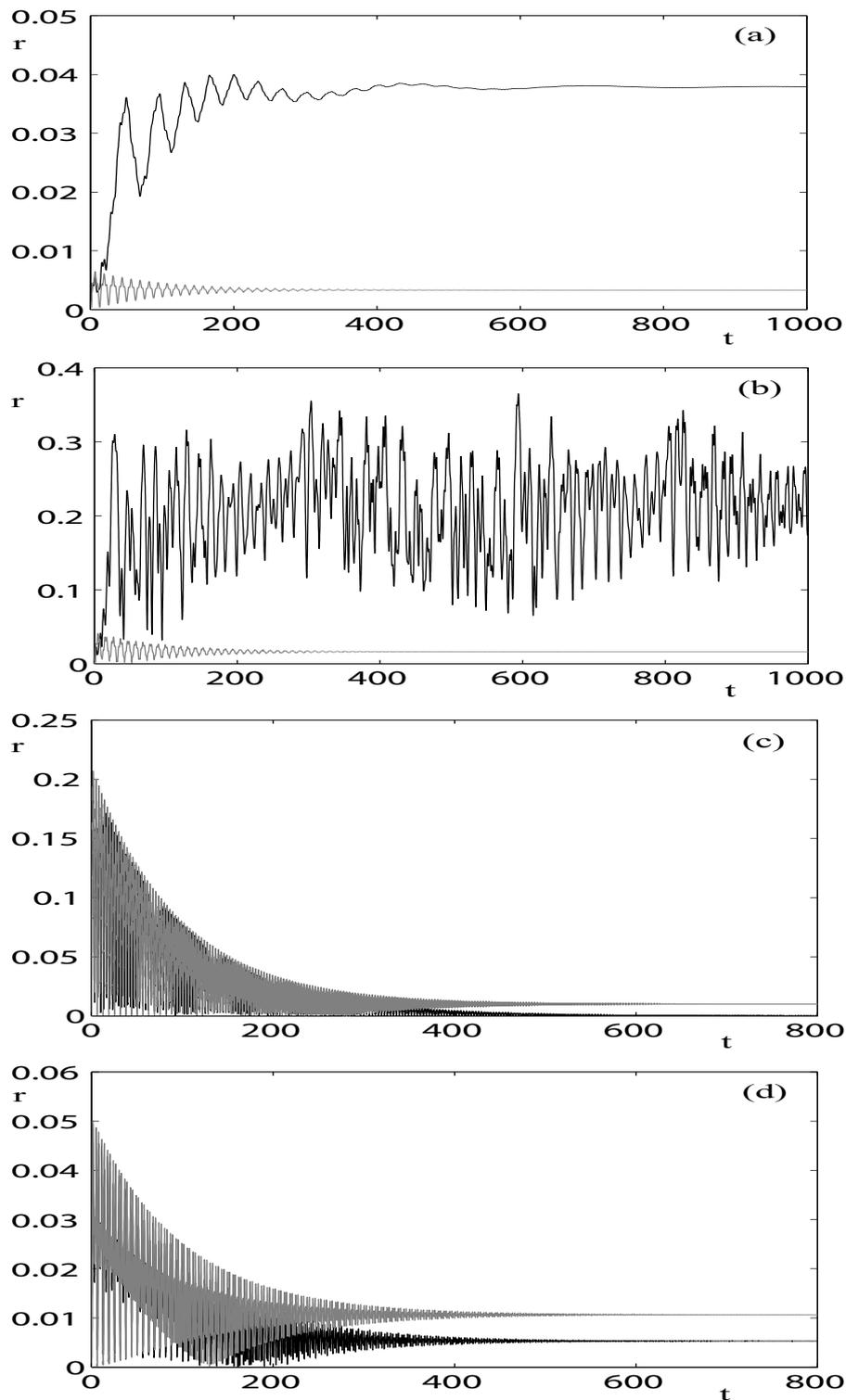


Figura 5.8: Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ , y  $\delta = 0,01$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/2$ , y  $\phi_2(0) = -\pi/2$ . Los valores de  $\Omega$  y de  $\mu$  son  $(\Omega, \mu) = (0,5, 0,05)$  en (a),  $(\Omega, \mu) = (1,6, 0,05)$  en (b),  $(\Omega, \mu) = (20, 0,05)$  en (c), y  $(\Omega, \mu) = (4, 0,0025)$  en (d).

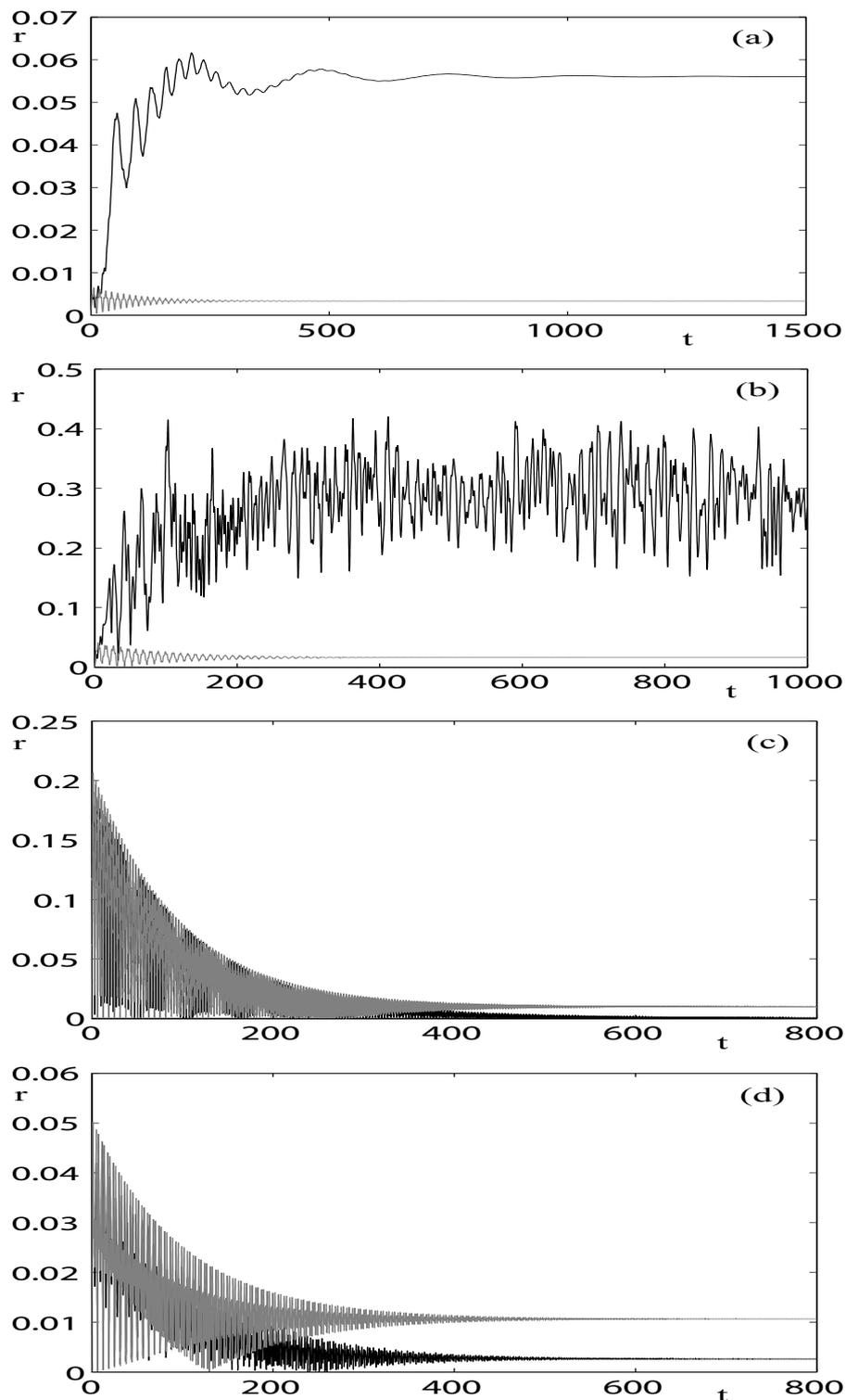


Figura 5.9: Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ , y  $\delta = 0,01$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/3$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \pi$ . Los valores de  $\Omega$  y de  $\mu$  son  $(\Omega, \mu) = (0,5, 0,05)$  en (a),  $(\Omega, \mu) = (1,6, 0,05)$  en (b),  $(\Omega, \mu) = (20, 0,05)$  en (c), y  $(\Omega, \mu) = (4, 0,0025)$  en (d).

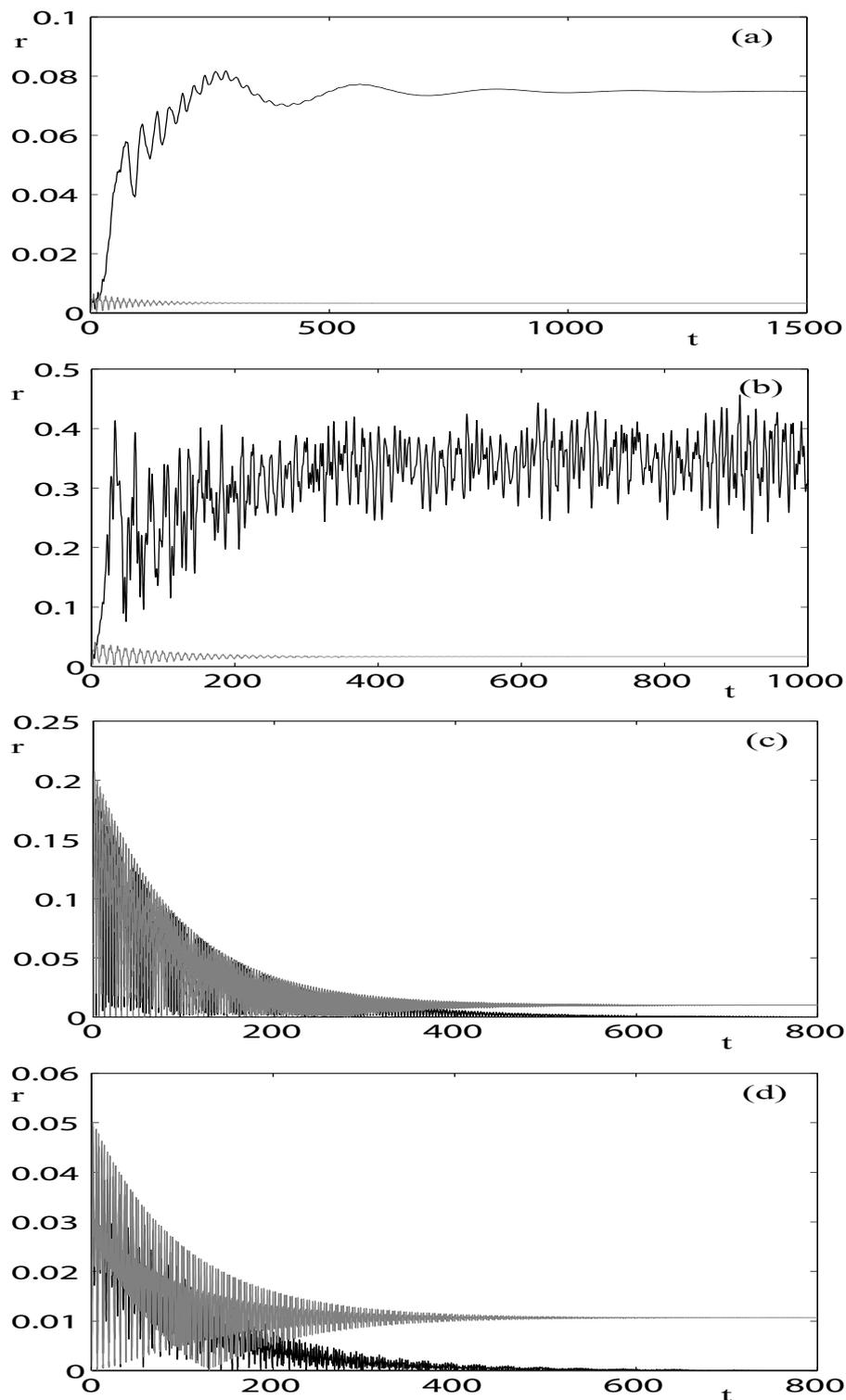


Figura 5.10: Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros  $\zeta = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$ , y  $\delta = 0,01$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = \dot{\phi}_4(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \pi$ , y  $\phi_4(0) = 0$ . Los valores de  $\Omega$  y de  $\mu$  son  $(\Omega, \mu) = (0,5, 0,05)$  en (a),  $(\Omega, \mu) = (1,6, 0,05)$  en (b),  $(\Omega, \mu) = (20, 0,05)$  en (c), y  $(\Omega, \mu) = (4, 0,0025)$  en (d).

este equilibrio coincidente da lugar a vibraciones radiales  $r$  mucho mayores que las que se obtendrían en el caso del rotor sin el ADB (mostrado en gris). Los valores más elevados de  $r$  son para el ADB con cuatro bolas, después para tres bolas, y por último para dos bolas, es decir, que  $r$  es mayor cuanto mayor es el número de bolas del ADB. Los paneles (b) representan el caso para  $\Omega = 0,16$  y  $\mu = 0,05$ . Aquí el análisis de bifurcación no encuentra ningún equilibrio estable (o ciclos límites) (ver Figs.4.1, 4.3, y 4.6). El rotor con el ADB (mostrado en negro) en los tres casos, experimenta un movimiento caótico, alcanzando de nuevo vibraciones radiales mucho más elevadas a las del rotor sin el mecanismo ADB. Este caso merece un estudio más profundo. En los tres sistemas,  $r$  alcanza aproximadamente valores similares alrededor de 0,4. Las Figuras 5.8, 5.9, y 5.10, representan en sus paneles (c) una velocidad de rotación muy elevada,  $\Omega = 20,0$ , y  $\mu = 0,05$ , es decir, muy a la derecha de la frontera de estabilidad marcada por H1 para el equilibrio de balance **1** (ver Figs.4.1, 4.3, y 4.6). El balance dinámico es eventualmente alcanzado, pero con una respuesta transitoria larga. Los valores de  $r_{max}$  son 0,1940, 0,1903, y 0,1855 para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente. Considerando que el transitorio finalizaría cuando  $r < 10^{-3}$ , los valores de  $t_{dec}$  serían 567,89, 722,13, y 603,44 respectivamente. Por tanto, se comprueba que la respuesta transitoria es muy similar en los tres casos.

Los paneles (d) de las Figs.5.8-5.10 muestran un caso con una masa de las bolas pequeña  $\mu = 0,0025$  y con  $\Omega = 4,0$ . Esta masa de las bolas no satisface la condición (3.14) para la excentricidad escogida  $\delta = 0,01$  cuando  $n = 2$  y  $n = 3$ . Por tanto, para dos y tres bolas (ver Figs.5.8(d) y 5.9(d)), el sistema no consigue el balance dinámico, pero alcanza el equilibrio coincidente **2-**, que como se muestra en las Figs.4.1 y 4.3, es estable para  $\Omega = 4$  y  $\mu = 0,0025$ , en ambos casos  $n = 2$  y  $n = 3$ . Al contrario que en las Figs.5.8(a) y 5.9(a), este equilibrio coincidente es ahora preferible al estado final que se obtiene en el caso del rotor sin ADB. Para el ADB con cuatro bolas, la Fig.5.10(d) muestra que el equilibrio de balance se consigue, pero para este las bolas se sitúan todas ellas en la misma posición. Eso significa que, como se dijo en el Capítulo 3, el equilibrio de balance **1** y el equilibrio coincidente **2-** son el mismo cuando  $\mu = \mu_c := \delta/n$  (para el conjunto de parámetros escogidos en este caso se tiene,  $\delta/n = 0,01/4 = 0,0025 = \mu$ ). Esto corresponde a una bifurcación de pitchfork, como se puede comprobar en la Fig.4.6(a).

### 5.2.2. Efecto de las amortiguaciones $\beta$ y $\zeta$

Las Figuras 5.11, 5.12, y 5.13 muestran el efecto de incrementar ambas amortiguaciones  $\zeta$  y  $\beta$ , para el ADB con dos, tres, y cuatro bolas, respectivamente. En estas figuras,  $\delta$  y  $\mu$  se fijan en 0,01 y 0,05, respectivamente. Estos resultados se deberían comparar con los diagramas de bifurcación en el plano  $(\Omega, \zeta)$  mostrados en las Figs.4.2(b), 4.4(b), y 4.7(b), y en el plano  $(\Omega, \beta)$  mostrados en las Figs.4.2(c), 4.4(c), y 4.7(c), en el que los parámetros  $(\delta, \mu)$  están también fijados en (0,01, 0,05). La Figura 5.11(a) muestra para el ADB con dos bolas que para una mayor amortiguación en la suspensión del rotor  $\zeta = 0,25$ , manteniendo la amortiguación sobre las bolas fija en  $\beta = 0,01$ , se consigue un equilibrio de balance con valores de  $r$  durante el transitorio menores, y con un tiempo de decaimiento menor que para  $\zeta = 0,01$ . Sin embargo, las Figs.5.12(a) y 5.13(a) muestran que para el ADB con tres y cuatro bolas, el equilibrio de balance pierde su estabilidad, y el sistema alcanza un ciclo límite con valores de  $r$  alrededor de 0,1 y 0,15. Este resultado coincide con lo que se vio en el diagrama de bifurcación en el plano  $(\Omega, \mu)$  para el ADB con tres bolas en Fig.4.4(b)

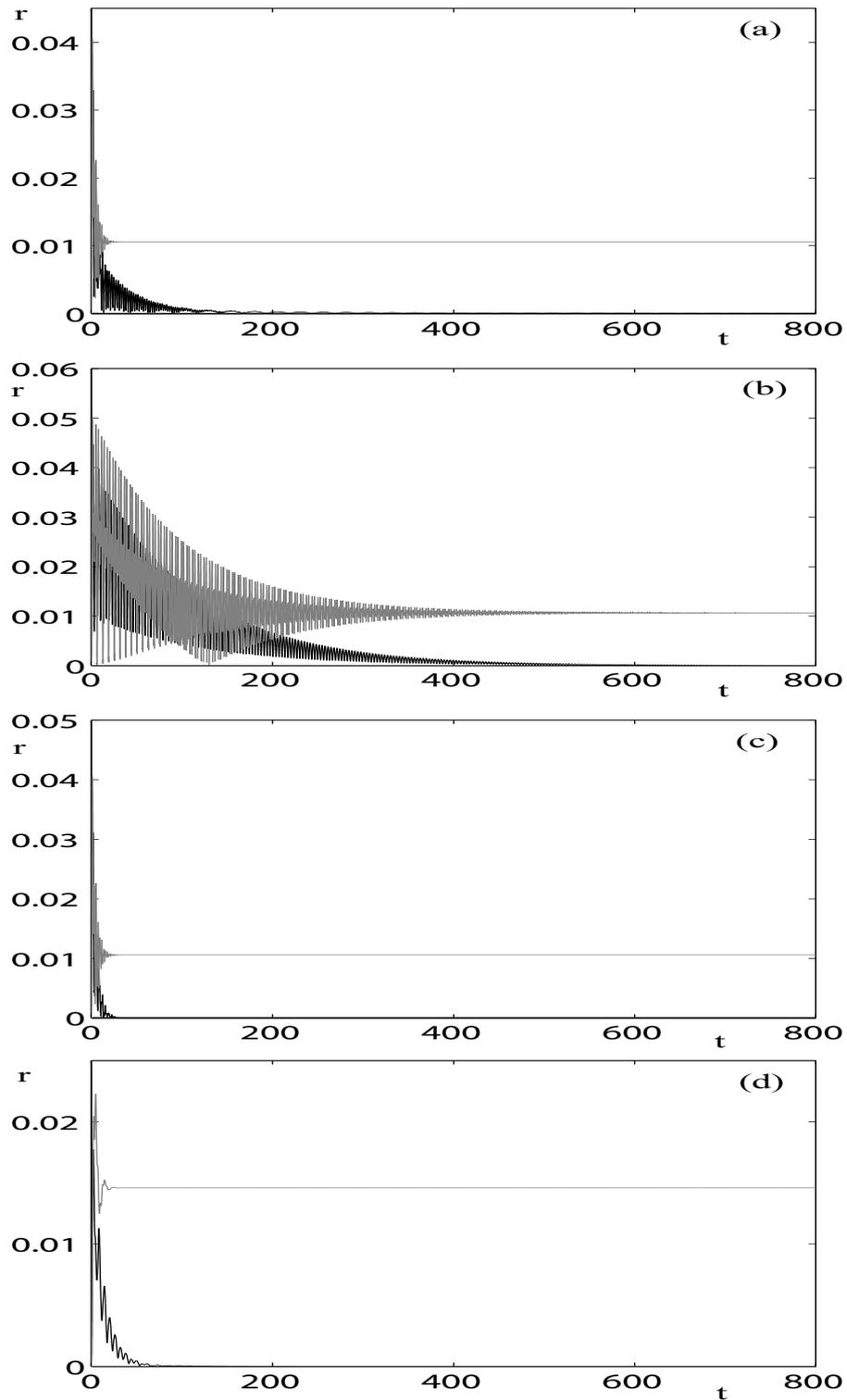


Figura 5.11: Simulación numérica del sistema ADB con dos bolas para el conjunto de parámetros  $\delta = 0,01$ ,  $\mu = 0,05$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/2$ , y  $\phi_2(0) = -\pi/2$ . Los valores de  $\Omega$ ,  $\zeta$  y  $\beta$  son  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0, 25, 0, 01)$  en (a),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0, 01, 0, 25)$  en (b),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0, 25, 0, 25)$  en (c), y  $(\Omega, \zeta, \beta) = (1, 6, 0, 25, 0, 25)$  en (d).

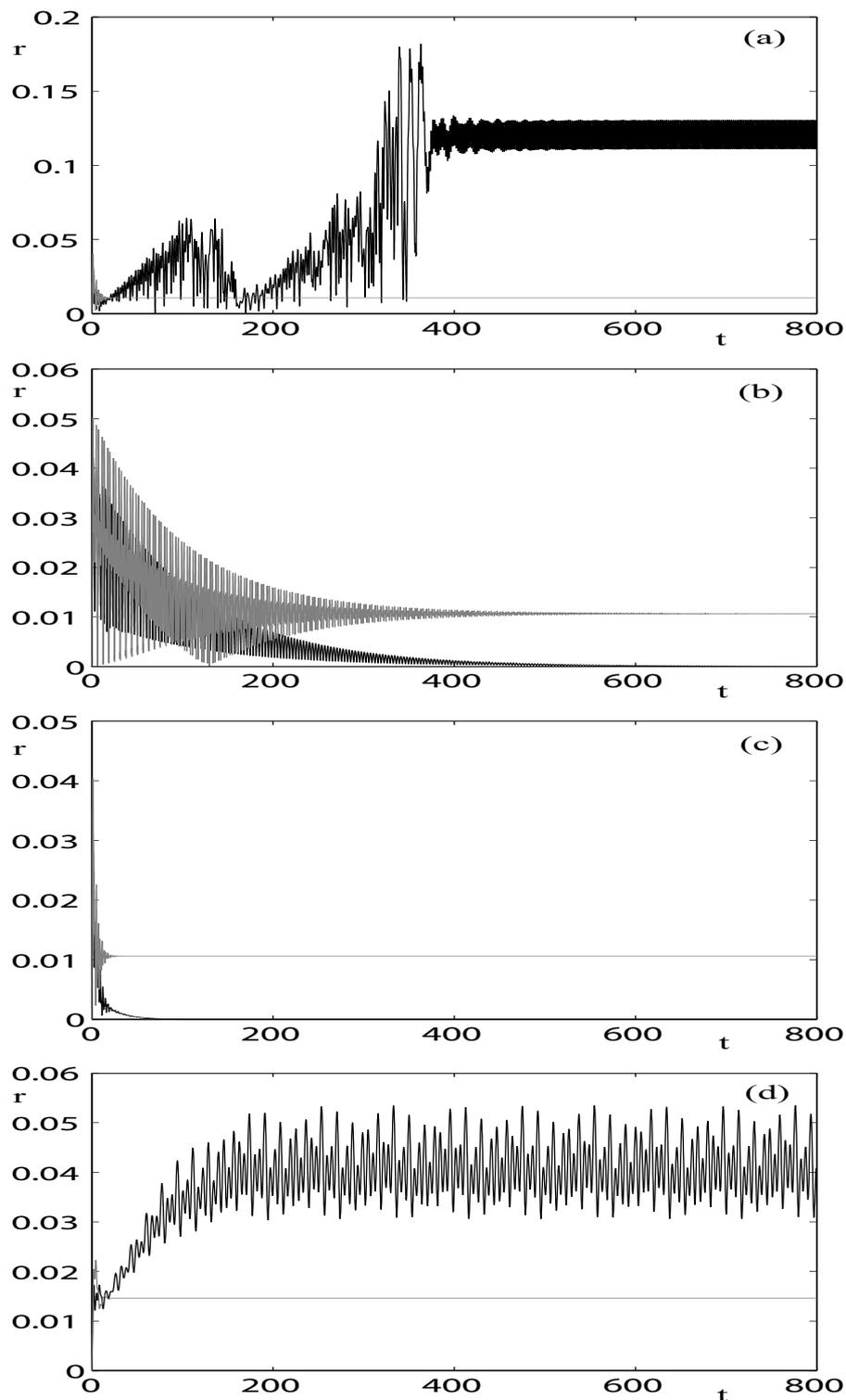


Figura 5.12: Simulación numérica del sistema ADB con tres bolas para el conjunto de parámetros  $\delta = 0,01$ ,  $\mu = 0,05$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/3$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \pi$ . Los valores de  $\Omega$ ,  $\zeta$  y  $\beta$  son  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,25, 0,01)$  en (a),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,01, 0,25)$  en (b),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,25, 0,25)$  en (c), y  $(\Omega, \zeta, \beta) = (1,6, 0,25, 0,25)$  en (d).

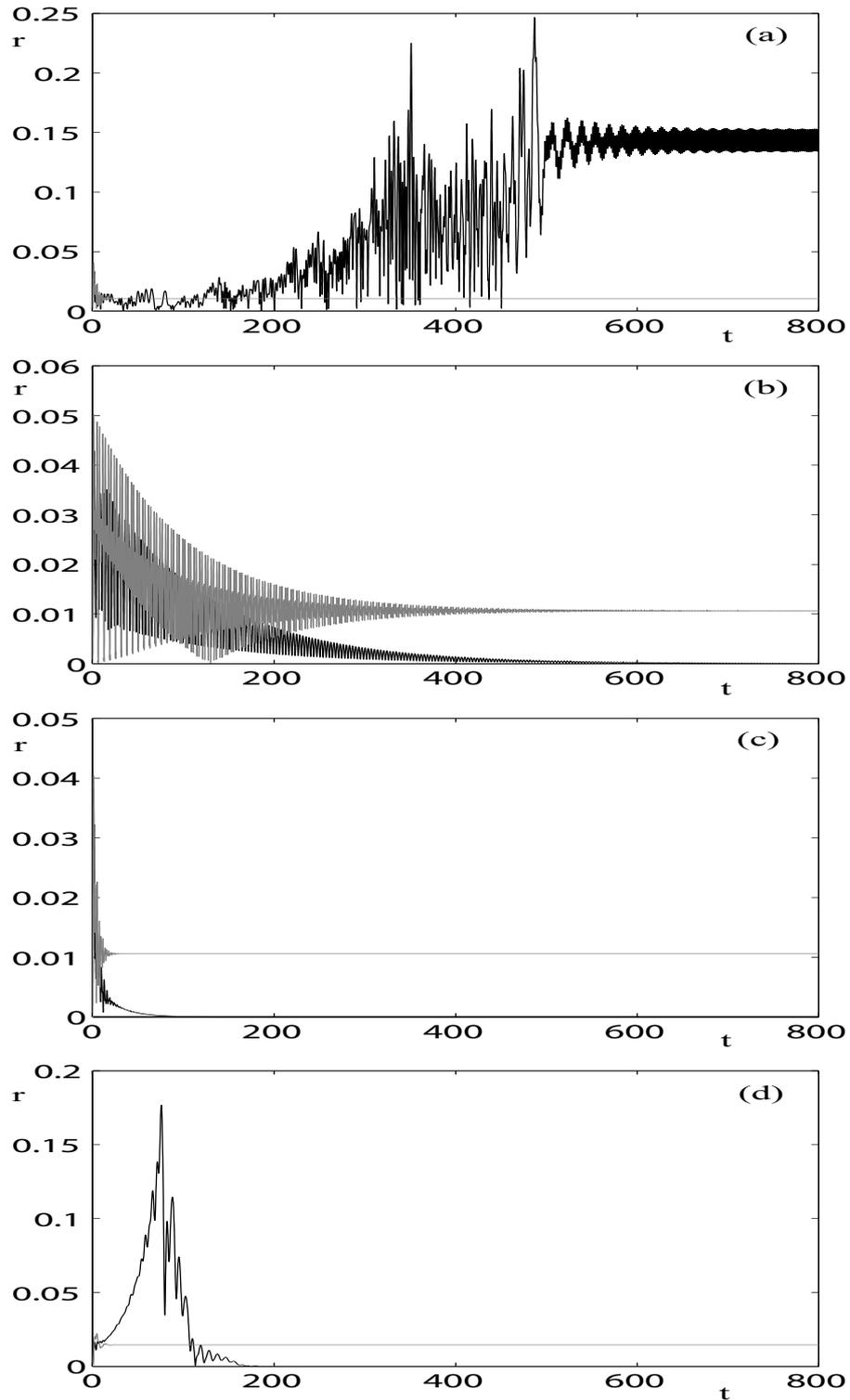


Figura 5.13: Simulación numérica del sistema ADB con cuatro bolas para el conjunto de parámetros  $\delta = 0,01$ ,  $\mu = 0,05$ . Las condiciones iniciales se fijaron en  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_3(0) = \dot{\phi}_4(0) = 0$ ,  $\phi_1(0) = \pi/2$ ,  $\phi_2(0) = -\pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \pi$ , y  $\phi_4(0) = 0$ . Los valores de  $\Omega$ ,  $\zeta$  y  $\beta$  son  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,25, 0,01)$  en (a),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,01, 0,25)$  en (b),  $(\Omega, \zeta, \beta) = (4, 0,25, 0,25)$  en (c), y  $(\Omega, \zeta, \beta) = (1,6, 0,25, 0,25)$  en (d).

y para el ADB con cuatro bolas en Fig.4.7(b), en el que se puede ver que el equilibrio de balance pierde su estabilidad para altos valores de  $\Omega$  cuando  $\zeta$  incrementa su valor. Aproximadamente, para  $\Omega = 4$ , el análisis de bifurcación muestra que el estado de balance es solamente estable para  $\zeta < 0,02$  en el ADB con tres bolas, y para  $\zeta < 0,1$  en el ADB con cuatro bolas.

Las Figs.5.11(b), 5.12(b), y 5.13(b) muestran que un incremento de la amortiguación sobre las bolas hasta  $\beta = 0,25$ , manteniendo constante la amortiguación del rotor en  $\zeta = 0,01$ , da lugar al alcance del equilibrio de balance **1** después de un largo transitorio, para todos los casos, con dos, tres, y cuatro bolas. Ahora, las oscilaciones del transitorio son mucho más suaves que para  $\beta = 0,01$ . La respuesta transitoria para cada caso es de nuevo muy similar. Esto es, los valores de  $(r_{max}, t_{dec})$  son  $(0,0447, 406,21)$ ,  $(0,0421, 421,82)$ , y  $(0,0429, 437,60)$  para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente. Las Figuras 5.11(c), 5.12(c), y 5.13(c) muestran que un incremento en ambas amortiguaciones hasta  $\zeta = 0,25$  y  $\beta = 0,25$  parece tener un efecto altamente deseable; la convergencia del equilibrio de balance **1** es muy rápida. Los tres casos tienen una respuesta transitoria muy similar de nuevo, aunque la duración del transitorio es un poco mayor para un mayor número de bolas:  $t_{dec} = 15,76$  para dos bolas,  $t_{dec} = 32,47$  para tres bolas, y  $t_{dec} = 41,42$  para cuatro bolas. Podemos también observar en este caso que, además de un transitorio más corto, los valores de  $r_{max}$  son un poco más pequeños que en los paneles (b):  $r_{max} = 0,0315$  para dos bolas,  $r_{max} = 0,0325$  para tres bolas, y  $r_{max} = 0,0323$  para cuatro bolas.

Finalmente, las Figs.5.11(d), y 5.13(d) muestran que un incremento en ambas amortiguaciones  $\zeta = \beta = 0,25$  puede estabilizar el movimiento caótico que se producía en las Figs.5.8(b), y 5.10(b) para el ADB con dos y cuatro bolas, respectivamente. De nuevo, la estabilidad se alcanza en un tiempo muy corto, y con un valor de  $r_{max}$  muy bajo en el caso con dos bolas. Sin embargo, el sistema ADB con cuatro bolas toma más tiempo en alcanzar el balance dinámico, y la amplitud de la vibración radial  $r$  alcanza valores elevados durante el transitorio ( $r_{max} \approx 0,17$ ). El ADB con tres bolas es atraído a un ciclo límite, y aunque no se alcance el equilibrio de balance, los valores de  $r$  para este ciclo límite son mucho menores que los valores alcanzados durante el movimiento caótico para  $\zeta = \beta = 0,01$  en Fig.5.9(b). Un estudio más profundo mediante simulaciones numéricas usando los valores  $\beta = \zeta = 0,25$ , muestra que la respuesta del sistema tiene mucha mayor robustez que en aquellas para  $\beta = \zeta = 0,01$ . Se tendría un rango mucho mayor de condiciones iniciales desde las cuales el sistema es atraído al equilibrio de balance **1**, y se conseguiría un transitorio tan corto como en las Figs.5.11(c), 5.12(c), 5.13(c). Por tanto, se concluye que valores elevados de ambas amortiguaciones  $\zeta$  y  $\beta$  dan lugar a mejores respuestas del sistema.

### 5.2.3. Simulación para rangos de $\Omega$ y de $\delta$

En la Figura 5.14 se representa la máxima amplitud de la vibración radial  $r_{max}$  y la duración del transitorio  $t_{dec}$  para un rango de valores de  $\Omega$ , desde 0 a 20. Se utilizan posiciones iniciales de las bolas equidistantes para el ADB con dos, tres, y cuatro bolas. En situaciones prácticas no sabremos cuál será la posición inicial absoluta con respecto al sistema de referencia ligado al rotor, debido a que no se conoce dónde está posicionado su centro de masa. Para hacer un estudio de los valores de  $r_{max}$  y de  $t_{dec}$  que se tendrán en aplicaciones prácticas del ADB, resolvemos las ecuaciones de movimiento del sistema para

diez posiciones iniciales equidistantes de las bolas arbitrarias para cada valor de  $\Omega$ . El valor del parámetro  $\mu$  es elegido tal que la masa total de las bolas sea  $\tilde{m} := n\mu = 6\delta = 0,06$ . Así, se tendrá  $\mu = 0,03$  para el ADB con dos bolas,  $\mu = 0,02$  para el ADB con tres bolas, y  $\mu = 0,015$  para el ADB con cuatro bolas. De esta forma, estamos comparando si es mejor repartir la misma masa rectificadora entre dos, tres, o cuatro bolas. Las Figs.5.14 (a1), (b1), y (c1) muestran que  $r_{max}$  crecen linealmente con  $\Omega$ . Los valores de  $r_{max}$  para dos bolas en (a1), para tres bolas en (b1), y para cuatro bolas en (c1) son muy similares. Para cada  $\Omega$ , se obtienen valores de  $r_{max}$  muy similares para las diez diferentes posiciones iniciales de las bolas. Para  $\Omega < 2,04$ ,  $r_{max}$  toma valores muy altos debido a que en esos casos no se consigue el equilibrado del sistema. En las Figs.5.14 (a2), (b2), y (c2) se pueden ver los valores de  $t_{dec}$  para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente. La variación de  $t_{dec}$  con respecto a  $\Omega$  es más suave que la variación de  $r_{max}$ . Ahora hay más dispersión en los resultados obtenidos para las diferentes posiciones iniciales de las bolas. Así, podemos observar que para un valor específico de  $\Omega$ , el rango de valores de  $t_{dec}$  es más ancho. La duración del transitorio es en general similar para los distintos números de bolas, pero podemos observar que la dispersión de  $t_{dec}$  es un poco más pequeña para cuatro bolas. Es más, para el ADB con cuatro bolas los valores de  $t_{dec}$  son un poco menores.

Resumiendo, podemos afirmar que la respuesta transitoria es peor para mayores velocidades de rotación del rotor. Podemos también concluir que la única diferencia entre compartir la masa rectificadora entre dos, tres, y cuatro bolas, es que el ADB con cuatro bolas muestra valores de  $t_{dec}$  un poco menores, y que es más constante con respecto a diferentes posiciones iniciales de las bolas (cuando están posicionadas equidistantemente).

Estudiemos cómo el parámetro  $\delta$  afecta en la respuesta transitoria en los casos en los que se consigue el balance dinámico del sistema. La Figura 5.15 representa  $r_{max}$  y  $t_{dec}$  para un rango de valores de  $\delta$  desde 0 a  $\tilde{m} := n\mu = 0,03$ . De hecho, para  $\delta > \tilde{m}$ , la masa de las bolas no es lo suficientemente grande como para equilibrar el sistema. Para cada valor de  $\delta$ , resolvemos las ecuaciones de movimiento del sistema para diez posiciones iniciales de las bolas equidistantes. Podemos observar en la Fig.5.15 que la dispersión de los resultados es mayor cuando  $\delta$  se hace mayor. Por el contrario, para  $\delta$  pequeño,  $r_{max}$  y  $t_{dec}$  son aproximadamente iguales para los valores de  $\phi_1(0)$  para los que se resolvieron las ecuaciones. También podemos ver en la Fig.5.15 que la respuesta transitoria es peor para mayores valores de  $\delta$ . Los paneles (a1) para dos bolas, (b1) para tres bolas, y (c1) para cuatro bolas, muestran que  $r_{max}$  crece con  $\delta$ . En los paneles (a2), (b2), y (c2) podemos ver que  $t_{dec}$  varía más bruscamente para  $\delta$  pequeños. Para altos valores de  $\delta$ , la duración del transitorio varía más suavemente con  $\delta$ , pero es más sensible a  $\phi_1(0)$ , es decir, hay una mayor dispersión para las diferentes posiciones iniciales de las bolas con respecto al sistema de referencia rotativo. De esta forma, podemos ver que el rango de puntos para cada  $\delta$  es más ancho cuando  $\delta$  aumenta. Comparando los resultados obtenidos para los diferentes números de bolas (paneles (a1)-(a2) para dos bolas, (b1)-(b2) para tres bolas, y (c1)-(c2) para cuatro bolas), se observa que el sistema ADB con cuatro bolas muestra menor sensibilidad a  $\phi_1(0)$  que el ADB con dos bolas, y que el ADB con tres bolas. Por ejemplo, en el panel (c1), los valores de  $r_{max}$  para las diferentes posiciones iniciales de las bolas están aproximadamente posicionadas en los mismos puntos. Por el contrario, en (a1) podemos observar diferentes valores de  $r_{max}$  para un mismo  $\delta$ . En la Figura 5.16 se representan los mismos resultados que en la Fig.5.15, pero con una masa total de las bolas mayor:  $\tilde{m} = 0,12$ . Ahora el rango de  $\delta$  es mayor, debido a que las bolas son capaces de alcanzar el balance dinámico para una

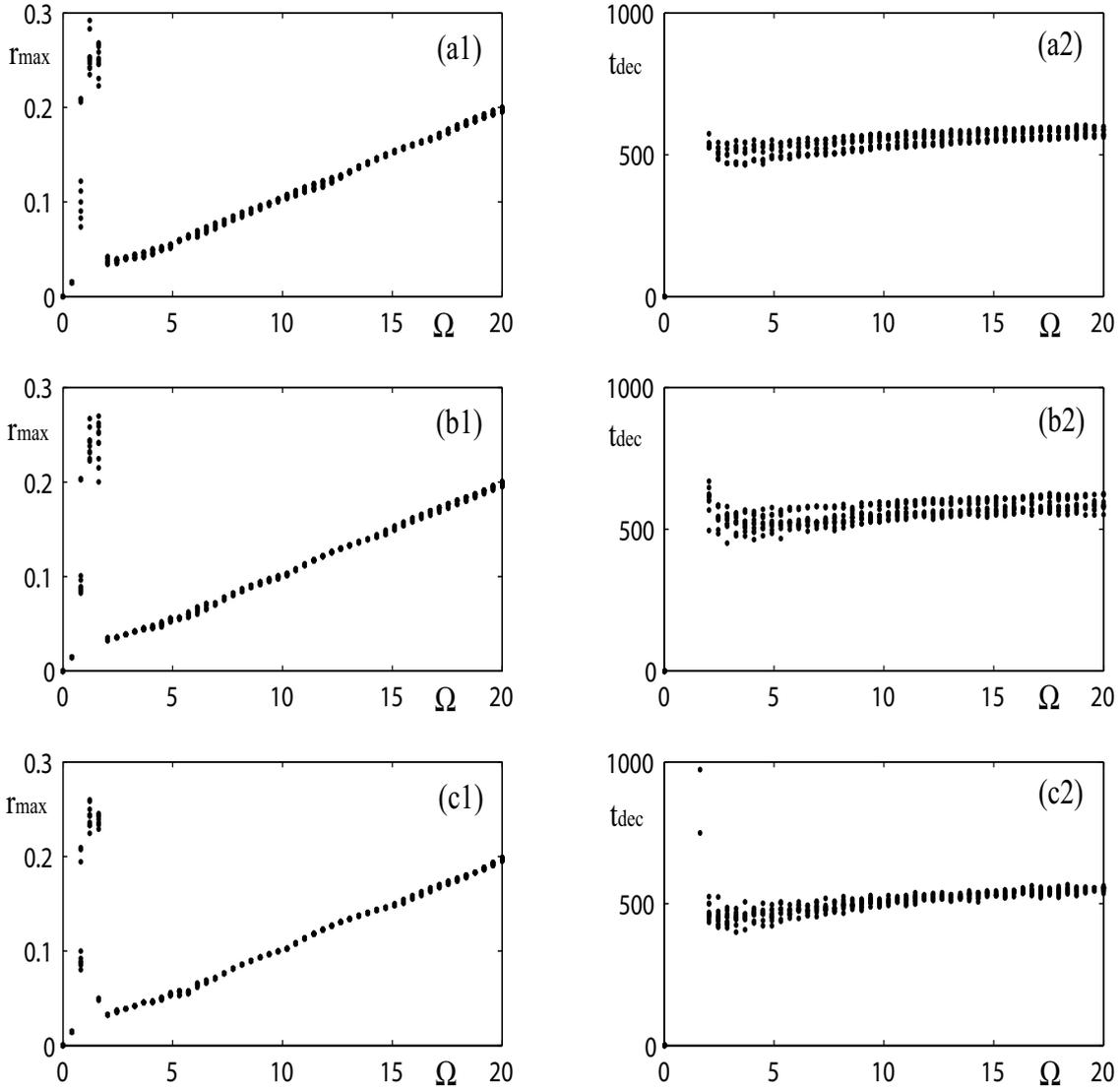


Figura 5.14: Simulaciones del ADB con dos, tres, y cuatro bolas para el rango  $\Omega \in [0, 20]$ . Los otros parámetros son  $\zeta = \beta = \delta = 0,01$ , y  $\mu = 6\mu_c$  (donde  $\mu_c := \delta/n$ , y  $n$  es el número de bolas); esto es,  $\mu = 0,03$  para el ADB con dos bolas (paneles (a1)-(a2)),  $\mu = 0,02$  para el ADB con tres bolas (paneles (b1)-(b2)), y  $\mu = 0,015$  para el ADB con cuatro bola (paneles (c1)-(c2)). Las ecuaciones de movimiento se resolvieron para diez posiciones equidistantes de las bolas arbitrarias para cada valor de  $\Omega$ :  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi]$  para dos bolas;  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + 2\pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - 2\pi/3$ , con  $\phi_1(0) \in [0, 2\pi/3]$  para tres bolas; y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$ , y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) - \pi/2$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi/2]$  para cuatro bolas. El resto de condiciones iniciales se fijan en cero. La máxima amplitud de la vibración radial durante el transitorio  $r_{max}$  se representa frente a  $\Omega$  en los paneles (a1), (b1), y (c1) para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente; la duración del transitorio  $t_{dec}$  se dibuja frente a  $\Omega$  en los paneles (a2), (b2), y (c2) para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente.

excentricidad  $\delta$  mayor. Los resultados que se muestran en la Fig.5.16 son muy similares a los mostrados en Fig.5.15. Así, la dispersión crece con  $\delta$ , y  $r_{max}$  y  $t_{dec}$  en el rango  $\delta \in [0, 0,03]$ , son similares que para  $\tilde{m} = 0,03$ .

Resumiendo, podemos concluir que bolas más grandes no afectan perjudicialmente a la respuesta transitoria del sistema. Además, con un valor más elevado de  $\mu$ , sería posible alcanzar el balance dinámico para un mayor rango de  $\delta$ . Por tanto, en aplicaciones prácticas del ADB, sería recomendable usar bolas tan grandes como sea posible. Finalmente, observando las Figs.5.16 (a2), (b2), y (c2), es posible confirmar que cuando la masa total de las bolas  $\tilde{m}$  se distribuye entre cuatro bolas, en vez de entre dos, se tiene una menor dispersión de los resultados. Por tanto, reafirmamos que la respuesta transitoria del ADB sería menos sensible a las posiciones iniciales de las bolas cuando el número de bolas es mayor. Por tanto, sería mejor en aplicaciones prácticas usar el mecanismo ADB con cuatro bolas, en lugar del mecanismo ADB con dos bolas, debido a que se obtendrían resultados similares para distintos experimentos, en los que las posiciones iniciales de las bolas serían diferentes. Recordemos que esta conclusión sólo es válida para posiciones de las bolas equidistantes, para las que se han hecho los experimentos numéricos. De nuevo, se deberían llevar a cabo investigaciones más profundas para obtener resultados más generales.

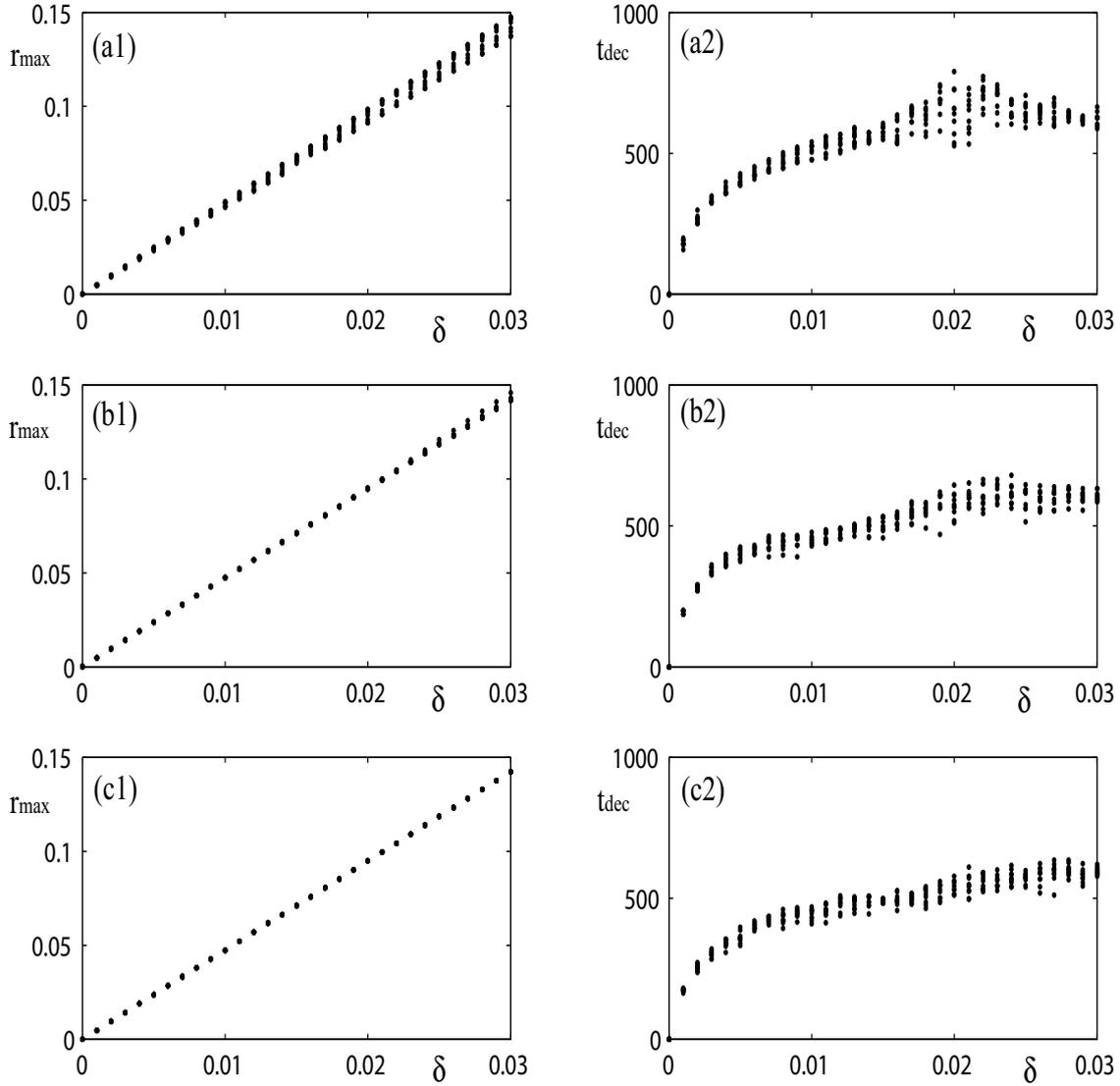


Figura 5.15: Simulación numérica del sistema ADB con dos, tres, y cuatro bolas, para el rango  $0 < \delta < \tilde{m}$ , con  $\tilde{m} = 0,03$ . Los otros parámetros son  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = 0,01$ , y  $\mu = \tilde{m}/n$ ; esto es,  $\mu = 0,015$  para el ADB con dos bolas (paneles (a1)-(a2)),  $\mu = 0,01$  para el ADB con tres bolas (paneles (b1)-(b2)), y  $\mu = 0,0075$  para el ADB con cuatro bolas (paneles (c1)-(c2)). Las ecuaciones de movimiento se resolvieron para diez posiciones iniciales equidistantes de las bolas arbitrarias para cada valor de  $\delta$ :  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi]$  para dos bolas;  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + 2\pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - 2\pi/3$ , con  $\phi_1(0) \in [0, 2\pi/3]$  para tres bolas; y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$ , y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) - \pi/2$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi/2]$  para cuatro bolas. El resto de las condiciones iniciales se tomaron iguales a cero. La máxima amplitud de la vibración radial durante el transitorio  $r_{max}$  se dibuja frente a  $\delta$  en los paneles (a1), (b1), y (c1) para dos, tres, y cuatro bolas, respectivamente; la duración del transitorio  $t_{dec}$  se dibuja frente a  $\delta$  en los paneles (a2), (b2), y (c2) para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente.

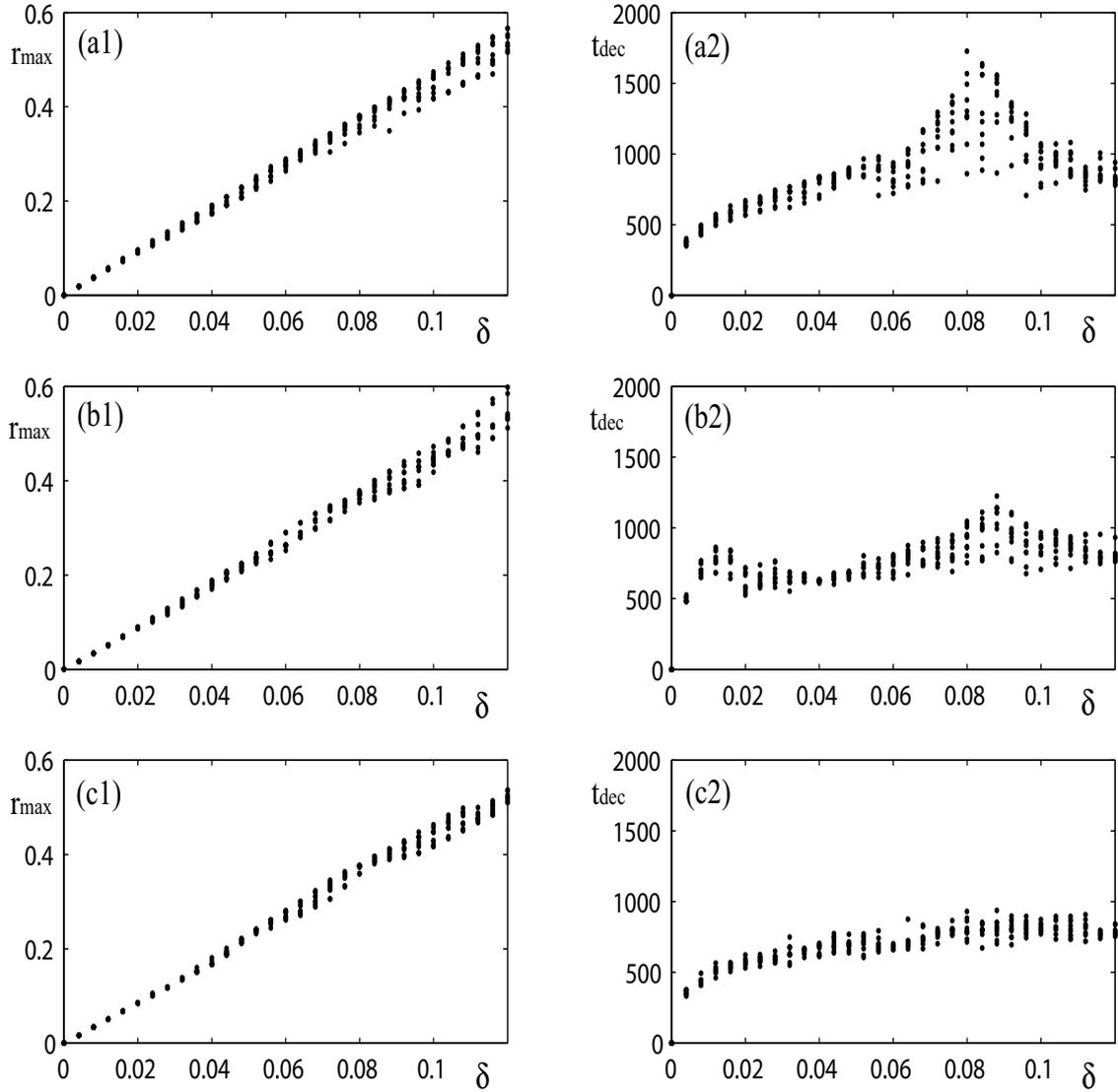


Figura 5.16: Simulación numérica del sistema ADB con dos, tres, y cuatro bolas, para el rango  $0 < \delta < \tilde{m}$ , con  $\tilde{m} = 0,12$ . Los otros parámetros son  $\Omega = 4$ ,  $\zeta = \beta = 0,01$ , y  $\mu = \tilde{m}/n$ ; esto es,  $\mu = 0,06$  para el ADB con dos bolas (paneles (a1)-(a2)),  $\mu = 0,04$  para el ADB con tres bolas (paneles (b1)-(b2)), y  $\mu = 0,03$  para el ADB con cuatro bolas (paneles (c1)-(c2)). Las ecuaciones de movimiento se resolvieron para diez posiciones iniciales equidistantes de las bolas arbitrarias para cada valor de  $\delta$ :  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi]$  para dos bolas;  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + 2\pi/3$ , y  $\phi_3(0) = \phi_1(0) - 2\pi/3$ , con  $\phi_1(0) \in [0, 2\pi/3]$  para tres bolas; y  $\phi_2(0) = \phi_1(0) + \pi/2$ ,  $\phi_3(0) = \phi_1(0) + \pi$ , y  $\phi_4(0) = \phi_1(0) - \pi/2$ , con  $\phi_1(0) \in [0, \pi/2]$  para cuatro bolas. El resto de las condiciones iniciales se tomaron iguales a cero. La máxima amplitud de la vibración radial durante el transitorio  $r_{max}$  se dibuja frente a  $\delta$  en los paneles (a1), (b1), y (c1) para dos, tres, y cuatro bolas, respectivamente; la duración del transitorio  $t_{dec}$  se dibuja frente a  $\delta$  en los paneles (a2), (b2), y (c2) para dos, tres, y cuatro bolas respectivamente.



## Capítulo 6

# Conclusiones

El análisis del mecanismo de estabilización automático para rotores excéntricos que se ha llevado a cabo en este proyecto, nos ayuda a entender mejor el comportamiento de tales sistemas ADB. Por ejemplo, los resultados obtenidos muestran cómo cambia la respuesta del ADB al variar los parámetros y las condiciones iniciales del sistema. También se incluyen las condiciones necesarias para que se consiga el equilibrado del sistema en los casos de dos, tres y cuatro bolas, y se descubren las diferencias y similitudes entre estos tres casos estudiados.

El análisis de bifurcación numérica realizado en el Capítulo 4 mostró que el equilibrado del sistema es posible cuando las bolas rectificadoras son lo suficientemente grandes como para contrarrestar la masa desequilibrada. Específicamente, si la razón entre la masa de las bolas y la masa del rotor es mayor que la excentricidad adimensional dividida entre el número de bolas ( $\mu > \delta/n$ ), entonces el balance dinámico puede ser en principio alcanzado. Esto quiere decir que, para las mismas masas rectificadoras, un ADB con más bolas puede contrarrestar una mayor excentricidad  $\delta$ . El equilibrio de balance mostró ser estable para velocidades de giro suficientemente grandes. Vimos que la región de estabilidad de este equilibrio de balance empieza en una bifurcación de Hopf, y continúa indefinidamente para altos valores de  $\Omega$ . Cuando la condición de balance dinámico no se cumple, es decir, para  $\mu < \delta/n$ , se encontró otro equilibrio en el que todas las bolas coincidían en la misma posición. Este equilibrio resultó ser estable para casi todo el rango de valores de  $\Omega$ , y la simulación numérica mostró que para altos valores de  $\Omega$  la respuesta del sistema ADB presentaba mejoras con respecto al caso del rotor sin el ADB.

La principal diferencia descubierta entre los casos de dos, tres y cuatro bolas en el análisis de bifurcación es que, con un mayor número de bolas, el equilibrio de balance pierde su estabilidad cuando la amortiguación del sistema de suspensión del rotor es elevada; ver panel (b) de las Figs:4.4 y 4.7. Este efecto es más perceptible en el ADB con tres bolas que en el ADB con cuatro bolas. Se descubrió que la estabilidad del equilibrio de balance se recuperaba si la amortiguación viscosa que actúa sobre las bolas  $\beta$  toma un valor elevado; ver las Figs.4.5 y 4.8. Los resultados de la simulación ratificaban estos hechos, y mostraban que cuando  $\zeta$  aumenta, el balance dinámico se consigue para un menor número de posiciones iniciales de la bola. Sin embargo, vimos que la respuesta transitoria mejora (es decir, que la máxima amplitud de la vibración radial y la duración del transitorio disminuyen) conforme  $\zeta$  y  $\beta$  toman valores mayores.

Los resultados de la simulación de las ecuaciones de movimiento han sido utilizados para estudiar cómo las condiciones iniciales afectan en la respuesta del mecanismo ADB. En general, se observó que la respuesta del sistema es poco sensible a la posición inicial y a la velocidad inicial del eje del rotor. Por el contrario, las posiciones iniciales de las bolas y sus velocidades iniciales tienen una fuerte influencia en el comportamiento del mecanismo. Así, el modo en el que las bolas son dejadas en libertad determina la atracción dinámica del equilibrio de balance y la respuesta transitoria del sistema. Por ejemplo, se observó en la Fig.?? que incluso para conjuntos de parámetros para los que el análisis de bifurcación predecía la estabilidad del equilibrio de balance, cuando las bolas son soltadas con una velocidad inicial con respecto al sistema de referencia rotativo igual a  $-\Omega$ , el balance dinámico no era alcanzado, y el sistema tendía a un ciclo oscilatorio. Por tanto, se mostró que existe una coexistencia entre el equilibrio de balance y otro comportamiento dinámico, y que la atracción dinámica está en definitiva determinada por las condiciones iniciales de las bolas. Después de muchas simulaciones numéricas, se encontró una configuración óptima para las condiciones iniciales de las bolas. Esta configuración consiste en que las bolas empiecen equidistantes unas con respecto a otras, y con una velocidad nula con respecto al sistema de referencia rotativo ligado al rotor. Para estos casos se consigue que el equilibrado se alcance prácticamente siempre, y que el transitorio sea óptimo (pequea amplitud radial y duración corta del transitorio). Además se observa en estos casos que la respuesta del sistema es poco sensible a la posición inicial absoluta de las bolas con respecto al rotor, y que el ADB se comporta de manera similar en los tres casos estudiados (con dos, tres y cuatro bolas).

Una comparación entre los mecanismos ADB con diferente número de bolas, pero con la misma masa total de las bolas  $n\mu$ , mostró que el sistema con cuatro bolas es el menos sensible a las posiciones iniciales de las bolas cuando estas son dejadas en libertad con la configuración equidistante explicada en el párrafo anterior. Además, la máxima vibración radial es en general un poco más pequeña para el ADB con cuatro bolas, y la duración del transitorio es algo menor. Estos efectos son más pronunciados para mayores valores de  $\Omega$  y  $\delta$ . Los resultados obtenidos para diferentes masas totales de las bolas son muy similares, pero cuando se tiene un mayor  $n\mu$  es posible conseguir equilibrar el sistema para mayores excentricidades del rotor. Por consiguiente, no hay ningún inconveniente en tomar las masas rectificadores tan grandes como sean posible aparte del mayor momento de inercia que tendrá que ser vencido por el motor.

Las conclusiones obtenidas en este proyecto son útiles para dar recomendaciones para las aplicaciones prácticas del mecanismo ADB:

- Es aconsejable mantener unas bolas con respecto a otras equidistantes y fijas al eje del rotor hasta que este alcance su velocidad de rotación estacionaria, y después soltarlas. De esta forma, aunque no es posible conocer dónde está situado el centro de masa del rotor, se puede obtener una respuesta óptima debido a la insensibilidad a la posición inicial absoluta de las bolas con respecto al rotor para esta configuración equidistante.
- Se recomienda usar bolas tan grandes como sean posibles. De esta forma, será más probable que se consiga el equilibrado del sistema.
- En caso de usar el ADB con tres o cuatro bolas, los cuales han mostrado tener algunas mejoras con respecto al caso de dos bolas, se deberá estar seguro de que la

amortiguación del sistema que sostiene el rotor sea lo suficientemente pequeña como para que el equilibrio de balance sea estable.

- Debido a que una alta viscosidad en el canal sobre el que se mueven las bolas da lugar a una respuesta transitoria más suave, y consigue que el equilibrado sea más fácil de alcanzar, es recomendable tomar un alto valor de la amortiguación sobre la bolas  $\beta$ .
- Por lo general, a mayor número de bolas, mejor es el comportamiento del mecanismo ADB.

Debemos comentar para futuros trabajos que **MATCONT** calcula diagramas de bifurcación de alta precisión, pero tiene el inconveniente de ser demasiado lento. Por ello, no ha sido posible hacer una continuación de los ciclos límites que salen de las bifurcaciones de Hopf, debido a restricciones de tiempo. Por tanto, un futuro trabajo podría ser obtener ciclos límites con **AUTO** para el ADB con tres y cuatro bolas. Debido a que en este proyecto estamos suponiendo que las bolas se mueven sobre distintos canales, otro trabajo sería modelar impactos entre las bolas, y hallar cómo estas interacciones afectan al comportamiento del mecanismo ADB. Se puede también incentivar la realización de un estudio más detallado para un mayor número de bolas que cuatro ; de esta forma se averiguaría si las ventajas halladas para el ADB con tres y cuatro bolas se acentúan con un mayor número de bolas. Más trabajo sería requerido, usando los métodos presentados en este proyecto, para conseguir el diseño óptimo de un ADB para una aplicación física particular. Esto necesitaría claramente estar acompañado de resultados experimentales.



## Apéndice A

# Ecuaciones en MATLAB

El programa matemático `Matlab` ha sido usado para llevar a cabo tanto el análisis numérico de bifurcación del sistema ADB, como para integrar sus ecuaciones de movimiento con la finalidad de obtener la evolución de las coordenadas con el tiempo. Para utilizar las ecuaciones de movimiento (2.25)-(2.26) en `Matlab`, es necesario reescribirlas como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello, se empieza por definir las variables

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}, \\ v &= \dot{y}, \\ \theta_i &= \dot{\phi}_i, \end{aligned} \tag{A.1}$$

pudiendo definir el vector de coordenadas del sistema como

$$q = \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_2 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \phi_n \\ \theta_n \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Después de sustituir (A.1) en (2.25) y (2.26), se obtienen las siguientes  $2 + n$  ecuaciones,

$$\begin{aligned} (1 + n\mu)\dot{u} + 2\zeta u - 2\Omega(1 + n\mu)v + kx - 2\Omega\zeta y &= \delta\Omega^2 + \\ \mu \sum_{i=1}^n (\Omega + \theta_i)^2 \cos \phi_i + \mu \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \sin \phi_i, \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} (1 + n\mu)\dot{v} + 2\Omega(1 + n\mu)u + 2\zeta v + 2\Omega\zeta x + ky &= -\mu \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \cos \phi_i + \\ \mu \sum_{i=1}^n (\Omega + \theta_i)^2 \sin \phi_i, \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\dot{\theta}_i + \beta\theta_i = (\dot{u} - \Omega^2 x - 2\Omega v) \sin \phi_i - (\dot{v} - \Omega^2 y + 2\Omega u) \cos \phi_i, \tag{A.5}$$

donde  $i = 1 \dots n$ .

Reordenando (A.5), es posible poner  $\dot{\theta}_i$  en función del vector de coordenadas  $q$ , y de  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$ . De esta forma tenemos

$$\dot{\theta}_i = -\beta\theta_i + (\dot{u} - \Omega^2x - 2\Omega v) \sin \phi_i - (\dot{v} - \Omega^2y + 2\Omega u) \cos \phi_i = G_{2+i}(q). \quad (\text{A.6})$$

Después de sustituir la expresión (A.6) en (A.3) y (A.4), se pueden escribir expresiones de  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$  en función del vector de coordenadas  $q$ . De esta forma se tiene

$$\dot{u} = \frac{b(q)g(q) - c(q)f(q)}{b(q)^2 - a(q)c(q)} = G_1(q), \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{v} = \frac{b(q)f(q) - a(q)g(q)}{b(q)^2 - a(q)c(q)} = G_2(q), \quad (\text{A.8})$$

donde  $a, b, c, f$  y  $g$  son variables en función del vector de coordenadas  $q$ ,

$$a = (1 + n\mu) - \mu \sum_{i=1}^n (\sin \phi_i)^2, \quad (\text{A.9})$$

$$b = \mu \sum_{i=1}^n \sin \phi_i \cos \phi_i, \quad (\text{A.10})$$

$$c = (1 + n\mu) - \mu \sum_{i=1}^n (\cos \phi_i)^2, \quad (\text{A.11})$$

$$f = -2\zeta u + 2\Omega(1 + n\mu)v - kx + 2\Omega\zeta y + \delta\Omega^2 + \quad (\text{A.12})$$

$$\mu \sum_{i=1}^n (\Omega + \theta_i)^2 \cos \phi_i - \mu\beta \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \phi_i + \mu(-\Omega^2x - 2\Omega v) \sum_{i=1}^n (\sin \phi_i)^2 - \mu(-\Omega^2y + 2\Omega u) \sum_{i=1}^n (\sin \phi_i \cos \phi_i),$$

$$g = -2\Omega(1 + n\mu)u - 2\zeta v - 2\Omega\zeta x - ky + \quad (\text{A.13})$$

$$\mu\beta \sum_{i=1}^n \theta_i \cos \phi_i - \mu(-\Omega^2x - 2\Omega v) \sum_{i=1}^n \sin \phi_i \cos \phi_i + \mu(-\Omega^2y + 2\Omega u) \sum_{i=1}^n (\cos \phi_i)^2 + \mu \sum_{i=1}^n (\Omega + \theta_i)^2 \sin \phi_i.$$

En definitiva, hemos sido capaz de escribir las ecuaciones de movimiento como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\dot{q} = F(q) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{y} \\ \dot{v} \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ G_1(q) \\ v \\ G_2(q) \\ \theta_i \\ G_{2+i}(q) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

que es el modo en el que son introducidas en `Matlab`.

# Bibliografía

- [1] J. Adolfsson. *Passive Control of Mechanical Systems: Bipedal Walking and Autobalancing*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2001.
- [2] J. D. Alexander. An Automatic Dynamic Balancer. *Proceeding, 2nd Southeastern Conference*, 415-426, 1964
- [3] P. Bövik and C. Högfors. Autobalancing of rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 111(3):429-440, 1986.
- [4] J. W. Cade. Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms. *Design News*, 234-239, 1965.
- [5] P. C. P. Chao, Y.-D Huang, and C.-K. Sung. Non-planar dynamic modeling for the optical disk drive spindles equipped with an automatic balancer. *Mechanism and Machine Theory*, 38:1289-1305, 2003.
- [6] J. Chung and I. Jang. Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 259(1):31-43, 2003.
- [7] J. Chung and D.S.Ro. Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5):1035-1056, 1999.
- [8] A. Dhooge, W. Govaerts, Yu.A. Kuznetsov, W. Mestrom, and A.M. Riet. MATCONT: A continuation toolbox in Matlab, 2004. <http://allserv.UGent.be/adhooge/>.
- [9] K. Green, A. R. Champneys, and N. J. Lieven. *Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors*. Bristol Laboratory for Advanced Dynamic Engineering, University of Bristol, Bristol, 2004.
- [10] K. Green, A. R. Champneys, and M. I. Friswell. *Analysis of transient response of an automatic dynamic balancer for eccentric rotors*. Bristol Laboratory for Advanced Dynamic Engineering, University of Bristol, Bristol, 2004.
- [11] J. P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*, Dover, New York, 225-281, 1956.
- [12] Health and Safety Executive. *Hand-arm Vibration*, volume HS(G)88. HSE Books, Sudbury, 1994. ISBN 0-7176-0743-7.
- [13] W.-Y. Huang, C.-P. Chao, J.-R. Kang, and C.-K. Sung. The application of balltype balancers for radial vibration reduction of high-speed optic drives. *Journal of Sound and Vibration*, 250(3):415-430, 2002.

- [14] C.-H. Hwang and J. Chung. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races. *JSME International Journal: Series C*, 42(2):265-272, 1999.
- [15] H. H. Jeffcott. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed - The effect of want of balance. *Philos. Mag. Ser. 6*, 37:304-314, 1919.
- [16] W. Kim and J. Chung. Performance of automatic ball balancers on optical disc drives. *Proc Instn Mech Engrs Part C: J Mechanical Engineering Science*, 216(1071-1080), 2002.
- [17] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, Berlin, 1995.
- [18] J. Lee and W. K. Van Moorhem. Analytical and experimental analysis of a self-compensating dynamic balancer in a rotating mechanism. *Transactions of ASME*, 118:468-475, 1996.
- [19] T. Majewski. Synchronous vibration eliminator for an object having one degree of freedom. *Journal of Sound and Vibration*, 112(3):401-413, 1987.
- [20] R. Rajalingham and S. Rakheja. Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers. *Journal of Sound and Vibration*, 217(3):453-466, 1998.
- [21] R. S. Sharp. An analysis of a self-balancing system for rigid rotors. *J. Mech. Engng. Sci.*, 17(4):186-189, 1975.
- [22] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications in Physics, Biology, Chemistry, and Engineering Studies in Nonlinearity*. Addison-Wesley, 1994.
- [23] SKF Autobalance Systems. Dynaspin. <http://dynaspin.skf.com>.
- [24] E. L. Thearle. A New Type of Dynamic-Balancing Machine. *Transactions of ASME*, 54(APM-54-12):131-141, 1932.
- [25] N. van de Wouw, M. N. van den Heuvel, J. A. van Rooij, and H. Nijmeijer. Performance of an automatic ball balancer with dry friction. Preprint: Eindhoven University of Technology, The Netherlands.