Capítulo 2

Lógica difusa y controladores difusos

La lógica difusa proporciona una herramienta matemática para describir e interpretar el comportamiento de un sistema complejo mediante un conjunto de reglas expresadas en términos lingüísticos similares a los empleados en el lenguaje natural. Esta característica ha motivado su empleo en diferentes campos de aplicación y el desarrollo de numerosos sistemas difusos siguiendo distintas estrategias de realización que van desde el empleo de *software* sobre procesadores de propósito general hasta la implementación microelectrónica mediante *hardware* dedicado.

Un *sistema de inferencia difuso* está compuesto por un conjunto de reglas que utilizan términos lingüísticos similares a los empleados en el lenguaje natural y un mecanismo de inferencia que permite extraer conclusiones correctas a partir de datos imprecisos o incompletos. En este capítulo se introducen los conceptos de conjuntos difusos, variables lingüísticas y bases de reglas, y se presentan los formalismos matemáticos que facilitan la aplicación de las técnicas de razonamiento aproximado proporcionadas por la lógica difusa. Para ello se estudian los diferentes operadores difusos que pueden utilizarse como conectivos lingüísticos, funciones de implicación, operadores de agregación y métodos de defuzzificación, y se analizan algunos de los mecanismos de inferencia más frecuentemente usados en aplicaciones prácticas de la lógica difusa. En la última sección se explica la conexión de las funciones *PWA* y los sistemas difusos.

2.1. Conjunto difuso y función de pertenencia

El concepto fundamental en que se basa la lógica difusa es el de *conjunto difuso*, un tipo de conjunto que se caracteriza porque los elementos del universo de discurso en el que se define pueden pertenecer a él con un cierto grado, que viene representado por una *función de pertenencia*. El concepto de conjunto difuso es una generalización del concepto clásico de conjunto. En la teoría clásica de conjuntos, un elemento pertenece o no a un conjunto. Sin embargo, en la teoría de conjuntos difusos un elemento puede pertenecer a varios conjuntos al mismo tiempo con distintos grados de pertenencia. En la *Figura 7* se compara la representación gráfica de conjuntos clásicos y difusos.

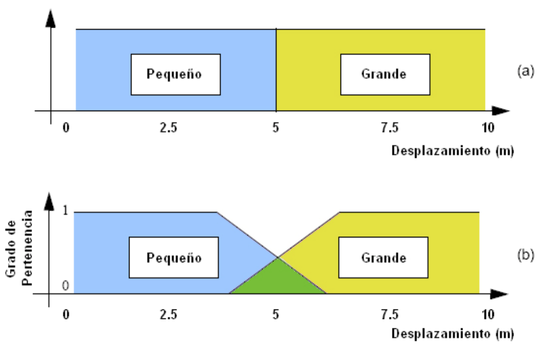

Figura 7. Representación gráfica de conjuntos clásicos (a) y difusos (b)

Matemáticamente un conjunto difuso puede ser representado como una serie ordenada de pares que asignan a cada elemento *u* del universo de discurso *U* un grado de pertenencia $\mu_F(u)$.

$$F = \{(u,\mu_F(u)) \mid u \in U\}$$ **Ecuación 5**

La elección de la forma de la función de pertenencia es subjetiva y depende del contexto. Las formas más utilizadas se representan en la *Figura 8*.

Se denomina *soporte* de un conjunto difuso al conjunto de puntos del universo de discurso para los cuales la función de pertenencia tiene un valor mayor que cero.

$$soporte(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) > 0\}$$ **Ecuación 6**

Un soporte que solo está constituido por un único punto u_0, es denominado singularidad difusa o *fuzzy singleton*.

$$\mu_F(u) = 0 \ \ si \ \ u \neq u_0, \mu_F(u_0) = 1$$ **Ecuación 7**

El uso de singletones simplifica considerablemente el proceso de inferencia y posibilita una implementación electrónica eficiente, por lo que es muy habitual en aplicaciones de control.

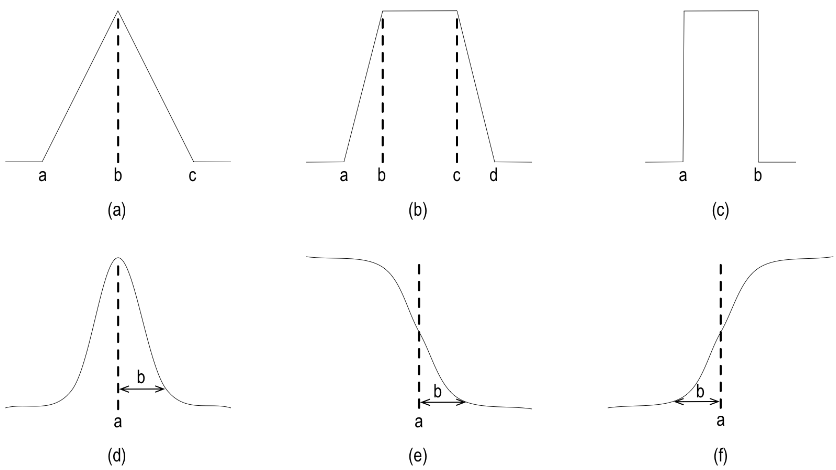

Figura 8. Funciones de pertenencia más utilizadas: (a) Triangular (b) Trapezoidal (c) Rectangular (d) Gaussiana (e)Tipo-Z (f)Tipo-S

2.2. Variables lingüísticas

Se define una *variable lingüística* como aquella cuyos valores pueden expresarse mediante términos del lenguaje natural. Los valores lingüísticos se representan mediante conjuntos difusos caracterizados por funciones de pertenencia dentro del universo de discurso. Una variable lingüística se caracteriza por 4 elementos (X, T, U, M) donde X es el nombre asignado a la variable lingüística, T es el conjunto de etiquetas o valores lingüísticos que puede tomar la variable, U es el universo de discurso en el que se define la variable y M es una regla semántica que asocia cada etiqueta lingüística con un conjunto difuso definido sobre el universo de discurso U.

La *Figura 9* muestra un ejemplo donde la variable lingüística es *"Error",* el conjunto de etiquetas es *("Pequeño","Mediano","Grande","Muy grande"*), el universo de discurso es el rango 0.01-0.06 y el significado de las etiquetas lingüísticas viene definido por las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos mostrados en la figura.

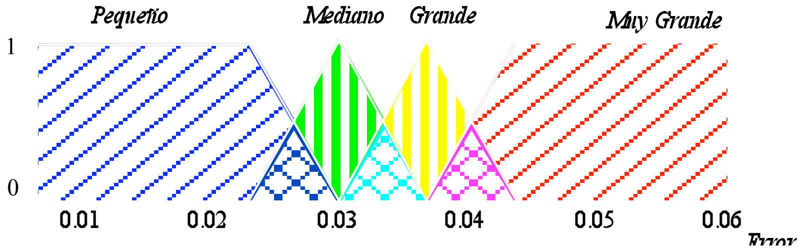

Figura 9. Definición de la variable lingüística "Error"

2.3. Reglas difusas

Una *regla difusa* o *regla IF-THEN* es una sentencia condicional del tipo:

$$IF \ \langle proposición \ \ difusa \rangle \ THEN \ \langle proposición \ difusa \rangle$$ **Ecuación 8**

donde la proposición situada a la izquierda del THEN se denomina *antecedente* de la regla y la situada a la derecha se denomina *consecuente* de la regla.

Una *proposición difusa atómica* es una frase simple que asocia una etiqueta lingüística a una variable lingüística. Por ejemplo, "x *es* A". El significado de esta proposición difusa atómica viene definido por la función de pertenencia que representa al conjunto difuso A. Una proposición difusa compuesta está formada por la combinación de proposiciones difusas atómicas mediante conectivos lingüísticos conjuntivos (tipo "y"), disyuntivos (tipo "o") o negaciones (tipo "no"). Para calcular la función de pertenencia que caracteriza a una proposición compuesta como por ejemplo "*(* x *es* A o " y *es* B*)* y z *es no* C", es necesario definir previamente la interpretación de estos conectivos lingüísticos. Dicha interpretación corresponde a las operaciones de intersección, unión y complemento difusos que se detallan a continuación:

· **Unión**: La unión entre dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso cuya función de pertenencia para un elemento concreto del universo de discurso es la mayor de las funciones de pertenencia de A y B.

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max[\mu_A(u), \mu_B(u)] \ \ \forall \, u \in U$$ **Ecuación 9**

· **Intersección**: La intersección entre dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso cuya función de pertenencia para un elemento concreto del universo de discurso es la menor de las funciones de pertenencia de A y B.

$$\mu_{A\cap B}(u) = \min[\mu_A(u), \mu_B(u)] \;\; \forall\, u \in U$$ **Ecuación 10**

· **Complemento**: El complemento de un conjunto difuso A es otro conjunto difuso $\overline{A}$ cuya función de pertenencia viene dada por:

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), \forall\, u \in U$$ **Ecuación 11**

Estas definiciones pueden generalizarse sustituyendo el mínimo por cualquier T-norma, por ejemplo el producto, y el máximo por cualquier S-norma, por ejemplo la suma.

El operador de implicación o *función de implicación* determina la relación que existe entre el antecedente y el consecuente de la regla difusa "*si* x *es* A *entonces* y *es* B" mediante un conjunto difuso.

$$\mu_{A\to B}(x, y) = \phi[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$ **Ecuación 12**

En la literatura se han propuesto numerosas funciones de implicación difusas, la mayoría de ellas surgen como extensión de las implicaciones utilizadas en la lógica proposicional o en la lógica multivaluada y de la elección de diferentes opciones para realizar las operaciones de intersección, unión y complemento de conjuntos [1,2]. La existencia de diferentes funciones de implicación concuerda con las diferentes interpretaciones que los seres humanos podemos dar a una misma sentencia.

2.4. Técnicas de razonamiento aproximado

Las técnicas de razonamiento permiten obtener deducciones lógicas, es decir, inferir conclusiones a partir de premisas. Las proposiciones de la lógica clásica sólo admiten dos valores de verdad {'0' y '1'}. Sin embargo en la lógica difusa el valor de verdad de una proposición puede ser cualquier número en el intervalo $[0,1]$. Esta generalización es la base de las técnicas de razonamiento aproximado que permiten deducir conclusiones acertadas a partir de premisas vagas e imprecisas.

Las dos reglas de inferencia más importantes de la lógica de proposiciones tradicional son las denominadas modus ponens y modus tollens. El modus ponens establece que dada la regla "*si* x *es* A *entonces* y *es* B" y la observación "x *es* A" es posible obtener la conclusión "y *es* B" .El modus ponens se emplea para obtener conclusiones realizando lo que se denomina una inferencia hacia delante (*forward inference*). Es el más empleado para aplicaciones de control en las que existe una relación de causa-efecto entre x *e* y.

La segunda regla de inferencia, modus tollens, establece que dada la regla "*si* x *es* A *entonces* y *es* B" y la observación "y *es no* B", es posible obtener la conclusión "x *es no* A". En este caso las conclusiones se obtienen realizando una inferencia hacia atrás (*backward inference*). La *Tabla 1* resume el funcionamiento de ambas reglas de inferencia.

	Modus ponens	**Modus tollens**
Regla	*si* x *es* $A \Rightarrow y$ *es* B	*si* x *es* $A \Rightarrow y$ *es* B
Premisa	x *es* A	y *es no* B
Conclusión	y *es* B	x *es no* A

Tabla 1 . Reglas de inferencia de la lógica de proposiciones tradicional

La extensión de estas reglas de inferencia al caso difuso queda reflejada en la *Tabla 2*, donde A, B, A', B' son términos lingüísticos representados por conjuntos difusos. En el caso del modus ponens, B' se aproximará más a B cuanto más se aproxime A' a A. Para el modus tollens A' será más diferente de A cuanto más diferente sea B' de B.

	Modus ponens	**Modus tollens**
Regla	*si* x *es* $A \Rightarrow y$ *es* B	*si* x *es* $A \Rightarrow y$ *es* B
Premisa	x *es* A'	y *es no* B'
Conclusión	y *es* B'	x *es no* A'

Tabla 2 . Reglas de inferencia de la lógica difusa

Para evaluar numéricamente B' en función del grado de similitud entre A y A' se utiliza la *regla composicional de inferencia* propuesta por *Zadeh* que establece que, dadas una regla y una observación (A'), la conclusión (B') puede obtenerse como la composición sup-star ($\circ$) entre la observación y la relación difusa inducida por la regla.

$$B' = A' \circ \phi(A,B) \qquad \textbf{Ecuación 13}$$

Aplicando la composición *sup-star* obtenemos que la función de pertenencia de la relación fuzzy resultante viene dada por:

$$\mu_{B'}(y) = \underset{X}{\vee}\left\{\mu_{A'}(x) * \mu_{A \to B}(x,y)\right\} \qquad \textbf{Ecuación 14}$$

donde $\vee$ representa el operador supremo, extendido a todos los elementos del universo de discurso X, y $*$ es una T-norma. Sustituyendo en *14* la función de pertenencia de la relación difusa correspondiente a la función de implicación definida en la *Ecuación 12* se obtiene:

$$\mu_{B'}(y) = \underset{X}{\vee}\left\{\mu_{A'}(x) * \left[\phi\left[\mu_A(x),\mu_B(y)\right]\right]\right\} \qquad \textbf{Ecuación 15}$$

Por lo tanto, el resultado de la inferencia depende de las elecciones del operador $*$ y la función de implicación ϕ. Respecto a la *T-norma*, las elecciones más habituales son el mínimo (composición *sup-min*) [27] y el producto (composición *sup-prod*) [28].

2.5. Mecanismos de inferencia

A) Mecanismo de inferencia Min-Max o de Mamdani

Consideremos un sistema de inferencia difuso que está constituido por una base de reglas donde existen múltiples entradas y una única salida (lo que se conoce como sistema *MISO* multiple input, single output). Los antecedentes de las reglas pueden contener cualquier combinación de las variables de entrada por medio de los conectivos "*and*", "*or*" y "*no*". El mecanismo de inferencia de *Mamdani* surge al considerar el mínimo como operador de implicación y el máximo como operador de agregación de las conclusiones parciales de cada regla. La salida del sistema viene dada por:

$$\mu_{B'}(y) = \max_r(\min(h^r, \mu_B{}^r(y))) \qquad \textbf{Ecuación 16}$$

donde h^r es el grado de activación de la regla r-ésima.

Si las entradas son del tipo singleton $x = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ y todos los conectivos en la parte antecedente son conjuntivos, el grado de activación de la expresión *16* vendrá dado por:

$$h^r = \min\left(\mu_{A_1}{}^r(x_{o1}), \mu_{A_2}{}^r(x_{o2}), \ldots\ldots, \mu_{A_n}{}^r(x_{on})\right) \qquad \textbf{Ecuación 17}$$

si todos los conectivos en la parte antecedente son conjuntivos.

La *Figura 10* muestra gráficamente la forma de aplicar este mecanismo de inferencia a una base de reglas con dos entradas y una salida.

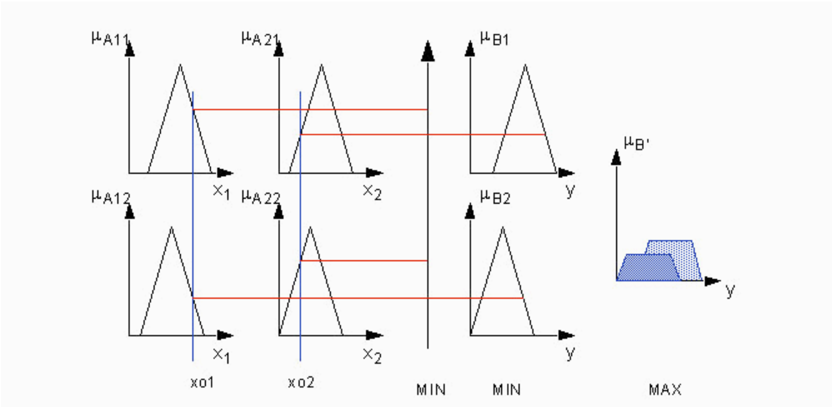

Figura 10. Mecanismo de inferencia *Min-Max* o de *Mamdani*

B. Mecanismo de inferencia *Prod-Sum*

El mecanismo *Prod-Sum* considera el producto como operador de implicación. El operador suma es utilizado como operador de agregación de las conclusiones parciales de cada regla. La función de pertenencia de la conclusión inferida tras la aplicación de la base de reglas viene dada por:

$$\mu_{B'}(y) = \sum_r h^r \cdot \mu_B^r(y) \qquad \textbf{Ecuación 18}$$

2.6. Métodos de *defuzzificación*

El resultado del proceso de inferencia es un conjunto difuso. Para que esta información pueda utilizarse en determinadas aplicaciones, como las de control, es preciso obtener un valor concreto representativo de dicho conjunto. El proceso de *defuzzificación* transforma la función de pertenencia representativa de un conjunto difuso $m(y)$ en un elemento concreto del universo de discurso Y. Existen muchos métodos de defuzzificación descritos en la literatura cuyas realizaciones pueden resultar más o menos complejas [29].

Los métodos considerados tradicionales se caracterizan por tener que recorrer todo el universo de discurso de la salida para obtener el valor concreto que la represente. Uno de los más utilizados en los sistemas de tipo Mamdani es el denominado *Centro de gravedad o Centro de área (CoA)*, que determina el valor representativo de un conjunto difuso como el centro del área limitada por el conjunto difuso resultante de aplicar las diferentes reglas. En aplicaciones prácticas se utiliza la versión discreta que viene dada por:

$$CoA \rightarrow \quad \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu_B(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_B(y_i)} \qquad \textbf{Ecuación 19}$$

donde n es el número de niveles de discretización de la salida (número de elementos de su universo de discurso).

El cálculo del centro de área necesita recorrer el universo de discurso de la variable de salida, lo que condiciona su eficiencia computacional. La realización eficiente de controladores difusos requiere la utilización de mecanismos de inferencia y defuzzificación que proporcionen ciclos de inferencia rápidos. Para ello resulta imprescindible renunciar a la manipulación de información difusa en los consecuentes de las reglas y sustituir dicha información por un conjunto de parámetros que la representen [29]. Surgen de esta manera una serie de *métodos de defuzzificación simplificados* que se diferencian entre sí en el número y significado de los parámetros que utilizan.

Uno de los métodos simplificados más empleados es la *Media Difusa (Fuzzy Mean, FM) o Método de la Altura (HM)*, que consiste en elegir como conclusión parcial de cada regla el punto de máxima pertenencia. La salida se obtiene como la suma de las conclusiones parciales de las diferentes reglas ponderada por los grados de activación:

$$FM/HM \rightarrow \quad \hat{y} = \frac{\sum_r h^r c^r}{\sum_r h^r} \qquad \textbf{Ecuación 20}$$

Otros métodos simplificados incorporan un segundo parámetro (w) para considerar el área o el soporte de los conjuntos difusos de salida. Entre éstos se encuentran los métodos de la *Media Difusa Ponderada* (*Weighted Fuzzy Mean*, *WFM*), el de *Yage*r (*YM*) y el del *Centro de Sumas con Mínimo* (*CoSm*) [29]. En estos casos el valor de salida puede calcularse con la expresión:

$$WFM/YM/CoSm \rightarrow \quad \hat{y} = \frac{\sum_r h^r c^r w^r}{\sum_r h^r w^r} \qquad \textbf{Ecuación 21}$$

2.7. Sistemas difusos *Takagi-Sugeno*

Los sistemas de inferencia que hemos analizado emplean consecuentes descritos mediante conjuntos difusos. A este tipo de sistemas difusos se les denomina habitualmente "sistemas tipo *Mamdani*". En la literatura se han propuesto otros tipos de sistemas difusos, entre los que cabe destacar los sistemas tipo *Takagi-Sugeno* [30]. Los sistemas de inferencia de este tipo se caracterizan por utilizar como consecuentes funciones de las variables de entrada del tipo:

$$F_B^r(x_1, x_2, \ldots, x_u) = \sum_k a_k^r x_k + a_o^r \qquad \textbf{Ecuación 22}$$

donde a_k^r ($k = 1,...,u$) son constantes y x_k ($k = 1,...,u$) son las variables de entrada del sistema.

Las conclusiones proporcionadas por las diferentes reglas coinciden con los valores que toman dichas funciones para un determinado valor de las entradas. Como peso de cada regla también usan el parámetro h_r:

$$y_o = \frac{\sum_r h_r F_B^r(x)}{\sum_r h_r} \qquad \textbf{Ecuación 23}$$

Como caso particular, un sistema de *Takagi-Sugeno* de orden cero es aquel que está caracterizado por la función:

$$F_B^r(x) = a_o^r \qquad \textbf{Ecuación 24}$$

Puede comprobarse que la salida de un sistema de *Takagi-Sugeno* de orden cero coincide con la de un sistema de tipo *Mamdani* donde los consecuentes vengan representados por valores singleton, por lo que también son conocidos como sistemas *fuzzy singleton*. Los sistemas de *Takagi-Sugeno* de orden cero son muy utilizados en aplicaciones prácticas de control debido a la simplicidad de implementación tanto *software* como *hardware*.

2.8. Sistemas difusos y funciones *PWA*

Una base de reglas básica *fuzzy* es un conjunto de reglas *IF-THEN* donde los antecedentes contienen una evaluación *fuzzy* de las variables de entrada. Los conjuntos *fuzzy* se representan como funciones de pertenencia solapadas que definen una partición del dominio de las entradas.

Los conjuntos son *fuzzy* porque sus funciones de pertenencia se solapan entre ellas y toman valores entre 0 y 1 (de pertencia nula a total). Por lo tanto, dado un dato de entrada, un subconjunto de las reglas con un grado de activación mayor que cero, es responsable del valor de la salida. Dependiendo del antecente, de la función de pertenencia consecuente y del operador *fuzzy* empleado, una base de reglas básicas puede ser interpretado como un sistema lineal a trozos (*PWA*). Esta interpretación es una buena solución de compromiso entre la versatilidad de la base de reglas (ofrece la capacidad de aproximación universal) y la eficiencia de su implementación *hardware*.

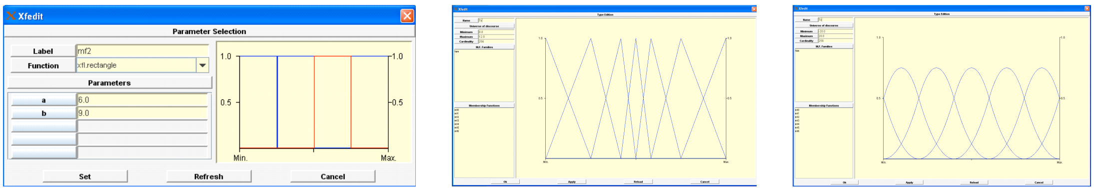

Figura 11. Familia B-Spline de orden cero (a), uno (b) y dos (c)

Se considera una familia *B-Spline* de orden cero, uno, y dos para representar las funciones de pertenencia de las entradas. La *Figura 11* muestra como estas funciones están normalizadas, es decir, la suma de los grados de pertenencia de cualquier entrada siempre es la unidad. Se considera que la parte antecedente solo envuelve conjunciones que son representadas por dos operadores: la extensión del operador meet [31] [32] y el producto.

$$meet(x) = \frac{\min(\mu_1, \mu_2) + \max(\mu_1 + \mu_2 - 1, 0)}{2} \qquad \textbf{Ecuación 25}$$

En la *Tabla 3* y *la Tabla 4* se muestra un resumen de las equivalencias entre los aproximadores polinómicos a trozos y las bases de reglas que emplean para el método de interferencia *Takagi-Sugeno* de orden cero (los consecuentes son *Singleton* o valores no difusos) y el método de interferencia de orden uno (los consecuentes son funciones lineales de las entradas) respectivamente. Las B-*splines* de orden cero no son soluciones difusas porque no hay solapamiento, y las B-*splines* de orden dos tienen un_significado lingüístico bajo ya que la pertenencia total no es posible. Por lo tanto, *B-splines* de orden uno son las más adecuadas para los modelos lingüísticos. Usándolas se pueden generar sistemas lineales, multilineales, cuadráticos y multicuadráticos a trozos [32] y [33]. Las bases de reglas básicas consideradas aquí (las señaladas en negrita en la *Tabla 3* y en la *Tabla 4*) usan el producto como conector del antecedente.

Conector del antecedente	**Orden de la familia de *B-Spline* en los antecedentes**		
	0	1	2
Extensión de meet	Constante a trozos	*PWA*	Cuadrática a trozos
Producto	Constante	**Multilinear**	Multicuadrática

Tabla 3. Base de regla *Takagi-Sugeno* de orden cero

Conector del antecedente	Orden de las familias *B-Spline* en los antecedentes	
	0	1
Extensión de meet	*PWA*	Cuadrática a trozos
Producto	*PWA*	**Milticuadrática a trozos**

Tabla 4. Base de regla *Takagi-Sugeno* de orden uno

Se considera un sistema difuso con una entrada, con funciones de pertenencia triangulares (*B-Spline* de orden uno) solapadas al 50% y una defuzzificación *Fuzzy Mean* implementa una función *PWA* en la que:

- los límites de los politopos marcan los límites entre las funciones triangulares.
- El valor de la función *PWA* de cada politopo viene determinada por dos *Singletons* o consecuentes de las dos reglas solapadas para ese politopo.

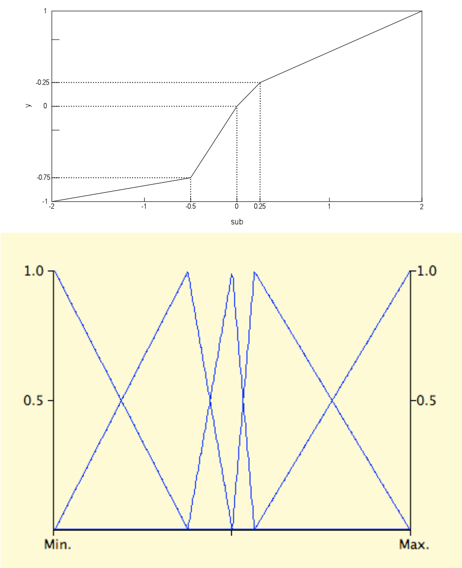

Figura 12. Relación entre una función de pertenencia y la función que implementa

2.9. Conclusiones

De entre la variedad de sistemas difusos que se pueden definir (según los operadores empleados) elegiremos en este Proyecto Fin de Carrera sistemas con funciones de pertenencia triangulares solapados al 50% (*B_splines* de orden 1) y *el Fuzzy Mean* como método de defuzzificación (equivalente a sistemas de inferencia *Takagi-Suqeno* de orden cero). En particular, emplearemos sistemas de este tipo con una entrada y una salida, que implementan funciones *PWA*. Para describir y analizar este tipo de sistemas emplearemos las herramientas de *CAD* que nos proporciona el entorno *Xfuzzy*, un entorno para el diseño de sistemas *neuro-fuzzy* desarrolado en el *IMSE* y en la *Universidad de Sevilla* [34].