

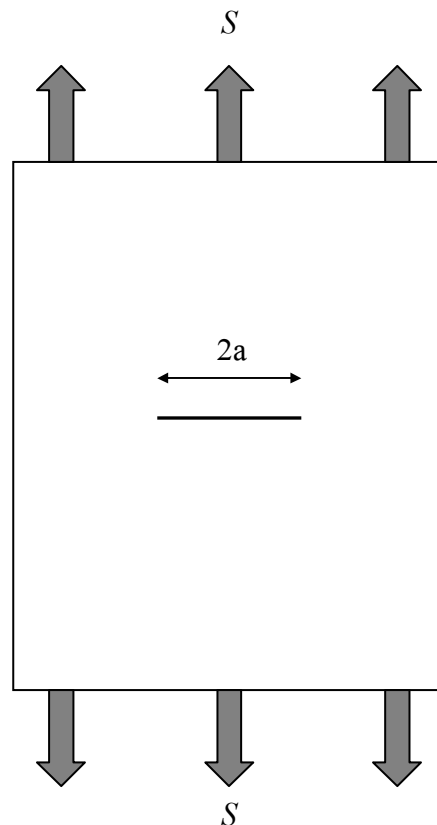
## CAPÍTULO 3

### THE STRIP YIELD MODEL

Existen numerosos modelos analíticos o métodos de predicción que intentan tener en cuenta los efectos de interacción debidos a la variabilidad de las cargas. Entre los que se basan en el concepto de cierre de grieta para determinar el retardo producido por una sobrecarga, destaca el modelo que se describe a continuación, desarrollado por Newman (1981) e implementado en el programa **FASTRAN II**.

#### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

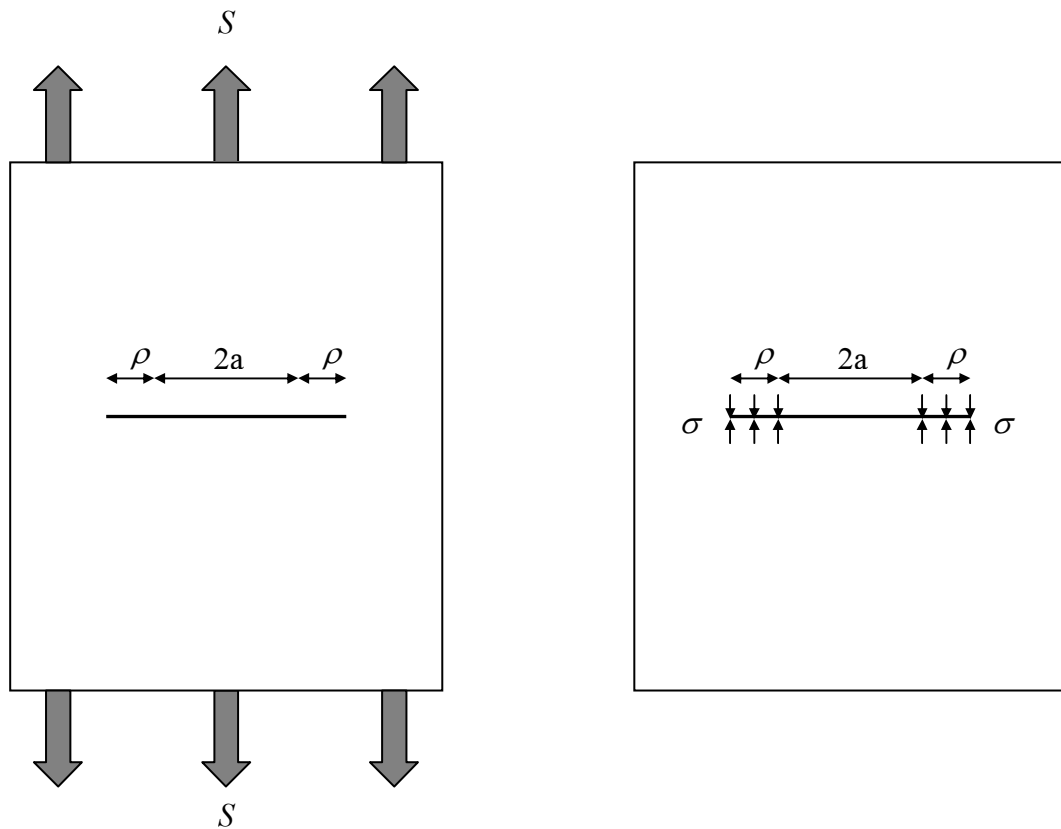
El modelo se desarrollará para una grieta de longitud  $2a$  situada en el centro de una probeta de espesor finito sometida a una tensión uniforme.



**Figura 3.1:** *Modelo de grieta de Dugdale.*

El modelo de cierre se basa en el modelo de grieta de Dugdale modificado para tener en cuenta las deformaciones plásticas residuales a lo largo del borde de la grieta. La primera ventaja de este modelo es que el tamaño de la zona plástica y los desplazamientos de la superficie de la grieta son obtenidos por superposición de dos problemas elásticos:

- Una grieta central sometida a la tensión nominal remota ( $S$ ).
- Una tensión uniforme ( $\sigma$ ) aplicada sobre la zona plástica ( $\rho$ ) que actuaría para mantener la grieta cerrada.



**Figura 3.2:** Problemas elásticos resueltos en el modelo.

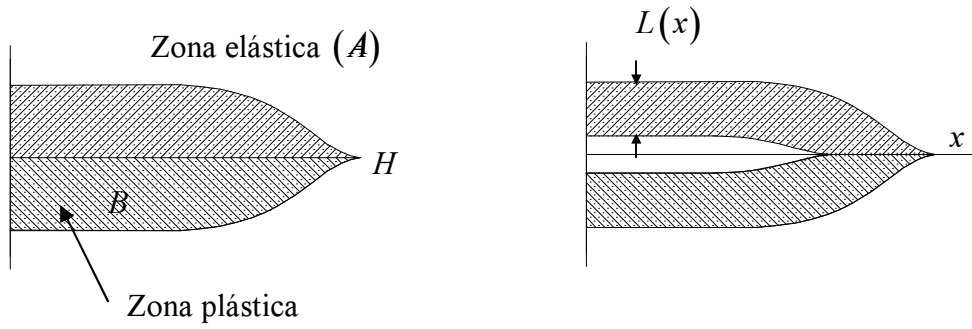
El tamaño de la zona plástica propuesto por Newman es:

$$\rho = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_{\max}}{\alpha \sigma_0} \right) \quad (7)$$

donde

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ys} + \sigma_u}{2} \quad (8)$$

media aritmética entre el límite elástico y la tensión de rotura.



**Figura 3.3:** Zonas elástica y plástica consideradas en el modelo.

El modelo está compuesto por dos regiones:

- Zona elástica (A) fuera de la grieta de Dugdale.
- Zona de comportamiento rígido plástico (B).

La tensión de apertura de la grieta puede definirse como la mínima tensión nominal para la cual la grieta se encuentra totalmente abierta (sin contacto entre sus superficies), se denota por  $S_{op}$ , y se calcula a partir de las tensiones de contacto al aplicar  $S_{min}$ . Para que no exista contacto, el factor de intensidad de tensiones producido al aplicar el incremento de tensión  $(S_{op} - S_{min})$  debe ser igual al factor de intensidad de tensiones debido a las tensiones de contacto producidas con  $S_{min}$ , despejando  $S_{op}$  se obtiene la ecuación siguiente:

$$S_{op} = S_{min} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2\sigma_j}{\pi} [\text{sen}^{-1} B_2 - \text{sen}^{-1} B_1] \quad (9)$$

donde

$$B_k = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi b_k}{W}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi c_0}{W}\right)} \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (10)$$

y  $c_0$  es la longitud inicial de la grieta. Si todas las tensiones de contacto son iguales a cero al aplicar  $S_{min}$  la grieta está totalmente abierta y no es necesario aplicar la ecuación anterior ya que  $S_{op} = S_{min}$ .

### 3.2. ALGORITMO DE RESOLUCIÓN

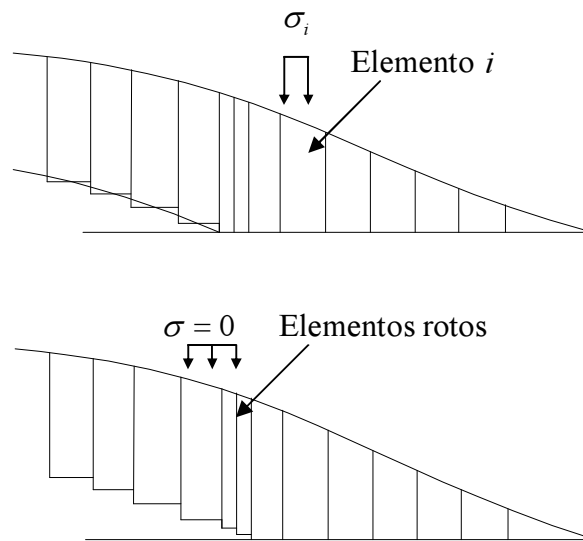
Para resolver la ecuación y obtener  $S_{op}$  es necesario conocer las tensiones de contacto para  $S_{min}$ . El proceso completo para cada incremento de longitud de la grieta es el siguiente:

1. Aplicación de la carga y determinación del tamaño de la zona plástica ( $\rho$ ). Para ello se establece la condición de no singularidad en el punto H, ver *figura 3.3*, al superponer los dos estados representados. Esta condición establece que el factor de intensidad de tensiones en la punta de la zona plástica sea cero.

$$(K)_s + (K)_{\sigma_0} = 0 \quad (11)$$

$$\rho = c \left\{ \frac{W}{\pi c} \operatorname{sen}^{-1} \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\pi c}{W} \right) \sec \left( \frac{\pi S_{max}}{2\alpha\sigma_0} \right) \right] - 1 \right\} \quad (12)$$

2. Discretización de la zona B en elementos, siendo suficientemente pequeños aquellos más próximos al borde de la grieta.



**Figura 3.4:** Discretización de la zona plástica (B).

3. Cálculo de los desplazamientos de la superficie de la grieta de Dugdale para las cargas representadas en la *figura 3.2*. El segundo estado de cargas se resuelve por superposición de  $n$  casos, correspondientes a una tensión  $\sigma_j$  en cada uno de los elementos en que se ha discretizado la zona plástica.

El desplazamiento de la superficie de la grieta de Dugdale, igual al desplazamiento del elemento  $i$  ( $L_i$ ), será la suma del desplazamiento producido por la tensión nominal  $S$  y el debido a las tensiones a que están sometidos todos los elementos incluido el  $i$ .

$$L_i = S \cdot f(x_i) - \sum_{j=1}^n \sigma_j g(x_i, x_j) \quad i = 1..n \quad (13)$$

En este caso, la tensión de los elementos situados en la superficie es nula y en la zona plástica tomará los valores  $\sigma_j = \alpha \sigma_0$ , quedando la expresión:

$$L_i = S \cdot f(x_i) - \sum_{j=1}^{10} \alpha \sigma_0 g(x_i, x_j) \quad (14)$$

4. Rotura del número necesario de elementos para simular el crecimiento de grieta deseado. Esto se consigue haciendo nula la tensión en dichos elementos.
5. Con la nueva longitud de grieta se determina el tamaño de la zona plástica. Si este tamaño es menor que el producido en algún ciclo de carga anterior se mantendrá la longitud previa.
6. Nueva discretización de la zona plástica con el mismo número de elementos que previamente a la rotura. Los nuevos valores de  $L$  se tomarán por interpolación entre los de la discretización anterior.

7. Cálculo de los nuevos valores de  $L$  para cada elemento, con la carga máxima aplicada. Esto se consigue resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido de la compatibilidad de movimientos.

$$S \cdot f(x_i) - L_i = \sum_{j=i}^n \sigma_j \cdot g(x_i, x_j) \quad (14)$$

donde  $S \cdot f(x_i)$  es el desplazamiento producido por la tensión nominal  $S$  en el punto  $x_i$ , y  $L_i$  es la longitud del elemento  $i$ . El segundo miembro representa la suma de los desplazamientos producidos en el punto  $i$  por las tensiones  $\sigma_j$  a que están sometidos todos los elementos, incluido el  $i$ .

Tanto para los elementos de la zona plástica como para los de la superficie de la grieta el sistema de ecuaciones anterior está sometido a una serie de restricciones.

- En la zona plástica:

$$\sigma_j = -\sigma_0 \quad \text{para} \quad \sigma_j < -\sigma_0 \quad (15)$$

$$\sigma_j = \sigma_0 \quad \text{para} \quad \sigma_j > \sigma_0 \quad (16)$$

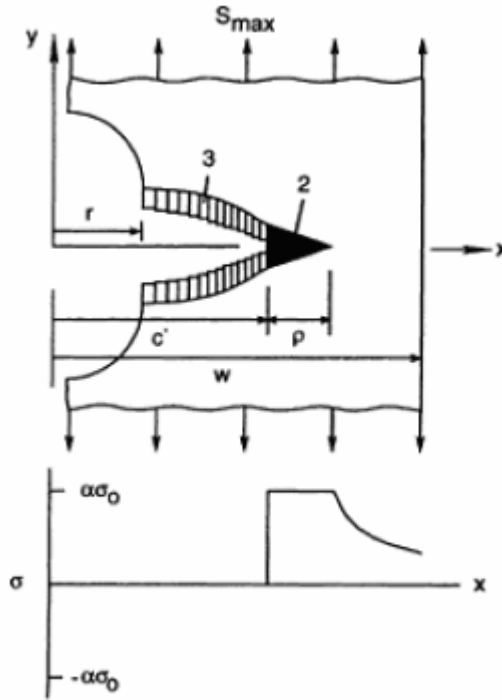
- En la superficie de la grieta:

$$\sigma_j = -\sigma_0 \quad \text{para} \quad \sigma_j < -\sigma_0 \quad (17)$$

$$\sigma_j = 0 \quad \text{para} \quad \sigma_j > 0 \quad (18)$$

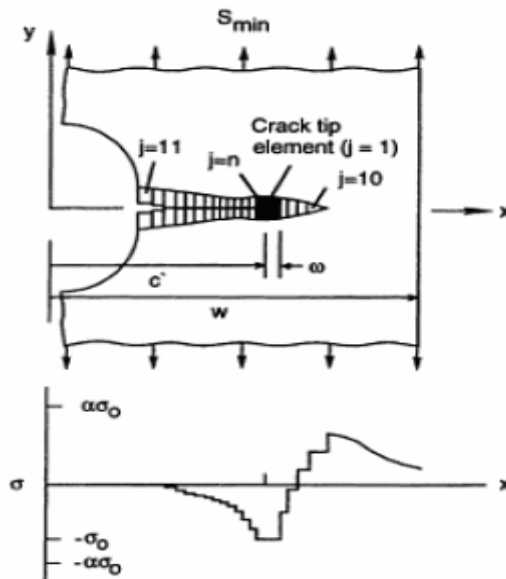
En los elementos en los que se produzca alguna de las restricciones indicadas, el valor de la tensión será conocido y la incógnita pasará a ser  $L_i$ . Si las restricciones

anteriores no se producen, la incógnita será  $\sigma_j$ , permaneciendo  $L_i$  con su valor previo.



**Figura 3.5:** Representación de la grieta al aplicar  $S_{\max}$ .

8. Aplicación de la carga mínima y nueva solución del sistema de ecuaciones anterior. Se calcularán los desplazamientos plásticos residuales  $L_i$  y las tensiones de contacto  $\sigma_j$ .



**Figura 3.6:** Representación de la grieta al aplicar  $S_{\min}$ .

9. A partir de las tensiones de contacto obtenidas al aplicar  $S_{\min}$  se obtiene la tensión de apertura  $S_{op}$ .

Ahora se está en condiciones de calcular el crecimiento en un nuevo ciclo, tras lo cual se reiniciará el proceso desde el punto 3.

Éste es el algoritmo fundamental sobre el que se ha construido la estructura del código del programa **FASTRAN II**. No obstante, como se verá en el capítulo siguiente, alrededor de él existen muchos otros aspectos que lo complementan y hacen del programa una herramienta versátil para la simulación del crecimiento de grietas.